Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

О. В. Клюбина

О РАССЕЯНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ТЕЛАХ РАЗНОГО ТИПА

Введение

В ряде случаев решение задачи рассеяния плоской волны на том или ином типе рассеивателя удобно получать, находя сначала решение задачи о точечном источнике колебаний с последующим переходом к пределу, когда источник удаляется на бесконечность вдоль некоторого фиксированного направления. Такого рода построения проводились в ряде работ по квантововй механике. Они применимы и к задачам рассеяния волн в случае, когда рассеивающее тело ограничено. Однако, нам не удалось найти изложения этих рассмотрений "на уровне теорем".

Если для случая ограниченного рассеивателя это обоснование удается провести сравнительно просто, то в случае конуса (даже обычного кругового) требуются достаточно сложные построения.

В последние годы задачам дифракции на конусе было посвящено много работ, поэтому рассматриваемая задача представляется достаточно своевременной.

1. Ограниченное тело

1.1. Постановка задачи.

Рассмотрим ограниченное тело (область) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тогда постановка задач о точечном источнике и плоской волне имеет следующий вид.

Задача о плоской волне. Требуется найти функцию $\widetilde{u}$ – результат рассеяния плоской волны на ограниченном теле Ω, удовле-

Работа поддержана грантами РФФИ 98-01-00197 и 96-15-96-121.

творяющую системе уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{u}(x) = e^{ik(\omega_0,x)} + u(x) \\ (\Delta + k^2)\widetilde{u} = 0 \\ B\widetilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{условия излучения :} \\ \text{при } \ r \to \infty \\ \frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{r}\right) \\ u = O\left(\frac{1}{r}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $k > 0$, ω_0 – фиксированный вектор, $|\omega_0| = 1$, $x \in \mathbb{R}^3$, $r = |x|$, B – граничный оператор: $Bu\big|_{\partial\Omega} = u\big|_{\partial\Omega}$ в случае граничного условия Дирихле, $Bu\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega}$ в случае условия Неймана; функция $\widetilde{u}$ непрерывна вне Ω, вплоть до $\bar{\Omega}$ в случае граничного условия Дирихле, в случае условия Неймана $\widetilde{u}$ имеет правильную нормальную производную.

Задача о точечном источнике. Требуется найти функцию $\widetilde{u}$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{u} = u + \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ (\Delta + k^2)\widetilde{u} = -\delta(x - y) \\ B\widetilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{условия излучения :} \\ \text{при } \ r \to \infty \\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = ik\widetilde{u} + o\left(\frac{1}{r}\right) \\ \widetilde{u} = O\left(\frac{1}{r}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}^3$, $r = |x|$, B – граничный оператор, аналогичный описанному выше; функция $\widetilde{u}$ непрерывна вне Ω, вплоть до $\bar{\Omega}$ в случае граничного условия Дирихле, в случае условия Неймана $\widetilde{u}$ имеет правильную нормальную произвольную.

1.2. Предельный переход.

Формально решение задачи о плоской волне (1) можно получить из решения задачи (2) о точечном источнике с помощью удаления источника на бесконечность вдоль фиксированного направления.

Теоремы существования и единственности решения задачи о точечном источнике (2) известны. Идеи, использующиеся в доказательстве существования решения, предложенном немецким математиком Вернером (см., например, [3]), позволяют обосновать этот предельный переход. Вернер проводит доказательство методами теории потенциала. Рассеянная часть u волнового поля $\widetilde{u}$ ищется в виде суммы потенциалов

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \mu(N) \frac{\exp(ikr)}{r}\, ds + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \nu(N) \frac{\exp(ikr)}{r}\, d\Omega,$$

в случае граничного условия Неймана, и

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \mu(N) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(ikr)}{r}\, ds + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \nu(N) \frac{\exp(ikr)}{r}\, d\Omega,$$

в случае условия Дирихле. Это сводит исходную задачу к системе интегральных уравнений со слабо полярными ядрами относительно функций

$$\mu \in C(\partial\Omega) \ \text{ и } \ \nu \in C(\Omega),$$

которую можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однородная система уравнений, соответствующая написанной, имеет лишь тривиальное решение. Предельный переход при удалении источника на бесконечность удается обосновать без какихлибо принципиальных затруднений, поэтому мы не приводим здесь всех этих построений. Результат можно сформулировать следующим образом.

Утверждение. *Решение задачи о точечном источнике колебаний, умноженное на* $-ik\frac{\vec{R}}{R}\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial n}\frac{\exp(ikR)}{R}\exp(-ik\vec{\omega}_0\vec{\rho})$ *(R – расстояние от начала координат до источника колебаний, ρ – расстояние от начала координат до точки наблюдения) в случае граничного условия Неймана и на* $\frac{\exp(ikR)}{R}$ *в случае условия Дирихле, переходит, при удалении источника на бесконечность вдоль некоторого фиксированного направления, в решение задачи о плоской волне.*

2. Конус

2.1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу дифракции сферической волны на конусе $\Xi = N \times \mathbb{R}^+ (N \subset S^2)$:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = -\delta(x - x_0) \\ Bu\big|_{\partial\Xi} = 0 \\ \text{условия излучения :} \\ u = O(r^{-1}) \text{ при } r \to \infty \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) u = o(r^{-1}) \text{ при } r \to \infty \\ \text{условие Мейкснера :} \\ \int_{\Omega_r} (|u|^2 + |\nabla u|^2) < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Где $\Omega_r = \{(r_1, \omega) : \omega \in N; r_1 < r\}$, B – граничный оператор, $Bu = u\big|_{\partial\Xi}$ в случае граничного условия Дирихле: $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Xi}$ в случае условия Неймана.

Краевые условия понимаются в классическом смысла, то есть в случае условия Дирихле функция u непрерывна включая границу, в случае условия Неймана u имеет правильную нормальную производную. Кроме того, предполагается, что $u \in W_2^1(\Omega_r)$ (условие Мейкснера).

2.2. Формальное решение задачи.

Из первого уравнения системы (3) и граничных условий, с помощью перехода к сферическим координатам, формально решение может быть получено в виде (см. [1])

$$u(r, \omega, r_0, \omega_0) = -\frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{r r_0}} \sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr_<) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_>) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0). \tag{4}$$

Где $\varphi_j(\omega)$ – собственные функции оператора $(\widetilde{\Delta} + \nu_j^2 - \frac{1}{4})$ ($\widetilde{\Delta}$ – оператор Бельтрами–Лапласа на сфере):

$$\begin{cases} (\widetilde{\Delta} + \nu_j^2 - \frac{1}{4})\varphi_j = 0 \\ B\varphi_j\big|_{\partial N} = 0. \end{cases}$$

Дальнейшей целью является доказательство того, что ряд (4) действительно решает задачу (3) и обоснование предельного перехода при удалении источника на бесконечность. Случай конического рассеивателя существенно отличается от случая с ограниченным телом, простой способ доказательства в данном случае не проходит.

2.3. Переформулировка задачи.

Найденный формально ряд (4) сходится плохо в окрестности сферы $r = r_0$. Доказать его равномерную сходимость в этой области не удалось. Вне окрестности этой сферы сходимость ряда, как будет показано далее, хорошая и его сумма удовлетворяет и уравнению, и краевым условиям (3) в классическом смысле. Сходимость ряда (4), то, что его сумма удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)u = -\delta(x - x_0)$ и краевым условиям удалось доказать лишь в смысле обобщенных функций. Этого результата достаточно для наших целей, так как отсюда следует, что эта сумма является обычной функцией, гладкой всюду (кроме точки $x = x_0$), удовлетворяющей краевым условиям.

Переформулируем задачу в обобщенных функциях. Обозначим (см. Рис. 1)

$$\Omega_1 := \{r_1 \leqslant r \leqslant r_2\} \setminus \Xi$$

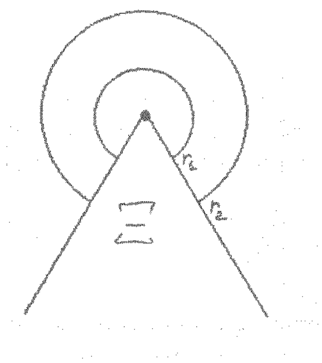

Рис. 1.

Класс основных функций определим следующим образом

$$\Psi := \{\psi(r, \omega) \mid \psi \in C^\infty(\bar{\Omega}_1);\ \psi(r, \omega) - \text{финитны по } r;$$
$$B\psi\big|_{\partial\Xi} = 0,\ \psi\big|_{\partial\Xi} = 0,\ \Delta^n\psi\big|_{\partial\Xi} = 0,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Теперь можно определить обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = -\delta(x - x_0) \\ Bu\big|_{\partial\Xi} = 0 \\ u = O(r^{-1}) \text{ при } r \to \infty \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) u = o(r^{-1}) \text{ при } r \to \infty \\ \int_{\Omega_r} (|u|^2 + |\nabla u|^2) < \infty, \end{cases} \tag{5}$$

где уравнения понимаются в обобщенном смысле.

Определение. *Обобщенную функцию u, действующую на классе основных функций Ψ, назовем решением поставленной задачи (5), если она удовлетворяет соотношению*

$$\langle u, (\Delta + k^2)\psi) \rangle = -\langle \delta(x - x_0), \psi \rangle.$$

2.4. Обоснование решения.

Покажем теперь, что найденная функция u (ряд (4)) действительно решает поставленную задачу (3). Доказательство этого факта достаточно сложное, но способов обойти эти трудности, к сожалению, не видно.

Сначала покажем сходимость найденного ряда в терминах обобщенных функций.

Теорема 1. *Пусть*

$$u_n = -\frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \sum_{j=1}^{n} J_{\nu_j}(kr_<) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_>) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0)$$

– частичная сумма ряда (4), тогда $\langle u_n, \psi \rangle$ имеет предел при $n \to \infty$ для любой основной функции $\psi \in \Psi$.

Доказательство.

$$\langle u_n, \psi \rangle = -\int_{r_1}^{r_2} \int_{\{\omega\}} \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \sum_{j=1}^{n} J_{\nu_j}(kr_<) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_>) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0) \psi dr\, d\omega.$$

Покажем, что

$$\left| \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} J_{\nu_j}(kr_<) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_>) \right| \leqslant C\nu_j^a$$

для некоторых a и C.

Воспользуемся известными соотношениями для функций Ханкеля:

$$H^{(1)}_{\nu_j}(kr_>) = J_{\nu_j}(kr_<) + iN_{\nu_j}(kr_>) =$$

$$= J_{\nu_j}(kr_>) + \frac{i}{\sin(\pi\nu_j)}(\cos(\pi\nu_j)J_{\nu_j}(kr_>) - J_{-\nu_j}(kr_>)) =$$

$$= J_{\nu_j}(kr_>) + i\left(\frac{\cos(\nu_j\pi)}{\sin(\nu_j\pi)}\,J_{\nu_j}(kr_>) - \sin(\nu_j\pi)J_{-\nu_j}(kr_>)\right).$$

Обозначим j_0 – ближайшее целое число к ν_j, то есть $|j_0-\nu_j| := |\theta| \leqslant 1/2$.

$$H^{(1)}_{\nu_j}(kr_>) = J_{\nu_j}(kr_>) + i\Bigg[\operatorname{ctg}(\nu_j\pi)J_{\nu_j}(kr_>) -$$

$$-\frac{1}{\sin(\pi\nu_j)}\sum_{j=0}^{j_0-1}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-\nu_j+1)}\left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2j-\nu_j} -$$

$$-\frac{1}{\sin(\pi\nu_j)}\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-\nu_j+1)}\left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2j-\nu_j}\Bigg] :=$$

$$= J_{\nu_j}(kr_>) + i\left[\frac{1}{\sin(\pi\nu_j)}S_1 - S_2 - \frac{1}{\sin(\pi\nu_j)}\,S_3\right],$$

где

$$S_1 := \cos(\nu_j\pi)J_{\nu_j}(kr_>),$$

$$S_2 := \frac{1}{\sin(\pi\nu_j)}\sum_{j=0}^{j_0-1}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-\nu_j+1)}\left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2j-\nu_j},$$

$$S_3 := \sum_{j_0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-\nu_j+1)}\left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2j-\nu_j}.$$

Так как $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$, то $\Gamma(j-\nu_j+1)\sin(\pi\nu_j) = (-1)^j\frac{\pi}{\Gamma(\nu_j-j)}$, то $S_2 = \sum_{j=0}^{j_0-1}\frac{\Gamma(\nu_j-j)}{\pi j!}\left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2j-\nu_j}$.

Оценим $(S_1 - S_3)$. Изучим эту разность как функцию от ν_j : $(S_1 - S_3) = (S_1 - S_3)(\nu)$. Переобозначив индексы суммирования, получим, что разность $(S_1 - S_3)(\nu)$ имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \left(\frac{\cos(\nu\pi)}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2s+\nu} - \right.$$

$$\left. \frac{\cos(j_0\pi)}{\Gamma(j_0+s+1)\Gamma(s+\theta+1)} \left(\frac{kr_>}{2}\right)^{2th+2s+\nu} \right).$$

Значит, если ν – целое число, $(S_1 - S_3)(\nu) = 0$. Таким образом, величину $\frac{(S_1-S_3)(\nu)}{\sin(\pi\nu)}$ можно оценить при помощи неравенства вида $\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \leqslant \max_{[a,b]} |f'(\xi)|$.

Используя формулу Стирлинга для Г-функции, получаем, что $\Gamma'(s+1) \leqslant \mathrm{const}\,\Gamma(s+1)\ln s$. Итак,

$$|(S_1 - S_3)'| \leqslant \mathrm{const} \;\text{ при } |\xi| \leqslant 1/2.$$

Кроме того, для функций Бесселя $J_{\nu_j}(kr_<)$ выполнено неравенство:

$$|J_{\nu_j}(kr_<)|\,\mathrm{const}\, \frac{1}{\Gamma(\nu_j+1)} \left(\frac{kr_<}{2}\right)^{\nu_j}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{rr_>}} J_{\nu_j}(kr_<) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_>) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \frac{1}{\sqrt{rr_>}} \left(\frac{kr_<}{2}\right)^{\nu_j} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu_j+1)} \left(\frac{kr_>}{2}\right)^{\nu_j} + \frac{\Gamma(\nu_j)}{\pi} \left(\frac{kr_>}{2}\right)^{-\nu_j} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \frac{\Gamma(\nu_j)}{\Gamma(\nu_j+1)} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\nu_j} = \mathrm{const}\,\nu_j \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\nu_j}.$$

Итак,

$$\left| \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} J_{\nu_j}(kr_<) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_>) \right| \leqslant C\nu_j \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\nu_j} \tag{7}$$

для некоторого C. Кроме того, так как функции $\varphi_j(\omega)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\widetilde{\Delta} + \nu_j^2 - \frac{1}{4}\right)\varphi_j(\omega) = 0,$$

то

$$\int\limits_{\{\omega\}} \varphi_j(\omega)\psi d\omega = -\frac{1}{\nu_j^2} \int\limits_{\{\omega\}} \varphi_j(\omega) \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{4}\right) \psi d\omega.$$

Такую операцию можно проделать сколь угодно много раз. Отсюда следует, что члены разложения сколь угодно быстро убывают по ν_j, что и влечет существование предела при $n \to \infty$. $\square$

Аналогично можно показать, что

$$\langle u_n, (\Delta + k^2)\psi\rangle \to -\langle \delta(x - x_0), \psi\rangle \text{ при } n \to \infty$$

для любой основной функции $\psi \in \Psi$.

Как уже отмечалось, граничные условия выполняются в классическом смысле, таким образом, для того, чтобы показать, что найденная функция действительно решает поставленную задачу, необходимо проверить выполнение условий излучения и условия Мейкснера.

Теорема 2. *Для найденной функции и выполнено условие Мейкснера, то есть*

$$\int\limits_{\Omega_r} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\,\Omega < \infty, \quad r \to 0.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\int\limits_{\Omega_r} |u|^2 d\,\Omega < \infty, \quad r \to 0$$

(аналогично можно показать, что $\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 < \infty, \quad r \to 0$)

$$\int\limits_{\Omega_r} |u|^2 d\,\Omega = \int\limits_{\Omega_r} \left| \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_0) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0) \right) \right|^2 d\,\Omega.$$

Уже было показано (см. (7)), что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{r_0}} J_{\nu_j}(kr) H_{\nu_j}^{(1)}(kr_0) \right| \leqslant \text{const}\, \nu_j \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_j}.$$

Воспользуемся этим неравенством:

$$\int\limits_{\omega_r} |u|^2 d\,\Omega = \int\limits_{\Omega_r} \left| \frac{\pi}{2i}\, \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0) \varphi_j(\omega)\varphi_j(\omega_0) \right) \right|^2 d\,\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int\limits_{\Omega_r} \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_j} j^4 d\,\Omega < \infty. \qquad \square$$

Теорема 3. *Построенная функция u удовлетворяет условиям излучения, то есть при* $r_0 \to \infty$ $|u| \leqslant \frac{C}{r_0}$ *и* $\left|\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right| \leqslant \frac{C_1}{r_0^2}$ *для некоторых констант* C *и* C_1.

Доказательство. Докажем первое неравенство, а именно, докажем, что при $r_0 \to \infty$ $|r_0 u| \leqslant C$. Функция u имеет вид

$$u(r,\omega,r_0,\omega_0) = -\frac{\pi}{2i}\, \frac{1}{\sqrt{r_0 r}} \sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr_<) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_>) \varphi_j(\omega)\varphi_j(\omega_0).$$

Воспользуемся известными асимптотическими выражениями для функций $H^{(1)}_{N\xi}(N)$, (см. [4]) которые имеют вид:

$$H^{(1)}_{N\xi}(N) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^2-1}}\, \exp(N[\xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1}) - \sqrt{\xi^2-1}]),$$
$$\text{при } \sqrt{\xi^2-1} > 0$$

$$H^{(1)}_{N\xi}(N) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp(-i\frac{\pi}{4}) \frac{1}{\sqrt[4]{1-\xi^2}} \exp(iN[-\xi\arccos(\xi) + \sqrt{1-\xi^2}])$$
$$\text{при } \sqrt{1-\xi^2} > 0$$

$$H^{(1)}_{N\xi}(N) \sim \frac{1}{N^{1/3}} \left(\frac{t(\xi)}{\xi^2-1}\right)^{1/4} w_1(N^{2/3}t(\xi)), \text{ при } -\epsilon \leqslant \xi \leqslant 1+\epsilon,$$

где $w_1(\xi)$ – функция Эйри,

$$\frac{2}{3}t^{3/2}(\xi) = \xi\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1}) - \sqrt{\xi^2-1}. \tag{8}$$

Обозначим

$$K_1 := \left\{ j : \sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1} > 0 \right\},$$

$$K_2 := \left\{ j : \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2} > 0 \right\},$$

$$K_3 := \left\{ j : 1 - \varepsilon \leqslant \frac{\nu_j}{kr_0} \leqslant 1 + \varepsilon \right\}.$$

Тогда при больших r_0

$$|r_0 u(r, \omega, r_0, \omega_0)| = \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{r}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) \left(\sqrt{r_0} H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0)\right) \varphi_j(\omega)\varphi_j(\omega_0) \right| :=$$

$$= \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sqrt{r}} |\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3|,$$

где $\Sigma_i = \sum_{K_i} J_{\nu_j}(kr) \left(\sqrt{r_0}\, H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0)\right) \varphi_j(\omega)\varphi_j(\omega_0)$.

Изучим отдельно каждую сумму Σ_i, используя асимптотические выражения для функций Ханкеля $H^{(1)}_{N\xi}(N)$ (8), оценку для функции Бесселя $J_i(N)$ (6) через первый член разложения в ряд и оценку для функций $\varphi_j(\omega) : |\varphi_j(\omega)| \leqslant \operatorname{const} j^2$.

$$|\Sigma_1| \leqslant c \left| \sum_{K_1} j^2 \left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j} \frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)} \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1}} \right.$$

$$\left. \times \exp\left(kr_0 \left[\frac{\nu_j}{kr_0} \ln\left(\frac{\nu_j}{kr_0} + \sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1} \right) - \sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1} \right] \right) \right|$$

так как

$$\ln\left(\frac{\nu_j}{kr_0} + \sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1} \right) \leqslant c_1 \ln 2\frac{\nu_j}{kr_0}, \qquad \sqrt[4]{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2 - 1} \leqslant c_2 \sqrt{\frac{\nu_j}{kr_0}},$$

то

$$|\Sigma_1| \leqslant c \left| \sum_{K_1} j^2 \left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j} \frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)}\, r_0 \sqrt{\frac{k}{\nu_j}}\, \exp\left(\nu_j \ln 2\frac{\nu_j}{kr_0} - \nu_j \right) \right|,$$

так как
$$\Gamma(1+\nu_j) \leqslant c_3\sqrt{2\pi\nu_j}\,\exp(\nu_j\ln\nu_j-\nu_j),$$
то
$$|\Sigma_1| \leqslant c\left|\sum_{K_1} j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\sqrt{\frac{k}{\nu_j}}\,r_0\frac{1}{\sqrt{\nu_j}}\exp\left(\nu_j\ln\frac{2}{kr_0}\right)\right| =$$
$$= c\left|\frac{1}{k}\sum_{K_1} j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\frac{kr_0}{\nu_j}\exp\left(\nu_j\ln\frac{2}{kr_0}\right)\right| \leqslant C_1,$$
$$|\Sigma_2| \leqslant c\left|\sum_{K_2} j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)}\ \exp\left(-\frac{i}{4}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2}}\right.$$
$$\left.\times\exp\left(ikr_0\left[\sqrt{1-\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2}+\frac{\nu_j}{kr_0}\arccos\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)\right]\right)\ \right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{K_2} j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2}}\right| \leqslant C_2.$$
$$|\Sigma_3| \leqslant c\left|\sum_{K_3} j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)}\sqrt{r_0}\frac{1}{(kr_0)^{1/3}}\right.$$
$$\left.\times\left(t\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)\Big/\left(\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2-1\right)\right)^{1/4} w_1\left((kr_0)^{2/3}t\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)\right)\right|.$$
$$t(\xi)=\sqrt[3]{2}(\xi-1)+O((\xi-1)^2)\quad(\text{при } \xi\to 1),$$
а
$$w_1(\xi)=\xi^{-1/4}\left(\exp\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\right)\left(1+O(\xi^{-3/2})\right)\quad(\text{при больших } \xi).$$
Значит, если $(kr_0)^{2/3}t\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)$ велико, то
$$w_1((kr_0)^{2/3}t\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)) \leqslant c(kr_0)^{5/12}t(\xi)^{-1/4}\exp(kr_0)^{2/3}t(\xi)^{3/2}) =$$

$$= c(kr_0)^{5/12} t(\xi)^{-1/4} \times$$

$$\times \exp\left(kr_0\left[\frac{\nu_j}{kr_0}\ln\left(\frac{\nu_j}{kr_0}+\sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2-1}-\sqrt{\left(\frac{\nu_j}{kr_0}\right)^2-1}\right)\right]\right).$$

В этом случае рассматриваемая сумма аналогична первой $-\Sigma_1$, значит, она ограничена.

Сумма остальных слагаемых оценивается выражением

$$c\left|\sum j^2\left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu_j}\frac{1}{\Gamma(1+\nu_j)}\sqrt{r_0}\frac{1}{(kr_0)^{1/3}}\left(\frac{1}{\frac{\nu_j}{kr_0}+1}\right)^{1/4}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \ \ (\text{так как } 1-\varepsilon \leqslant \frac{\nu_j}{kr_0} \leqslant 1+\varepsilon).$$

Таким образом $|\Sigma_3| \leqslant C_3$. Значит, $|u(r,\omega,r_0,\omega_0)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{r_0}$.

Второе условие излучения доказывается аналогично, так как асимптотические соотношения для функции $H^{(1)}_{N\xi}(N)$ допускают дифференцирование. □

2.5. Предельный переход.

Под решением задачи о плоской волне в работе [1] понимается

$$u(r,\omega,\omega_0) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)(2\pi)^{3/2}(kr)^{-1/2}\sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr)$$

$$\times \exp\left(-\frac{i\nu_j\pi}{2}\right)\varphi_j(\omega)\varphi_j(\omega_0).$$

Покажем, что при удалении источника на бесконечность, решение задачи о рассеянии сферической волны на конусе переходит в решение соответствующей задачи о плоской волне с точностью до множителя $\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}$.

Теорема 4.

$$u(r,\omega,\omega_0) = \lim_{r_0\to\infty}\left(\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}\right)^{-1} u(r,\omega,r_0,\omega_0).$$

Доказательство. Воспользуемся следующим предельным соотношением для функций Ханкеля $H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0)$ при $r_0 \to \infty$ и фиксированном ν_j:

$$H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}\exp i\left(kr_0 - \frac{\pi\nu_j}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{kr_0}\right)\right).$$

Функция $u(r, \omega, r_0, \omega_0)$ представлена в виде ряда, который, как уже было показано, при больших r_0 мажорируется сходящимся

$$|J_{\nu_j}(kr) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0)| \leqslant \mathrm{const}\, j^k \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_j}$$

для некоторого k, то есть

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0)\right| \leqslant \mathrm{const} \sum_{j=1}^{\infty} j^k \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu_j}.$$

Значит, равномерно сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) H^{(1)}_{\nu_j}(kr_0) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0).$$

Следовательно,

$$-\frac{2i}{\pi} \lim_{r_0 \to \infty} u(r, \omega, r_0, \omega_0) = \lim_{r_0 \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r r_0}} J_{\nu_j}(kr) \times \exp i \left(kr_0 - \frac{\pi \nu_j}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0).$$

Таким образом,

$$u(r, \omega, \omega_0) = \lim_{r_0 \to \infty} \left(\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}\right)^{-1} u(r, \omega, r_0, \omega_0). \qquad \square$$

Литература

1. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction of waves by cones at high frequencies.* Preprint Lomi E-9-89, Leningrad.
2. В. М. Бабич, О. В. Изотова, *О решении в обобщенных функциях задач математической физики.* Изд-во СПбГУ, 1988.
3. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний.* Москва, Мир, 1984.
4. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Москва, Наука, т. 4, ч. 2, 1974.

Klyubina O. V. On the diffraction of plane waves on different bodies.

A problem of diffraction of plane waves on compact domains and on a arbitrary cone is considered. It is shown that the method of the moving away of the point source to the infinity for the solution of such diffraction problems is valid.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 9 сентября 1999 г.