Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

**В. М. Бабич, Д. Б. Дементьев,
Б. А. Самокиш, В. П. Смышляев**

О РАССЕЯНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВОЛНЫ ВЕРШИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНУСА

Сингулярные направления

1. Введение. Исходные формулы

Обозначения близки к таковым работ [1–4], к которым настоящая работа примыкает по тематике. Предполагается, что волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \qquad (1.1)$$

Рассматривается задача рассеяния плоской волны $e^{ik\omega_0 \mathrm{x}}$, (где $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{k} = -k\omega_0$, соответствующий волновой вектор, ω_0 – единичный вектор) на конусе Ξ произвольной формы, на поверхности которого выполняются классические однородные краевые условия Дирихле или Неймана.

Известно [1], что волновое поле рассматриваемой задачи можно в точке $\mathrm{x} = r\omega$ ($r = |\mathrm{x}|$, ω – единичный вектор) представить интегралом:

$$G(r, \omega, \omega_0) = e^{\pi i/4}\sqrt{2\pi}(kr)^{-1/2} \int\limits_W e^{-ikr\cos s}\Phi(\omega, \omega_0, s)ds, \qquad (1.2)$$

где

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = \frac{i}{\pi}\int\limits_\gamma e^{-i\nu s}\nu g(\omega, \omega_0, \nu)d\nu. \qquad (1.3)$$

Здесь $g(\omega, \omega_0, \nu)$ – функция Грина, точнее, g – решение следующей краевой задачи на сфере $S^2 = \{\omega : |\omega| = 1\}$ (ω – единичный вектор, начальная точка которого совпадает с вершиной O конуса Ξ и, таким образом, точка O – центр сферы S^2, мы предполагаем

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ИНТАС-РФФИ 95-0012, 98-01-00197, 99-01-00107.

также, что начальная точка вектора ω_0 тоже совпадает с точкой O):

$$\begin{gathered}\left(\widetilde{\Delta}+\nu^2-\frac{1}{4}\right)g=\delta(\omega,\omega_0),\quad \omega\in\overline{M},\quad \omega_0\in M,\\ M=S^2\setminus\Xi,\quad Bg\big|_{\partial M}=0,\end{gathered}\tag{1.4}$$

$$B=\begin{cases}1, & \text{для условия Дирихле}\\ \frac{\partial}{\partial m}, & \text{для условия Неймана.}\end{cases}$$

где m – нормаль к ∂M, касательная к S^2, $\widetilde{\Delta}$ – оператор Лапласа на сфере по переменной ω.

Контур интегрирования γ охватывает особенности по ν функции Грина g (см. рис. 1) (они обозначены крестиками):

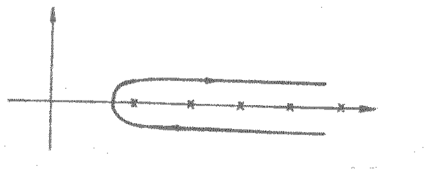

Рис. 1. Контур γ.

Контур W изображен на рис. 2:

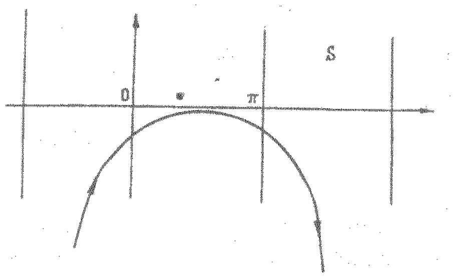

Рис. 2. Контур W.

Применяя к интегралу (1.2) метод перевала, (точка перевала равна π) можно получить выражение для сферической волны

$G_{\mathrm{diff}}(\omega, \omega_0, r)$, рассеянной вершиной конуса ([1]):

$$G_{\mathrm{diff}}(\omega, \omega_0, r) \sim 2\pi \frac{e^{ikr}}{kr} f(\omega, \omega_0), \tag{1.5}$$

где f так называемая диаграмма направленности волны G_{diff}. Она выражается интегралом:

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\gamma} e^{-i\pi\nu} \nu g(\omega, \omega_0) d\nu; \omega, \omega_0 \in S^2. \tag{1.6}$$

Диаграмма направленности $f(\omega, \omega_0)$ гладка всюду кроме так называемых сингулярных направлений. Оказывается ω (ω_0 фиксировано) соответствует сингулярному направлению, если на луче $\mathrm{x} = r\omega$, $0 \leqslant r < \infty$ поле лучей имеет сингулярность – например в направлении ω фронт волны, отраженной от поверхности конуса, касается фронта сферической волны, рассеянной вершиной конуса. Вблизи соответствующих направлений выражение (1.5)–(1.6) не описывает поведения волнового поля. Формулы, описывающие волновое поле, достаточно сложны. В наиболее простом и типичном случае, которому и посвящена настоящая работа, поле удается описать с помощью функций параболического цилиндра. См. также работы [1, 5–7], содержащие другие подходы к этой проблеме.

2. Об особенностях функций $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ и $f(\omega, \omega_0)$

Особенности Φ и $f = \Phi\big|_{s=\pi}$ связаны только с бесконечной частью контура γ, ибо интеграл по конечной части – бесконечно дифференцируемая функция. Подинтегральная функция в (1.3) экспоненциально мала в четвертом квадранте $\mathrm{Re}\,\nu > 0$, $\mathrm{Im}\,\nu < 0$, если $\mathrm{Im}\,\nu \to -\infty$, так что особенности Φ и f связаны только с верхней частью контура.

В отсутствии конуса Ξ функция Грина в (1.3) равна

$$g^\circ = g^\circ(\omega, \omega_0, \nu) = \frac{-1}{4\cos \pi\nu} P_{\nu-1/2}(\cos(\pi - \theta)) \tag{2.1}$$

(индекс $\circ$ означает, что $M = S^2$, $P_{\nu-1/2}$ и в дальнейшем $\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}$ и $Q_{\nu-1/2}$ функции Лежандра см. [8], θ – расстояние вдоль сферы между ω и ω_0).

Заменим $\mathfrak{P}_{\nu-1/2}$ по формуле

$$P_{\nu-1/2}(\cos\vartheta) = \frac{\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta - i0) - \mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta + i0)}{\pi i}, \qquad (2.2)$$

где

$$\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(x \pm i0) = Q_{\nu-1/2}(x) \mp \frac{\pi i}{2} P_{\nu-1/2}(x). \qquad (2.3)$$

Функции $\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}$ имеют асимптотику

$$\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta \pm i0) =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\nu\sin\vartheta}}\,\exp\left[\mp i\left(\nu\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \qquad (2.4)$$

$$0 < \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

(см. [8]). Заменим $\cos\pi\nu$ по формуле Эйлера: $\cos\pi\nu = \frac{e^{i\pi\nu}+e^{-i\pi\nu}}{2}$ и пользуясь неравенством:

$$|e^{i\pi\nu}/e^{-i\pi\nu}| < 1, \quad \operatorname{Im}\nu > 0,$$

разложим $1/\cos\pi\nu$ в геометрическую прогрессию. Тогда выражение в (2.1) можно переписать в виде ряда:

$$g^{\circ} = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos(\pi-\theta) - i0)e^{i\pi\nu(2j+1)}(-1)^j - \right.$$

$$\left. -\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos(\pi-\theta) + i0)e^{i\pi\nu(2j+1)}(-1)^j\right]. \qquad (2.5)$$

Используя асимптотическую формулу (2.4), нетрудно заметить, что асимптотика первого ($j = 0$) члена ряда такова:

$$\frac{e^{i\pi\nu}}{-2\pi i}\,\mathfrak{Q}_{\nu-1/2}(\cos(\pi-\theta) - i0) \sim$$

$$(2.6)$$

$$\sim -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\theta}}\,e^{i(\nu\theta-\pi/4)}(1 + O(1/\nu))$$

$$\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon.$$

Этот член имеет смысл интерпретировать как волну, распространяющуюся от источника – “северного полюса” ω_0 на сфере

S^2. (Напоминаем, что θ есть расстояние между ω_0 и ω на сфере S^2). Величина ν играет роль волнового числа. Следующие члены ряда можно трактовать как результаты последовательностей фокусировки волны в северном и южном полюсах сферы S^2. Вернемся к формулам (1.2)–(1.3) и заменим g падающей волной (2.6). Главный член особенности падающей волны описывается интегралом

$$\frac{i}{\pi}\int\limits_{\gamma+} e^{-i\nu s}\left(-\frac{i}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\theta}}\,e^{i(\nu\theta-\pi/4)}\nu\,d\nu \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\,\frac{1}{4\pi^{3/2}}\,e^{-i\pi/4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu_+^{1/2}e^{i\nu(\theta-s)}d\nu, \tag{2.7}$$

где γ_+ – часть контура γ, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Im}\nu \geqslant 0$,

$$\nu_+^{1/2} = \begin{cases} \nu^{1/2}, & \nu > 0\\ 0, & \nu \leqslant 0.\end{cases}$$

Справа в (2.7) стоит с точностью до множителя преобразование Фурье функции $\nu_+^{1/2}$. Используя известное выражение для этого преобразования:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\nu_+^{1/2}e^{i\nu(\theta-s)}d\nu = ie^{i\pi/4}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(\theta-s+i0)^{-3/2},$$

получим выражение для особенности падающей волны:

$$\frac{i\sqrt{2}}{8\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}(\theta-s+i0)^{-3/2}. \tag{2.8}$$

Падающая волна отражается от границы области $M\subset S^2$. Нетрудно вывести формулу для отраженной волны, используя для этой цели лучевой метод на поверхности сферы (см. Приложение). Имеем:

$$\Phi_r \sim \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\sqrt{|\sin(\theta_0+\theta_1)+\frac{2\sin\theta_0\sin\theta_1}{\rho_g\cos\psi}|}}\,\frac{i\sqrt{2}}{8\pi}(\theta-s+i0)^{-3/2}. \tag{2.9}$$

Здесь $\frac{1}{\rho_g}$ – геодезическая кривизна ∂M, ψ угол падения, $\varepsilon_1 = -1$ для граничного условия Дирихле, $\varepsilon_1 = 1$ для условия Неймана, $\varepsilon_2 = 1$, если на пути отраженного луча нет каустики, $\varepsilon_2 = -i$, если имеется одна точка каустики, θ_0 лучевое расстояние до точки падения, θ_1 длина отраженного луча. Здесь $\frac{1}{\rho_g} > 0$ (соответственно, < 0), если "вектор кривизны" (т.е. ковариантная производная в "положительном" направлении единичного вектора касательной к ∂M по длине дуги) совпадает (соотв. противоположен) по направлению с внешней нормалью к ∂M. Формула (2.9) – сферический вариант хорошо известной формулы для волны, распространяющейся из точечного источника колебаний и отраженной кривой линией (плоская задача). Мы предположим, что $\theta_0 < \pi$, $\theta_1 < \pi$. В этом случае может существовать не более одной точки каустики на отраженном луче. Если точка каустики существует и не совпадает с точкой наблюдения, то

$$\sin(\theta_0 + \theta_1) + \frac{2\sin\theta_0 \sin\theta_1}{\rho_g \cos\psi} < 0.$$

Это выражение положительно, если на отраженном луче нет точек каустики. Для нас интересен случай, когда $\theta_0 + \theta_1$ близко к π, тогда

$$\Phi \sim \frac{i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\cos\psi}}{8\pi\sqrt{\sin\theta_0}} \left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2} (\theta - s + i0)^{-3/2}. \qquad (2.10)$$

Здесь $\theta = \theta_0 + \theta_1$.

Из того, что $f = \Phi\big|_{s=\pi}$ следует, что главный член особенности f равен:

$$f(\omega, \omega_0) \sim \frac{i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\cos\psi}}{8\pi\sqrt{\sin\theta_0}} \left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2} (\theta - \pi + i0)^{-3/2}, \qquad (2.11)$$

где ε_1 имеет то же значение, что и раньше, а

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \frac{1}{\rho_g} > 0 \\ -i, & \text{если} \quad \frac{1}{\rho_g} < 0. \end{cases} \qquad (2.12)$$

3. Формулы для волнового поля

Как уже отмечалось, вклад в асимптотику интеграла (1.2) ($k \to +\infty$) стационарной точки $s = \pi$, вычисляемый по методу перевала дает G_{diff} – волновое поле, рассеянное вершиной конуса.

Классический вариант метода перевала не удается применить, если особенность функции $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ находится близко от точки $s = \pi$. Пусть направление ω таково, что особенность "отраженной волны Φ_r" совпадает с точкой $s = \pi$, т.е. $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \pi$. Это сингулярное направление. Можно показать, что в этих направлениях фронт отраженной волны касается фронта волны, рассеянной вершиной конуса (см. рис. 3)

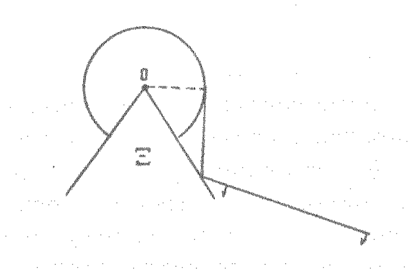

Рис. 3. Сингулярное направление и волновые фронты.

Мы хотим получить приближенное выражение для волнового поля в окрестности сингулярного направления. Исходим из формулы (1.2) для полного волнового поля рассматриваемой задачи. Искомое выражение даст интегрирование по окрестности седловой точки $s = \pi$. После небольших вычислений в первом приближении получаем:

$$G_{\text{diff}} \sim \frac{e^{\pi i/4}\sqrt{2\pi}e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{krs^2}{2}} \frac{i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\cos\psi}}{8\pi\sin\theta_0} \left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2} (\theta - \pi - s + i0)^{-3/2} ds \tag{3.1}$$

или

$$G_{\text{diff}} \sim \frac{e^{\pi i/4}\sqrt{2\pi}e^{ikr}\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\cos\psi}}{8\pi\sqrt{kr}\,\sin\theta_0} \left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2} F(\alpha, k), \tag{3.2}$$

где

$$F(\alpha, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ikr}{2}s^2} (\alpha - s + i0)^{-3/2}\, ds \tag{3.3}$$

$$\alpha = \theta - \pi = \theta_0 + \theta_1 - \pi$$

4. Асимптотика $F(\alpha, k)$ и сопоставление результатов вычисления $f(\omega, \omega_0)$ и волнового поля в сингулярной зоне

Пусть $kr \to +\infty$. Нетрудно получить асимптотику функции $F(\alpha, k)$ методом перевала. Седловая точка $s = 0$, стационарный контур для функции $-i\frac{s^2}{2}$ есть прямая линия $s = e^{-\frac{i\pi}{4}}\lambda$, $-\infty < \lambda < +\infty$. Подынтегральная функция имеет особенность в точке $s = \alpha$. Чтобы сделать однозначной подинтегральную функцию, проведем прямолинейный разрез в верхней полуплоскости от особой точки α до $\alpha + i\infty$. Если $\alpha > 0$ (оазис), вклад в асимптотику F дает только седловая точка $s = 0$. Если $\alpha < 0$, следует дополнить стационарный контур петлей вокруг разреза. Вклад в асимптотику F дают теперь точки $s = 0$ и $s = \alpha$.

Вклад точки $s = 0$ – это волна, рассеянная вершиной конуса, вклад точки $s = \alpha$ связан с геометро-оптической волной, отраженной от поверхности конуса. Мы интересуемся только вкладом точки $s = 0$. Согласно методу перевала, этот вклад равен

$$\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{kr}}(\alpha + i0)^{-3/2}. \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в выражение (3.1)–(3.3) для волнового поля, получаем:

$$2\pi\frac{e^{ikr}}{kr}\left(\frac{i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\cos\psi}}{8\pi\sin\theta_0}\left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2}(\theta - \pi + i0)^{-3/2}\right). \tag{4.2}$$

Таким образом, мы пришли к выражению вида (1.5), где роль $f(\omega, \omega_0)$ играет выражение в скобках, идентичное выражению (2.11). Это говорит о согласованности результатов пункта 2 и асимптотических формул (3.2) и (3.3).

5. Вывод формулы для волнового поля в окрестности сингулярного направления

Легко найти выражение для функции $F(\alpha, k)$ в терминах функций параболического цилиндра. Сделаем замену переменной $s\sqrt{kr} = \zeta$ в интеграле (3.3):

$$F(\alpha, k) = (kr)^{1/4} h_{-3/2}(\beta), \tag{5.1}$$

где $\beta = \alpha\sqrt{kr}$,

$$h_p(\beta) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\zeta^2}{2}}(\beta - \zeta + i0)^p \, d\zeta. \tag{5.2}$$

Используя известное выражение для функций параболического цилиндра (см. [8]):

$$D_p(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, 2^{p+1/2} e^{-\frac{\pi}{2} pi} e^{\frac{z^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x + i0)^p \, e^{-2x^2 + 2ixz} \, dx \tag{5.3}$$

нетрудно получить линейной заменой переменной

$$h_p(\beta) = \sqrt{2\pi} \, e^{-i\frac{\beta^2}{4}} \, e^{-i\frac{\pi}{4}} \, e^{i\frac{\pi p}{2}} \, D_p(\beta e^{-\frac{i\pi}{4}}). \tag{5.4}$$

При $p = -\frac{3}{2}$, получим:

$$h_{-\frac{3}{2}}(\beta) = \sqrt{2\pi} \, e^{-i\frac{\beta^2}{4}} \, e^{-\frac{5\pi i}{8}} \, D_{-\frac{3}{2}}(\beta e^{-i\frac{\pi}{4}}). \tag{5.5}$$

Чтобы получить выражение для G_{diff} (см. (3.2)), достаточно подставить (5.1) и (5.5) в (4.2):

$$G_{\text{diff}} \sim \frac{ie^{-\frac{3\pi i}{8}} e^{ikr} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\cos\psi}}{4(kr)^{1/4} \sin\theta_0} \left(\frac{1}{|\rho_g|}\right)^{-1/2} e^{-i\frac{\beta^2}{4}} D_{-\frac{3}{2}}(\beta e^{-\frac{\pi}{4} i}), \tag{5.6}$$

где

$$\beta = \sqrt{kr}(\theta_0 + \theta_1 - \pi).$$

6. Приложение

Мы использовали в разделах 3–4 формулы для особенностей функции

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\gamma} e^{-i\nu s} \nu g(\omega, \omega_0, \nu) d\nu. \tag{П.1}$$

Нетрудно заметить, что $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ есть решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \Phi = \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{4}\right) \Phi. \tag{П.2}$$

Оператор $\widetilde{\Delta}$ есть оператор Лапласа на единичной сфере. Уравнение (П.2) – волновое уравнение, где s – “время”. Особенности падающей волны описываются формулой (2.8). Опишем процесс распространения особенностей. (См. напр. [9]). Пусть функция u удовлетворяет уравнению (П.2) и имеет особенность

$$u \sim u_0(\omega)(s-\tau(\omega)-i0)^{-3/2} + u_1(\omega)(s-\tau(\omega)-i0)^{-1/2} + \dots \quad (\text{П}.3)$$

Подставим (П.3) в уравнение (П.2) и приравняем члены степеней $\left(-\frac{7}{2}\right)$ и $\left(-\frac{5}{2}\right)$ в обеих частях уравнения. Пусть q_1, q_2 регулярная система координат в рассматриваемой области на сфере S^2 и пусть квадрат элемента длины (первая гауссова квадратичная форма) равен

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \quad (\text{П}.4)$$

тогда

$$\widetilde{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial g^j}(\dots)\right), \quad (\text{П}.5)$$

где (g^{ij}) матрица, обратная к матрице (g_{ij}) и $g = \det(g_{ij})$. Простые выкладки дают уравнение эйконала для τ:

$$g^{ij}\frac{\partial\tau}{\partial q^i}\frac{\partial\tau}{\partial q^j} = 1 \quad (\text{П}.6)$$

и уравнение переноса для u_0:

$$2g^{ij}\frac{\partial\tau}{\partial q^i}\frac{\partial u_0}{\partial q^j} + u_0\widetilde{\Delta}\tau = 0. \quad (\text{П}.7)$$

Решение уравнений (П.6–П.7) составляет существо “лучевого метода” (см. напр. [7]). Здесь лучи – геодезические линии на сфере, т.е. решения вариационного соотношения:

$$\delta\int\sqrt{g_{ij}dq^i dq^j} = 0.$$

В случае сферы S^2 это большие круги на сфере S^2.

В интересующем нас случае имеются две волны: “падающая” волна (см. формулу (2.8))

$$u^{inc} \sim u_0^{inc}(s-\theta-i0)^{-3/2} + \dots$$

$$\sim \frac{i\sqrt{2}}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}(\theta-s+i0)^{-3/2} + \dots \quad (\text{П}.8)$$

и "отраженная":

$$u^r \sim u_0^r (s - \tau^r - iO)^{-3/2} + \dots . \qquad (\Pi.9)$$

Мы занимаемся задачей отражения волны: мы должны получить формулу для u^r, используя уравнения (П.6–П.7) и граничные условия

$$(u^{inc} + u^r)\big|_{\partial M} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial m}(u^{inc} + u^r)\big|_{\partial M} = 0. \qquad (\Pi.10)$$

"Отраженный" эйконал τ^r равен сумме длин дуг больших кругов на сфере $S^2 : (|\omega_0 s| + |s\omega|)$, отраженных по правилу: "угол падения равен углу отражения".

Выражение для решения уравнения переноса (П.7) хорошо известно:

$$u_0 = \alpha \sqrt{\frac{1}{|J|}}, \qquad (\Pi.11)$$

где J – "геометрическое расхождение", которое определяется как $\frac{D(x,y,z)}{D(s,\gamma_1,\gamma_2)}$. Здесь x, y, z декартовы координаты, s – длина дуги вдоль луча, γ_1, γ_2 – лучевые координаты; в нашей ситуации $J = \frac{dY}{d\gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_0}$, если $Y(s,\gamma)$ – расстояние по нормали от точки s рассматриваемого фиксированного луча до луча соответствующего параметру γ. Фиксированный луч соответствует параметру γ_0. Из вариационного исчисления известно, что J является решением уравнения Якоби для луча – экстремали интеграла Ферма $\int \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j}$. Мы предполагаем, что $J \neq 0$, функция $\alpha = \mathrm{const}$ на каждом луче лучевого поля, соответствующего эйконалу τ.

Выведем формулу для геометрического расхождеия отражённой волны. Наш подход по-существу эквивалентен подходу М.М.Попова (см. [10]).

Найдём вид уравнения Якоби. Как известно, уравнение Якоби совпадает с уравнением Эйлера для второй вариации. В случае сферы геодезические совпадают с большими кругами сферы. Выберем сферическую систему координат φ, θ так, чтобы рассматриваемая геодезическая совпала с экватором $\theta = \frac{\pi}{2}$. Вариационное уравнение геодезической имеет вид:

$$\delta \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = 0 \qquad (\Pi.12)$$

Найдём выражение для второй вариации для чего положим в формуле (П.12) $\theta = \frac{\pi}{2} + y$ и разложим подинтегральное выражение по степеням y и y'. Интеграл от квадратичных членов этого разложения

$$\int \frac{1}{2}(y'^2 - y^2)\, d\varphi$$

и есть вторая вариация функционала (П.12) Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид:

$$y'' + y = 0 \qquad (\text{П}.13)$$

Это и есть искомое уравнение Якоби.

Уравнение (П.13) можно было бы получить, подставляя в уравнение Эйлера $\theta = \frac{\pi}{2} + y$, разлагая левую часть этого уравнения по степням y, y', y'' и оставляя лишь линейные члены этого разложения.

Решение уравнения (П.13), обращающееся в ноль при $\varphi = 0$, с точностью до постоянного множителя равно $\sin\varphi$. Это согласуется с формулой (2.8). Из нее также следует, что $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{-8\pi}$ (см. (П.3) и (П.11)). Амплитудный множитель для отраженной волны имеет вид $\frac{\sqrt{2}\varepsilon_1\varepsilon_2}{-8\pi\sqrt{y}}$. Смысл множителей $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ указан в разделе 2, y - решение уравнения (П.13), которое мы найдем, учитывая граничные условия в точке отражения, к чему мы и переходим. Вывод искомых условий мы получим из геометрических соображений, линеаризируя соответствующие граничные условия по y и y' вблизи точки отражения фиксированного луча.

Условие $\tau^{inc}\big|_{\partial M} = \tau^{r}\big|_{\partial M}$ включает равенство угла падения и угла отражения. Пусть AB первая геодезическая, BC ее отражение на границе ∂M, $A'B'$ – вторая геодезическая, близкая к AB, $B'C'$ ее отражение от границы ∂M.

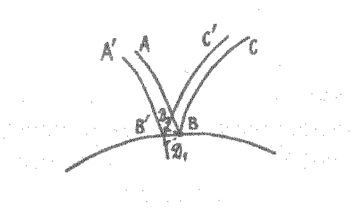

Рис. 4. Отражение геодезической от границы.

Пусть $y_1(s)$ – расстояние вдоль нормали в точке s к геодезической AB от линии $A'B'$, или, (что то же) уравнение линии $A'B'$ в классической системе координат s, n, где s есть длина дуги AB и n расстояние вдоль геодезической нормальной к AB. Мы предполагаем, что $y_1(s)$, dy_1/ds малы, тогда в первом приближении dy_1/ds есть угол между линиями AB и $A'B'$. Пусть s, y_2 классическая система координат "длина дуги (s) – нормаль (y_2)" на BC и $y_2 = y_2(s)$ уравнение геодезической $B'C'$ в этой координатной системе. Очевидно, dy_2/ds (в первом приближении) угол между BC и $B'C'$. Первое граничное условие в точке отражения B таково:

$$y_1(B) = y_2(B). \tag{П.14}$$

В самом деле: как видно из рис. 4:

$$y_1(B) = |BD_1| = |BB'| \sin \angle BB'D_1,$$

$$y_2(B) = |BD_2| = |BB'| \sin \angle BB'D_2,$$

при этом $\angle BB'D_1 = \angle BB'D_2$, поскольку угол падения равен углу отражения.

Возведем нормали кривой ∂M в точках B и B' и рассмотрим разность углов $y_2'(B)$ и $y_1'(B)$. Если бы эти нормали были параллельны, разность углов была бы равна нулю. Пусть угол между нормалями равен χ, тогда эта разность равна 2χ, т.е.

$$y_2'(B) - y_1'(B) = 2\chi.$$

Из формул $|BB'| = y_1(B)/\sin \angle ABB'$ и $\frac{\chi}{|BB'|} = \rho_g^{-1}$, где ρ_g^{-1} геодезическая кривизна, вытекает граничное условие:

$$y_2'(B) - y_1'(B) = \frac{2y_1(B)}{\rho_g \cos\psi}. \tag{П.15}$$

Здесь $\psi = \frac{\pi}{2} - \angle ABB'$. Искомые граничные условия – это соотношения (П.14) и (П.15). Уравнение (П.13) и условия (П.14) и (П.15) – это результат линеаризации соответствующих соотношений по y_j $j = 1, 2$. Решения полученных уравнений нет необходимости считать "малыми".

Вернемся к формуле (П.8). Теперь можно получить аналитическое выражение для u_0^r (см. (П.9)).

Из формулы (П.8) вытекает:

$$u_0^{inc} = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi\sqrt{\sin\theta}}. \tag{П.16}$$

Если положить для удобства $s = \theta$, мы получим из (П.16) с точностью до постоянного множителя $y_1(s) = \sin\theta$. Ищем $y_2(s) = y_2(\theta)$ в виде (см. уравнение (П.13))

$$y_2(\theta) = D\cos(\theta - \theta_0) + E\sin(\theta - \theta_0),$$

где θ_0 – значение θ в точке B. Используя граничные условия (П.14)–(П.15), получим

$$D = \sin\theta_0, \quad E = \cos\theta_0 + \frac{2\sin\theta_0}{\rho_g \cos\psi},$$

откуда

$$y_2(s) = \sin\theta + \frac{2\sin(\theta - \theta_0)\sin\theta_0}{\rho_g \cos\psi}. \tag{П.17}$$

Здесь $s = \theta$. Полагая $\theta = \theta_0 + \theta_1$, где θ_1 – длина отраженного луча, получим:

$$y_2(s) = \sin(\theta_0 + \theta_1) + \frac{2\sin\theta_0 \sin\theta_1}{\rho_g \cos\psi}. \tag{П.18}$$

Из (П.18) вытекает искомое выражение для u_0^r:

$$\begin{gathered} u_0^r = -\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{|y_2|}} = \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left| \sin(\theta_0 + \theta_1) + \frac{2\sin(\theta_0)\sin\theta_1}{\rho_g \cos\psi} \right|^{-1/2}. \end{gathered} \tag{П.19}$$

Литература

1. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction of waves by cone at high frequencies.* Preprint LOMI, E-9-89, Leningrad (1989), 1–27.
2. V. P. Smyshlyaev, *Diffraction by cones at high frequencies.* Wave Motion, **12**, 329–339 (1990).
3. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, and B. A. Samokish, *On the diffraction of high-frequency waves by a cone of arbitrary shape.* Wave Motion, **21**, 203–207 (1995).
4. V. M. Babich, V. P. Smyshlyaev, D. B. Dement'ev, and B. A. Samokish, *Numerical calculation of the diffraction coefficients for an arbitrary shaped perfectly*

conducting cone. IEEE Transaction on Antennas and Propagations, **44**, No. 5, 740–747 (1996).

5. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* 1996.
6. J. Cheeger, M. E. Taylor, *On diffraction of waves by conical singularities 1, 2.* Comm. Pure Appl. Math., **35(3)**, **35(4)**, 275–331, 487–529 (1982).
7. А. Л. Бродская, А. В. Попов, С. А. Хиосский, *Асимптотика волны отраженной конусом в полутени.* Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению радиоволн, Москва-Ереван, **1**, 227–231 (1973).
8. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* ГИТТЛ, М., 1951.
9. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М., Наука, 1972, 472 с.
10. М. М. Попов, *О вычислении геометрического расхождения в неоднородной среде с гладкими границами раздела.* Препринт ЛОМИ, П-3-77, Ленинград, 1977.

Babich V. M., Dement'ev D. B., Samokish B. A., and Smyshlyaev V. P. Scattering of a highfrequency wave by the vertex of an arbitrary cone. (Singular directions.)

A new approach to the obtaining of the analytical expression for the wave scattered by an arbitrary cone vertex in the singular directions is considered. The spherical front of the wave, propagating from the vertex of the cone tangents the front of the wave, reflected by the cone surface in this "singular" directions. The wave field is expressed in the terms of the parabolic cylinder functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 9 сентября 1999 г.

С.-Петербургский государственный
университет