Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Г. В. Кузьмина

К ЗАДАЧАМ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ В СЕМЕЙСТВАХ СИСТЕМ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Введение

В задачах об экстремальном разбиении рассматривается вопрос о максимуме функционала $\mathcal{M}(\mathbb{D})$, определенного на допустимом семействе систем $\mathbb{D}$ неналегающих областей D_i и представляющего собой линейную комбинацию функций областей D_i. Начало теории задач об экстремальном разбиении положила известная работа Дж. Дженкинса (см. [1]), в которой рассматривается семейство систем двусвязных областей и четырехугольников на римановой поверхности.

Развитие теории задач об экстремальном разбиении происходило посредством расширения допустимого семейства областей и введения понятий приведенных модулей областей специального вида. В работах [2–7] получены общие результаты в задачах об экстремальном разбиении, в которых в числе функций областей допустимого семейства рассматриваются модули двусвязных областей, приведенные модули $M(D_i, b_i)$ односвязных областей D_i относительно точек $b_i \in D_i$ и приведенные модули двуугольников специального вида относительно их вершин. Эти результаты устанавливают определяющую роль квадратичных дифференциалов с простыми полюсами и полюсами второго порядка каждого из возможных типов в рассматриваемом круге вопросов и получили разнообразные приложения (см., например, [8]).

В данной работе результаты в задачах об экстремальном разбиении распространяются на семейство систем областей, содержащих области, подобные в малом концевым и полосообразным областям квадратичных дифференциалов, имеющих полюсы по-

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант 97-01-00259).

рядков $\geqslant 3$.

В §1 приводятся некоторые из наиболее простых возможных определений приведенных площадей указанных областей. В §2 доказывается теорема 1, устанавливающая роль ассоциированных квадратичных дифференциалов с полюсами любых порядков в задачах об экстремальном разбиении. В §3 исследуется возможность другого подхода к экстремальной задаче теоремы 1 и приводятся примеры использования этой теоремы.

§1. Приведенные модули областей, подобных в малом концевым и полосообразным областям квадратичного дифференциала

1.1. Пусть $\mathbf{C} = \{c_1, \dots, c_p\}$, $p \geqslant 1$, – система различных точек $\bar{\mathbb{C}}$ (для простоты формулировок будем считать, что все точки c_k конечны), $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_p\}$ – система натуральных чисел, $n_k \geqslant 1$. Пусть каждой из точек c_k соответствует система $\mathbb{D}_k$ неналегающих односвязных областей $D_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, имеющих точку c_k своей общей граничной точкой и обладающих внутренними углами величины $2\pi/n_k$ в этой точке. Через $\zeta = g_{k,l}(z)$ обозначаем отображение области $D_{k,l}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $g_{k,l}(c_k) = \infty$.

Будем говорить, что область $D_{k,l}$ удовлетворяет условию $(*)$, если функция $g_{k,l}(z)$ обладает следующим свойством:

$$g'^{\,2}_{k,l}(z) = (z - c_k)^{-(n_k+2)} \tilde{g}_{k,l}(z), \tag{1}$$

где $\tilde{g}_{k,l}(z)$ – регулярная функция в некоторой окрестности точки c_k, $\tilde{g}_{k,l}(c_k) \neq 0$. Если в условии (1) $\tilde{g}_{k,l}(z)$ – одна и та же функция для всех областей $D_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, то будем говорить, что система $\mathbb{D}_k$ удовлетворяет условию (A_k). Если $Q(z)dz^2$ – квадратичный дифференциал с полюсом порядка $n_k + 2 \geqslant 3$ в точке c_k, то система $\mathbb{D}^*_k$ концевых областей $D^*_{k,l}$ этого дифференциала, $c_k \in \partial D^*_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, удовлетворяет условию (A_k).

Менее ограничительным является следующее условие на систему областей $\mathbb{D}_k$. Будем предполагать, что функции $g_{k,l}(z)$ имеют в окрестности точки c_k разложения вида

$$g_{k,l}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k(z) + C_{k,l} + \tilde{g}_{k,l}(z)\}, \tag{2}$$

где $C_{k,l}$ – постоянные, $G_k(z)$ – одна и та же функция для всех областей $D_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, $G_k(z)$ содержит члены со степенями $(z-c_k)^{-n_k/2+j}$ при $j \leqslant n_k$ и, возможно, логарифмический член, а $\tilde{g}_{k,l}(z)$ содержит члены со степенями $(z-c_k)^{-n_k/2+j}$ при $j \geqslant n_k+1$. Именно, пусть γ_k – вещественное число, $Z = e^{-i\gamma_k}(z-c_k)$. Тогда для функции

$$G_{k,l}(z) = G_k(z) + \widetilde{g}_{k,l}(z)$$

при четном n_k имеем разложение

$$G_{k,l}(z) = \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j} + B_k \log Z +$$

$$\sum_{j=n_k/2+1}^{n_k} \beta^{(j)} Z^{-n_k/2+j} + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \beta_{k,l}^{(j)} Z^{-n_k/2+j}, \qquad (3)$$

а при нечетном n_k

$$G_{k,l}(z) = \sum_{j=0}^{(n_k-1)/2} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j} +$$

$$+ \sum_{j=(n_k+1)/2}^{n_k} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j} + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j}. \qquad (3')$$

Здесь $\beta_k^{(j)}$, B_k и $\beta_{k,l}^{(j)}$ – комплексные постоянные, $\beta_k^{(j)}$ при $j \leqslant n_k$ и B_k не зависят от l, $\beta_k^{(0)} = \beta_k > 0$. При нечетном n_k под $G_{k,l}(z)$ понимается соответствующая непрерывная ветвь этой функции, определяемая указанным ниже выбором ветви $\arg(z-c_k)$, этим же определяется ветвь логарифма. В обоих рассматриваемых случаях

$$G_{k,l}(z) = G_k(z) + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \beta_{k,l}^{(j)} Z^{-n_k/2+j}.$$

Указанное условие будем называть условием $(\widetilde{A}_k)$.

Пусть $\omega_k = 2\pi/n_k$. Положим при $l = 0, \ldots, n_k-1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,l} &= \{z : \arg(z-c_k) = \gamma_k + \omega_k l\}, \\ \mathcal{L}'_{k,l} &= \{z : \arg(z-c_k) = \gamma_k + \omega_k (l+1/2)\}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Из разложений (3), (3′) следует, что лучи $\mathcal{L}_{k,l}$ определяют направления касательных к граничным дугам областей $D_{k,l}$ в точке c_k.

Будем считать, что области $D_{k,l}$ перенумерованы таким образом, что лучи $\mathcal{L}_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l+1}$ определяют направления касательных к граничным дугам области $D_{k,l}$ в точке c_k, следовательно, луч $\mathcal{L}'_{k,l}$ служит биссектриссой внутреннего угла области $D_{k,l}$ в точке c_k. Для определения непрерывной ветви $\arg(z-c_k)$ мы рассматриваем разрез, содержащий граничную дугу области $D_{k,0}$, $k=1,\dots,p$, имеющую луч $\mathcal{L}_{k,0}$ своей касательной в точке c_k.

Наряду с областями $D_{k,l}$ будем рассматривать двуугольники специального вида с заданными топологическими свойствами. Именно, пусть $D = D_{k,l,t,k',l',t'}$ $(1 \leqslant t \leqslant t(k,l),\ 1 \leqslant t' \leqslant t(k',l'))$ – двуугольник, имеющий (различные или совпадающие) точки c_k и $c_{k'}$ системы $\mathbf{C}$ $(1 \leqslant k, k' \leqslant p)$ носителями своих отмеченных граничных элементов $\widetilde{c}_k$ и $\widetilde{c}_{k'}$, обладающий нулевыми внутренними углами в этих вершинах и разделяющий в окрестностях точек c_k и $c_{k'}$ соответственно области $D_{k,l-1}$, $D_{k,l}$ и $D_{k',l'-1}$, $D_{k',l'}$; лучи $\mathcal{L}_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k',l'}$ определяют направления касательных к граничным дугам указанного двуугольника в его вершинах $\widetilde{c}_k$ и $\widetilde{c}_{k'}$. Здесь $t(k,l)$ означает число двуугольников указанного вида, разделяющих в окрестности точки c_k области $D_{k,l-1}$ и $D_{k,l}$, индекс t соответствует нумерации рассматриваемых двуугольников в порядке возрастания $\arg(z-c_k)$ на дугах окружности $|z-c_k| = \rho$ достаточно малого радиуса, принадлежащим этим двуугольникам. Через $\zeta = g(z) = g_{k,l,t,k',l',t'}(z)$ обозначаем отображение области $D = D_{k,l,t,k',l',t'}$ на полосу $-h/2 < \operatorname{Im}\zeta < h/2$, $h = h_{k,l,t,k',l',t'}$, нормированное условиями

$$\operatorname{Re} g(\widetilde{c}_k) = -\infty, \quad \operatorname{Re} g(\widetilde{c}_{k'}) = \infty.$$

Будем говорить, что двуугольники $D_{k,l,t,k',l',t'}$ удовлетворяют условию $(\widetilde{A}_{k,k'})$, если в окрестности вершины $\widetilde{c}_k$

$$g_{k,l,t,k',l',t'}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k(z) + C_{k,l,t} + g_{k,l,t}(z)\},$$

а в окрестности вершины $\widetilde{c}_{k'}$

$$g_{k,l,t,k',l',t'}(z) = (-1)^{l'}\{G_{k'}(z) + C_{k',l',t'} + g_{k',l',t'}(z)\},$$

где $C_{k,l,t}$ и $C_{k',l't'}$ – постоянные, $G_k(z)$ – функция, фигурирующая в условии $(\widetilde{A}_k)$ для системы $\mathbb{D}_k$ областей $D_{k,l}$, $l=0,\dots,n_k-1$ (см. равенства (2)), а $g_{k,l,t}(z)$ содержит члены со степенями $(z-c_k)^{-n_k/2+j}$ при $j \geqslant n_k+1$; функции $G_{k'}(z)$ и $g_{k',l',t'}$ определяются аналогичным образом. Если каждая из систем $\mathbb{D}_k$ областей $D_{k,l}$, $l = 0, \ldots, n_k - 1$, удовлетворяет условию $(\widetilde{A}_k)$, а каждый из двуугольников $D_{k,l,t,k',l',t'}$ – условию $(\widetilde{A}_{k,k'})$, то будем говорить, что системы $\mathbb{D}_k$ областей $D_{k,l}$ и системы двуугольников $D_{k,l,t,k',l',t'}$ удовлетворяют условию $(\widetilde{A})$.

1.2. Ниже будем рассматривать системы $\mathbb{D}_k$ областей $D_{k,l}$ и системы двуугольников $D_{k,l,t,k',l',t'}$, удовлетворяющие условию $(\widetilde{A})$. Введем области, получаемые из указанных областей удалением специальных окрестностей точек c_k. Пусть $G_k(z)$ – функция, фигурирующая в условии $(\widetilde{A}_k)$ для системы $\mathbb{D}_k$ областей $D_{k,l}$, $l = 0, \ldots, n_k - 1$. В силу (2) и определения функции $\widetilde{g}_{k,l}(z)$, для отображения $g_{k,l}(z)$ области $D_{k,l}$ имеем равенство

$$g_{k,l}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k(z) + C_{k,l}\} + O((z - c_k)^{n_k/2+1}), \quad l = 0, \ldots, n_k - 1.$$

В дальнейшем существенную роль играет функция $G_k^{(0)}(z)$, содержащая члены с отрицательными степенями Z (и, возможно, логарифмический член):

$$G_k(z) = G_k^{(0)}(z) + G_k^{(1)}(z), \tag{5}$$

где $G_k^{(1)}(z)$ содержит члены с положительными степенями Z:

$$G_k^{(1)}(z) = \sum_{j=[n_k/2+1]}^{n_k} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j}.$$

Пусть ε_k – достаточно малые положительные числа, $a_{k,l}$ и $b_{k,l}$ – соответствующие точки на лучах $\mathcal{L}'_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$:

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= a_{k,l}(\varepsilon_k) = c_k + e^{i(\gamma_k + \omega_k(l+1/2))}\varepsilon_k, \\ b_{k,l} &= b_{k,l}(\varepsilon_k) = c_k + e^{i(\gamma_k + \omega_k l)}\varepsilon_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$\widetilde{\Gamma}_{k,l}(\varepsilon_k), \quad \widetilde{\Gamma}_{k,l}[\varepsilon_k] \quad \text{и} \quad \widetilde{\Gamma}_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k)$$

– кривые в угле, заключенном между лучами $\mathcal{L}_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l+1}$, на которых соответственно

$$\operatorname{Im} g_{k,l}(z) = \operatorname{Im} g_{k,l}(a_{k,l}), \;\; \operatorname{Im} G_k(z) = \operatorname{Im} G_k(a_{k,l})$$
$$\text{и} \;\; \operatorname{Im} G_k^{(0)}(z) = \operatorname{Im} G_k^{(0)}(a_{k,l}),$$

и пусть

$$\Gamma_{k,l}(\varepsilon_k), \quad \Gamma_{k,l}[\varepsilon_k] \quad \text{и} \quad \Gamma^{(0)}_{k,l}(\varepsilon_k)$$

– кривые в угле, заключенном между лучами $\mathcal{L}'_{k,l-1}$ и $\mathcal{L}'_{k,l}$, на которых соответственно

$$\operatorname{Re} g_{k,l}(z) = \operatorname{Re} g_{k,l}(b_{k,l}), \ \ \operatorname{Re} G_k(z) = \operatorname{Re} G_k(b_{k,l})$$
$$\text{и} \ \ \operatorname{Re} G^{(0)}_k(z) = \operatorname{Re} G^{(0)}_k(b_{k,l})$$

(пользуемся обозначениями $\mathcal{L}_{k,n_k} = \mathcal{L}_{k,0}$, $\mathcal{L}'_{k,-1} = \mathcal{L}'_{k,n_k-1}$). Пусть

$$\Omega_k[\varepsilon_k], \quad \Omega_k(\varepsilon_k) \quad \text{и} \quad \Omega^{(0)}_k(\varepsilon_k)$$

– окрестности точки c_k, ограниченные соответственно дугами кривых $\widetilde{\Gamma}_{k,l}[\varepsilon_k]$ и $\Gamma_{k,l}[\varepsilon_k]$, $\widetilde{\Gamma}_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $\Gamma_{k,l}(\varepsilon_k)$, $\widetilde{\Gamma}^{(0)}_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $\Gamma^{(0)}_{k,l}(\varepsilon_k)$, $l = 0, 1, \dots, n_k - 1$. Обозначим через

$$D_{k,l}[\varepsilon_k], \quad D_{k,l}(\varepsilon_k) \quad \text{и} \quad D^{(0)}_{k,l}(\varepsilon_k).$$

четырехугольники, получаемые из области $D_{k,l}$ удалением замыканий соответственно окрестностей $\Omega_k[\varepsilon_k]$, $\Omega_k(\varepsilon_k)$ и $\Omega^{(0)}_k(\varepsilon_k)$.

Пусть $\Pi_{k,l}[\varepsilon_k]$ и $\Pi_{k,l}(\varepsilon_k)$ – образы четырехугольников $D_{k,l}[\varepsilon_k]$ и $D_{k,l}(\varepsilon_k)$ при отображении $\zeta = g_{k,l}(z)$. Стороны четырехугольника $\Pi_{k,l}(\varepsilon_k)$ отклоняются от сторон прямоугольников $\Pi_{k,l}[\varepsilon_k]$ и

$$\widehat{\Pi}_{k,l}(\varepsilon_k) =$$
$$= \{\zeta : (-1)^{l-1} \operatorname{Re}[G_k(b_{k,l}) + C_{k,l}] < \operatorname{Re}\zeta < (-1)^{l-1} \operatorname{Re}[G_k(b_{k,l+1}) + C_{k,l}],$$
$$0 < \operatorname{Im}\zeta < (-1)^{l-1} \operatorname{Im}[G_k(a_{k,l}) + C_{k,l}]\}$$

на величины порядка $O(\varepsilon_k^{n_k/2+1})$. Обозначим площади четырехугольников $\Pi_{k,l}[\varepsilon_k]$, $\Pi_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $\widehat{\Pi}_{k,l}(\varepsilon_k)$ через $S_{k,l}[\varepsilon_k]$, $S_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $\widehat{S}_{k,l}(\varepsilon_k)$. Ясно, что

$$S_{k,l}[\varepsilon_k] = \widehat{S}_{k,l}(\varepsilon_k) + O(\varepsilon_k), \quad S_{k,l}(\varepsilon_k) = \widehat{S}_{k,l}(\varepsilon_k) + O(\varepsilon_k). \tag{7}$$

Пусть $S^{(0)}_k(\varepsilon_k)$ – площадь четырехугольника

$$\widehat{\Pi}^{(0)}_{k,l}(\varepsilon_k) =$$
$$\{\zeta : (-1)^{l-1} \operatorname{Re}[G^{(0)}_k(b_{k,l}) + C_{k,l}] < \operatorname{Re}\zeta < (-1)^{l-1} \operatorname{Re}[G^{(0)}_k(b_{k,l+1}) + C_{k,l}],$$
$$0 < \operatorname{Im}\zeta < (-1)^{l-1} \operatorname{Im}[G^{(0)}_k(a_{k,l}) + C_{k,l}]\}.$$

В дальнейшем, рассматривая области $D_{k,l}$ при фиксированном k, для упрощения формул будем считать, что $c_k = 0$ и $\gamma_k = 0$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}(\varepsilon_k) = \sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k) + O(\varepsilon_k). \tag{8}$$

Доказательство. Лемма доказывается простым вычислением. Пусть n_k – четное. Учитывая (6) и (7), находим

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}(\varepsilon_k) = \sum_{l=0}^{n_k-1} \widehat{S}_{k,l}(\varepsilon_k) + O(\varepsilon_k) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n_k-1} \{\mathrm{Re}[G_k(b_{k,l+1}) - G_k(b_{k,l})] \,\mathrm{Im}[G_k(a_{k,l}) + C_{k,l}]\} + O(\varepsilon_k) =$$

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} \{\mathrm{Re}[G_k^{(0)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(0)}(b_{k,l})] \,\mathrm{Im}[G_k^{(0)}(a_{k,l}) + C_{k,l}]\} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n_k-1} \{\mathrm{Re}[G_k^{(0)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(0)}(b_{k,l})] \,\mathrm{Im}\, G_k^{(1)}(a_{k,l})\} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n_k-1} \{\mathrm{Re}[G_k^{(1)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(1)}(b_{k,l})] \,\mathrm{Im}[G_k^{(0)}(a_{k,l}) + C_{k,l}]\} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n_k-1} \{\mathrm{Re}[G_k^{(1)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(1)}(b_{k,l})] \,\mathrm{Im}\, G_k^{(1)}(a_{k,l})\} + O(\varepsilon_k) =$$

$$= \sum\nolimits_{0,0} + \sum\nolimits_{0,1} + \sum\nolimits_{1,0} + \sum\nolimits_{1,1} + O(\varepsilon_k).$$

Имеем

$$\mathrm{Re}[G_k^{(0)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(0)}(b_{k,l})] =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \left[\sum_{j=0}^{n_k/2-1} \beta_k^{(j)} [e^{i\omega_k(l+1)(-n_k/2+j)} - e^{i\omega_k l(-n_k/2+j)}] \varepsilon_k^{-n_k/2+j} \right] + B_k i\omega_k \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{n_k/2-1} -2\,\mathrm{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}] \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] \varepsilon_k^{-n_k/2+j} \right\} - \omega_k \,\mathrm{Im}\, B_k, \tag{9}$$

$$\operatorname{Im} G_k^{(0)}(a_{k,l}) = \left\{ \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \operatorname{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\varepsilon_k^{-n_k/2+j} \right\} + \\ + \operatorname{Im}\{B_k[i\omega_k(l+1/2) + \log \varepsilon_k]\}, \tag{10}$$

и аналогичные равенства справедливы для

$$\operatorname{Re}[G_k^{(1)}(b_{k,l+1}) - G_k^{(1)}(b_{k,l})] \text{ и } \operatorname{Im} G_k^{(1)}(a_{k,l}).$$

Отсюда находим

$$\sum\nolimits_{1,0} + \sum\nolimits_{0,1} = \sum_{l=0}^{n_k-1} \Bigg\{ \Bigg[\sum_{j=0}^{n_k/2-1} -2\operatorname{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}] \times \\ \times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right]\varepsilon_k^{-n_k/2+j}\Bigg] \times \\ \times \sum_{\mu=n_k/2+1}^{n_k} \operatorname{Im}[\beta_k^{(\mu)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+\mu)}]\varepsilon_k^{-n_k/2+\mu}] + \\ + \Bigg[\sum_{\mu=n_k/2+1}^{n_k} -2\operatorname{Im}[\beta_k^{(\mu)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+\mu)}] \times \\ \times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+\mu)\right]\varepsilon_k^{-n_k/2+\mu}\Bigg] \times \\ \times \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \operatorname{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\varepsilon_k^{-n_k/2+j}] \Bigg\} + O(\varepsilon_k).$$

Преобразуя выражение в фигурных скобках при помощи равенства $-2\operatorname{Im} A = i(A - \bar{A})$ и учитывая, что

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} e^{i\omega_k(l+1/2)\nu} = \begin{cases} 0 & \text{при } e^{i\omega_k\nu} \neq 1, \\ n_k & \text{при } e^{i\omega_k\nu} = 1, \end{cases} \tag{11}$$

приходим к выражению, в котором отличны от нуля лишь члены, не содержащие степеней ε. Таким образом,

$$\sum\nolimits_{1,0} + \sum\nolimits_{0,1} = -n_k \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \operatorname{Re}[\beta_k^{(j)} \beta_k^{(n-j)}] \times$$

$$\times\left\{\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right]+\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right]\right\}+O(\varepsilon_k)=O(\varepsilon_k).$$

Так как

$$\sum\nolimits_{0,0}=\sum_{l=0}^{n_k-1}S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k),\qquad \sum\nolimits_{1,1}=O(\varepsilon_k^2),$$

то в случае четного n_k лемма доказана.

Пусть n_k – нечетное. Тогда

$$\operatorname{Re}[G_k^{(0)}(b_{k,l+1})-G_k^{(0)}(b_{k,l})]=$$

$$=\sum_{j=0}^{(n_k-1)/2}-2\operatorname{Im}[\beta_k^{(j)}e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right]\varepsilon_k^{-n_k/2+j},\tag{9'}$$

$$\operatorname{Im}G_k^{(0)}(a_{k,l})=\sum_{j=0}^{(n_k-1)/2}\operatorname{Im}[\beta_k^{(j)}e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}\varepsilon_k^{-n_k/2+j},\tag{10'}$$

формулы для $\operatorname{Re}[G_k^{(1)}(b_{k,l+1})-G_k^{(1)}(b_{k,l})]$ и $\operatorname{Im}G_k^{(1)}(a_{k,l})$ отличаются лишь изменением пределов суммирования. Таким образом, доказательство леммы завершается аналогично предыдущему.

Лемма 2.

$$\sum\nolimits_{0,0}=\sum_{l=0}^{n_k-1}S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k)=\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k)+A_k,$$

где при четном n_k

$$\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k)=n_k\sum_{j=0}^{n_k/2-1}|\beta_k^{(j)}|^2\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\Big)\right]\varepsilon_k^{-n_k+2j}+$$

$$+2\pi\ \operatorname{Re}B_k\sum_{j=0}^{n_k/2-1}\operatorname{Re}\beta_k^{(j)}\varepsilon_k^{-n_k/2+j}+$$

$$+2\sum_{l=0}^{n_k-1}\operatorname{Im}C_{k,l}\sum_{j=0}^{n_k/2-1}\operatorname{Im}[\beta_k^{(j)}e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\times$$

$$\times\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right]\varepsilon_k^{-n_k/2+j}-2\pi(\operatorname{Im}B_k)^2\log\varepsilon_k,\tag{12}$$

$$A_k = -\omega_k \operatorname{Im} B_k \left(\pi n_k \operatorname{Re} B_k + \sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Im} C_{k,l} \right),$$

при нечетном n_k

$$\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k) = n_k \sum_{j=0}^{(n_k-1)/2} |\beta_k^{(j)}|^2 \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right] \varepsilon_k^{-n_k+2j} + 2 \sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Im} C_{k,l} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{(n_k-1)/2} \operatorname{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}] \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right] \varepsilon_k^{-n_k+j}, \quad (12')$$

$A_k = 0.$

Доказательство. Пусть n_k – четное. В силу (9) и (10), имеем

$$\sum\nolimits_{0,0} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n_k-1} \left\{ \left[\sum_{j=0}^{n_k/2-1} i[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)} - \overline{\beta_k^{(j)}}\, e^{-i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}] \times \right.\right.$$

$$\left. \times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] \varepsilon_k^{-n_k/2+j} - \omega_k \operatorname{Im} B_k \right] \times$$

$$\sum_{\mu=0}^{n_k/2-1} \left[-\frac{i}{2} [\beta_k^{(\mu)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+\mu)} - \overline{\beta_k^{(\mu)}} e^{-i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+\mu)}] \varepsilon_k^{-n_k/2+\mu} + \right.$$

$$\left.\left. + (l+1/2)\omega_k \operatorname{Re} B_k + \operatorname{Im} B_k \log \varepsilon_k + \operatorname{Im} C_{k,l} \right] \right\}.$$

Учитывая, что

$$\sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] \sum_{l=0}^{n_k-1} l\, e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)} = e^{i\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)} \times$$

$$\times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] \sum_{l=0}^{n_k-1} l\, e^{i\omega_k l(-n_k/2+j)} =$$

$$= -e^{i\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)} \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] \frac{n_k}{1 - e^{i\omega_k(-n_k/2+j)}} = \frac{n_k}{2i}$$

и потому

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} li[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)} - \overline{\beta(j)}_k e^{-i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\times$$

$$\times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right] = n_k \operatorname{Re}\beta_k^{(j)},$$

в результате несложных вычислений получаем:

$$\sum\nolimits_{0,0} = \sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k) = n_k \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \Big\{ |\beta_k^{(j)}|^2 \times$$

$$\times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right]\varepsilon_k^{-n_k+2j} + \omega_k \operatorname{Re} B_k \operatorname{Re}\beta_k^{(j)} \varepsilon_k^{-n_k/2+j} \Big\} +$$

$$+2\sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Im} C_{k,l} \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \operatorname{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\times$$

$$\times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(n_k/2-j)\right] \varepsilon_k^{-n_k/2+j} -$$

$$-n_k\omega_k(\operatorname{Im} B_k)^2 \log\varepsilon_k - \omega_k^2 \frac{n_k^2}{2} \operatorname{Re} B_k \operatorname{Im} B_k - \omega_k \operatorname{Im} B_k \sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Im} C_{k,l}.$$

Этим в случае четного n_k лемма доказана. В случае нечетного n_k доказательство аналогично. □

Функцию $\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k)$ назовем функцией особенностей для суммы $\sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k)$ (тем самым, и для суммы $\sum_{l=0}^{n_k-1} S_{k,l}(\varepsilon_k)$).

1.3. Пусть $D_{k,l,t,k',l',t'} = D_{k,l,t,\dots} = D_{k',l',t',\dots}$ – двуугольник, удовлетворяющий условию $(\widetilde{A}_{k,k'})$, $g_{k,l,t,k',l',t'}(z) = g_{k,l,t,\dots}(z) = g_{k',l',t',\dots}(z)$ – отображение указанного двуугольника на полосу (пользуемся определениями п. 1.1). Пусть $D_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})$ (соответственно, $D_{k,l,t,\dots}^{(0)}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})$) – четырехугольник, получающийся из $D_{k,l,t,\dots}$ удалением окрестностей точек c_k и $c_{k'}$, ограниченных дугами кривых, на которых $\operatorname{Re} g_{k,l,t,\dots}(z) = \operatorname{Re} g_{k,l,t,\dots}(b_{k,l})$ и $\operatorname{Re} g_{k,l,t,\dots}(z) = \operatorname{Re} g_{k,l,t,\dots}(b_{k',l'})$ (соответственно, $\operatorname{Re} G_k^{(0)}(z) = \operatorname{Re} G_k^{(0)}(b_{k,l})$ и $\operatorname{Re} G_{k'}^{(0)}(z) = \operatorname{Re} G_{k'}^{(0)}(b_{k',l'})$. Пусть $\Pi_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})$ и

$\Pi^{(0)}_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ – образы областей $D_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ и $D^{(0)}_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ при отображении $\zeta = g_{k,l,t,\dots}(z)$. Вертикальные стороны прямоугольника $\Pi_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ и стороны четырехугольника $\Pi^{(0)}_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$, соединяющие его горизонтальные стороны, отклоняются от вертикальных сторон прямоугольника

$$\widehat{\Pi}_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) =$$
$$= \{\zeta : (-1)^{l-1} \operatorname{Re}[G^{(0)}_k(b_{k,l}) + C_{k,l,t}] <$$
$$< \operatorname{Re}\zeta < (-1)^{l'} \operatorname{Re}[G^{(0)}_{k'}(b_{k',l'}) + C_{k',l',t'}], |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{1}{2} h_{k,l,t,\dots}\}$$

на величину $O(\varepsilon_k^{\delta(n_k)}) + O(\varepsilon_{k'}^{\delta(n_{k'})})$, где $\delta(n) = 1$, если n – четное, и $\delta(n) = 1/2$, если n – нечетное. Следовательно, для площади $S_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ четырехугольника $\Pi_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ имеем равенство

$$S_{k,l,t,\dots}[\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}] =$$
$$= \{(-1)^{l} \operatorname{Re}[G^{(0)}_k(b_{k,l}) + C_{k,l,t}] + (-1)^{l'} \operatorname{Re}[G^{(0)}_{k'}(b_{k',l'}) + C_{k',l',t'}]\} h_{k,l,t,\dots} +$$
$$+ O(\varepsilon_k^{\delta(n_k)}) + O(\varepsilon_{k'}^{\delta(n_{k'})}). \tag{13}$$

Пусть
$$\widetilde{G}^{(0)}_k(Z) = G^{(0)}_k(Z) - B_k \log Z,$$
если $G^{(0)}_k(Z)$ содержит логарифмический член (в противном случай $\widetilde{G}^{(0)}_k(Z) = G^{(0)}_k(Z)$). Используя формулы для $\operatorname{Re} G^{(0)}_k(b_{k,l})$ (см. п. 1.1), выражение (13) можем записать в виде

$$S_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) = \sigma_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) + A_{k,l,t,\dots} + O(\varepsilon_k^{\delta(n_k)}) + O(\varepsilon_{k'}^{\delta(n_{k'})}), \tag{14}$$

где
$$\sigma_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) = \{(-1)^{l} \operatorname{Re}[\widetilde{G}^{(0)}_k(b_{k,l}) + B_k \log \varepsilon_k] +$$
$$+ (-1)^{l'} \operatorname{Re}[\widetilde{G}^{(0)}_{k'}(b_{k',l'}) + B_{k'} \log \varepsilon_{k'}]\} h_{k,l,t,\dots},$$
$$A_{k,l,t,\dots} = \{(-1)^{l}[\operatorname{Re} C_{k,l,t} - \omega_k l \operatorname{Im} B_k] +$$
$$+ (-1)^{l'} \operatorname{Re}[C_{k',l't'} - \omega_{k'} l' \operatorname{Im} B_{k'}]\} h_{k,l,t,\dots}.$$

По аналогии с определением приведенного модуля двуугольника с ненулевыми внутренними углами в его вершинах (см. [4, 5]), величину

$$M^{(2)}(D_{k,l,t,\dots}) \equiv \frac{A_{k,l,t,\dots}}{h^2_{k,l,t,\dots}}$$

будем называть приведенным модулем двуугольника $D_{k,l,t,\dots}$ относительно семейства дуг, соединяющих его стороны.

Сумму

$$\sigma_k^{(2)}(\varepsilon_k)=\sum_{l=0}^{n_k-1}\sum_{t=1}^{t(k,l)}(-1)^l\,\mathrm{Re}[\widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,l})+B_k\log\varepsilon_k]h_{k,l,t,\dots} \tag{15}$$

назовем функцией особенностей для суммы приведенных площадей двуугольников $D_{k,l,t,\dots}$, имеющих точку c_k одной из своих вершин. Соответственно, величину

$$\sigma_k(\varepsilon_k)=\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k)+\sigma_k^{(2)}(\varepsilon_k) \tag{16}$$

назовем функцией особенностей для

$$\sum_{l=0}^{n_k-1}\left\{S_{k,l}^{(0)}(\varepsilon_k)+\sum_{t=1}^{t(k,l)}(-1)^l[G_k^{(0)}(b_{k,l})+C_{k,l,t}]h_{k,l,t,\dots}\right\}.$$

1.4. Будем предполагать, что выполнено следующее условие: каждая из достаточно малых окрестностей каждой из точек c_k, $k=1,\dots,p$, заполнена областями $D_{k,l}$, $l=0,\dots,n_k-1$, и двуугольниками $D_{k,l,t,\dots}$ (условие заполнения). Через $\sigma_k(\varepsilon_k)$ обозначаем функцию (16).

Лемма 3. *Пусть выполнено предыдущее условие. Тогда при $k=1,\dots,p$ функция особенностей $\sigma_k(\varepsilon_k)$ не зависит от постоянных $C_{k,l}$, $C_{k,l,t}$:*

$$\sigma_k(\varepsilon_k)=n_k\sum_{j=0}^{n_k/2-1}|\beta_k^{(j)}|^2\sin\left[\frac{\omega_k}{2}\left(\frac{n_k}{2}-j\right)\right]\varepsilon_k^{-n_k+2j}-2\pi|B_k|^2\log\varepsilon_k, \tag{17}$$

если n_k – четное,

$$\sigma_k(\varepsilon_k)=n_k\sum_{j=0}^{(n_k-1)/2}|\beta_k^{(j)}|^2\sin\left[\frac{\omega_k}{2}\left(\frac{n_k}{2}-j\right)\right]\varepsilon_k^{-n_k+2j}, \tag{17$'$}$$

если n_k – нечетное.

Доказательство. Пусть n_k – четное. Пусть области $D_{k,l-1}$ и $D_{k,l}$ имеют в окрестности точки c_k общую граничную дугу и пусть z_0 – точка этой дуги. Функция

$$\zeta=-g_{k,l-1}(z)=(-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z)+C_{k,l-1}+\dots\}$$

отображает область $D_{k,l-1}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, а функция

$$\zeta = g_{k,l}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l} + \dots\}$$

отображает область $D_{k,l}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Из условия

$$-\operatorname{Im} g_{k,l-1}(z_0) = \operatorname{Im} g_{k,l}(z_0)$$

вытекают равенства (мы пользуемся данным в п. 1.1 определением ветви $\arg(z - c_k)$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} C_{k,l-1} &= \operatorname{Im} C_{k,l}, \quad l = 1, \dots, n_k - 1; \\ \operatorname{Im} C_{k,n_k-1} &= \operatorname{Im} C_{k,0} - 2\pi \operatorname{Re} B_k. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть теперь имеются двуугольники $D_{k,l,t,\dots}$, $1 \leqslant t \leqslant t(k,l)$, разделяющие области $D_{k,l-1}$ и $D_{k,l}$ в окрестности точки c_k, следовательно, имеющие луч $\mathcal{L}_{k,l}$ своей общей касательной в точке c_k. Для определенности будем считать, что отображения $g_{k,l,t,\dots}(z)$ областей $D_{k,l,t,\dots}$ на полосы удовлетворяют следующему условию: $g_{k,l,t,\dots}(z) \to -\infty$ при $z \to c_k$, $z \in D_{k,l,t,\dots}$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Именно, пусть функция

$$\zeta = g_{k,l,1,\dots}(z) + \frac{1}{2} i h_{k,l,1,\dots} = (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l,1} + \dots\} + \frac{1}{2} i h_{k,l,1,\dots}$$

отображает двуугольник $D_{k,l,1,\dots}$ на полосу $0 < \operatorname{Im}\zeta < h_{k,l,1,\dots}$, при $2 \leqslant t \leqslant t(k,l)$ функция

$$\zeta = g_{k,l,t,\dots}(z) + i\left(\sum_{\nu=1}^{t-1} h_{k,l,\nu,\dots} + \frac{1}{2} h_{k,l,t,\dots}\right) =$$

$$= (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l,t} + \dots\} + i\left(\sum_{\nu=1}^{t-1} h_{k,l,\nu,\dots} + \frac{1}{2} h_{k,l,t,\dots}\right)$$

отображает двуугольник $D_{k,l,t,\dots}$ на полосу $\sum_{\nu=1}^{t-1} h_{k,l,\nu,\dots} < \operatorname{Im}\zeta < \sum_{\nu=1}^{t} h_{k,l,\nu,\dots}$, наконец, функция

$$\zeta = g_{k,l}(z) + i \sum_{\nu=1}^{t(k,l)} h_{k,l,\nu,\dots} = (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l} + \dots\} + i \sum_{\nu=1}^{t(k,l)} h_{k,l,\nu,\dots}$$

отображает область $D_{k,l}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > \sum_{\nu=1}^{t(k,l)} h_{k,l,\nu,\dots}$. Отсюда и из “склеивания” полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, указанных полос и полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta > \sum_{\nu=1}^{t(k,l)} h_{k,l,\nu,\dots}$ получаем систему равенств

$$(-1)^{l-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,l-1} =$$

$$= (-1)^{l-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,l,1} + \frac{1}{2}h_{k,l,1,\dots} =$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= (-1)^{l-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,l,t(k,l)} + \sum_{\nu=1}^{t(k,l)-1} h_{k,l,\nu,\dots} + \frac{1}{2}h_{k,l,t(k,l)} = \qquad (19)$$

$$= (-1)^{l-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,l} + \sum_{\nu=1}^{t(k,l)} h_{k,l,\nu,\dots} \ \text{ при } \ l = 1,\dots,n_k-1;$$

$$(-1)^{n_k-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,n_k-1} = (-1)^{n_k-1}\,\mathrm{Im}\,C_{k,0} + \sum_{\nu=1}^{t(k,n_k)} h_{k,n_k,\nu,\dots} + 2\pi\,\mathrm{Re}\,B_k.$$

Пусть n_k – нечетное. Если двуугольники $D_{k,l,t,\dots}$ отсутствуют, то имеем равенства

$$\mathrm{Im}\,C_{k,l-1} = \mathrm{Im}\,C_{k,l} \text{ при } l = 1,\dots,n_k-1;$$
$$\mathrm{Im}\,C_{k,n_k-1} = \mathrm{Im}\,C_{k,0}.$$

Если же двуугольники $D_{k,l,t,\dots}$ имеются, то справедливы равенства (19) при $B_k = 0$.

Вернемся к случаю четного n_k. Обозначим через $\widetilde{G}_k^{(0)}(z)$ функцию $G_k^{(0)}(z)$ без логарифмического слагаемого:

$$\widetilde{G}_k^{(0)}(z) = G_k^{(0)}(z) - B_k \log z.$$

Преобразуя вторую и третью сумму в выражения (12) для $\sigma_k^{(1)}(\varepsilon_k)$, и используя условия (19) и равенство (15), получаем

$$-2\sum_{l=0}^{n_k-1} \mathrm{Im}\,C_{k,l} \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \mathrm{Im}[\beta_k^{(j)} e^{i\omega_k(l+1/2)(-n_k/2+j)}]\times$$

$$\times \sin\left[\frac{\omega_k}{2}(-n_k/2+j)\right]\varepsilon_k^{-n_k/2+j} + 2\pi\,\mathrm{Re}\,B_k \sum_{j=0}^{n_k/2-1} \mathrm{Re}\,\beta_k^{(j)}\varepsilon_k^{-n_k/2+j} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Im} C_{k,l} \operatorname{Re}[\widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,l+1}) - \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,l})] + 2\pi \operatorname{Re} B_k \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,0}) =$$

$$= \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,1}) \operatorname{Im}(C_{k,0} - C_{k,1}) + \ldots +$$

$$+ \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,n_k-1}) \operatorname{Im}(C_{k,n_k-2} - C_{k,n_k-1}) +$$

$$+ \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,0}) \operatorname{Im}(C_{k,n_k-1} - C_{k,0}) + 2\pi \operatorname{Re} B_k \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,0}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n_k-1} \operatorname{Re} \widetilde{G}_k^{(0)}(b_{k,l})(-1)^{l-1} \mathrm{H}_{k,l} =$$

$$= -\sigma_k^{(2)}(\varepsilon_k) + \operatorname{Re} B_k \log \varepsilon_k \sum_{l=-}^{n_k-1} (-1)^l \mathrm{H}_{k,l},$$

где

$$\mathrm{H}_{k,l} = \sum_{t=1}^{t(k,l)} h_{k,l,t,\ldots}.$$

Из (19) получаем

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} (-1)^l \mathrm{H}_{k,l} = -2\pi \operatorname{Re} B_k$$

и приходим к выражению (17) для $\sigma_k(\varepsilon_k)$.

В случае нечетного n_k доказательство аналогично. □

Замечание 1. По леммам 1–3, при сформулированных выше условиях существует конечный предел

$$\lim_{\|\varepsilon\|\to 0} \sum_{k=1}^{p} \left\{ \sum_{l=0}^{n_k-1} \left[S_{k,l}(\varepsilon_k) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{t(k,l)} S_{k,l,t,\ldots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) \right] - \sigma_k(\varepsilon_k) \right\},$$

где $\sigma_k(\varepsilon_k)$ – функция особенностей, определенная в лемме 3. Этот предел мы будем называть приведенной площадью систем областей $\mathbb{D}^{(3)} = \{D_{k,l}\}$ и $\mathbb{D}^{(4)} = \{D_{k,l,t,\ldots}\}$ относительно системы точек $\mathbf{C} = \{c_k\}_{k=1}^p$ и системы окрестностей $\Omega(\varepsilon) = \{\Omega_k(\varepsilon_k)\}_{k=1}^p$ и обозначать через $\mathcal{M}(\mathbb{D}^{(3)}, \mathbb{D}^{(4)}; \mathbf{C})$.

§2. Об экстремальном свойстве квадратичных дифференциалов

2.1. Пусть

$$\mathbf{A} = \{a_j\}_{j=1}^n, \quad \mathbf{B} = \{b_j\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{C} = \{c_k\}_{k=1}^p$$

– множества различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$. Предполагаем, что $\mathbf{C} \neq \varnothing$ и все точки множества $\mathbf{C}$ конечны. Множеству $\mathbf{C}$ сопоставим систему натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^p$, $n_k \geqslant 1$, систему вещественных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^p$ и систему мероморфных функций

$$G_k^{(0)}(z) = \sum_{j=0}^{N_k} \beta_k^{(j)} Z^{-n_k/2+j} + B_k \log Z, \quad Z = e^{i\gamma_k}(z-c_k), \quad k = 1, \dots, p,$$

где $N_k = [(n_k-1)/2]$, $\beta_k^{(j)}$ и B_k – заданные комплексные числа, $\beta_k^{(0)} > 0$ (логарифмический член может присутствовать только при четном n_k).

Пусть $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}\}$. На $\overline{\mathbb{C}}'$ рассмотрим семейство $\mathcal{H}$ систем

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{H_j^{(1)}\}_{j=1}^{m_1}, \quad \mathcal{H}^{(2)} = \{H_j^{(2)}\}_{j=1}^{m},$$

$$\mathcal{H}_k^{(3)} = \{H_{k,l}\}_{l=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\mathcal{H}^{(4)} = \{H_{k,l,t,k',l',t'}\}$$

гомотопических классов жордановых кривых следующих типов. $H_j^{(1)}$ – класс замкнутых кривых, не гомотопных нулю на $\overline{\mathbb{C}}'$, $H_j^{(2)}$ – класс замкнутых кривых, гомотопных точечной кривой в точке b_j. При $k = 1, \dots, p$ через $H_{k,l}$, $0 \leqslant l \leqslant n_k - 1$, обозначаем класс дуг, имеющих точку c_k своим концом в обоих направлениях и гомотопных траекториям квадратичного дифференциала

$$\frac{e^{i\gamma_k n_k}}{(z-c_k)^{n_k+2}}\, dz^2,$$

лежащим в круговом секторе

$$\Delta_{k,l} = \{z : |z - c_k| \leqslant \rho_k, \gamma_k + 2\pi l/n_k \leqslant \arg(z - c_k) \leqslant \gamma_k + 2\pi(l+1)/n_k\}$$

достаточно малого радиуса ρ_k. Через $H_{k,l,t,k',l',t'}$ обозначаем класс дуг, имеющих своими концами точки c_k и $c_{k'}$ и разделяющих в окрестностях точек c_k и $c_{k'}$ дуги кривых, принадлежащих соответственно классам $H_{k,l-1}$, $H_{k,l}$ и $H_{k',l'-1}$, $H_{k',l'}$.

Допустимое семейство $\mathcal{D}$ систем

$$\mathbb{D}^{(1)} = \{D_j^{(1)}\}_{j=1}^{m_1}, \quad \mathbb{D}^{(2)} = \{D_j^{(2)}\}_{j=1}^{m},$$

$$\mathbb{D}_k^{(3)} = \{D_{k,l}\}_{l=0}^{n_k-1}, \quad \mathbb{D}^{(4)} = \{D_{k,l,t,k',l',t'}\}$$

неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}' \cup \mathbf{B}$ определяется следующим образом. $D_j^{(1)}$ – двусвязная область на $\overline{\mathbb{C}}'$, ассоциированная с классом $H_j^{(1)}$. $D_j^{(2)}$ – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}' \cup \{b_j\}$, $b_j \in D_j^{(2)}$. При $1, \dots, p$ система $\mathbb{D}_k^{(3)}$ состоит из областей $D_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, имеющих точку c_k своей общей граничной точкой, образующих в точке c_k внутренние углы, равные $2\pi/n_k$, и ассоциированных с классами $H_{k,l}$. Система $\mathbb{D}^{(4)}$ состоит из двуугольников $D_{k,l,t,k',l',t'}$, имеющих своими вершинами точки c_k и $c_{k'}$, обладающими нулевыми внутренними углами в этих вершинах, разделяющих в окрестностях точек c_k и $c_{k'}$ соответственно области $D_{k,l-1}$, $D_{k,l}$ и области $D_{k',l'-1}$, $D_{k',l'}$ и ассоциированных с классами $H_{k,l,t,k',l',t'}$. Для отображения $\zeta = g_{k,l}(z)$ области $D_{k,l}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $g_{k,l}(c_k) = \infty$, в окрестности точки c_k справедливо представление

$$g_{k,l}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l} + \widehat{g}_{k,l}(z)\},$$

где $C_{k,l}$ – постоянная,

$$\widehat{g}_{k,l}(z) = \sum_{j=[(n_k+1)/2]}^{\infty} \beta_k^{(j)}[e^{-i\gamma}(z - c_k)]^{-n_k/2+j},$$

а для отображения $\zeta = g_{k,l,t,k',l',t'}(z)$ области $D_{k,l,t,k',l',t'}$ на полосу $-\frac{1}{2}h < \operatorname{Im}\zeta < \frac{1}{2}h$, $h = h_{k,l,t,k',l',t'}$, где $g_{k,l,t,k',l',t'}(c_k) = -\infty$, $g_{k,l,t,k',l',t'}(c_{k'}) = +\infty$, в окрестности точки c_k

$$g_{k,l,t,k',l',t'}(z) = (-1)^{l-1}\{G_k^{(0)}(z) + C_{k,l,t} + \widehat{g}_{k,l}(z)\},$$

в окрестности точки $c_{k'}$

$$g_{k,l,t,k',l',t'}(z) = (-1)^{l'}\{G_{k'}^{(0)}(z) + C_{k',l',t'} + \widehat{g}_{k',l'}(z)\},$$

$C_{k,l,t}$ и $C_{k',l',t'}$ – постоянные. Функции $g_{k,l}(z)$ и $g_{k,l,t,k',l',t'}(z)$ аналитически продолжимы соответственно в окрестностях точек c_k и точек c_k, $c_{k'}$ и каждая из достаточно малых окрестностей точки c_k, $k = 1, \dots, p$, заполнена областями $D_{k,l}$ и $D_{k,l,t,k',l',t'}$.

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}\}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \{\alpha_{m_1+1}, \dots, \alpha_{m_1+m}\}$$

– заданные системы положительных чисел.

Пусть $Q(z)dz^2$ – мероморфный квадратичный дифференциал на $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющий следующим условиям. 1) $Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках $a_j \in \mathbf{A}$ (возможно, не во всех из этих точек), полюсы второго порядка в каждой из точек $b_j \in \mathbf{B}$, полюсы порядков n_k+2 в каждой из точек $c_k \in \mathbf{C}$ и не имеет других полюсов на $\overline{\mathbb{C}}$. 2) Пусть Φ – объединение всех критических траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$. Внутреннее замыкание $\widehat{\Phi}$ множества Φ пусто и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Phi}$ представляет собой объединение кольцевых областей $D_j^{(1)*}$, $j = 1, \dots, m_1$, круговых областей $D_j^{(2)*}$, $j = 1, \dots, m$, $b_j \in D_j^{(2)*}$, концевых областей $D^*_{k,l}$, $k = 1, \dots, p$, $l = 0, \dots, n_k - 1$, и набора полосообразных областей $\{D^*_{k,l,t,k',l',t'}\}$ дифференциала $Q(z)dz^2$. Система $\mathbb{D}^*$ указанных областей принадлежит семейству $\mathcal{D}$. 3) Длины в Q-метрике, т.е. в метрике $|Q(z)|^{1/2}|dz|$, траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_j^{(1)*}$, $j = 1, \dots, m_1$, равны α_j, длины в Q-метрике траекторий этого дифференциала в области $D_j^{(2)*}$, $j = 1, \dots, m$, равны α_{m_1+j}.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ – система достаточно малых положительных чисел. Пусть $\Omega_k\langle\varepsilon_k\rangle$, $k = 1, \dots, p$, – окрестности точек c_k, ограниченные дугами траекторий и ортогональных траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$, проходящими соответственно через точки $a_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $b_{k,l}(\varepsilon_k)$, $l = 0, \dots, n_k - 1$. Пусть $\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle$ – система областей $D_j^{(1)}$, $D_j^{(2)}$, $D_{k,l}\langle\varepsilon_k\rangle$ и $D_{k,l,t,\dots}\langle\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}\rangle$, где области $D_{k,l}\langle\varepsilon_k\rangle$ и $D_{k,l,t,\dots}\langle\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}\rangle$ получаются из областей $D_{k,l}$ и $D_{k,l,t\dots}$ удалением замыканий окрестностей $\Omega_k\langle\varepsilon_k\rangle$, $k = 1, \dots, p$. Через $\mathbb{D}^*$ обозначаем систему областей $D_j^{(1)*}$, $D_{m+j}^{(2)*}$, $D^*_{k,l}$ и $D^*_{k,l,t,\dots}$, являющихся кольцевыми, круговыми, концевыми и полосообразными областями дифференциала $Q(z)dz^2$. Пусть $\alpha_{k,l}(\varepsilon_k)$ и $\alpha_{k,l,t,\dots}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'})$ – длины в Q-метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ соответственно в областях $D^*_{k,l}\langle\varepsilon_k\rangle$ и $D^*_{k,l,t,\dots}\langle\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}\rangle$.

На семействе $\mathcal{D}\langle\varepsilon\rangle$ систем областей $\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle$ рассмотрим функционал

$$\mathcal{F}(\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle) = \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j^2 M(D_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{m_1+j}^2 M(D_j^{(2)}, b_j) +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\left\{\sum_{l=0}^{n_k-1}\left[\alpha_{k,l}^2(\varepsilon_k)M(D_{k,l}\langle\varepsilon_k\rangle)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t(k,l)}\alpha_{k,l,t,\ldots}^2(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})M(D_{k,l,t,\ldots}\langle\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}\rangle)\right]-\sigma_k(\varepsilon_k)\right\}. \qquad (20)$$

Здесь $M(D_j^{(1)})$ – модуль двусвязной области $D_j^{(1)}$ относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты, $M(D_j^{(2)}, b_j)$ – приведенный модуль односвязной области $D_j^{(2)}$ относительно ее точки b_j, $M(D_{k,l}\langle\varepsilon_k\rangle)$ и $M(D_{k,l,t,\ldots}\langle\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}\rangle)$ – модули указанных четырехугольников относительно семейств дуг, соединяющих их стороны, принадлежащие границам удаляемых окрестностей. Через $\sigma_k(\varepsilon_k)$ обозначаем функцию особенностей, определенную в лемме 3. Пусть

$$\mathcal{F}(\mathbb{D})=\lim_{\|\varepsilon\|\to 0}\mathcal{F}(\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle).$$

2.2. Следующая теорема устанавливает экстремальную роль дифференциала $Q(z)dz^2$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{D}$ – определенное выше семейство систем областей $\mathbb{D}$. Пусть существует квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$, удовлетворяющий условиям 1)–3), и пусть $\mathbb{D}^*$ – система кольцевых, круговых, концевых и полосообразных областей дифференциала $Q(z)dz^2$. В семействе $\mathcal{D}$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(\mathbb{D})\leqslant\mathcal{F}(\mathbb{D}^*), \qquad (21)$$

и равенство в (21) имеет место только для системы $\mathbb{D}^*$. Существует единственный квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$, удовлетворяющий условиям 1)–3).

Доказательство. Пусть, как и выше, $\varepsilon=\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\}$ – система достаточно малых положительных чисел. В силу хорошо известных результатов метода экстремальной метрики, имеем неравенство

$$\mathcal{F}(\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle)\leqslant\mathcal{F}(\mathbb{D}^*\langle\varepsilon\rangle). \qquad (22)$$

При этом в случае несовпадения каких-либо областей систем $\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle$ и $\mathbb{D}^*\langle\varepsilon\rangle$ на множестве ненулевой меры неравенство (22) может быть усилено посредством добавления к его левой части положительного слагаемого, не зависящего от ε. Очевидно,

$$\alpha_{k,l}^2(\varepsilon_k)M(D_{k,l}^*\langle\varepsilon_k\rangle)=S_Q(D_{k,l}^*\langle\varepsilon_k\rangle)=S_Q(D_{k,l}^*(\varepsilon_k)),$$

$$\alpha^2_{k,l,t,\ldots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})M(D^*_{k,l,t,\ldots}\langle\varepsilon,\varepsilon_{k'}\rangle) =$$
$$= S_Q(D^*_{k,l,t,\ldots}\langle\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}\rangle) = S_Q(D^*_{k,l,t,\ldots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})),$$

где через $S_Q(D)$ обозначается площадь области D в Q-метрике. По леммам 1–3, величина $\mathcal{F}(\mathbb{D}^*\langle\varepsilon\rangle)$, а потому и $\mathcal{F}(\mathbb{D}\langle\varepsilon\rangle)$, ограничены сверху. Переходя в неравенстве (22) к пределу при $\|\varepsilon\|\to 0$, получаем (21). Из предыдущего следует, что равенство в (21) имеет место только в указанном в теореме случае. Стандартные рассуждения метода экстремальной метрики показывают, что квадратичный дифференциал, удовлетворяющий условиям 1)–3), единственен.

Замечание 2. Имеет место равенство (пользуемся определением замечания 1)

$$\lim_{\|\varepsilon\|\to 0}\sum_{k=1}^{p}\Bigg\{\sum_{l=0}^{n_k-1}\Bigg[\alpha^2_{k,l}(\varepsilon_k)M(D^*_{k,l}(\varepsilon_k))+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t(k,l)}\alpha^2_{k,l,t,\ldots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'})M(D^*_{k,l,t,\ldots}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}))\Bigg] - \sigma_k(\varepsilon_k)\Bigg\} =$$
$$= \mathcal{M}(\mathbb{D}^{(3)*},\mathbb{D}^{(4)*};\mathbf{C}).$$

Замечание 3. Теорема 1 легко распространяется на тот случай, когда допустимое семейство областей помимо областей рассматриваемых четырех типов содержит двуугольники, подобные в малом полосообразным областям квадратичных дифференциалов, имеющим в вершинах упомянутых двуугольников полюсы второго порядка с локальной структурой траекторий радиального или спирального типа.

Замечание 4. Теорема 1 оставляет открытыми ряд вопросов. К их числу относится вопрос об условиях существования ассоциированного квадратичного дифференциала теоремы 1 в общем случае. В некоторых случаях существование указанного дифференциала непосредственно вытекает из хорошо известных фактов метода экстремальной метрики. Мы не останавливаемся также на условиях, при которых в теореме 1 в качестве удаляемых окрестностей точек c_k достаточно рассматривать окрестности $\Omega_k^{(0)}(\varepsilon_k)$, $k=1,\ldots,p$.

Эти вопросы мы предполагаем рассмотреть в следующих публикациях.

§3. Замечания и примеры

3.1. Остановимся кратко на способе построения окрестности точки $c_k = 0$, позволяющем установить связь приведенной площади системы областей $D_{k,l}$, $l = 0, \dots, n_k - 1$ (пользуемся определениями §1) со взвешенной суммой приведенных модулей областей $D_{k,l}$ относительно их внутренних точек.

Пусть $l = 0$. Индекс "k" в обозначениях области $D_{k,0}$, отображающей функции $g_{k,0}(z)$ и связанных с ними величин будем опускать.

Пусть
$$a_0^* = a_0^*(\varepsilon) = e^{i\pi/n}\varepsilon^\lambda, \quad \lambda > 1, \tag{23}$$
и пусть
$$\zeta_0^* = g_0(a_0^*).$$

Положим
$$L_0^{(1)} = \operatorname{Re} g_0(b_0), \quad L_0^{(2)} = \operatorname{Re} g_0(b_1), \quad H_0 = \operatorname{Im}\zeta_0, \quad \zeta_0 = g_0(a_0),$$
где точки b_0, b_1, a_0 определены в (6):
$$b_0 = \varepsilon, \quad b_1 = e^{i2\pi/n}, \quad a_0 = e^{i\pi/n}\varepsilon.$$

Рассмотрим дифференциал
$$Q_0(\zeta)d\zeta^2 = \frac{|\zeta_0^*|^4 d\zeta^2}{(\zeta_0^* - \zeta)(\overline{\zeta_0^*} - \zeta)^2} = \frac{d\zeta^2}{(1 - \zeta/\zeta_0^*)(1 - \zeta/\overline{\zeta_0^*})^2}, \tag{24}$$
для которого точки ζ_0^* и $\overline{\zeta_0^*}$ служат полюсами второго порядка, лежащими в его круговых областях, и пусть $\widetilde{\Pi}^{(\zeta)}(\varepsilon)$ – четырехугольник, ограниченный отрезком $[L_0^{(1)}, L_0^{(2)}]$, дугами ортогональных траекторий дифференциала (24), имеющих своими концами точки $L_0^{(1)}$ и $L_0^{(2)}$, и дугой траектории этого дифференциала, проходящей через точку ζ_0. Прообраз $\widetilde{D}_0(\varepsilon)$ четырехугольника $\widetilde{\Pi}_0^{(\zeta)}(\varepsilon)$ при отображении $\zeta = g_0(z)$ будем рассматривать в качестве области, получаемой из области D_0 удалением окрестности точки $c = 0$.

Функция
$$t = t_0(\zeta) = \frac{1 - \zeta/\zeta_0^*}{1 - \zeta/\overline{\zeta^*}}$$

отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на круг $|t| < 1$, $t_0(\zeta_0^*) = 0$, $t_0(0) = 1$, при этом траекториям и дугам ортогональных траекторий дифференциала (24), лежащим в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, соответствуют окружности $|t| = r$, $0 < r < 1$, и радиусы круга $|t| < 1$. При отображении

$$w = w_0(\zeta) = \int \sqrt{Q_0(\zeta)}\, d\zeta = -i\frac{|\zeta_0^*|^2}{2\operatorname{Im}\zeta_0^*}\log\frac{1-\zeta/\zeta_0^*}{1-\zeta/\overline{\zeta_0^*}} \tag{25}$$

четырехугольнику $\widetilde{\Pi}_0^{(\zeta)}(\varepsilon)$ соответствует прямоугольник

$$\Pi_0^{(w)}(\varepsilon) = \{w : w_0(L_0^{(1)}) < \operatorname{Re} w < w_0(L_0^{(2)}), 0 < \operatorname{Im} w < \operatorname{Im} w_0(\zeta_0)\}.$$

Следующая лемма дает оценку разности площадей прямоугольников

$$\Pi_0^{(w)}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \Pi_0^{(\zeta)}(\varepsilon) = \{\zeta : L_0^{(1)} < \operatorname{Re}\zeta < L_0^{(2)}, 0 < \operatorname{Im}\zeta < H_0\}.$$

Лемма 4. *При $n \geqslant 1$ и $\lambda \geqslant 3$*

$$\text{площ.}\,\Pi_0^{(w)}(\varepsilon) - \text{площ.}\,\Pi_0^{(\zeta)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu}), \quad \mu = \min\{n, \lambda+1\}.$$

Доказательство. Используя разложение для $\log(1-\zeta/a)$, из (25) получаем

$$w_0(\zeta) = \zeta + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{Im}((\zeta_0^*)^k)}{|\zeta_0^*|^{2k-2}\operatorname{Im}\zeta_0^*}\zeta^k,$$

где ряд в правой части сходится при достаточно малых значениях $|\zeta/\zeta^*|$. Пользуясь выражением для $\zeta_0^* = g_0(a_0^*)$, получающимся из выражения п. 1.1 при замене ε на ε^{λ}, находим (здесь и ниже, $n = 2m$)

$$|\zeta_0^*| = O(\varepsilon^{-\lambda m}), \quad \operatorname{Im}\zeta_0^* = O(\varepsilon^{-\lambda m}), \quad \operatorname{Im}((\zeta_0^*)^2) = O(\varepsilon^{\lambda(-2m+1)}),$$

откуда

$$\frac{\operatorname{Im}((\zeta_0^*)^2)}{|\zeta_0^*|^2\operatorname{Im}\zeta_0^*} = O(\varepsilon^{\lambda(m+1)}).$$

При $k \geqslant 3$

$$\frac{\operatorname{Im}(\zeta_0^{*k})}{|\zeta_0^*|^{2k-2}\operatorname{Im}\zeta_0^*} \leqslant \frac{1}{|\zeta_0^*|^{k-2}\operatorname{Im}\zeta_0^*} \leqslant \frac{1}{(\operatorname{Im}\zeta_0^*)^{k-1}}$$

и из (25) находим

$$w_0(L_0^{(2)})-w_0(L_0^{(1)}) = L_0^{(2)}-L_0^{(1)}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{Im}((\zeta_0^*)^k)}{|\zeta_0^*|^{2k-2}\operatorname{Im}\zeta_0^*}\big((L_0^{(2)})^k-(L_0^{(1)})^k\big).$$

Пусть $\lambda \geqslant 3$. Полагая $\max\{-L_0^{(1)}, L_0^{(2)}\} = L_0$, учитывая, что

$$L_0 = O(\varepsilon^{-m}),\quad L_0^{(2)} - L_0^{(1)} = O(\varepsilon^{-m}),\quad L_0^{(2)} + L_0^{(1)} = O(\varepsilon^{-m+1}),$$

и используя полученные выше оценки, находим

$$w_0(L_0^{(2)})-w_0(L_0^{(1)}) = L_0^{(2)}-L_0^{(1)}+O(\varepsilon^{(\lambda-2)m+\lambda+1})+O(\varepsilon^{(-3+2\lambda)m}). \tag{26}$$

Учитывая оценки для $\zeta_0 = g_0(a_0)$:

$$|\zeta_0| = O(\varepsilon^{-m}),\quad \operatorname{Im}\zeta_0 = O(\varepsilon^{-m}),\quad \operatorname{Im}(\zeta_0^2) = O(\varepsilon^{-2m+1}),$$

аналогичным образом находим

$$w_0(\zeta_0) = \zeta_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{Im}((\zeta_0^*)^k)}{|\zeta_0^*|^{2k-2}\operatorname{Im}\zeta_0^*}\,\zeta_0^k =$$

$$= \zeta_0 + O(\varepsilon^{(\lambda-2)m+\lambda+1}) + O(\varepsilon^{m(-3+2\lambda)}). \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$\text{площ.}\,\Pi_0^{(w)}(\varepsilon) = (L_0^{(2)} - L_0^{(1)})H_0 + O(\varepsilon^{(\lambda-3)m+\lambda+1}) + O(\varepsilon^{(2\lambda-4)m})$$

и лемма доказана. □

Легко видеть, что утверждение, аналогичное лемме 4, справедливо для двуугольников, подобных в малом полосообразным областям квадратичного дифференциала.

3.2. В качестве простого примера, иллюстрирующего возможности применения теоремы 1, приведем доказательство уже известного результата.

Пусть, как обычно, Σ класс функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в области $U^* = \{z : |z| > 1\}$ и имеющих лорановское разложение вида

$$f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots,$$

и пусть $\Sigma(r)$, $0 < r < 1$, – класс функций из Σ, для которых область $f(U^*)$ не содержит односвязной области D_0 такой, что

$0 \in D_0$, $R(D_0, 0) = r$. (Через $R(D_0, 0)$ обозначаем конформный радиус области D относительно начала координат.)

Известна следующая теорема [10–13] (мы опускаем описание экстремальных отображений).

Теорема 2. *В классе $\Sigma(r)$, $0 < r < 1$, справедливо точное неравенство*

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{2}{n+1} P(r^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2.$$

Здесь при $x \leqslant 64/(\pi e)^2$

$$P(x) = 1 - \frac{1}{8} e^2 x,$$

при $x > 64/(\pi e)^2$

$$P(x) = 1 - \frac{2}{k^2} \left[\frac{4}{\pi^2} \mathbf{E}^2(k) - {k'}^2 \right],$$

где k, $0 < k < 1$, – решение уравнения

$$x = \frac{64}{(\pi e)^2} \frac{\mathbf{E}^2(k)}{k^2} \exp\left\{ -\pi \frac{\mathbf{K}'(k) - \mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)} \right\}.$$

Доказательство теоремы 2 при $n = 0$ было получено Дженкинсом [10] при помощи его “общей теоремы о коэффициентах”, при $n = 1$ доказательство получили Дюрен и Шиффер [11], используя метод внутренних вариаций Шиффера, а также А. Ю. Солынин [12] методом модулей. Доказательство теоремы 2 при $n = 1$ и 2, данное в [13], основывается на результатах в задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей и последующем предельном переходе.

Теорема 1 приводит к простому доказательству теоремы 2 в случаях $n = 0, 1$. Ограничимся случаем $n = 1$ (при $n = 0$ доказательство по существу аналогично, но несколько проще).

Рассмотрим на z-сфере квадратичный дифференциал

$$q(z) dz^2 = \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)^2 dz^2. \tag{28}$$

В структуре траекторий дифференциала (28) присутствуют четыре концевых области:

$$D_1^{(z)} = \{z : z \in U^*, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad D_2^{(z)} = \{z : z \in U^*, \operatorname{Im} z < 0\},$$

лежащие в области U^*, и области $\widetilde{D}_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, где $\widetilde{D}_j^{(z)}$ симметрична с $D_j^{(z)}$ относительно окружности $C = \{z : |z| = 1\}$, лежащие в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. При надлежащем выборе ветви корня функция

$$\zeta = \int \sqrt{q(z)}\, dz = (-1)^{j-1}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

отображает область $D_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^{(\zeta)} = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, а функция

$$\zeta = (-1)^j\left(\frac{1}{z} + z\right)$$

отображает область $\widetilde{D}_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, на ту же полуплоскость. Ясно, что четверка областей $D_j^{(z)}$, $\widetilde{D}_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, является экстремальной системой областей задачи теоремы 1 об экстремальном разбиении $\mathbb{C}^{(z)} \setminus \{0\}$ при $A = \varnothing$, $B = \varnothing$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2\} = \{\infty, 0\}$, $n_1 = n_2 = 2$, $G_1^{(0)} = z$, $G_2^{(0)} = 1/z$. Очевидно, что области $D_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, – экстремальная пара областей в соответствующей задаче об экстремальном разбиении области U^*.

Пусть $w = f(z)$ – функция, реализующая $\max|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(r)$. Как показывает несложное рассуждение в [13], достаточно считать, что $f(z)$ – нечетная функция:

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots\,. \tag{29}$$

Мы можем также считать, что $\alpha_1 > 0$. Через $z = g(w)$ обозначаем отображение, обратное к $w = f(z)$:

$$z = w - \frac{\alpha_1}{w} + \dots \tag{30}$$

Пусть D_j, $j = 1, 2$, – образы областей $D_j^{(z)}$ при отображении $w = f(z)$. В силу (30), для отображения $\zeta = \pm g(w)$ области D_j, $j = 1, 2$, на полуплоскость $\mathbb{H}^{(\zeta)}$ имеем разложение

$$\zeta = (-1)^{j-1}\left\{w + \frac{1 - \alpha_1}{w} + \dots\right\}. \tag{31}$$

Таким образом, области D_0, D_1, D_2 образуют допустимую систему областей в задаче теоремы 1 об экстремальном разбиении w-плоскости при $\mathbf{A} = \varnothing$, $\mathbf{B} = \{0\}$, $\mathbf{C} = \{c_1\} = \{\infty\}$, $n_1 = 2$, $G_1^{(0)}(w) = w$, а дифференциал

$$Q(w)dw^2 = \frac{w^2 - \mu^2}{w^2}\, dw^2, \tag{32}$$

где μ – некоторое положительное число, является ассоциированным квадратичным дифференциалом указанной задачи. Пусть $D_0(\mu)$ – круговая область, $D_1(\mu)$ и $D_2(\mu)$ – концевые области дифференциала (32), $D_1(\mu) \subset \mathbb{H}^{(w)}$. Функция

$$\zeta = (-1)^{j-1} \int \sqrt{Q(w)}\, dw = (-1)^{j-1} \left\{ w + \frac{1}{2}\, \frac{\mu^2}{w} + \dots \right\} \tag{33}$$

отображает область $D_j(\mu)$, $j = 1, 2$, на полуплоскость $\mathbb{H}^{(\zeta)}$.

Будем пользоваться теоремой 1. Для экстремального отображения $w = f(z)$ рассмотрим равенство

$$q(z)dz^2 = Q(w)dw^2. \tag{34}$$

Из (33) находим, что $\operatorname{cap} \partial D_0(\mu) = \pi\mu/4$. Следовательно, области $D_j(\mu)$ являются образами областей $D_j^{(z)}$, $j = 1, 2$, при отображении $f \in \Sigma$ при условии

$$\mu \leqslant \frac{4}{\pi}. \tag{35}$$

Используя уравнение

$$-\mu^2 \frac{dt^2}{t^2} = Q(w)dw^2$$

для отображения $t = t(w)$ области $D_0(\mu)$ на круг $|t| < 1$, получаем

$$R(D_0(\mu), 0) = \frac{2\mu}{e}, \tag{36}$$

По теореме 1,

$$R(D_0, 0) \leqslant R(D_0(\mu), 0),$$

откуда, в силу (35) и (36),

$$r = R(D_0, 0) \leqslant \frac{2\mu}{e} \leqslant \frac{8}{\pi e}.$$

Так как для экстремального отображения справедливо (34), то из (31) и (33) находим

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}\mu^2.$$

Отсюда и из (35) получаем, что при $r \leqslant \frac{8}{\pi e}$

$$\alpha_1 \leqslant 1 - \frac{1}{8}e^2 r^2.$$

Таким образом, имеем неравенство для $|\alpha_1|$, указанное в теореме 2. Из предыдущего следует, что образом области U^* при нормированном экстремальном отображении $w = f(z)$ при $r = \frac{8}{\pi e}$ служит внешность границы области $D_0\left(\frac{4}{\pi}\right)$, при $r < \frac{8}{\pi e}$ – внешность континуума, получаемого присоединением к $\partial D_0\left(\frac{4}{\pi}\right)$ соответствующих отрезков вещественной оси w-плоскости, откуда вытекает описание всех экстремальных конфигураций.

Пусть теперь $r > \frac{8}{\pi e}$. В этом случае рассмотрим на z-сфере квадратичный дифференциал

$$q_1(z)dz^2 = \frac{(z^2-\lambda^2)(z^2-1/\lambda^2)}{z^4}\,dz^2, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{37}$$

В структуре траекторий дифференциала (37) в области U^* имеется двусвязная область $\Delta^{(z)}$, имеющая окружность $C = \{z : |z| = 1\}$ своим внутренним граничным континуумом и отделяющая эту окружность от точек $-1/\lambda$, $1/\lambda$, и две концевые области $D_1^{(z)}$ и $D_2^{(z)}$, для которых полупрямые $(-\infty, -1/\lambda)$ и $(1/\lambda, \infty)$ служат общими граничными дугами. На w-плоскости будем по-прежнему рассматривать дифференциал (32). В силу теоремы 1, для экстремального отображения имеем равенство

$$q_1(z)dz^2 = Q(w)dw^2. \tag{38}$$

Полагая

$$u = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

получаем

$$q_1(z)dz^2 = q_2(u)du^2, \tag{39}$$

где

$$q_2(u)du^2 = \frac{4}{k^2}\,\frac{k^2u^2-1}{u^2-1}\,du^2, \quad k = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Рассматривая длины отрезков $[1/\lambda, 1/\varepsilon]$ и $[\mu, 1/\varepsilon]$ соответственно в q_1-метрике и Q-метрике, используя (38), (39) и известные формулы теории эллиптических функций, находим

$$\mu = \frac{4}{\pi}\,\frac{\mathbf{E}(k)}{k}. \tag{40}$$

При отображении $w = f(z)$ области $\Delta^{(z)}$ соответствует двусвязная область Δ, лежащая в области $D_0(\mu)$ и имеющая границу этой области своим внешним граничным континуумом. Пусть $M(\Delta^{(z)})$ – конформный модуль области $\Delta^{(z)}$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\log M(\Delta^{(z)}) = \frac{\text{дл.}_{q_1}[1, 1/\lambda]}{\text{дл.}_{q_1}C} = \frac{\text{дл.}_{q_2}[1, 1/k]}{4\text{дл.}_{q_2}[0, 1]} = \frac{1}{4}\,\frac{\mathbf{K}'(k) - \mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)}.$$

Пусть $\widetilde{D}_0 = D_0(\mu) \setminus \bar{\Delta}$. Так как внутренний граничный континуум области Δ является траекторией дифференциала (32), то в силу (36) и (40)

$$\log R(\widetilde{D}_0, 0) =$$

$$= \log R(D_0(\mu), 0) - \log M(\Delta) = \log\left(\frac{8}{\pi e}\,\frac{\mathbf{E}(k)}{k}\right) - \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbf{K}'(k) - \mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)},$$

следовательно,

$$R(\widetilde{D}_0, 0) = \frac{8}{\pi e}\,\frac{\mathbf{E}(k)}{k}\,\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbf{K}'(k) - \mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)}\right\}.$$

Пусть k, $0 < k < 1$, – решение уравнения

$$r = \frac{8}{\pi e}\,\frac{\mathbf{E}(k)}{k}\,\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbf{K}'(k) - \mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)}\right\}.$$

Из (38) находим

$$\alpha_1 = \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}\,\mu^2 = 1 + \frac{2{k'}^2}{k^2} - \frac{1}{2}\,\mu^2,$$

откуда

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2}{k^2}\left\{\frac{4}{\pi^2}\,\mathbf{E}^2(k) - {k'}^2\right\}.$$

Следовательно, справедлива оценка для $|\alpha_1|$, указанная в теореме 2. Из предыдущего также следует описание всех экстремальных отображений. $\square$

Доказательство теоремы 2 в случае $n = 2$ осложнено доказательством того факта, что экстремальное отображение обладает соответствующей симметрией. В [13] для этой цели используется результат в задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей.

Литература

1. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general metric. I, II,* Ann. Math. **66**, No. 3 (1957), 440–453; Tôhoku Math. J. (2) **45**, No. 2 (1993), 247–257.
2. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Матем. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
3. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 76–89.
4. В. Г. Кузьмина, *Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 110–129.
5. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
6. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1996), 74–104.
7. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы,* Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
8. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II,* Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
9. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 98–113.
10. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mappings,* Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.), Bd.18, Springer-Verlag, Berlin etc., 1958; 2nd ed. corrected, 1965; Пер. на рус. яз. I-го изд., Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М., 1962.
11. P. L. Duren, M. Schiffer, *Univalent functions which map onto regions of given transfinite diameter,* Trans. Amer. Math. Soc. **323**, No. 1 (1991), 413–248.
12. А. Ю. Солынин, *Некоторые экстремальные задачи в классе $\Sigma(\tau)$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 138–153.
13. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении в классе $\Sigma(r)$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 101–116.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 14 декабря 1999 г.