Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. И. Белишев, А. В. Зуров

ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С СОВПАДЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

0. Введение.

В работе рассматривается двухскоростная динамическая система вида

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;$$
$$u|_{x=0} = f,$$

в которой $\rho = \rho(x)$ и $V = V(x)$ суть гладкие 2×2-матрицы-функции; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_\alpha > 0$; f – граничное управление; $u = u(x,t)$ – решение. Исследуются особенности фундаментального решения, отвечающего управлениям $\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$ ($\delta = \delta(t)$ – дельта-функция Дирака).

Если $\rho_1(x) \neq \rho_2(x)$, то особенности фундаментального решения описываются стандартной шкалой: δ, $\int \delta$, $\iint \delta, \dots$. Присутствие точек $x = x_* : \rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$ приводит к интересному эффекту: у фундаментального решения появляются особенности промежуточных (дробных) порядков. Их исследование составляет предмет работы.

Авторы признательны М. М. Попову за полезные обсуждения по теме работы.

1. Эйконалы, характеристики.

Пусть на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ заданы две (вещественные) гладкие[1] 2×2 – матрицы-функции $\rho = \rho(x)$ и $V = V(x)$, причем ρ диагональна и положительно определена: $\rho = \{\rho_\alpha(x)\delta^\alpha_\beta\}_{\alpha,\beta=1,2}$ (δ^α_β – символ Кронекера), $\rho_\alpha(x) > 0$, пусть $\rho_1(0) < \rho_2(0)$. Функции ρ_α

Работа поддержана грантами РФФИ No. 99-01-00107 и No. 96-15-96121.

[1]Всюду в работе "гладкий" означает C^∞-гладкий.

будем называть *плотностями*, функции $c_\alpha := \rho_\alpha^{-1/2}$-*скоростями*; (матрицу-)функцию V – *потенциалом*.

Функции $\tau_\alpha(x) := \int_0^x \rho_\alpha^{1/2}(s)\, ds$ суть *эйконалы*; функции

$$\tau_*(x) := \int\limits_0^x \min[\rho_1^{1/2}(s), \rho_2^{1/2}(s)]\ ds,$$

$$\tau^*(x) := \int\limits_0^x \max[\rho_1^{1/2}(s), \rho_2^{1/2}(s)]\ ds$$

называются *квазиэйконалами*.

На плоскости переменных x, t в полосе $0 \leqslant x \leqslant l$ эйконалы определяют семейства *характеристик* $t \pm \tau_\alpha(x) = \text{const}$; линии $t - \tau_*(x) = \text{const}$ и $t - \tau^*(x) = \text{const}$ назовем *квазихарактеристиками*.

Обозначим $T := \tau_*(l)$.

2. Двухскоростная динамическая система.

Рассмотрим систему

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{3}$$

в которой $f = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^2$-значная функция (*граничное управление*); пусть $u = u^f(x,t)$ – решение, являющееся $\mathbb{R}^2$-значной функцией от x, t.

Система (1)–(3) описывает одномерную (по x) волнопроводящую систему, в которой возможны колебания двух типов, распространяющиеся со скоростями c_1, c_2 и взаимодействующие друг с другом. В качестве примеров укажем балку Тимошенко в теории упругости и двухканальную кабельную линию в электротехнике.

Наряду с системой (1)–(3) рассмотрим матричную задачу

$$\rho U_{tt} - U_{xx} + VU = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \tag{4}$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0; \tag{5}$$

$$U|_{x=0} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\delta = \delta(t)$ – дельта-функция Дирака; матрица-функция $U = U(x,t)$ называется *фундаментальным решением* (ф.р.). Строгое определение ф.р. как обобщенного решения задачи (4)–(6) будет дано ниже.

Главная цель работы – исследование особенностей фундаментального решения; мы проведем его по следующему плану:

- задача (1)–(3) сводится к интегральному уравнению; устанавливается его разрешимость;
- фундаментальное решение U определяется через соответствующее интегральное уравнение; особенности U извлекаются из анализа итераций интегрального уравнения.

3. Интегральное уравнение.

Рассмотрим вспомогательную скалярную задачу для волнового уравнения

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + vu = h, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \tag{8}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{9}$$

с плотностью $\rho = \rho(x) > 0$, потенциалом $v = v(x)$, правой частью $h = h(x,t)$ и управлением $f = f(t)$; финальный момент $T = \tau(l)$ определяется эйконалом $\tau(x) := \int_0^x \rho^{1/2}(s)\, ds$. Эйконал определяет семейство характеристик $t \pm \tau(x) = \text{const}$ уравнения (7).

Пусть $\Pi_0 := \{(x,t) |\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ есть прямоугольник, в котором решается задача (7)–(9). Фиксируем точку $(x_0, t_0) \in \Pi_0$ и определим $K(x_0, t_0) \subset \Pi_0$ как подмножество, ограниченное характеристиками I: $t + \tau(x) = t_0 + \tau(x_0)$, II: $t - \tau(x) = t_0 - \tau(x_0)$ и III: $t + \tau(x) = t_0 - \tau(x_0)$ (см. рис. 1).

Пусть правая часть в (7) локализована выше характеристики: $h(x,t) = 0$ при $t < \tau(x)$. В этом случае известным приемом, – методом Д'Аламбера, систему (7)–(9) можно свести к интегральному уравнению; опишем соответствующий результат. Введем оператор $\mathcal{M}$, преобразующий функции от x, t в прямоугольнике Π_0 по правилу:

$$(\mathcal{M}w)(x,t) := \frac{-1}{2\rho^{1/4}(x)} \iint\limits_{K(x,t)} d\xi d\eta \frac{1}{\rho^{1/4}(\xi)} \left[v(\xi) + \gamma(\xi)\right] u(\xi, \eta), \tag{10}$$

где

$$\gamma := \rho^{1/4} \frac{d}{dx}\left(\rho^{-1/2} \frac{d}{dx} \rho^{1/4}\right).$$

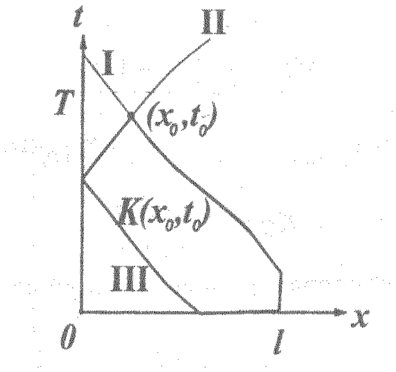

Рис. 1

Задача (7)–(9) равносильна уравнению

$$u - \mathcal{M}u = g$$

с правой частью

$$g(x,t) := \frac{\rho^{1/4}(0)}{\rho^{1/4}(x)} f(t-\tau(x)) + \frac{1}{2\rho^{1/4}(x)} \iint\limits_{K(x,\ t)} d\xi d\eta \frac{1}{\rho^{1/4}(\xi)} h(\xi,\eta),$$

где первое слагаемое понимается с учетом соглашения: *все зависящие от времени функции доопределены нулем при* $t < 0$. Это соглашение действует во всей работе.

Вернемся к задаче (1)–(3); она рассматривается в прямоугольнике

$$\Pi := \{(x,t)|\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

где $T = \tau_*(l)$. Обозначим

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} 2, & \alpha = 1, \\ 1, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Записывая (1) в виде:

$$\rho_\alpha u^\alpha_{tt} - u^\alpha_{xx} + V^\alpha_\alpha u^\alpha = -V^\alpha_{\overline{\alpha}} u^{\overline{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2)$$

и используя описанный выше прием для каждой из компонент решения $u = \binom{u^1}{u^2}$, нетрудно свести систему к интегральному уравнению

$$u - \mathcal{M}u = \widetilde{f}, \tag{11}$$

с матричным интегральным оператором $\mathcal{M}$, действующим на заданные в Π $\mathbb{R}^2$-значные функции от x, t по правилу:

$$\mathcal{M}y := \mathcal{K}\ [\ V + \Gamma\ ]y, \tag{12}$$

где

$$\Gamma := \left\{\gamma_\alpha \delta_\beta^\alpha\right\}_{\alpha,\,\beta=1,2}, \quad \gamma_\alpha := \rho_\alpha^{1/4}\frac{d}{dx}\big(\rho_\alpha^{-1/2}\frac{d}{dx}\rho_\alpha^{1/4}\big);$$

$$\mathcal{K}y := \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 y^1 \\ \mathcal{K}_2 y^2 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{K}_\alpha$ – интегральный оператор, действующий на $\mathbb{R}^1$-значные функции по правилу

$$(\mathcal{K}_\alpha \varphi)(x,t) := \frac{-1}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \iint\limits_{K_\alpha(x,t)} d\xi d\eta \frac{1}{\rho_\alpha^{1/4}(\xi)} \varphi(\xi,\eta),$$

где области интегрирования $K_\alpha(x,t)$ определяются так, как показано на рис. 1 с заменой эйконала τ на τ_α; правая часть уравнения (11) есть

$$\widetilde{f}(x,t) := \begin{pmatrix} \mu_1(x) f^1(t-\tau_1(x)) \\ \mu_2(x) f^2(t-\tau_2(x)) \end{pmatrix}, \ \ \mu_\alpha(x) := \left[\frac{\rho_\alpha(0)}{\rho_\alpha(x)}\right]^{1/4}.$$

Отметим свойства оператора $\mathcal{M}$, легко следующие из его определения:

(i) $\mathcal{M}$ действует непрерывно из $L_2(\Pi;\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{C}(\Pi;\mathbb{R}^2)$;

(ii) $\mathcal{M}$ действует непрерывно из $\mathcal{C}(\Pi;\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{C}^1(\Pi;\mathbb{R}^2)$.

Обобщенное решение: существование и единственность.

Если управление f гладкое и удовлетворяет обычным условиям согласования при $t = 0$, то задача (1)–(3) имеет классическое решение $u = u^f$, которое удовлетворяет интегральному уравнению (11). Обратно, гладкое в Π решение уравнения (11) удовлетворяет (1)–(3) в классическом смысле. Этим мотивируется следующее определение: для $f \in L_2((0,T);\mathbb{R}^2)$ *обобщенным решением* задачи (1)-(3) в классе $L_2(\Pi;\mathbb{R}^2)$ мы называем решение интегрального уравнения (11).

Теорема 1. *Обобщенное решение существует и единственно.*

Доказательство. В прямоугольнике Π рассмотрим семейство подмножеств:

$$\Pi^\xi := \{(x,t) \in \Pi \mid t \geqslant \tau_*(x) + \xi\}, \quad -T \leqslant \xi \leqslant T.$$

Обозначим $\mathcal{H} := L_2(\Pi;\mathbb{R}^2)$ и рассмотрим семейство подпространств
$$\mathcal{H}^\xi := \{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp}\ y \subset \Pi^\xi\}.$$

Пусть P^ξ есть ортогональный проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$; его действие сводится к срезке функций на Π^ξ. Как легко видеть, семейство $\{\mathcal{H}^\xi\}$ обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{H}^{-T} = \{0\}; \quad \mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}^{\xi'},\ \xi < \xi'; \quad \mathcal{H}^T = \mathcal{H}; \quad s\text{–}\lim_{\tau \to \xi} P^\tau = P^\xi. \quad (13)$$

Из определения оператора $\mathcal{M}$ легко усматривается, что он действует инвариантно на $\mathcal{H}^\xi$: $\mathcal{M}\mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi$, $-T \leqslant \xi \leqslant T$. Кроме того, $\mathcal{M}$ компактен (см. (i), п. 3). Компактный оператор, инвариантный относительно семейства подпространств со свойствами (13) является вольтерровым (см. [1], гл. 2, §17, следствие теоремы 17.1); следовательно, оператор $\mathbb{I} - \mathcal{M}$ ограниченно обратим в $\mathcal{H}$.

Из включения $f \in L_2((0,T);\mathbb{R}^2)$ для правой части (11) легко следует: $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$. Следовательно, уравнение (11) разрешимо единственным образом : $u^f = (\mathbb{I} - \mathcal{M})^{-1}\widetilde{f}$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы усматривается дополнительное свойство решения интегрального уравнения (11). Его правая часть $\widetilde{f}$ аннулируется при $t < \tau_*(x)$, что равносильно включению $\widetilde{f} \in \mathcal{H}^0$. Последнее, по свойству $\mathcal{M}\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^0$, влечёт: $u^f \in \mathcal{H}^0$, то есть
$$u^f(x,t) = 0,\ t < \tau_*(x). \quad (14)$$

5. Фундаментальное решение.

Если u^f – решение уравнения (11), то разность $w := u^f - \widetilde{f}$ удовлетворяет итерированному уравнению
$$w - \mathcal{M}w = \mathcal{M}\widetilde{f}. \quad (15)$$

Благодаря сглаживающим свойствам оператора $\mathcal{M}$, при сингулярных управлениях $f_1 := \binom{\delta}{0}$ и $f_2 := \binom{0}{\delta}$ правая часть уравнения (15) определяет (в естественном смысле) функции $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha \in L_2(\Pi;\mathbb{R}^2)$ с компонентами
$$\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^\beta(x,t) = \frac{-\rho_\alpha^{1/4}(0)}{2\rho_\beta^{1/4}(x)} \int\limits_{\mathcal{L}^{\alpha\beta}(x,t)} \frac{V_\alpha^\beta + \gamma_\beta \delta_\alpha^\beta}{\rho_\beta^{1/4}\rho_\alpha^{1/4}} \frac{ds}{\big(1+\rho_\alpha\big)^{1/2}}, \quad (16)$$

где $\mathcal{L}^{\alpha\beta}(x,t) := \{(x,t)|\ \tau_\alpha(x) = t\} \cap K_\beta(x,t)$ есть часть α-той характеристики, лежащая в множестве $K_\beta(x,t)$. Для получения (16) можно взять аппроксимации $f_1^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \delta_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\varepsilon \end{pmatrix}$ с

$$\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon; \\ 0, & t > \varepsilon; \end{cases}$$

и провести предельный переход $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha^{(\varepsilon)} \to \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$ при $\varepsilon \to +0$.

Уравнение (15) с правыми частями $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$ разрешимо в $L_2(\Pi;\mathbb{R}^2)$ единственным образом; пусть w_1 и w_2 суть соответствующие решения. Из них, как из столбцов, составим матрицу

$$W(x,t) := \{w_1(x,t);\ w_2(x,t)\},\ (x,t) \in \Pi.$$

Фундаментальным решением системы (1)–(3) мы называем матричное распределение на Π вида

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} \mu_1(x)\delta(t-\tau_1(x)) & 0 \\ 0 & \mu_2(x)\delta(t-\tau_2(x)) \end{pmatrix} + W(x,t). \qquad (17)$$

Первое слагаемое в (17) – сингулярная часть фундаментального решения; особенности (нарушения гладкости) регулярной части W – предмет нашего исследования.

6. Скачки фундаментального решения.

Здесь мы опишем разрывы первого рода (скачки) регулярной части W.

Лемма 1. *Функции $w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$ непрерывны в Π.*

Доказательство. Из уравнения (15) имеем:

$$w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha = \mathcal{M}w_\alpha.$$

По свойству (i) п. 3 имеем: $\mathcal{M}w_\alpha \in \mathcal{C}(\Pi;\mathbb{R}^2)$. Лемма доказана.

Опишем скачки функции $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$. В представлении (16), при $t < \tau_\alpha(x)$ имеем: $\mathcal{L}^{\alpha\alpha}(x,t) = \varnothing$, откуда

$$(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha)^\alpha(x,t) = 0, \quad t < \tau_\alpha(x). \qquad (18)$$

Из того же представления следует соотношение

$$\left(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^\alpha(x,\tau_\alpha(x)+0) = \frac{-\rho_\alpha^{1/4}(0)}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \int\limits_0^x \left(\frac{V_\alpha^\alpha + \gamma_\alpha}{\rho_\alpha^{1/2}}\right)(\xi)d\xi, \qquad (19)$$

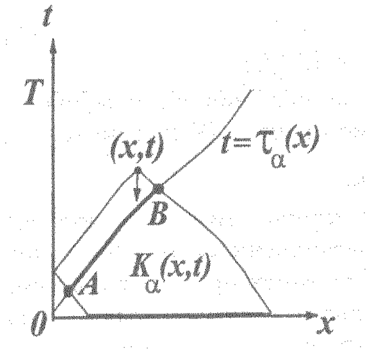

Рис. 2

которое иллюстрирует рис. 2.
Область интегрирования $\mathcal{L}^{\alpha\alpha}(x,t)$ в (16) есть участок AB характеристики $t=\tau_\alpha(x)$; при пересечении точкой (x,t) характеристики значение интеграла меняется скачком и становится равным нулю.

Итак, компоненты $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^\alpha$ разрывны на характеристиках $t=\tau_\alpha(x)$; относительно компонент $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}$ заметим следующее. Простой анализ показывает, что они могут иметь разрывы в том и только в том случае, если $\operatorname{mes}\{x_*\in[0,l]\mid\rho_1(x_*)=\rho_2(x_*)\}>0$. Проиллюстрируем появление скачка $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_1\big)^2$ в ситуации: $\rho_1(x)<\rho_2(x)$ при $x<x_*$ и $\rho_1(x)=\rho_2(x)$ при $x\geqslant x_*$ (см. рис. 3).

При переходе точки (x,t) с $x>x_*$ через характеристику $t=\tau_1(x)$ длина участка AB меняется скачком, что и приводит к появлению скачка у $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_1\big)^2$.

По лемме 1 скачки решения w_α и функции $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$ совпадают. Тем самым, описание скачков W получено.

7. Точки резонанса.

Точки, в которых плотности совпадают: $\rho_1(x_*)=\rho_2(x_*)$, $x_*\in(0,l)$, мы называем *резонансными*. Как будет видно из дальнейшего, присутствие таких точек приводит к физическим эффектам.

Следующий результат уточняет характер гладкости регулярной части фундаментального решения.

Лемма 2. *Если число точек резонанса конечно, то справедливо*

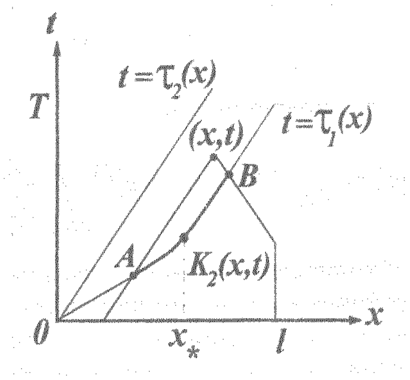

Рис. 3

включение $\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^{\overline{\alpha}} \in \mathcal{C}^1(\Pi)$, $\alpha = 1, 2$.

Доказательство. Из (15) имеем:

$$w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha = \mathcal{M}\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right) + \mathcal{M}^2\widetilde{f}_\alpha. \tag{20}$$

По свойству (ii) п. 3, из леммы 1 следует:

$$\mathcal{M}\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right) \in \mathcal{C}^1(\Pi; \mathbb{R}^2).$$

Воспользовавшись определением (12), запишем (20) покомпонентно:

$$\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^\beta = \left(\mathcal{M}\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)\right)^\beta + \mathcal{K}_\beta g_\alpha^\beta, \tag{21}$$

где

$$g_\alpha^\beta := \sum_{\nu=1}^{2} \left[V + \Gamma\right]_\nu^\beta \left(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^\nu.$$

Дифференцируя $\mathcal{K}_\beta g_\alpha^\beta$, можно получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}_\beta g_\alpha^\beta = \frac{-\rho_\beta'}{4\rho_\beta}\left(\mathcal{M}^2\widetilde{f}_\alpha\right)^\beta + \rho_\beta^{1/4} \int\limits_{\partial K_\beta} \frac{g_\alpha^\beta}{\rho_\beta^{1/4}} dx, \tag{22}$$

где граница ∂K_β обходится в положительном направлении. Если число резонансных точек конечно, то на характеристике $t = \tau_{\bar{\beta}}(x)$ нет участков положительной длины, параллельных характеристикам, составляющим контур интегрирования ∂K_β. Из этого легко усматривается, что интеграл по границе в (22) зависит от положения вершины (x,t) контура ∂K_β непрерывно. Аналогичный результат верен и для производной по времени $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_\beta g_\alpha^\beta$.

Таким образом, правая часть (21) оказывается непрерывно дифференцируемой на П. Лемма доказана.

Вполне аналогичный анализ приводит к следующему результату, доказательство которого мы опустим.

Лемма 3. *Если число точек резонанса конечно, то компонента* $\left(w_\alpha - \mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^\alpha$ *непрерывно дифференцируема в* П *вне характеристики* $t = \tau_\alpha(x)$.

Леммы 2 и 3 позволяют свести описание главных особенностей регулярной части W фундаментального решения к описанию соответствующих особенностей итерации $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$.

8. Разрывы производных $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$.

Сначала опишем особенности, характер которых не зависит от наличия или отсутствия резонансных точек. Напомним, что возможные скачки $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$ уже описаны в п. 6.

Компонента $\left(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^{\overline{\alpha}}$ имеет скачок производной на характеристике $t = \tau_{\overline{\alpha}}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\right)^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_{\overline{\alpha}}(x)-0}^{t=\tau_{\overline{\alpha}}(x)+0} = \left(\frac{\rho_{\overline{\alpha}}(0)}{\rho_{\overline{\alpha}}(x)}\right)^{1/4} \frac{V_\alpha^{\overline{\alpha}}(0)}{\rho_{\overline{\alpha}}(0) - \rho_\alpha(0)}; \tag{23}$$

происхождение этого скачка для $\left(\mathcal{M}\widetilde{f}_1\right)^2$ иллюстрирует рис. 4.

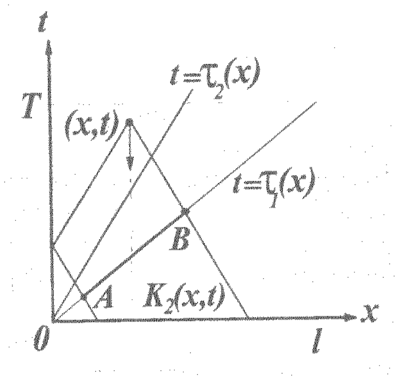

Рис. 4

Участок AB на рисунке есть участок интегрирования $\mathcal{L}^{12}(x,t)$ (см. (16)). При пересечении точкой (x,t) характеристики $t = \tau_2(x)$, скорость изменения длины участка AB меняется скачком. Аналогично ведет себя и скорость изменения интеграла (16); простой анализ показывает, что ее скачок определяется значениями плотности и потенциала в $x=0$, и приводит к (23).

Займемся особенностями, характер которых зависит от наличия резонансных точек. Начнем с общего замечания. Если число резонансных точек конечно, то компоненты $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}$ непрерывны (см. п.6). Из непрерывности легко следует, что возможные разрывы частных производных на характеристиках связаны простым соотношением:

$$-\rho_\beta^{1/2}(x)\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_\beta(x)-0}^{t=\tau_\beta(x)+0} = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_\beta(x)-0}^{t=\tau_\beta(x)+0}.$$

Это позволяет ограничиться анализом разрывов производных по времени.

Для простоты предположим, что на отрезке $[0,l]$ имеется одна резонансная точка: $\rho_1(x) < \rho_2(x)$ при $x < x_*$; $\rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$; $\rho_1(x) \neq \rho_2(x)$ при $x > x_*$. Как мы увидим, между случаями

I: $\rho_1(x) < \rho_2(x)$ при $x > x_*$;

II: $\rho_1(x) > \rho_2(x)$ при $x > x_*$; имеются качественные различия. Различия обсудим позже; здесь приведем результат, общий для обоих случаев.

При $x \neq x_*$ для компонент $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}$ выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha\big)^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0} = \left(\frac{\rho_\alpha(0)}{\rho_\alpha(x)}\right)^{1/4}\frac{V_\alpha^{\overline{\alpha}}(x)}{\rho_\alpha(x)-\rho_{\overline{\alpha}}(x)}. \tag{24}$$

Происхождение этого разрыва иллюстрирует рис. 5 для компонент $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_1\big)^2$ и $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_2\big)^1$ соответственно.

Существенно, что при $x \neq x_*$ граница $\partial K_\alpha(x,t)$ и характеристика $t = \tau_{\overline{\alpha}}(x)$ пересекаются трансверсально. Поэтому при переходе точки (x,t) через соответствующую характеристику скорость изменения длины участка AB меняется скачком. Аналогично ведет себя и скорость изменения интеграла; простой анализ приводит к (24).

При $x = x_*$ знаменатель (24) обращается в ноль и особенности в точках $(x_*, \tau_\alpha(x_*))$ требуют отдельного рассмотрения. Последовательно разберем случаи I и II.

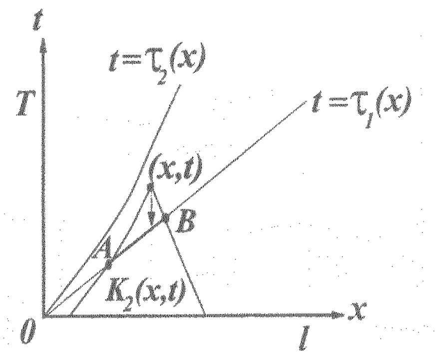

Рис. 5а

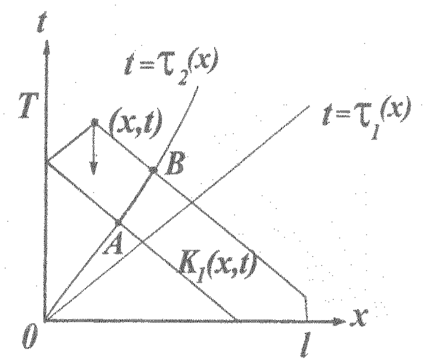

Рис. 5б

9. Случай I.

Мы полагаем $\rho_1(x) < \rho_2(x)$ при всех $x \neq x_*$; обозначим $\rho_* := \rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$. В этом случае для эйконалов имеем: $\tau_*(x) = \tau_1(x)$ и $\tau^*(x) = \tau_2(x)$ всюду на $[0, l]$, вследствие чего характеристики и квазихарактеристики совпадают.

Поведение плотностей в окрестности резонансной точки описывается представлением:

$$\rho_2(x) - \rho_1(x) = A(x - x_*)^{2p} + o\big((x - x_*)^{2p}\big),$$

где $A > 0$, $p = 1, 2, \ldots$; число $r := 2p + 1$ мы назовем *порядком* точки резонанса.

Для малых $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$(\mathcal{M}\widetilde{f}_1)^2(x_*, \tau_1(x_*){+}\varepsilon) = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_1^2(x_*)}{\rho_* R_1^{(r)}}\right]\varepsilon^{1/r}+o(\varepsilon^{1/r}), \tag{25}$$

в котором

$$R_\alpha^{(r)} := \left|\left\{\frac{1}{r!}\left[\rho_{\overline{\alpha}}^{-1/2}\frac{d}{dx}\right]^{(r-1)}\left(\frac{\rho_\alpha}{\rho_{\overline{\alpha}}}\right)^{1/2}\Bigg|_{x=x_*}\right\}\right|^{1/r}, \ \alpha = 1, 2. \tag{26}$$

Опуская его вывод, ограничимся графической иллюстрацией (см. рис. 6).

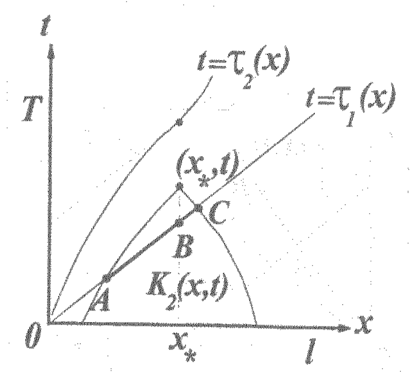

Рис. 6

При выходе точки $(x_*, \tau_1(x_*){+}\varepsilon)$ на характеристику длина участка AB стремиться к нулю, имея порядок $O(\varepsilon^{1/r})$.

Вне точки $(x_*, \tau_1(x_*))$на характеристике $t = \tau_1(x)$ производная $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{M}\widetilde{f}_1)^2$ имеет скачок, описанный в (24).

Опишем поведение компоненты $(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1$ в окрестности точки $(x_*, \tau_2(x_*))$. Она непрерывна; можно показать, что предел $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x_*, \tau_2(x_*) + 0)$ конечен; для малых $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x_*, \tau_2(x_*)) - (\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x_*, \tau_2(x_*) - \varepsilon) = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_2^1(x_*)}{\rho_* R_2^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r} + o(\varepsilon^{1/r}). \tag{27}$$

Опуская подробный вывод (27), ограничимся иллюстрацией (см. рис. 7).

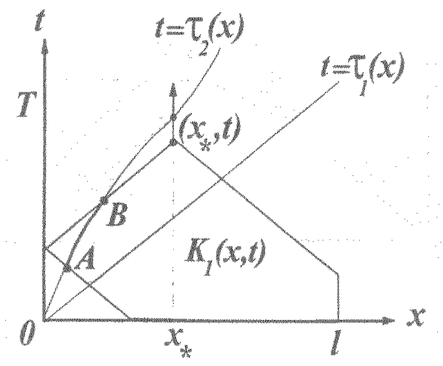

Рис. 7

При выходе точки $(x_*, \tau_2(x_*) - \varepsilon)$ на характеристику длина участка AB стремится к конечному пределу со скоростью $O(\varepsilon^{1/r})$, что и ведет к (27). Вне точки $(x_*, \tau_2(x_*))$ на характеристике $t = \tau_2(x)$ производная $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1$ имеет скачок, описанный в (24).

10. Случай II.

Здесь мы полагаем $\rho_1(x) > \rho_2(x)$ при $x > x_*$, что соответствует следующей асимптотике плотностей в окрестности резонансной точки:

$$\rho_2(x) - \rho_1(x) = A(x - x_*)^{2p-1} + o\big((x - x_*)^{2p-1}\big),$$

где $A > 0,\ p = 1, 2, \ldots$; порядок резонансной точки есть $r = 2p$. Отметим, что в этом случае характеристики и квазихарактеристики различаются: $\tau_*(x) < \tau_1(x)$ и $\tau^*(x) > \tau_2(x)$ при $x > x_*$.

Как легко видеть, в точках $(x_*, \tau_1(x_*))$ и $(x_*, \tau_2(x_*))$ соотношения (25) и (27) сохраняют силу.

При $x > x_*$ для малых $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$(\mathcal{M}\widetilde{f}_1)^2(x, \tau_*(x) + \varepsilon) = -\left(\frac{\rho_1(0)}{\rho_*}\right)^{1/4} \left[\frac{V_1^2(x_*)}{\rho_* R_1^{(r)}}\right] \varepsilon^{1/r} + o(\varepsilon^{1/r}), \quad (28)$$

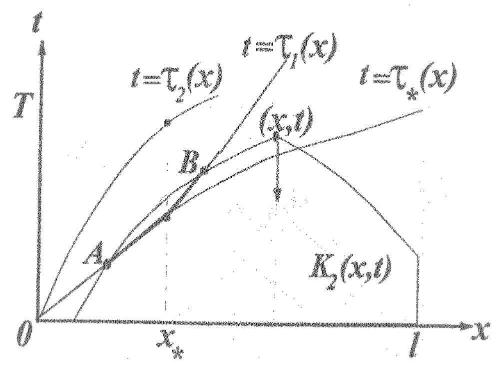

Рис. 8

которое поясняет рис. 8.

При приближении точки $(x, \tau_*(x)+\varepsilon)$ к квазихарактеристике $t=\tau_*(x)$ длина участка AB стремится к нулю как $O(\varepsilon^{1/r})$. Ниже квазихарактеристики компонента $\big(\mathcal{M}\widetilde{f}_1\big)^2$ аннулируется.

При $x > x_*$ компонента $(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1$ непрерывна; можно показать, что существует конечный предел $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x, \tau^*(x)+0)$ и справедливо представление

$$\begin{aligned}&(\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x, \tau^*(x)) - (\mathcal{M}\widetilde{f}_2)^1(x, \tau^*(x)-\varepsilon) = \\ &= -\left(\frac{\rho_2(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_2^1(x_*)}{\rho_* R_2^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r} + o(\varepsilon^{1/r}),\end{aligned} \tag{29}$$

которое иллюстрирует рис. 9.

При выходе точки $(x, \tau^*(x)-\varepsilon)$ на квазихарактеристику $t = \tau^*(x)$ точки B и B' стремятся к точке $(x_*, \tau_2(x_*))$; при этом суммарная длина участков AB и $A'B'$ стремится к конечному пределу со скоростью $O(\varepsilon^{1/r})$.

11. Особенности фундаментального решения.

Как уже отмечалось, столбцы w_α, составляющие регулярную часть W фундаментального решения U, имеют те же главные особенности, что и функции $\mathcal{M}\widetilde{f}_\alpha$. Анализ последних проведен в п.п. 8–10; здесь мы приводим окончательные результаты для U и обсуждаем их физический смысл.

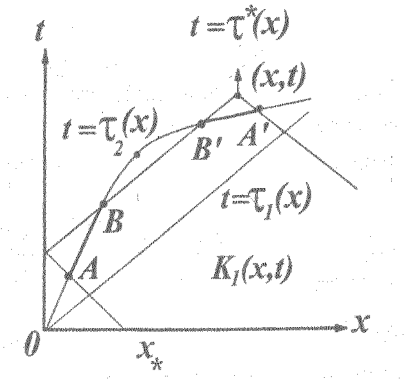

Рис. 9

(1) При $t < \tau_*(x)$ имеем $U(x,t) = 0$, то есть ф.р. локализовано выше квазихарактеристики $t = \tau_*(x)$. Это значит, что передний фронт волны, инициированной граничным управлением, распространяется с переменной скоростью $c_* := \max\{c_1, c_2\}$.

(2) Как видно из (17), сингулярная часть ф.р. определяется матрицей плотностей и не зависит от потенциала. Это означает, что сингулярность, введенная в α-ый канал, распространяется в нем со скоростью c_α независимо от того, взаимодействуют каналы или нет.

(3) Следующие (по порядку гладкости) особенности фундаментального решения суть скачки его регулярной части W. Согласно (19), для компонент w_α^α имеем:

$$w_\alpha^\alpha(x,t)\Big|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0} = \frac{-\rho_\alpha^{1/4}(0)}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \int\limits_0^x \left(\frac{V_\alpha^\alpha + \gamma_\alpha}{\rho_\alpha^{1/2}}\right)(\xi)\, d\xi, \qquad (30)$$

Каждый из скачков находится в том же канале и движется с той же скоростью, что и порождающая его сингулярность; амплитуды скачков определяются диагональю потенциала и не зависят от перекрестных членов $V_\alpha^{\overline{\alpha}}$, ответственных за взаимодействие каналов.

Если число резонансных точек на интервале $(0,l)$ конечно, то описанными выше скачками компонент w_α^α исчерпываются все разрывы первого рода регулярной части W. Если на $(0,l)$ имеются интервалы, в которых плотности совпадают, то скачки могут иметь и компоненты $w_\alpha^{\overline{\alpha}}$, о чем будет сказано ниже.

(4) Следующая особенность – разрывы производных. Возможны разрывы как первого рода (скачки), так и второго (бесконечные односторонние пределы).

$(4)_1$ Опишем скачки производных. Справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\alpha^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_{\overline{\alpha}}(x)-0}^{t=\tau_{\overline{\alpha}}(x)+0} = \left(\frac{\rho_{\overline{\alpha}}(0)}{\rho_{\overline{\alpha}}(x)}\right)^{1/4} \frac{V_\alpha^{\overline{\alpha}}(0)}{\rho_{\overline{\alpha}}(0)-\rho_\alpha(0)}, \tag{31}$$

следующие из (23) в силу леммы 2. Эти особенности фундаментального решения можно интерпретировать как слабые разрывы, появляющиеся в системе за счет взаимодействия каналов в момент $t=0$ в точке $x=0$.

Всюду вне резонансных точек выполнены соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\alpha^{\overline{\alpha}}(x,t)\Big|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0} = \left(\frac{\rho_\alpha(0)}{\rho_\alpha(x)}\right)^{1/4} \frac{V_\alpha^{\overline{\alpha}}(x)}{\rho_\alpha(x)-\rho_{\overline{\alpha}}(x)}, \tag{32}$$

следующие из (24) в силу леммы 2. Они описывают слабый разрыв, который индуцируется в $\overline{\alpha}$-том канале сингулярностью, распространяющейся в α-ом канале. Этот разрыв сопровождает сингулярность, двигаясь со скоростью c_α.

Если в системе резонансные точки отсутствуют, то соотношения (30)–(32) дают исчерпывающее описание главных особенностей регулярной части фундаментального решения.

$(4)_2$ Разрывы второго рода у производных $w_\alpha^{\overline{\alpha}}$ могут появиться только при наличии точек резонанса. Опишем их в ситуации, когда имеется одна такая точка. Отдельно рассмотрим случаи I и II (определения см. в п. 8) и дадим их динамическую интерпретацию.

Случай I (см. п. 9) иллюстрирует рис. 10 для управлений f_1 и f_2 соответственно.

Компоненты $w_\alpha^{\overline{\alpha}}$ непрерывны, и выполнены соотношения

$$w_1^2(x_*,\tau_1(x_*)+\varepsilon) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_1^2(x_*)}{\rho_* R_1^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r}+o(\varepsilon^{1/r}), \tag{33}$$

$$\begin{gathered} w_2^1(x_*,\tau_2(x_*)) - w_2^1(x_*,\tau_2(x_*)-\varepsilon) = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_2^1(x_*)}{\rho_* R_2^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r}+o(\varepsilon^{1/r}), \end{gathered} \tag{34}$$

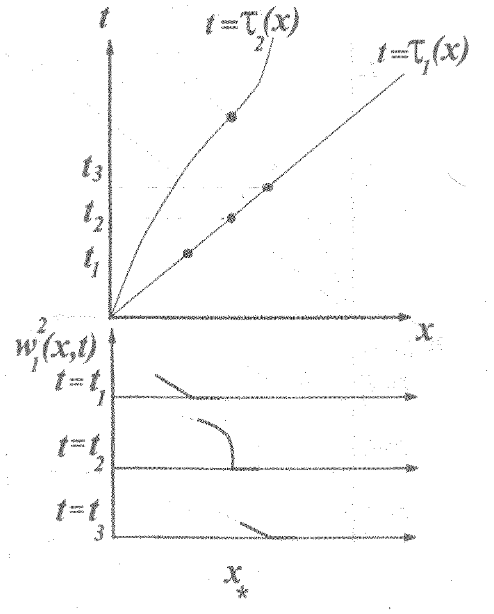

Рис. 10а

следующие из (25) и (27) в силу леммы 2.

Соотношениям (33)–(34) можно дать следующую интерпретацию: при приближении волны, порожденной управлением f_α, к точке резонанса растет крутизна сопутствующего сингулярности излома профиля волны в $\overline{\alpha}$-ом канале. Скорость роста определяется порядком точки резонанса. В момент $t = \tau_\alpha(x_*)$ ($t = t_2$ на рис. 10) крутизна излома становится бесконечной: образуется "лоб". После прохождения точки резонанса крутизна излома вновь становится конечной.

Случай II (см. п. 10) иллюстрирует рис. 11 для управлений f_1 и f_2 соответственно.

Компонента w_1^2 непрерывна; для нее справедливы соотношения

$$w_1^2(x_*, \tau_1(x_*) + \varepsilon) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_1^2(x_*)}{\rho_* R_1^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r} + o(\varepsilon^{1/r}); \quad (35)$$

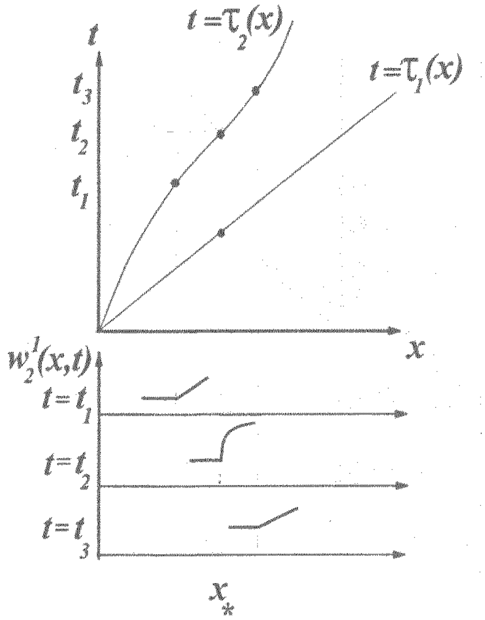

Рис. 10б

$$w_1^2(x,\tau_*(x)+\varepsilon) = -\left(\frac{\rho_1(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_1^2(x_*)}{\rho_* R_1^{(r)}}\right]\,\varepsilon^{1/r}+o(\varepsilon^{1/r}),\ x>x_*, \quad (36)$$

следующие из (25) и (28) в силу леммы 2.

С динамической точки зрения асимптотики (35)–(36) описывают следующий эффект: при подходе волны к резонансной точке крутизна ее переднего фронта во втором канале нарастает и становится бесконечной в самой точке резонанса. Затем образовавшийся лоб отделяется от породившей его сингулярности, обгоняя ее и двигаясь во втором канале со скоростью c_2.

Компонента w_2^1 непрерывна; для нее справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &w_2^1(x_*,\tau_2(x_*)) - w_2^1(x_*,\tau_2(x_*)-\varepsilon) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_2^1(x_*)}{\rho_* R_2^{(r)}}\right]\,\varepsilon^{1/r}+o(\varepsilon^{1/r}), \end{aligned} \quad (37)$$

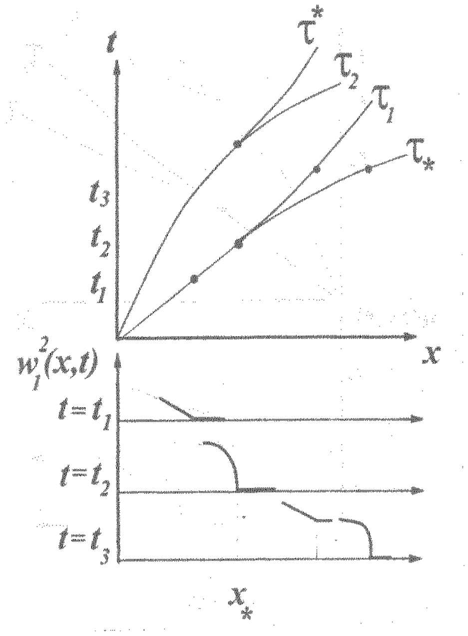

Рис. 11а

$$w_2^1(x,\tau^*(x)) - w_2^1(x,\tau^*(x)-\varepsilon) =$$
$$= -\left(\frac{\rho_2(0)}{\rho_*}\right)^{1/4}\left[\frac{V_2^1(x_*)}{\rho_* R_2^{(r)}}\right]\ \varepsilon^{1/r} + o(\varepsilon^{1/r}),\ \ x > x_*, \tag{38}$$

следующие из (27) и (29) в силу леммы 2.

В этом случае сингулярность движется по второму каналу и порождает лоб в первом канале при прохождении точки резонанса. В отличие от ситуации с компонентой w_1^2, лоб движется в первом канале со скоростью c_1 и отстает от породившей его сингулярности.

Как можно показать, появление лба всегда ведет к появлению бесконечных односторонних пределов у производных компонент w_α^β по x, t.

Появление лба показывает, что в точке $x = x_*$ особенность, индуцируемая сингулярностью в противоположном канале, стано-

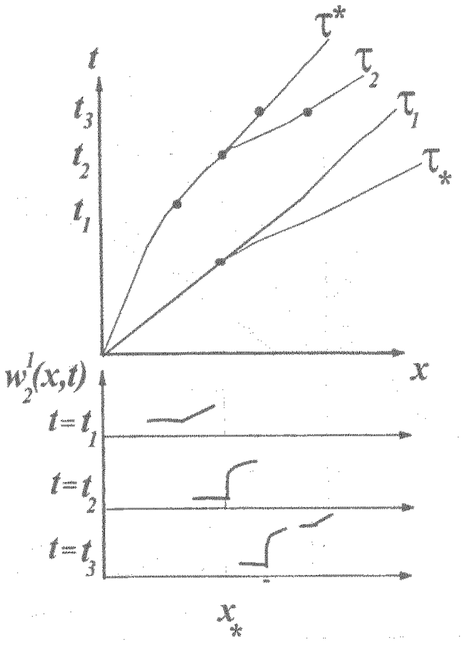

Рис. 11б

вится сильнее. Можно сказать, что в точке совпадения скоростей связь между каналами усиливается. Последним и мотивируется термин "резонансная точка", который мы используем.

(5) Интересной оказывается ситуация, когда плотности совпадают на интервале: в этом случае механизм образования скачков компонент $w_{\alpha}^{\overline{\alpha}}$ описан в конце п. 6. С динамической точки зрения, резонанс на интервале усиливает взаимодействие между каналами настолько, что особенность в противоположном канале становится еще более резкой: лоб превращается в скачок.

Литература

1. М. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* Наука, Москва (1969).

M. Belishev, A. Zurov. The effects connected with coincidence of velocities in the two-velocities dynamical system.

The paper deals with the system

$$\begin{aligned}
&\rho u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;\\
&u|_{x=0} = f,
\end{aligned}$$

where $\rho = \rho(x)$ and $V = V(x)$ are 2×2-matrix functions; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_\alpha > 0$; f is a boundary control; $u = u(x,t)$ is the solution. The singularities of the fundamental solution corresponding to the controls $\binom{\delta}{0}$ and $\binom{0}{\delta}$ ($\delta = \delta(t)$ is the Dirac δ-function) are under investigation. In the case of $\rho_1(x) \neq \rho_2(x)$ the singularities of the fundamental solution are described in terms of the standard scale δ, $\int \delta$, $\iint \delta, \dots$. In the presence of points $x = x_* :\ \rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$ an interesting effect occurs: the singularities of intermediate (fractional) orders appear.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 1 ноября 1999 г.