Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Л. А. Свиркина

РАССЕЯНИЕ ОТ МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В упругой среде рассмотрим дифракцию плоской волны от неоднородного включения, имеющего вид "провода" бесконечной длины и малого поперечного сечения. Наша задача – исследование рассеяния от поверхности этого упругого включения.

В настоящей работе предполагается, что это неоднородное включение имеет вид кругового цилиндра, радиус которого равен a. Таким образом, мы рассматриваем случай дифракции от цилиндрической поверхности раздела между двумя однородными упругими средами. Плоскость падения заданной волны перпендикулярна оси цилиндра. В этом случае общая задача переходит в частную плоскую задачу дифракции от малой неоднородности Ω в неограниченном однородном изотропном упругом пространстве. Малой неоднородностью Ω является круг радиуса a, $a \ll \lambda$, где λ – длина падающей волны.

Будем исходить из динамических уравнений теории упругости для однородной изотропной среды:

$$L\widehat{\mathbf{u}} = \rho \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \quad \widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \tag{0.1}$$

где

$$L\widehat{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\ div}\ \widehat{\mathbf{u}} - \mu\,\mathrm{rot\ rot}\,\widehat{\mathbf{u}}. \tag{0.2}$$

В формулах (0.1)–(0.2) вектор $\widehat{\mathbf{u}}$ есть вектор смещений упругой среды.

Рассмотрим случай гармонической зависимости от времени вектора смещений $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t}\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Уравнение (0.1) для вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ переходит в такое:

$$L\mathbf{u} = -\rho\omega^2\mathbf{u}. \tag{0.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 98-01-00316).

Обозначим параметры среды через λ_1, μ_1, ρ_1, параметры включения Ω через λ_2, μ_2, ρ_2, где λ_i, μ_i, $i = 1, 2$, называются параметрами Ламе, а ρ_i есть плотность сред.

Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$. Известно, что волну с произвольным направлением можно представить как суперпозицию *сдвиговой волны горизонтальной поляризации* (SH-волна по сейсмической терминологии), у которой $u = v = 0$, $w \neq 0$ и волны *вертикальной поляризации*, у которой $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w = 0$.

В общем случае смещение $\mathbf{u}$ может быть выражено через скалярный Φ и векторный $\mathbf{\Psi}$ потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \mathbf{\Psi}. \qquad (0.4)$$

Приведем необходимые формулы для дифференциальных операторов и метрического тензора в цилиндрической ортогональной криволинейной системе координат. Так для компонент метрического тензора имеем

$$\left.\begin{array}{lll} G_{11} = G_{rr} = 1, & G_{12} = G_{r\varphi} = 0, & G_{13} = G_{rz} = 0, \\ G_{22} = G_{\varphi\varphi} = r^2, & G_{21} = G_{\varphi r} = 0, & G_{23} = G_{\varphi z} = 0, \\ G_{33} = G_{zz} = 1, & G_{31} = G_{zr} = 0, & G_{32} = G_{z\varphi} = 0. \end{array}\right\} \qquad (0.5)$$

Дифференциальные операторы представлены формулами:

$$\operatorname{rot} \mathbf{\Psi} \equiv \nabla \times \mathbf{\Psi} =$$

$$\mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^z}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \Psi^\varphi}{\partial z} \right] + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial \Psi^r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi^z}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial (r \Psi^\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^r}{\partial \varphi} \right], \qquad (0.6)$$

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q^k} G^{kk} \mathbf{e}_k, \quad q^1 = r, \quad q^2 = \varphi, \quad q^3 = z, \qquad (0.7)$$

здесь G^{kk} есть обратный метрический тензор к G_{kk}.

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} u^i), \quad g = r^2, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (0.8)$$

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа запишется так

$$\Delta U \equiv \nabla \cdot \nabla U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (0.9)$$

Рассмотрим случай, когда область Ω есть круг радиуса a, причем радиус значительно меньше длины падающей волны, т.е. $ka \ll 1$

Пусть падающая волна лежит в плоскости xy, ось цилиндра направлена по координате z, а центр круга Ω радиуса a находится в начале координат, см. рис. 1.

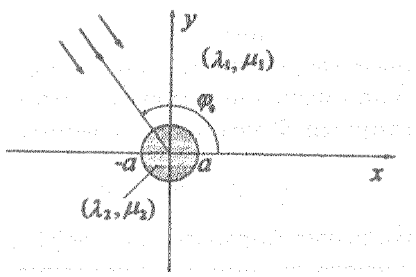

Рис. 1.

Так как круг Ω лежит в плоскости падения, все рассмотрения проведем в цилиндрической системе координат:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{0.10}$$

В цилиндрической системе, как и в декартовой, для составляющих каждого из потенциалов вектора (0.4) мы получаем разделение на уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{a^2})\Phi = 0, \quad (\Delta + \frac{\omega^2}{b^2})\mathbf{\Psi} = 0, \tag{0.11}$$

здесь $a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – продольная и поперечная скорости распространения.

Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц, все компоненты которого должны быть непрерывны при переходе границы раздела сред. Кроме того, на границе должны быть непрерывны компоненты тензора напряжений:

$$[\mathbf{u}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rr}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rz}]\big|_{r=a} = 0. \tag{0.12}$$

Решая физические задачи необходимо перейти к так называемым *физическим* координатам вектора смещений среды и компонентам тензора напряжений.

В цилиндрической системе координат эти компоненты равны

$$\mathbf{u} = (u = u^r, v = ru^\varphi, w = u^z), \tag{0.13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{\lambda}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(ru\Big) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(v\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(rw\Big)\right] + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\\
\sigma_{r\varphi} &= \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right],\\
\sigma_{rz} &= \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{0.14}$$

Будем рассматривать две поляризации: сдвиговую волну горизонтальной поляризации и волну вертикальной поляризации.

§1. Волны горизонтальной поляризации

Предположим, что падающее поле имеет вид плоской волны горизонтальной поляризации:

$$\mathbf{u}^{inc} = \mathbf{e}_z e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, \quad w^{inc} = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \neq 0, \tag{1.1}$$

причем параметр k равен $k = k_1^b = \omega/b_1$, $b_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$, следовательно падающее поле имеет поперечный характер. Здесь φ_0 это угол скольжения падающей волны, т.е. угол между осью x и направлением вектора падения, r, φ – цилиндрические координаты точки наблюдения.

В случае SH-волн горизонтальной поляризации разделять вектор смещений на скалярный и векторный потенциалы не нужно, так как составляющие $u = v = 0$, $w \neq 0$, а вектор смещений не зависит от z.

Для составляющих $u_j^z = w_j$, $j = 1, 2$ система уравнений (0.3) превращается в уравнения Гельмгольца:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_j}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial \varphi^2}\right] + \frac{\rho_j}{\mu_j}\omega^2 w_j = 0, \quad j = 1, 2. \tag{1.2}$$

Граничные условия (0.12) в этом случае превращаются в такие

$$w_1|_{r=a} = w_2|_{r=a}, \quad \mu_1\frac{\partial w_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \mu_2\frac{\partial w_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}. \tag{1.3}$$

В безграничной среде составляющие (0.13) вектора смещений **u** удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u(v,w)}{\partial r} - iku(v,w)\right) = 0, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{1.4}$$

Этот случай полностью идентичен поведению электрического поля в изотропной однородной электромагнитной среде [1, 2], см. также [3, глава XX, написанная В. А. Фоком].

Частное решение уравнения (1.2), независящее от z, в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$w = e^{ip\varphi} Z_p(kr), \tag{1.5}$$

где Z представляет одну из цилиндрических функций (Ханкеля или Бесселя).

Если задача требует простой периодичности по φ, например, в рассматриваемом случае дифракции от цилиндрической неоднородности, то нужно взять $p = n$, где n – целое число. В этом случае мы выберем следующие два частных решения:

$$w = e^{in\varphi} J_n(kr), \tag{1.6}$$

$$w = e^{in\varphi} H_n^{(1)}(kr). \tag{1.7}$$

Внутри цилиндра нужно брать только первое решение (1.6), так как только оно остается конечным при $r = 0$. Второе решение (1.7) надо употреблять в области вне цилиндра, если дело идет о волнах, расходящихся от цилиндра (отраженные или рассеянные волны) и если зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$. Асимптотическое выражение дает при больших r характерную для уходящей волны форму показательной функции

$$H_n^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \sim \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{kr}} e^{i(kr - n\pi/2 - \pi/4 - \omega t)}. \tag{1.8}$$

Множитель при константе представляет цилиндрическую волну, расходящуюся от поверхности цилиндра $r = a$. Вообще, уменьшение амплитуды, пропорциональное $1/\sqrt{r}$, характеризует цилиндрический тип волн. Для цилиндрической волны должна оставаться постоянной общая интенсивность на поверхности цилиндра. А так как поверхность цилиндра на единицу длины образующей равна $2\pi r$, то амплитуда должна уменьшаться как $1/\sqrt{r}$.

После отыскания частных решений мы должны разложить падающую волну по соответствующим частным решениям. Это осуществляется с помощью некоторых замечательных формул, называемых "теоремами сложения". Так плоская волна (1.1) в цилиндрических координатах пишется просто:

$$e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(kr)\, e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \qquad (1.9)$$

Если заметить, что при целом n

$$J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho),$$

как это вытекает из одного и того же интегрального представления, то (1.9) может быть также написано в виде:

$$e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n J_n(kr)\cos n(\varphi-\varphi_0). \qquad (1.10)$$

Итак, пусть падающая волна направлена параллельно оси цилиндра, а поверхность цилиндра будет $r = a$. Тогда рассеянное поле будет поляризовано в том же направлении. Будем искать решение задачи (1.2)–(1.4) в виде

$$w_1 = e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(k_1^b r)\cos\, n(\varphi-\varphi_0), \quad (r > a), \qquad (1.11)$$

$$w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(k_2^b r)\cos\, n(\varphi-\varphi_0), \quad (r < a), \qquad (1.12)$$

здесь H_n обозначает первую функцию Ханкеля $H_n^{(1)}$. То обстоятельство, что вне цилиндра употребляется только она одна, соответствует тому, что рассеянное поперечное поле распространяется от цилиндрической поверхности $r = a$. Внутри цилиндра из двух решений (1.6) и (1.7) надо брать только решение с J_n.

Требование непрерывности вектора смешений и тензора деформации приводит к граничным условиям (1.3). Подставив в (1.11) и (1.12) разложение (1.10), получим из (1.3) систему:

$$D_n J_n(k_1^b\, a) + A_n H_n(k_1^b\, a) = B_n J_n(k_2^b\, a), \qquad (1.13)$$

$$k_1^b\mu_1\left[D_n J_n'(k_1^b\,a) + A_n\,H_n'(k_1^b\,a)\right] = k_2^b\,\mu_2\,B_n\,J_n'(k_2^b\,a), \tag{1.14}$$

где $D_0 = 1$, $D_n = 2(-i)^n$, $n > 0$. Из системы (1.13)–(1.14) следует, что коэффициенты A_n рассеянного поля равны:

$$A_n\left[k_2^b\mu_2 H_n(k_1^b\,a)J_n'(k_2^b\,a) - k_1^b\mu_1 H_n'(k_1^b\,a)J_n(k_2^b\,a)\right] =$$

$$-D_n\left[k_2^b\mu_2 J_n(k_1^b\,a)J_n'(k_2^b\,a) - k_1^b\mu_1 J_n'(k_1^b\,a)J_n(k_2^b\,a)\right]. \tag{1.15}$$

Исследование решения системы (1.13)–(1.14) в случае $ka \ll 1$ сводится к определению коэффициентов A_n. Воспользуемся разложениями цилиндрических функций в степенные ряды [4], учитывая, что $k_j\,a \ll 1$, $j = 1, 2$.

Используя их можно показать, что при малых z имеют место оценки:

$$J_n(z) \sim \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{z}{2}\right)^2, & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{z}{2} - \left(\dfrac{z}{2}\right)^3 \dfrac{1}{2!}, & \text{при} \quad n = 1, \\ \left(\dfrac{z}{2}\right)^n \dfrac{1}{n!}, & n \geqslant 2, \end{cases} \tag{1.16}$$

$$J_n'(z) \sim \begin{cases} -\dfrac{z}{2} + \left(\dfrac{z}{2}\right)^3 \dfrac{1}{2!}, & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{z}{2}\right)^2, & \text{при} \quad n = 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n-1} \dfrac{1}{(n-1)!}, & \text{при} \quad n > 1, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$H_n^{(1)}(z) \sim \begin{cases} \dfrac{2i}{\pi}\ln\left(\dfrac{\gamma z}{2}\right), & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{-i}{\pi}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{-n}(n-1)!, & \text{при} \quad n > 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

$$H_n^{(1)'}(z) \sim \frac{i}{2\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} n!, \quad n \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Подставляя разложения (1.16)–(1.19) в формулу (1.15), получим, что два коэффициента A_0 и A_1 в разложениях для первичного дифракционного поля имеют одинаковый порядок малости по $ka : O((ka)^2)$. Остальные коэффициенты A_n разложения (1.11) малы, так как для $n > 1$ имеют порядок $O((ka)^{2n})$. Приведем значение коэффициентов A_n в разложениях для первичного дифракционного поля и исследуем полученное рассеянное поле:

$$\begin{aligned} A_0 &= -iD_0 \frac{\pi (k_1^b a)^2}{2} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}, \\ A_1 &= -iD_1 \frac{\pi (k_1^b\, a)^2}{2^2} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \\ A_n &= -iD_n \frac{\pi (k_1^b\, a)^{2n}}{2^{2n} n!(n-1)!} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad n > 1. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Для первичного дифракционного поля из оценок (1.20) следует, что в *длинноволновом приближении,* когда размеры включения Ω малы по сравнению с длиной падающей волны $k_1^b\, a \ll 1$, $k_1^b = \omega / b_1$, *главными членами в разложении рассеянного поля* (1.11) *будут первый* A_0 *и второй* A_1. Дальнейшие приближения будут величинами более высокого порядка малости.

Таким образом, *неоднородность* Ω *будет излучать как точечный источник.* Коэффициенты A_0, A_1 содержат в качестве множителя величину $\pi(k_1^b\, a)^2$, равную площади круга, умноженного на $(k_1^b)^2$. В длинноволновом приближении неоднородность является точечным источником, для которого мощность пропорциональна скачку параметров Ляме μ_1, μ_2, скачку плотностей ρ_1, ρ_2 и площади неоднородности.

Рассеянное неоднородностью горизонтально поляризованное поле при $kr \gg 1$ найдем, используя асимптотику функции Ханкеля (1.8). Окончательно получим следующую формулу для поперечной (SH) волны, рассеянной неоднородностью $r = a$, $ka \ll 1$:

$$\begin{aligned} w^{ref} \sim \frac{\pi (k_1^b a)^2 e^{i(k_1^b r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1^b r}} \left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \times \\ \times [1 + O((k_1^b a)^2)]. \end{aligned} \tag{1.21}$$

§2. Волны вертикальной поляризации

Предположим, что падающее поле имеет вид плоской волны вертикальной поляризации. В этом случае падающее плоское поле может распространяться как с продольной, так и с поперечной скоростью. В данном случае смещение $\mathbf{u}$ может быть выражено через скалярный Φ и векторный $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi^r,\ \Psi^\varphi,\ \Psi^z)$ потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}. \tag{2.1}$$

Физические компоненты вектора $\mathbf{u}$ имеют следующий вид:

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},$$

$$v = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad w = 0, \quad \Psi = \Psi^z. \tag{2.1$'$}$$

Скалярный и векторный потенциалы удовлетворяют уравнению Гельмгольца (0.11) внутри и вне цилиндра $r = a$, а также граничным условиям непрерывности вектора смещений и тензора деформации:

$$[\sigma_{rr}] = \left[\lambda \operatorname{div}\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right]\Big|_{r=a} = 0,$$

$$[u] = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right]\Big|_{r=a} = 0, \tag{2.2}$$

$$[\sigma_{r\varphi}] = \left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v}{r}\right)\right]\Big|_{r=a} = 0,$$

$$[v] = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]\Big|_{r=a} = 0. \tag{2.2$'$}$$

Так же как и в первом параграфе, условия излучения и ограниченность решения внутри цилиндра приведут к формулам (1.5)–(1.7) для функций скалярного и векторного потенциалов Φ и Ψ. Подставляя в граничные условия функции Φ и Ψ в виде, соответствующем формулам (1.11)–(1.12) для различных скоростей падающей волны, мы будем получать и разное рассеянное поле.

Выберем решение задачи дифракции от цилиндра $r = a$ при падении волны, распространяющейся в плоскости xy с продольной скоростью $a_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$, в виде:

$$\Phi_1 = e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \sum \mathcal{A}_n H_n(k_1^a r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r > a), \tag{2.3}$$

$$\Psi_1 = \sum \mathcal{B}_n H_n(k_1^b r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r > a), \tag{2.4}$$

$$\Phi_2 = \sum \mathcal{C}_n J_n(k_2^a r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r < a), \tag{2.5}$$

$$\Psi_2 = \sum \mathcal{E}_n J_n(k_2^b r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r < a). \tag{2.6}$$

Решение задачи дифракции плоской волны вертикальной поляризации, падаюшей на цилиндр с поперечной скоростью $b_1 = \sqrt{\mu_1/\rho}$, будем искать в следующем виде:

$$\Phi_1 = \sum \mathcal{A}_n' H_n(k_1^a r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r > a), \tag{2.7}$$

$$\Psi_1 = e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \sum \mathcal{B}_n' H_n(k_1^b r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r > a), \tag{2.8}$$

$$\Phi_2 = \sum \mathcal{C}_n' J_n(k_2^a r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r < a), \tag{2.9}$$

$$\Psi_2 = \sum \mathcal{E}_n' J_n(k_2^b r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (r < a). \tag{2.10}$$

Подставляя формулу (1.9) в падающую волну (2.3) и (2.8), а затем серию формул (2.3)–(2.6) или (2.7)–(2.10) в граничные условия (2.2), (2.2$'$), получим две системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами для каждого представления $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{A}_n'$, $\mathcal{B}_n'$, $\mathcal{C}_n'$, $\mathcal{E}_n'$.

Выпишем систему уравнений, определяющих составляющие скалярного и векторного потенциалов (2.3)–(2.6):

$$\begin{gathered} k_1^a a\left[\mathcal{D}_n J_n'(k_1^a a) + \mathcal{A}_n H_n'(k_1^a a)\right] + in\mathcal{B}_n H_n(k_1^b a) = \\ = k_2^a a\, \mathcal{C}_n J_n'(k_2^a a) + in\, \mathcal{E}_n J_n(k_2^b a), \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} in\left[\mathcal{D}_n J_n(k_1^a a) + \mathcal{A}_n H_n(k_1^a a)\right] - k_1^b a\mathcal{B}_n H_n'(k_1^b a) = \\ = in\, \mathcal{C}_n J_n(k_2^a a) - k_2^b a\, \mathcal{E}_n J_n'(k_2^b a), \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} (k_1^a a)^2 \Big(\mathcal{D}_n\left[2\mu_1 J_n''(k_1^a a) - \lambda_1 J_n(k_1^a a)\right] + \mathcal{A}_n\left[2\mu_1 H_n''(k_1^a a) - \right. \\ \left. -\lambda_1 H_n(k_1^a a)\right]\Big) - 2\mu_1 in\mathcal{B}_n\left[H_n(k_1^b a) - k_1^b a H_n'(k_1^b a)\right] = (k_2^a a)^2 \mathcal{C}_n \times \\ \times\left[2\mu_2 J_n''(k_2^a a) - \lambda_2 J_n(k_2^a a)\right] - 2\mu_2 in\mathcal{E}_n\left[J_n(k_2^b a) - k_2^a a J_n'(k_2^b a)\right], \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\mu_1(k_1^b a)^2 \mathcal{B}_n\left[H_n(k_1^b a) + 2H_n''(k_1^b a)\right] + in2\mu_1\Big[\big(\mathcal{D}_n J_n(k_1^a a) +$$

$$+\mathcal{A}_n H_n(k_1^a\, a)\big) - k_1^a\, a\big(\mathcal{D}_n\, J_n'(k_1^a\, a) + \mathcal{A}_n H_n'(k_1^a\, a)\big)\Big] = \mu_2(k_2^b\, a)^2 \mathcal{E}_n \times$$

$$\times\big[J_n(k_2^b\, a) + 2J_n''(k_2^b\, a)\big] + 2\mu_2\, in\, \mathcal{C}_n\big[J_n(k_2^a\, a) - k_2^a\, aJ_n'(k_2^a\, a)\big]. \quad (2.14)$$

Аналогичная система имеет место для поперечной падающей волны:

$$k_1^a\, a\mathcal{A}_n' H_n'(k_1^a\, a) + in\big[\mathcal{B}_n' H_n(k_1^b\, a) + \mathcal{D}_n\, J_n(k_1^b\, a)\big] =$$

$$k_2^a\, a\, \mathcal{C}_n' J_n'(k_2^a\, a) + in\, \mathcal{E}_n' J_n(k_2^b\, a), \quad (2.15)$$

$$in\mathcal{A}_n' H_n(k_1^a\, a) - k_1^b\, a\big[\mathcal{B}_n'\, H_n'(k_1^b\, a) + \mathcal{D}_n\, J_n'(k_1^b\, a)\big] =$$

$$in\, \mathcal{C}_n' J_n(k_2^a\, a) - k_2^b\, a\, \mathcal{E}_n'\, J_n'(k_2^b\, a), \quad (2.16)$$

$$(k_1^a\, a)^2 \mathcal{A}_n'\big[2\mu_1 H_n''(k_1^a\, a) - \lambda_1 H_n(k_1^a\, a)\big] - 2\mu_1 in\big(\big[\mathcal{B}_n' H_n(k_1^b\, a)$$

$$+\mathcal{D}_n\, J_n(k_1^b\, a)\big] - k_1^b\, a\big[\mathcal{B}_n'\, H_n'(k_1^b\, a) + \mathcal{D}_n\, J_n'(k_1^b\, a)\big]\big) = (k_2^a\, a)^2 \mathcal{C}_n' \times$$

$$\times\big(2\mu_2 J_n''(k_2^a\, a) - \lambda_2 J_n(k_2^a\, a)\big) - 2\mu_2 in\mathcal{E}_n'\big[J_n(k_2^b\, a) - k_2^a\, aJ_n'(k_2^b\, a)\big], \quad (2.17)$$

$$\mu_1(k_1^b\, a)^2\big[\mathcal{B}_n'\, H_n(k_1^b\, a) + \mathcal{D}_n\, J_n(k_1^b\, a)\big] + 2\mu_1\, in\, \mathcal{A}_n'\big[H_n(k_1^a\, a) - k_1^a\, aH_n'(k_1^a\, a)\big]$$

$$+2\mu_1(k_1^b\, a)^2\big[\mathcal{B}_n'\, H_n''(k_1^b\, a) + \mathcal{D}_n\, J_n''(k_1^b\, a)\big] = \mu_2(k_2^b\, a)^2 \mathcal{E}_n' \times$$

$$\times\big[J_n(k_2^b\, a) + 2J_n''(k_2^b\, a)\big] + 2\mu_2 in\mathcal{C}_n'\big[J_n(k_2^a\, a) - k_2^a\, aJ_n'(k_2^a\, a)\big]. \quad (2.18)$$

В системе уравнений (2.11)–(2.14) и (2.15)–(2.18) коэффициенты $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{A}_n'$, $\mathcal{B}_n'$, $\mathcal{C}_n'$, $\mathcal{E}_n'$ неизвестны, а коэффициенты $\mathcal{D}_n$ известны, одинаковы для обеих систем и равны:

$$\mathcal{D}_0 = 1, \quad \mathcal{D}_n = (-i)^n, \quad n > 0, \quad n < 0. \quad (2.19)$$

Учитывая, что $k_j\, a \ll 1$, $j = 1, 2$, воспользуемся разложениями цилиндрических функций в степенные ряды [3, 4] также, как и в §1. Отметим тот факт, что в отличие от предыдущего параграфа, здесь существенно знать не только один коэффициент в разложении по малому z для функций Бесселя нулевого, первого порядков и их производных по аргументу, но и последующие. Используя формулы (1.16)–(1.19) можно показать, что при малых

z имеют место оценки для вторых производных цилиндрических функций:

$$J_n''(z) \sim \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{z}{2}\right)^2, & \text{при} \quad n = 0, \\ -\dfrac{3z}{2^3}, & \text{при} \quad n = 1, \\ \dfrac{1}{2^2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n-2}\dfrac{1}{(n-2)!}, & \text{при} \quad n > 1, \end{cases} \tag{2.20}$$

$$H_n^{(1)''}(z) \sim \frac{-i}{2^2\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+2}(n+1)!, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.21}$$

Подставим разложения для цилиндрических функций и их производных (1.16)–(1.19), (2.20), (2.21) в системы (2.11)–(2.14) или (2.15)–(2.18). В отличие от волны горизонтальной поляризации здесь ситуация с вычислением коэффициентов намного сложнее.

В разложениях для первичного дифракционного поля интерес представляют коэффициенты, имеющие одинаковый порядок малости по ka : $O((ka)^2)$. Перечислим коэффициенты порядка $O((ka)^2)$ для скалярного и векторного потенциалов при падении плоской волны, распространяющейся с продольной скоростью. Это коэффициент скалярного потенциала $\mathcal{A}_0 \neq 0$, соответствующий коэффициент векторного потенциала $\mathcal{B}_0 = 0$. Далее получим, что коэффициенты $\mathcal{A}_{\pm 1}$, $\mathcal{B}_{\pm 1}$ не равны нулю, однако оказывается, что остальные коэффициенты при $n > 1$, $\mathcal{A}_{\pm n}$, $\mathcal{B}_{\pm n}$, полученные из систем уравнений имеют порядок $O((ka)^{2(n-1)})$, а не $O((ka)^{2n})$, как в предыдущем случае. Следовательно, коэффициенты $\mathcal{A}_{\pm 2}$ и $\mathcal{B}_{\pm 2}$ тоже порядка $O((ka)^2)$. Здесь учтен тот факт, что цилиндрические функции (1.5) $Z_p(kr)$, введенные в §1, при целом значении индекса $p = n$ удовлетворяют соотношению $Z_{-n}(kr) = (-1)^n Z_n(kr)$.

Окончательно для коэффициентов $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$ одного порядка $O((ka)^2)$ имеем:

$$\mathcal{A}_0 = -i\frac{\pi(k_1^a a)^2(\lambda_2 - \lambda_1 + \mu_2 - \mu_1)}{2(\lambda_2 + \mu_2 + \mu_1)},$$

$$\mathcal{A}_{\pm 1} = \pm\frac{\pi(k_1^a a)^2 a_1^2(\rho_1 - \rho_2)}{2^3 b_1^2 \rho_1},$$

$$\mathcal{A}_{\pm 2} = \pm i\frac{\pi(k_1^a\, a)^2 \mu_2(\mu_2 - \mu_1)}{(2)^2[\lambda_1(\lambda_2 + 2\mu_2) + \lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)]},$$

$$\mathcal{A}_n = -i\frac{\pi(k_1^a\,a)^{2(n-1)}\mathcal{D}_n}{(2)^{2(n-1)}(n-1)!(n-2)!}\times$$

$$\times\frac{\mu_2(\mu_2-\mu_1)}{[\lambda_1(\lambda_2+2\mu_2)+\lambda_2(\lambda_1+2\mu_1)]}, \quad n>2, \tag{2.22}$$

$$\mathcal{B}_0 = 0, \quad \mathcal{B}_n = -i\mathcal{A}_n\left(\frac{k_1^b}{k_1^a}\right)^n, \quad n>0,$$

$$\mathcal{D}_0 = 1, \quad \mathcal{D}_{\pm n} = (-i)^{\pm n}. \tag{2.23}$$

Исследуем полученное рассеянное поле скалярного и векторного потенциалов (2.3)–(2.4) и свойства компонент вектора смещений $\mathbf{u}_1$ волн вертикальной поляризации $(2.1')$ при падении продольной составляющей скалярного потенциала. Учитывая свойства коэффициентов и цилиндрических функций при замене n на $-n$ в формулах (2.3)–(2.4) получим:

$$\Phi_1 = e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \mathcal{A}_0H_0^{(1)}(k_1^a r) + 2\mathcal{A}_1H_1^{(1)}(k_1^a r)\cos(\varphi-\varphi_0) +$$

$$2\mathcal{A}_2H_2^{(1)}(k_1^a r)\cos 2(\varphi-\varphi_0) + \sum_{n>2}\mathcal{A}_nH_n^{(1)}(k_1^a r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \tag{2.24}$$

$$\Psi_1 = 2\mathcal{B}_1H_1^{(1)}(k_1^b r)\cos(\varphi-\varphi_0) + 2\mathcal{B}_2H_2^{(1)}(k_1^b r)\cos 2(\varphi-\varphi_0) +$$

$$\sum_{n>2}\mathcal{B}_nH_n^{(1)}(k_1^b r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \tag{2.25}$$

В этих формулах будем учитывать только слагаемые, не входящие в знак $\sum_{n>2}$, так как коэффициенты $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$ при $n>2$ имеют порядок $O(ka)^{2(n-1)}$ по $ka \ll 1$.

Используя представление потенциалов (2.24)–(2.25), для первичного дифракционного поля $(2.1')$ получим в *длинноволновом приближении* следующий результат. Если размеры включения Ω малы по сравнению с длиной падающей волны $k_1^a\,a \ll 1$, $k_1^a = \frac{\omega}{a_1}$, то *главными членами в разложении для составляющих* u и v с учетом падающего поля будут следующие слагаемые:

$$u \sim -ik_1^a\cos(\varphi-\varphi_0)e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} + 2\mathcal{A}_1\frac{\partial}{\partial r}\big(H_1^{(1)}(k_1^a r)\big)\cos(\varphi-\varphi_0) +$$

$$\mathcal{A}_0\frac{\partial}{\partial r}H_0^{(1)}(k_1^a r) + 2\mathcal{A}_2\frac{\partial}{\partial r}\big(H_2^{(1)}(k_1^a r)\big)\cos 2(\varphi-\varphi_0) -$$

$$\frac{2i\mathcal{A}_1}{r}\frac{k_1^b}{k_1^a}H_1^{(1)}(k_1^b r)\sin(\varphi-\varphi_0)-$$

$$\frac{4i\mathcal{A}_2}{r}\left(\frac{k_1^b}{k_1^a}\right)^2 H_2^{(1)}(k_1^b r)\sin 2(\varphi-\varphi_0), \tag{2.26}$$

$$v \sim ik_1^a\sin(\varphi-\varphi_0)e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} - \frac{2\mathcal{A}_1}{r}H_1^{(1)}(k_1^a r)\sin(\varphi-\varphi_0) -$$

$$\frac{4\mathcal{A}_2}{r}H_2^{(1)}(k_1^a r)\sin 2(\varphi-\varphi_0) + 2i\mathcal{A}_1\frac{k_1^b}{k_1^a}\frac{\partial}{\partial r}\left(H_1^{(1)}(k_1^b r)\right)\cos(\varphi-\varphi_0)$$

$$+2i\mathcal{A}_2\left(\frac{k_1^b}{k_1^a}\right)^2\frac{\partial}{\partial r}\left(H_2^{(1)}(k_1^b r)\right)\cos 2(\varphi-\varphi_0). \tag{2.27}$$

Дальнейшие слагаемые будут величинами более высокого порядка малости. Отметим, что по сравнению с остальными последние два слагаемых формулы (2.26), второе и третье слагаемые формулы (2.27) следует отбросить при исследовании рассеянной волны ($kr \gg 1$).

Рассеянное неоднородностью вертикально поляризованное поле (2.3)–(2.4) при $kr \gg 1$ найдем, используя асимптотику функций Ханкеля:

$$H_n^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-n\pi/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{kr}\right)\right].$$

Учитывая падающую плоскую волну, получим

$$u \sim -ik_1^a\cos(\varphi-\varphi_0)\left[e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \frac{1}{\cos(\varphi-\varphi_0)}\sqrt{\frac{2}{\pi k_1^a r}}\times\right.$$

$$\left.\times e^{i(k_1^a r-\pi/4)}[-\mathcal{A}_0 + 2i\mathcal{A}_1\cos 2(\varphi-\varphi_0) + 2\mathcal{A}_2\cos 2(\varphi-\varphi_0)]\right], \tag{2.28}$$

$$v \sim ik_1^a\sin(\varphi-\varphi_0)\left[e^{-ik_1^a r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \frac{1}{\sin(\varphi-\varphi_0)}\left(\frac{k_1^b}{k_1^a}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{2}{\pi k_1^b r}}e^{i(k_1^b r-\pi/4)}[\mathcal{A}_1\cos(\varphi-\varphi_0) - i\mathcal{A}_2\frac{k_1^b}{k_1^a}\cos 2(\varphi-\varphi_0)]\right]. \tag{2.29}$$

Таким образом, *неоднородность Ω будет излучать как цилиндрическая волна, рассеивающаяся от цилиндра $r = a$ с продольной* *и поперечной скоростями* a_1 *и* b_1 *в различных компонентах вектора смещения.* Коэффициенты $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ содержат в качестве множителя величину $\pi(k_1^a\,a)^2$, равную площади круга, умноженного на $(k_1^a)^2$. В длинноволновом приближении неоднородность является точечным источником, для которого мощность пропорциональна скачку параметров Ляме λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, скачку плотностей ρ_1, ρ_2 и площади неоднородности.

Совершенно аналогичное рассуждение, приведшее к формулам (2.28)–(2.29), можно применить и для падающей с поперечной скоростью волны вертикальной поляризации (2.7)–(2.10). Необходимо найти коэффициенты $\mathcal{A}'_n$, $\mathcal{B}'_n$ из системы уравнений (2.15)–(2.18), затем подставить их главные значения в скалярный и векторный потенциалы (2.7)–(2.10). Далее, используя асимптотику функций Ханкеля при большом значении аргумента и представление составляющих u и v по формуле $(2.1')$, также получим рассеянную от цилиндра волну.

Приведем необходимые формулы для коэффициентов $\mathcal{A}'_n$ и $\mathcal{B}'_n$:

$$\mathcal{B}'_0 = 0, \quad \mathcal{B}'_{\pm 1} = \mp\frac{\pi(k_1^b a)^2 a_1^2 (2\lambda_2+\mu_2)(\rho_1-\rho_2)}{(2)^3[\lambda_1(\lambda_2+2\mu_2)+2\mu_1\mu_2]},$$

$$\mathcal{B}'_{\pm 2} = \pm i\frac{\pi(k_1^b a)^2 a_1^2 \mu_2(\mu_2-\mu_1)}{(2)^2 b_1^2[\lambda_1(\lambda_2+2\mu_2)+\lambda_2(\lambda_1+2\mu_1)]},$$

$$\mathcal{B}'_n = -i\frac{\pi(k_1^b a)^{2(n-1)}\mathcal{D}_n}{(2)^{2(n-1)}(n-1)!(n-2)!}\times$$

$$\times\frac{a_1^2\mu_2(\mu_2-\mu_1)}{b_1^2[\lambda_1(\lambda_2+2\mu_2)+\lambda_2(\lambda_1+2\mu_1)]}, n>2, \qquad (2.22')$$

$$\mathcal{A}'_0 = 0, \quad \mathcal{A}'_n = i\mathcal{B}'_n\left(\frac{k_1^a}{k_1^b}\right)^n, \quad n>0,$$

$$\mathcal{D}_0 = 1, \quad \mathcal{D}_{\pm n} = (-i)^{\pm n}. \qquad (2.23')$$

Подставим формулы $(2.22')$–$(2.23')$ в скалярный и векторный потенциалы (2.7)–(2.8):

$$\Phi_1 = 2\mathcal{A}'_1 H_1^{(1)}(k_1^a r)\cos(\varphi-\varphi_0) + 2\mathcal{A}'_2 H_2^{(1)}(k_1^a r)\cos 2(\varphi-\varphi_0)$$

$$+\sum_{n>2}\mathcal{A}'_n H_n^{(1)}(k_1^a r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \qquad (2.24')$$

$$\Psi_1 = e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} + 2\mathcal{B}_1' H_1^{(1)}(k_1^b r)\cos(\varphi-\varphi_0)+$$

$$2\mathcal{B}_2' H_2^{(1)}(k_1^b r)\cos 2(\varphi-\varphi_0) + \sum_{n>2} \mathcal{B}_n' H_n^{(1)}(k_1^b r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \qquad (2.25')$$

Используя представление потенциалов $(2.24')$–$(2.25')$, для первичного дифракционного поля $(2.1')$ получим в *длинноволновом приближении* следующий результат. Если размеры включения Ω малы по сравнению с длиной падающей волны $k_1^b \ll 1$, $k_1^b = \frac{\omega}{b_1}$, то *главными членами в разложении для составляющих u* и v с учетом падающего поля, распространяющегося с поперечной скоростью, будут следующие слагаемые:

$$u \sim 2i\mathcal{B}_1' \frac{k_1^a}{k_1^b} \frac{\partial}{\partial r}\big(H_1^{(1)}(k_1^a r)\big)\cos(\varphi-\varphi_0)+$$

$$2i\mathcal{B}_2' \left(\frac{k_1^a}{k_1^b}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\big(H_2^{(1)}(k_1^a r)\big)\cos 2(\varphi-\varphi_0)+$$

$$ik_1^b \sin(\varphi-\varphi_0) e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} - \frac{2\mathcal{B}_2'}{r} H_1^{(1)}(k_1^b r)\sin(\varphi-\varphi_0)$$

$$-\frac{4\mathcal{B}_2'}{r} H_2^{(1)}(k_1^b r)\sin 2(\varphi-\varphi_0), \qquad (2.26')$$

$$v \sim -\frac{2i\mathcal{B}_2'}{r} \frac{k_1^a}{k_1^b} H_1^{(1)}(k_1^a r)\sin(\varphi-\varphi_0)-$$

$$\frac{4i\mathcal{B}_2'}{r} \left(\frac{k_1^a}{k_1^b}\right)^2 H_2^{(1)}(k_1^a r)\sin 2(\varphi-\varphi_0)+$$

$$ik_1^b \cos(\varphi-\varphi_0) e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} + 2\mathcal{B}_1' \frac{\partial}{\partial r}\big(H_1^{(1)}(k_1^b r)\big)\cos(\varphi-\varphi_0)$$

$$-2\mathcal{B}_2' \frac{\partial}{\partial r}\big(H_2^{(1)}(k_1^b r)\big)\cos 2(\varphi-\varphi_0) \qquad (2.27')$$

Найдем рассеянное неоднородностью вертикально поляризованное поле (2.7)–(2.8) при $kr \gg 1$. Используя асимптотику функций Ханкеля и то обстоятельство, что в формуле $(2.26')$ два последних слагаемых при больших расстояниях от наблюдателя и два первых в формуле $(2.27')$ составят вторичное рассеянное поле, получим:

$$u \sim ik_1^b \sin(\varphi-\varphi_0)\Big[e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} - \frac{2}{\sin(\varphi-\varphi_0)}\left(\frac{k_1^a}{k_1^b}\right)^2 \times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi k_1^a r}}e^{i(k_1^a r-\pi/4)}[\mathcal{B}_1'\cos(\varphi-\varphi_0) - i\mathcal{B}_2'\frac{k_1^a}{k_1^b}\cos 2(\varphi-\varphi_0)+\ldots]\Big], \quad (2.28')$$

$$v \sim ik_1^b \cos(\varphi-\varphi_0)\Big[e^{-ik_1^b r\cos(\varphi-\varphi_0)} + \frac{2}{\cos(\varphi-\varphi_0)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi k_1^b r}}e^{i(k_1^b r-\pi/4)}[i\mathcal{B}_1'\cos(\varphi-\varphi_0) + \mathcal{B}_2'\cos 2(\varphi-\varphi_0)+\ldots]\Big]. \quad (2.29')$$

Таким образом, *неоднородность Ω будет излучать как цилиндрическая волна, рассеивающаяся от цилиндра $r = a$ с продольной и поперечной скоростями a_1 и b_1 в различных компонентах вектора смещения.* Коэффициенты $\mathcal{B}_1'$, $\mathcal{A}_1'$, $\mathcal{B}_2'$, $\mathcal{A}_2'$ содержат в качестве множителя величину $\pi(k_1^b a)^2$, $(\pi(k_1^a a)^2)$ равную площади круга, умноженного на $(k_1^b)^2$ $((k_1^a)^2)$. В длинноволновом приближении неоднородность является точечным источником, для которого мощность пропорциональна скачку параметров Ляме λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, скачку плотностей ρ_1, ρ_2 и площади неоднородности. Диаграмма направленности выражается через $\cos n(\varphi-\varphi_0)$, $n = 1, 2$. Аналогия с электромагнитным рассеянием на неоднородности [1] просматривается полностью в случае горизонтальной поляризации (SH-волна) с некоторыми нюансами. Картина рассеяния вертикально поляризованной плоской падающей волны сложнее, так как задача векторная и компоненты вектора смещений представлены посредством скалярного и векторного потенциалов.

Литература

1. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304–322.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Некоторые математические методы, применяемые в теории дифракции.* — В кн.: I-ая Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, (г. Паланга), М.-Харьков 1968, 3–93.

3. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* Изд-во “ОНТИ”: М-Л. (1937).
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. И. Ватсон, *Курс современного анализа. Ч. 2.* Физматгиз, М. (1963).

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B., and Svirkina L. A. Scattering on a small nonhomogeneities in an elastic medium.

The problems of diffraction of a flat elastic wave (transversal or longitudinal), scattered on the cylinder, are investigated. The radius a of the cylinder is small ($ka \ll 1$, where k is the wave frequency). The waves of the horizontal polarization (SH-waves) are scattered similarly to the electromagnetic waves of the appropriate polarization. The small nonhomogeneity is proved to radiate as a point source, the potency of which is proportional to magnitudes of jumps of the Lame parameters μ_1, μ_2 and the square of the nonhomogeneity cross-section.

The scattering of the flat waves of the vertical polarization submits to the more complicated law of radiation, because of the problem is vectorial and the components of displacement vector are expressed by means of scalar and vectorial potentials. However, the scattering on the small nonhomogeneity is the same asymptotic behavior as in the case of the SH-waves.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 12 января 2000 г.