Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

А. П. Качалов

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ В НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В статье рассматривается специальный класс решений системы уравнений Максвелла для среды, в которой электрическая и магнитная проницаемость представляют собой произвольные эрмитовы тензоры, зависящие только от координат. Такие уравнения, например, описывают распространение электромагнитных волн в кристаллах (ϵ, μ – вещественные симметричные тензоры), а также распространение волн в ферромагнетиках, когда для этих волн высокочастотный спектр сосредоточен вблизи фиксированной частоты (см., например, [1]). Этот класс решений, называемый пространственно-временные гауссовы пучки или квазифотоны, объединяет решения, сосредоточенные в малой окрестности пространственно-временных лучей. Заметим, что высокочастотный спектр таких решений сосредоточен вблизи фиксированной частоты. Стационарный вариант гауссовых пучков был впервые введен в статье [2] для волнового уравнения. Нестационарные гауссовы пучки для волнового уравнения были впервые описаны в работе [3]. При рассмотрении этих решений мы будем следовать схеме работы [4] .

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Максвелла для произвольной неоднородной анизотропной электромагнитной среды в отсутствие сторонних токов и зарядов:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (1)\\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \qquad (2) \end{aligned}$$

Работа над этой статьей поддержана грантом РФФИ 99-01-00107.

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – электрическая и магнитная индукции. Связь между электрической и магнитной индукциями и соответствующими полями задается посредством линейных соотношений:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{3}$$

где

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

– произвольные положительно определенные эрмитовы тензоры $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$, $\mu = \mu(\mathbf{x})$, зависящие только от декартовых координат $\mathbf{x}$, но не от времени t.

$$\epsilon^*(\mathbf{x}) = \epsilon(\mathbf{x}), \quad \mu^*(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$(\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{E}) \geq \epsilon_0 ||\mathbf{E}||^2, (\mu \mathbf{H}, \mathbf{H}) \geq \mu_0 ||\mathbf{H}||^2, \tag{7}$$

с некоторыми положительными постоянными ϵ_0, μ_0. Здесь

$$(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \sum_{i=1}^{3} u_i^1 \bar{u}_i^2, \quad ||\mathbf{u}||^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{8}$$

В этой статье будут использоваться также 6–мерные вектора

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

С векторами $\vec{u}$ (при фиксированных $(\mathbf{x}, t)$) мы будем связывать энергетическое скалярное произведение.

$$\langle \vec{u}^{\,1}, \vec{u}^{\,2} \rangle = (\epsilon \mathbf{u}_e^1, \mathbf{u}_e^2) + (\mu \mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2). \tag{10}$$

Соответствующая норма пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля в точке $(\mathbf{x}, t)$.

Кроме 6–мерного векторного поля $\vec{u}$, состоящего из компонент электрического и магнитного полей, удобно ввести 6–мерные векторные поля $\vec{v}$ по формуле

$$\vec{u} = j \vec{v}, \tag{11}$$

где

$$j = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1/2}(\mathbf{x}), & 0 \\ 0, & \mu^{-1/2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Заметим, что выражение (12) для матрицы j осмыслено в силу свойств (6), (7).

Линейное преобразование (11) приводит энергетическое скалярное произведение $\langle \vec{u}^{\,1}, \vec{u}^{\,2} \rangle$ к обычному скалярному произведению в 6–мерном пространстве для соответствующих полей $\vec{v}^{\,\alpha}$, $\alpha = 1, 2$,

$$\langle \vec{u}^{\,1}, \vec{u}^{\,2} \rangle = (\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}) = \sum_{i=1}^{6} v_i^1 \bar{v}_i^2. \tag{13}$$

Для построения решений системы (1)–(2) необходимо добавить некоторые начальные и граничные условия. Нас будут интересовать решения, порожденные только граничными источниками. Поэтому мы будем предполагать, что начальные условия для этой системы нулевые:

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{H}|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Из этих начальных условий немедленно следует выполнение соотношений (2) при $t = 0$. Используя первую пару уравнений Максвелла (1), нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что вторая пара уравнений Максвелла есть следствие первой пары уравнений Максвелла при нулевых начальных условиях. Поэтому в этой статье мы будем искать решения, удовлетворяющие первой паре уравнений Максвелла.

Простанственно–временные гауссовы пучки представляют собой решения уравнений Максвелла (1) в виде лучевых рядов с комплексными амплитудами и фазами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t; p) = e^{ip\theta(\mathbf{x},t)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}, t)(ip)^{-n},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t; p) = e^{ip\theta(\mathbf{x},t)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_{(n)}(\mathbf{x}, t)(ip)^{-n}, \tag{15}$$

$$\vec{u}_{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{e(n)} \\ \mathbf{u}_{h(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{(n)} \\ \mathbf{H}_{(n)} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{16}$$

Здесь $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{H}_{(n)}(\mathbf{x}, t)$, $n = 0, 1, \dots,$ – гладкие, комплекснозначные функции вещественных переменных $\mathbf{x}$ и t; p – большой параметр.

Мы будем искать решение задачи, сосредоточенное в малой окрестности точки, движущейся по траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Для этого нам достаточно выполнения условий:

$$\operatorname{Im} \theta(\mathbf{x}, t) \geq 0; \quad \operatorname{Im} \theta(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t). \tag{17}$$

Поскольку p – большой параметр задачи, это решение будет сосредоточено (в общем положении) в $O(p^{-1/2})$ окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ для любого t. Следовательно, для построения степенной асимптотики решения мы можем ограничиться построением разложений функций $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\vec{u}_{(n)}(\mathbf{x}, t)$, $n = 0, 1, \dots$ в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}, t) &= \Theta_0(t) + \Theta_1(\mathbf{y}; t) + \Theta_2(\mathbf{y}; t) + \dots = \\ &= \theta_0(t) + p_i(t) y^i + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}(t) y^i y^j + \dots, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\vec{u}_n(\mathbf{x}, t) = \vec{u}_{(n)0}(t) + \vec{u}_{(n)1}(\mathbf{y}; t) + \dots = \vec{u}_{(n)0}(t) + \vec{u}_{(n)1i}(t) y^i + \dots .$$

Здесь $\mathbf{y}$ – центрированные координаты,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(t). \tag{19}$$

Условия (17) мы заменим далее на более сильные условия, которые, впрочем, выполняются в общем положении.

$$\operatorname{Im} \theta_0(t) = 0, \quad \operatorname{Im} \mathbf{p}(t) = 0, \quad \operatorname{Im} \Gamma(t) > 0. \tag{20}$$

В дальнейшем в этой статье мы построим решение уравнений Максвелла (1) в виде (15) с $\theta(\mathbf{x}, t)$ и $\vec{u}_{(n)}(\mathbf{x}, t)$, $n = 0, 1, \dots,$ в виде разложений Тейлора (18), удовлетворяющих дополнительным условиям (20).

Подставляя разложения (15) в систему уравнений (1), мы получим рекуррентную систему для нахождения $\vec{u}_{(n)}$, $n = 0, 1, \dots .$

$$\begin{aligned} &\epsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{E}_{(n)} - [\nabla \theta \times \mathbf{H}_{(n)}] = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{(n-1)}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{H}_{(n-1)}, \\ &\mu \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{H}_{(n)} + [\nabla \theta \times \mathbf{E}_{(n)}] = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_{(n-1)}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{E}_{(n-1)}, \end{aligned} \tag{21}$$

для $n = 0, 1, \dots,$ при этом $\mathbf{E}_{(-1)} = \mathbf{H}_{(-1)} \equiv 0$.

Уравнения Гамильтона–Якоби. При $n = 0$ система уравнений (21) для нахождения $\vec{u}_{(0)}$ имеет вид:

$$\epsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\mathbf{E}_{(0)} - [\nabla\theta \times \mathbf{H}_{(0)}] = 0,$$

$$\mu\frac{\partial\theta}{\partial t}\mathbf{H}_{(0)} + [\nabla\theta \times \mathbf{E}_{(0)}] = 0. \quad (22)$$

Это однородная линейная система уравнений. Переходя от векторов $\vec{u}_{(0)}$ к векторам $\vec{v}_{(0)}$ по формуле (11), мы получим для вектора $\vec{v}_{(0)}$ следующее уравнение

$$M(\mathbf{x}, \nabla\theta)\vec{v}_{(0)} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\vec{v}_{(0)}, \quad (23)$$

где $M(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\mathbf{x} \in R^3$, $\mathbf{z} \in C^3$,– $[6 \times 6]$ матричная функция, определяемая формулами

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0, & R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ \widetilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \epsilon^{-1/2}(\mathbf{x})K(\mathbf{z})\mu^{-1/2}(\mathbf{x}),$$

$$\widetilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\mu^{-1/2}(\mathbf{x})K(\mathbf{z})\epsilon^{-1/2}(\mathbf{x}), \quad (25)$$

а $K(\mathbf{z})$ есть оператор векторного произведения

$$K(\mathbf{z})\mathbf{b} = [\mathbf{z} \times \mathbf{b}]. \quad (26)$$

Операторы $K(\mathbf{z})$, $R(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\widetilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $M(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ являются гладкими операторами по $\mathbf{x} \in R^3$ и аналитическими по $\mathbf{z} \in C^3$.

Легко видеть, что

$$K^*(\mathbf{z}) = -K(\bar{\mathbf{z}}), \quad R^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \widetilde{R}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}}), \quad \widetilde{R}^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}}), \quad (27)$$

где $\bar{\mathbf{z}}$ – вектор, комплексно сопряженный к $\mathbf{z}$. Очевидно также, что

$$M^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = M(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}}). \quad (28)$$

Таким образом, при комплексных $\mathbf{z}$ матрица $M(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ не является, вообще говоря, эрмитовой. Однако при $\mathbf{z} = \mathbf{p} \in R^3$

$$M^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = M(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (29)$$

и, следовательно, $M(\mathbf{x},\mathbf{p})$ является эрмитовой матрицей. Нетрудно видеть, что матрица $M(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $(\mathbf{x},\mathbf{p}) \in R^3 \times R^3$, $\mathbf{p} \neq 0$, имеет следующие свойства:

1. $\lambda = 0$ является двукратным собственным числом матрицы $M(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Соответствующие собственные вектора можно выбрать в виде:

$$\vec{v}_0^{\,+}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = j^{-1}(\mathbf{x})\vec{u}_0^{\,+}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = j^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{(\mu(\mathbf{x})\mathbf{p},\mathbf{p})}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_0^{\,-}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = j^{-1}(\mathbf{x})\vec{u}_0^{\,-}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = j^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{(\epsilon(\mathbf{x})\mathbf{p},\mathbf{p})}} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

2. $M(\mathbf{x},\mathbf{p})$ имеет две пары собственных чисел $\mp h_k(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $k = 1,2$, с соответствующими ортонормированными собственными векторами $\vec{v}_k^{\,\pm}(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Здесь $h_k(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $k = 1,2$, – положительные функции $(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \neq 0$, гладкие по $\mathbf{x}$ и аналитические по $\mathbf{p}$ при $h_1(\mathbf{x},\mathbf{p}) \neq h_2(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Таким образом, при $(\mathbf{x},\mathbf{p}) \in R^3 \times (R^3 \setminus \{0\})$, $h_1(\mathbf{x},\mathbf{p}) \neq h_2(\mathbf{x},\mathbf{p})$, для всех $k,l = 0,1,2$, $\alpha,\beta = \pm$ выполняются условия

$$\langle \vec{u}_k^{\,\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \vec{u}_l^{\,\beta}(\mathbf{x},\mathbf{p})\rangle = (\vec{v}_k^{\,\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \vec{v}_l^{\,\beta}(\mathbf{x},\mathbf{p})) = \delta_{kl}\delta^{\alpha\beta}. \qquad (31)$$

Фиксируем $(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0) \in R^3 \times (R^3 \setminus \{0\})$, так что $h_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0) \neq h_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)$. Тогда существует $\delta > 0$, такое что при $(\mathbf{x},\mathbf{z}) \in B_\delta(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)$,

$$B_\delta(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0) = \{(\mathbf{x},\mathbf{p}) \in R^3 \times C^3; \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta, \|\mathbf{z}-\mathbf{p}_0\| < \delta\},$$

$M(\mathbf{x},\mathbf{z})$ имеет следующие свойства:

1. $\lambda = 0$ является двукратным собственным числом матрицы $M(\mathbf{x},\mathbf{z})$. Соответствующие собственные вектора можно выбрать в виде:

$$\vec{v}_0^{\,+}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = j^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{(\mu(\mathbf{x})\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_0^{\,-}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = j^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{(\epsilon(\mathbf{x})\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

2. $M(\mathbf{x},\mathbf{z})$ имеет две пары собственных чисел $\mp h_k(\mathbf{x},\mathbf{z})$, $k = 1,2$, с соответствующими собственными векторами $\vec{v}_k^{\,\pm}(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

3. Для матрицы $M^*(\mathbf{x},\mathbf{z}) = M(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})$ $\lambda = 0$ двукратное собственное число с собственными векторами $\vec{v}^{\,\pm}_0(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})$, а $\mp h_k(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})$, $k = 1,2$, собственные числа с соответствующими собственными векторами $\vec{v}^{\,\pm}_k(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})$, $k = 1,2$. При этом собственные вектора $\vec{v}^{\,\alpha}_k(\mathbf{x},\mathbf{z})$, $\alpha = \pm$, $k = 0,1,2$, биортонормальны собственным векторам $\vec{v}^{\,\beta}_l(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})$, $\beta = \pm$, $l = 0,1,2$,

$$(\vec{v}^{\,\alpha}_k(\mathbf{x},\mathbf{z}), \vec{v}^{\,\beta}_l(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}})) = \delta_{kl}\delta^{\alpha\beta}. \tag{33}$$

4. Собственные числа $h_k(\mathbf{x},\mathbf{z})$, $(\mathbf{x},\mathbf{z}) \in B_\delta(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)$, являются гладкими по $\mathbf{x}$ и аналитическими по $\mathbf{z}$ функциями и имеют в этой окрестности следующие свойства

$$\begin{gathered} h_k(\mathbf{x},\lambda\mathbf{z}) = \lambda h_k(\mathbf{x},\mathbf{z}), \quad \lambda > 0, \quad k = 1,2, \\ h_k(\mathbf{x},\bar{\mathbf{z}}) = \overline{h_k(\mathbf{x},\mathbf{z})}, \quad k = 1,2, \\ h_1(\mathbf{x},\mathbf{z}) \neq h_2(\mathbf{x},\mathbf{z}), \quad h_k(\mathbf{x},\mathbf{z}) \neq 0, \quad k = 1,2. \end{gathered} \tag{34}$$

5. Собственные функции $\vec{v}^{\,\pm}_k(\mathbf{x},\mathbf{z})$, $k = 0,1,2$, являются гладкими по $\mathbf{x}$ аналитическими по $\mathbf{z}$ вектор-функциями в окрестности $B_\delta(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)$.

Вернемся теперь к системе уравнений (22) или к эквивалентной ей системе (23). Из анализа системы уравнений (23) видно, что должно выполняться одно из условий

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \text{ или } \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \mp h_k(\mathbf{x},\nabla\theta), \quad k = 1,2.$$

Первый случай соответствует статическим полям, и, следовательно, в силу предположения (14), такое поле равно нулю. Второй случай соответствует волнам, бегущим в противоположном направлении с разными скоростями. Без нарушения общности рассмотрим случай $k = 1$ и знак $-$. Обозначим

$$h(\mathbf{x},\mathbf{z}) = h_1(\mathbf{x},\mathbf{z}). \tag{35}$$

В результате получим уравнение Гамильтона–Якоби для нахождения функции $\theta(\mathbf{x},t)$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + h(\mathbf{x},\nabla\theta) = 0. \tag{36}$$

Лемма. *Рассмотрим решение $\theta(\mathbf{x},t)$ уравнения (36) с начальными данными*

$$\theta(\mathbf{x},0)=\widehat{\theta}(\mathbf{x}), \tag{37}$$

и $\widehat{\theta}(\mathbf{x})$ имеет известное разложение Тейлора по однородным многочленам вблизи точки $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$

$$\widehat{\theta}(\mathbf{x})=\widehat{\Theta}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\widehat{\Theta}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\cdots, \tag{38}$$

где

$$\widehat{\Theta}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=p_{0i}(x^i-x_0^i),$$

$$\widehat{\Theta}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\frac{1}{2}\Gamma_{0ik}(x^i-x_0^i)(x^k-x_0^k), \tag{39}$$

вектор $\mathbf{p}_0\in R^3$, а симметричная матрица Γ_0 принадлежит верхней полуплоскости Зигеля, т.е.

$$\Gamma_0^t=\Gamma_0,\quad \mathrm{Im}\ \Gamma_0>0. \tag{40}$$

Тогда для функции $\theta(\mathbf{x},t)$ справедливо разложение по однородным многочленам переменных $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}(t)$,

$$\theta(\mathbf{x},t)=\Theta_1(\mathbf{y};t)+\Theta_2(\mathbf{y};t)+\cdots, \tag{41}$$

где

$$\Theta_1(\mathbf{y};t)=p_i(t)(x^i-x^i(t)), \tag{42}$$

$$\Theta_2(\mathbf{y};t)=\frac{1}{2}\Gamma_{ik}(x^i-x^i(t))(x^k-x^k(t)). \tag{43}$$

Вещественные вектор-функции $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ удовлетворяют задаче Коши для системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial h}{\partial p_i},\quad x^i\big|_{t=0}=x_0^i,$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial h}{\partial x^i},\quad p_i\big|_{t=0}=p_{i0}, \tag{44}$$

а комплекснозначная матричная функция $\Gamma(t)$ удовлетворяет задаче Коши для матричного уравнения Риккати

$$\frac{d\Gamma}{dt}+A+(B\Gamma+\Gamma B^t)+\Gamma C\Gamma=0, \tag{45}$$

$$\Gamma\big|_{t=0}=\Gamma_0,$$

где

$$A_{ij}(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)),$$
$$B_{ij}(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial p_j}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \tag{46}$$
$$C_{ij}(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Все компоненты матриц A, B и C вычисляются на бихарактеристике
$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$.

Для любого $t > 0$ $\Gamma(t)$ есть симметричная комплекснозначная матрица, принадлежащая верхней полуплоскости Зигеля, т.е.

$$\Gamma^t = \Gamma, \quad \mathrm{Im}\ \Gamma > 0. \tag{47}$$

Более того, если Γ_0 имеет факторизацию

$$\Gamma_0 = Z_0\, Y_0^{-1}, \tag{48}$$

то $\Gamma(t)$ имеет факторизацию

$$\Gamma(t) = Z(t)\, Y^{-1}(t) \tag{49}$$

с невырожденной комплекснозначной матрицей $Y(t)$. При этом комплекснозначные матричные функции $Y(t)$ и $Z(t)$ удовлетворяют задаче Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = B^t Y + CZ, \quad Y|_{t=t_0} = Y_0,$$
$$\frac{dZ}{dt} = -AY - BZ, \quad Z|_{t=t_0} = Z_0. \tag{50}$$

Для остальных однородных многочленов $\Theta_l(\mathbf{y}; t)$, $l \geq 3$, после невырожденной замены переменных и функций

$$\widetilde{\mathbf{y}} = Y^{-1}(t)\mathbf{y}, \quad \Theta_l(\mathbf{y}; t) = \widetilde{\Theta}_l(\widetilde{\mathbf{y}}; t), \tag{51}$$

получается следующая задача Коши:

$$\frac{d\widetilde{\Theta}_l}{dt} = F_l, \quad \widetilde{\Theta}_l\Big|_{t=0} = \widetilde{\Theta}_{l0}(\widetilde{\mathbf{y}}) = \widehat{\Theta}_{l0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{52}$$

где F_l – известные на каждом шаге однородные многочлены переменных $(\widetilde{\mathbf{y}}, t)$.

Доказательство. Приведем схему доказательства Леммы. Более подробное доказательство аналогичного утверждения можно найти в [5], [6] . Подставим разложение (41) в уравнение (36). Получим цепочку равенств однородных многочленов переменных $\mathbf{y}$ ($\widetilde{\mathbf{y}}$). Из нулевого, первого и второго приближений находятся уравнения Гамильтона (44) для координат $\mathbf{x}(t)$ и импульсов $\mathbf{p}(t)$, а также матричное уравнение Риккати (45) для $\Gamma(t)$. С помощью факторизации (49) решение задачи Коши (45) сводится к задаче Коши (50). Свойства (47) следуют из законов сохранения

$$Y^t Z - Z^t Y = Y_0^t Z_0 - Z_0^t Y_0 = \mathrm{const} = 0,$$
$$Y^* Z - Z^* Y = Y_0^* Z_0 - Z_0^* Y_0 = \mathrm{const} \qquad (53)$$

для системы уравнений (50). Эти законы сохранения в свою очередь есть следствие свойств симметрий матриц A, B и C

$$A^* = A^t = A, \quad C^* = C^t = C, \quad B^* = B^t. \qquad (54)$$

Доказательство законов сохранения (53) получается применением дифференцирования по t к левым частям соотношений (53) и использованием уравнений системы (50). Невырожденность матрицы $Y(t)$ есть следствие второго закона сохранения (53). Используя невырожденную замену переменных $\widetilde{\mathbf{y}} = Y^{-1}(t)\mathbf{y}$ для $\widetilde{\Theta}_l(\widetilde{\mathbf{y}}; t)$, получаются уравнения (52) с известными правыми частями. Таким образом, мы построили решение уравнения Гамильтона–Якоби для функции $\theta(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее условиям (20).

Уравнения переноса. После удовлетворения условий разрешимости системы (22), т. е. решения уравнения (36), найдутся $T > 0$ и $\delta > 0$, такие что при $0 \le t < T$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)\| < \delta$, решение этой системы уравнений может быть записано в виде:

$$\mathbf{E}_{(0)}(\mathbf{x}, t) = \phi_{(0)}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta),$$
$$\mathbf{H}_{(0)}(\mathbf{x}, t) = \phi_{(0)}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta). \qquad (55)$$

Векторные поля $\vec{u}_i^{\pm}(\mathbf{x}, \nabla\theta)$ (вместе с $\vec{u}_k^{\pm}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})$), $i, k = 0, 1, 2$, представляют собой биортонормальную систему векторов в этой окрестности,

$$\langle \vec{u}_i^{\alpha}(\mathbf{x}, \nabla\theta), \vec{u}_k^{\beta}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta}) \rangle = \delta^{\alpha\beta}\delta_{ik}, \quad \alpha, \beta = \pm, \ i, k = 0, 1, 2. \qquad (56)$$

Наконец, скалярная функция $\phi_{(0)}(\mathbf{x},t)$ на этом шаге исследования является произвольной.

Таким образом, мы закончили исследование системы уравнений (21) при $n=0$ и переходим к исследованию системы уравнений (21) при $n=1$. Матрица этой системы уравнений имеет вид:

$$-j^{-1}(\mathbf{x})\,[M(\mathbf{x},\nabla\theta)+h_1(\mathbf{x},\nabla\theta)I]\,j^{-1}(\mathbf{x}). \tag{57}$$

Эта матрица имеет нулевое собственное число кратности 1 с собственным вектором $\vec{u}^{\,+}_1(\mathbf{x},\nabla\theta)$. Для разрешимости системы (21) при $n=1$ необходимо и достаточно, чтобы правая часть этой системы была ортогональна собственному вектору сопряженной матрицы

$$-j^{-1}(\mathbf{x})\,\left[M(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})+h_1(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})I\right]\,j^{-1}(\mathbf{x}), \tag{58}$$

соответствующему нулевому собственному числу, т. е. $\vec{u}^{\,+}_1(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})$. Умножая правую часть системы (21) при $n=1$ на $\vec{u}^{\,+}_1(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})$ и приравнивая полученное выражение нулю, получим следующее равенство:

$$-(\epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{E}_{(0)}(\mathbf{x},t)}{\partial t},\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))-(\mu(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{H}_{(0)}(\mathbf{x},t)}{\partial t},\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))+$$
$$+(\operatorname{rot}\mathbf{H}_{(0)}(\mathbf{x},t),\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))-(\operatorname{rot}\mathbf{E}_{(0)}(\mathbf{x},t),\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))=0. \tag{59}$$

Используя представление (55) для $\mathbf{E}_{(0)}$ и $\mathbf{H}_{(0)}$, равенство (59) преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\phi_{(0)}$

$$-\frac{\partial\phi_{(0)}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+(\nabla\phi_{(0)}(\mathbf{x},t),[\overline{\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\theta)}\times\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})])+$$
$$+(\nabla\phi_{(0)}(\mathbf{x},t),[\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})\times\overline{\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\theta)}])-$$
$$-\phi_{(0)}(\mathbf{x},t)\{(\epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\theta)}{\partial t},\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))+$$
$$+(\mu(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\theta)}{\partial t},\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))-$$
$$-(\operatorname{rot}\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\theta),\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))+(\operatorname{rot}\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x},\nabla\theta),\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))\}=0. \tag{60}$$

Здесь мы использовали условия биортонормальности (56) векторных полей $\vec{u}^{\,\pm}_i(\mathbf{x},\nabla\theta)$ и $\vec{u}^{\,\pm}_k(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta})$, $i,k=0,1,2$, в энергетической норме.

Поскольку нестационарные гауссовы пучки типа квазифотон вследствие второго условия (47) сосредоточены в малой $(O(p^{-1/2+\sigma}))$ окрестности (для любого $\sigma > 0$) пространственно–временного (ПВ) луча $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, то удобно искать функцию $\phi_{(0)}(\mathbf{x}, t)$ в виде разложения Тейлора по однородным многочленам переменных $\widetilde{\mathbf{y}}$.

$$\phi_{(0)}(\mathbf{x}, t) = \widetilde{\phi}_{(0)}(\widetilde{\mathbf{y}}, t) = \phi_{(0)0}(t) + \phi_{(0)1}(\widetilde{\mathbf{y}}; t) + \cdots = \\ = \phi_{(0)0}(t) + \phi_{(0)1k}(t)\widetilde{y}^k + \ldots . \tag{61}$$

Для того, чтобы преобразовать уравнение (60) к переменным $(\widetilde{\mathbf{y}}, t)$, нужно выразить частные производные по t и x^k, $k = 1, 2, 3$, через частные производные по t и $\widetilde{y}^k$, $k = 1, 2, 3$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \widetilde{y}^i}\left\{ Y^{-1}_{ik}\frac{dx^k}{dt} - \frac{d}{dt}\left(Y^{-1}_{il}\right) Y_{lk}\widetilde{y}^k \right\} = \\ = \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik}\left\{ \frac{\partial h}{\partial p_k} + [(B^t\, Y + C\, Z)\widetilde{\mathbf{y}}]_k \right\}, \tag{62}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik}. \tag{63}$$

Подставляя эти выражения для производных в уравнение (60) и приравнивая при различных порядках однородности по $\widetilde{\mathbf{y}}$, мы получим следующую последовательность уравнений для однородных многочленов $\phi_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}}; t)$, $l = 0, 1, \ldots$, переменных $\widetilde{\mathbf{y}}$.

$$-\frac{\partial \phi_{(0)l}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{(0)l+1}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik} \frac{\partial h}{\partial p_k} + \frac{\partial \phi_{(0)l}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik}[(B^t + C\,\Gamma)Y\widetilde{\mathbf{y}}]_k + \\ + \frac{\partial \phi_{(0)l+1}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik}\{2Re\,[\overline{\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))} \times \mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))]_k\} + \\ + \frac{\partial \phi_{(0)l}}{\partial \widetilde{y}^i} Y^{-1}_{ik}\{[\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x}, \nabla\theta) \times \overline{\mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})}] + \\ [\overline{\mathbf{u}^+_{h1}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})} \times \mathbf{u}^+_{e1}(\mathbf{x}, \nabla\theta)]\}_{(1)k}\widetilde{y}^k + \phi_{(0)l}a(t) = b_l(\widetilde{\mathbf{y}}; t), \tag{64}$$

где $b_l(\widetilde{\mathbf{y}}; t)$ есть однородный многочлен по $\widetilde{\mathbf{y}}$ порядка l с коэффициентами, зависящими от однородных многочленов $\phi_{(0)0}, \ldots \phi_{(0)l-1}$.

В частности, $b_0(t) = b_0(\widetilde{\mathbf{y}}; t) \equiv 0$. Для функции $a(t)$ мы получаем следующее выражение:

$$a(t) = \{-\langle \frac{\partial \vec{u}_1^{\,+}(\mathbf{x}, \nabla\theta)}{\partial t}, \vec{u}_1^{\,+}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})\rangle + (\operatorname{rot} \mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta), \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})) -$$
$$- (\operatorname{rot} \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta), \mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta}))\}\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \qquad (65)$$

Для дальнейшего преобразования этого уравнения нам потребуются некоторые представления для собственного числа $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in R^3 \times R^3$, и его производных $\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k}$, $k = 1, 2, 3$. Эти соотношения легко следуют из определения собственного вектора, соответствующего собственному числу $-h(\mathbf{x}, \mathbf{z})$:

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{z})\vec{v}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -h(\mathbf{x}, \mathbf{z})\vec{v}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \qquad (66)$$

где $\vec{v}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = j^{-1}(\mathbf{x})\vec{u}_1^{\,+}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Подставляя эти соотношения в уравнение (66), получим

$$\epsilon(\mathbf{x})h(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + [z \times \mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = 0,$$
$$\mu(\mathbf{x})h(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - [z \times \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = 0. \qquad (67)$$

Умножим скалярно первое уравнение системы (67) на $\mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})$, а второе на $\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})$ и сложим. Пользуясь биортонормальностью системы собственных векторов, получим:

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -(\mathbf{z}, [\overline{\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \times \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})]) -$$
$$-(\mathbf{z}, [\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}}) \times \overline{\mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}]). \qquad (68)$$

В частности

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -2Re\,\{(\mathbf{p}, [\overline{\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \times \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{p})]\}. \qquad (69)$$

Аналогичным образом, умножая (при $\mathbf{z} = \mathbf{p}$) соотношения (67) на производные $\frac{\partial \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k}$ и $\frac{\partial \mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k}$, $k = 1, 2, 3$, и складывая полученные выражения, мы придем к соотношению

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_k} = -2Re\,[\overline{\mathbf{u}_{h1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \times \mathbf{u}_{e1}^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{p})]_k. \qquad (70)$$

Отсюда видно, что второе и четвертое слагаемое в уравнении (64) взаимно уничтожаются. Далее

$$\{[\mathbf{u}_{h(1)}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta) \times \overline{\mathbf{u}_{e(1)}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})}] + [\overline{\mathbf{u}_{h(1)}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\bar{\theta})} \times \mathbf{u}_{e(1)}^{+}(\mathbf{x}, \nabla\theta)]\}_{(1)k} =$$

$$= \{2Re\,\frac{\partial}{\partial x^n}[\overline{\mathbf{u}^+_{h(1)}(\mathbf{x},\mathbf{p})} \times \mathbf{u}^+_{e(1)}(\mathbf{x},\mathbf{p})]_k Y_{nj} +$$

$$+2Re\,\frac{\partial}{\partial p^n}[\overline{\mathbf{u}^+_{h(1)}(\mathbf{x},\mathbf{p})} \times \mathbf{u}^+_{e(1)}(\mathbf{x},\mathbf{p})]_k \Gamma_{nm} Y_{mj}\}_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}} \widetilde{y}^j = \qquad (71)$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^n \partial p_k} Y_{nj} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_n \partial p_k}\Gamma_{nm} Y_{mj}\right)\Bigg|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}} \widetilde{y}^j =$$

$$= -[(B^t + \Gamma\, C) Y \widetilde{\mathbf{y}}]_k.$$

Таким образом, используя выражение (71), уравнение (64) преобразуется в линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для l–формы $\phi_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)$

$$\frac{\partial \phi_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)}{\partial t} - \phi_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t) a(t) = b_l(\widetilde{\mathbf{y}};t), \quad l = 0,1,\ldots. \qquad (72)$$

По существу это уравнения для коэффициентов l–форм. В частности

$$\frac{d\phi_{(0)0}(t)}{\partial t} - \phi_{(0)}(t) a(t) = 0. \qquad (73)$$

На следующем шаге мы займемся изучением комплексного коэффициента $a(t)$. Справедлива следующая лемма:

Лемма. *Комплекснозначная функция $a(t)$ имеет следующее представление:*

$$a(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\det Y(t) + i\varphi(t), \qquad (74)$$

где

$$\varphi(t) = \mathrm{Im}\,\{[(\epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k}, \mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p}) + (\mu(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k},$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p}))]\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^k} - [(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p}), \mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})) -$$

$$-(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p}), \mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p}))]\}\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}. \qquad (75)$$

Доказательство. Справедливы формулы

$$\mathrm{tr}\,B^t(t) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^i \partial p_i}\Bigg|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}} =$$

$$
= -2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\,[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p}))]\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}
$$

$$
\mathrm{tr}\,C(t)\Gamma(t) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i\partial p_k}\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}\Gamma_{ik}(t) =
$$

$$
= -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial p_i}[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})]_k\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}\Gamma_{ik}(t). \qquad (76)
$$

Используя эти формулы, мы можем представить выражение для $\frac{d}{dt}(\ln\det Y(t))$ в виде:

$$
\frac{d}{dt}(\ln\det Y(t)) = \mathrm{tr}\,\left(\frac{dY(t)}{dt}Y^{-1}\right) = \mathrm{tr}\,(B^t(t)+C(t)\Gamma(t)) =
$$

$$
-2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\,\,[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})]\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}} -
$$

$$
-2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial p_i}\,[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})]_k\Big|_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}\Gamma_{ik}(t). \qquad (77)
$$

Тогда $a(t)$ может быть представлено в виде:

$$
a(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\det Y(t) + b(t), \qquad (78)
$$

где

$$
\begin{aligned}
b(t) = \Bigg\{ \Bigg[&\left(\epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k},\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})\right) + \left(\mu(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_k},\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})\right)\Bigg] \times \\
&\times\left[\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^k} + \Gamma_{kn}(t)\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_n}\right] + \\
&+(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p}),\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})) - (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p}),\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p}) + \\
&+\left[\frac{\partial\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i}\times\overline{\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})}\right]_k\Gamma_{ik}(t) + \left[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\frac{\partial\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i}\right]_k\Gamma_{ik}(t) - \\
&-\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\,[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})] - \\
&-\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial p_i}[\overline{\mathbf{u}_h(\mathbf{x},\mathbf{p})}\times\mathbf{u}_e(\mathbf{x},\mathbf{p})]_k\Gamma_{ik}(t)\Bigg\}_{\begin{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\end{pmatrix}}
\end{aligned} \qquad (79)
$$

Проведя достаточно громоздкие вычисления аналогичные тем, которые использовались при выводе формул (68)–(70), можно показать, что

$$\operatorname{Re} b(t) = 0,$$
$$\operatorname{Im} b(t) = \varphi(t). \tag{80}$$

Тогда представление (78) приводит к выражению (74) для функции $a(t)$.

После нахождения представления (74) для функции $a(t)$ уравнение (73) легко решается и мы получаем следующую формулу для $\phi_{(0)0}$:

$$\phi_{(0)0}(t) = \frac{\widetilde{\phi}_{(0)0}}{\sqrt{\det Y(t)}} e^{\int_0^t i\varphi(\tau)d\tau} \tag{81}$$

с константой $\widetilde{\phi}_{(0)0}$, которая может быть определена из начальных данных. Аналогичным образом решаются уравнения (72), поскольку правая часть на каждом шаге будет известна. В результате получим, что

$$\phi_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t) = \frac{1}{\sqrt{\det Y(t)}} e^{\int_0^t i\varphi(\tau)d\tau} \Big\{ \widetilde{\phi}_{(0)l}(\widetilde{\mathbf{y}};0) +$$
$$+ \int_0^t \sqrt{\det Y(t')} e^{-\int_0^{t'} i\varphi(\tau)d\tau} b_l(\widetilde{\mathbf{y}};t')dt' \Big\}. \tag{82}$$

Таким образом, мы выполнили условие разрешимости системы уравнений (21) при $n = 1$ и определили скалярную функцию $\phi_{(0)}(\mathbf{x},t)$ в виде разложения Тейлора с точностью до ее начальных условий, т. е. ее разложения Тейлора при $t = 0$

$$\phi_{(0)}(\mathbf{x},0) = \phi_{(0)0}(0) + \phi_{(0)1}(\widetilde{\mathbf{y}};0) + \dots. \tag{83}$$

Напомним, что $\det Y(t)$ отличен от нуля при всех t.

После выполнения условий разрешимости (59) мы можем решить систему (21) при $n = 1$. Удобно искать это решение в виде разложений по собственным векторам $\vec{u}_i^{\,\pm}(\mathbf{x},\nabla\theta)$, $i = 0,1,2$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{H}_{(n)}(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{j=0,1,2} \phi^{j\sigma}_{(n)}(\mathbf{x},t) \vec{u}_j^{\,\sigma}(\mathbf{x},\nabla\theta). \tag{84}$$

При $n=1$ коэффициенты $\phi^{m\gamma}_{(1)}$, $m=0,1,2$, $\gamma=\pm$, $(m,\gamma)\neq(1,+)$, легко находятся

$$\phi^{m\gamma}_{(1)}(\mathbf{x},t)=\frac{(\vec{F}_{(1)}(\mathbf{x},t),\vec{u}^{\,\gamma}_m(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))}{h_1(\mathbf{x},\nabla\theta)-\gamma h_m(\mathbf{x},\nabla\theta)} \tag{85}$$

где

$$\vec{F}_{(N+1)}(\mathbf{x},t)=\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{(N+1)e}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{F}_{(N+1)h}(\mathbf{x},t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{E}_{(N)}(\mathbf{x},t)}{\partial t}-\operatorname{rot}\mathbf{H}_{(N)}(\mathbf{x},t)\\ \mu(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{H}_{(N)}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{E}_{(N)}(\mathbf{x},t)\end{pmatrix}, \tag{86}$$

при $N=0,1,\ldots$. Очевидно, что, в силу выполнения условий разрешимости, уравнение для нахождения функции $\phi_{(1)}(\mathbf{x},t)=\phi^{1+}_{(1)}(\mathbf{x},t)$ превращается в очевидное тождество $0=0$. Таким образом, функция $\phi_{(1)}(\mathbf{x},t)$ на этом этапе не находится. Она будет найдена из условий разрешимости системы уравнений (21) при $n=2$. Затем можно использовать рекуррентную процедуру. Коэффициенты $\phi^{j\sigma}_{(N)}(\mathbf{x},t)$, $(j,\sigma)\neq(1,+)$ находятся прямо из уравнений (21) при $n=N$.

$$\phi^{m\gamma}_{(N+1)}(\mathbf{x},t)=\frac{(\vec{F}_{(N+1)}(\mathbf{x},t),\vec{u}^{\,\gamma}_m(\mathbf{x},\nabla\bar{\theta}))}{h_1(\mathbf{x},\nabla\theta)-\gamma h_m(\mathbf{x},\nabla\theta)}, \tag{87}$$

где $\vec{F}(N+1)$ определяется формулой (86). Функции $\phi^{1+}_{(N)}(\mathbf{x},t)$ находятся из условий разрешимости уравнений (21) при $n=N+1$. Для членов разложений функций $\phi_{(N)}(\mathbf{x},t)=\phi^{1+}_{(N)}(\mathbf{x},t)$ по однородным многочленам

$$\phi_{(N)}(\mathbf{x},t)=\phi_{(N)0}(t)+\phi_{(N)1}(\widetilde{\mathbf{y}};t)+\ldots, \tag{88}$$

получим последовательность уравнений

$$\frac{\partial\phi_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)}{\partial t}-a(t)\phi_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)=b_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t), \tag{89}$$

где $b_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)$ определяется по $\phi^{j\sigma}_{(N)}(\mathbf{x},t)$ $(j,\sigma)\neq(1,+)$ и $\phi_{(N)k}(\widetilde{\mathbf{y}};t)$, $k=0,1,\ldots,l-1$. Эти уравнения легко решаются и мы получим:

$$\phi_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};t)=\frac{1}{\sqrt{\det Y(t)}}e^{\int_0^t i\varphi(\tau)d\tau}\left\{\widetilde{\phi}_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}};0)+\right.$$

$$+\int_0^t \sqrt{\det Y(t')}e^{-\int_0^{t'} i\varphi(\tau)d\tau} b_{(N)l}(\widetilde{\mathbf{y}},t')dt' \Bigg\}. \tag{90}$$

Таким образом, функции $\phi_{(N)}(\mathbf{x},t)$ находятся с точностью до их разложений Тейлора при $t = 0$. Построение нестационарного гауссового пучка типа квазифотон для общих уравнений Максвелла с произвольной анизотропией закончено.

Литература

1. А. Г. Гуревич, Г. В. Мелков, *Магнитные колебания и волны.* М., Наука, 1994, 462.
2. В. М. Бабич, Т. Ф. Панкратова, *О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения с переменным коэффициентом.* — Сб. Проблемы математической физики, ЛГУ **6** (1973), 9–27.
3. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **117** (1981), 5–12.
4. А. П. Качалов, *Координатная система для описания "квазифотона".* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **140** (1986), 73–76.
5. A. P. Katchalov, Y. V. Kurylev, *Multidimensional Gelfand inverse problem with incomplete boundary spectral data.* Preprint No 1831, Darmstadt Univ., 1996, 106.
6. A. P. Katchalov, Y. V. Kurylev, *Multidimensional inverse problem with incomplete boundary spectral data.* Commun. in Partial Differential Equations, **23**, Nos. 1, 2 (1998), 55–95.

Katchalov A. P. Nonstationary electromagnetic Gaussian beams in nonhomogeneous anysotropic media.

In the paper nonstationary Gaussian beams of the quasiphoton type for the Maxwell equation with general anysotropy have been constructed. The solutions of the Maxwell equations can be described as ray type solutions with complex phases and amplitudes. Due to the large parameter p they concentrated in small neighbourhoods of the space-time rays corresponding to different types of electromagnetic waves in the anysotropic medium.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 ноября 1999 г.