Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

**Л. В. Ковалев**

# ОЦЕНКИ КОНФОРМНОГО РАДИУСА И ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

## Введение

Обозначим через $r(D,a)$ конформный радиус области $D$ относительно конечной точки $a \in D$ и положим $r(D,\infty) = r(\{1/z : z \in D\}, 0)$. Пусть $\mathcal{D}(R)$ – семейство всех односвязных областей $D \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям $0, 1 \in D$, $r(D,0) = R$. Через $\mathcal{D}^c(R)$ обозначим множество всех выпуклых областей семейства $\mathcal{D}(R)$.

В статье [1] была решена следующая экстремальная задача.

**Задача 1.** В семействе $\mathcal{D}(R)$ найти область с наибольшим значением $r(D,1)$.

Более простое решение этой задачи, не использующее теорем об экстремальном разбиении, приводится в §1 (теорема 1). Так как экстремальная область задачи 1 не является выпуклой, естественно рассмотреть аналогичную проблему в классе $\mathcal{D}^c(R)$.

**Задача 2.** В семействе $\mathcal{D}^c(R)$ найти область с наибольшим значением $r(D,1)$.

Решение задачи 2 приведено в §1 (теорема 2). Важность оценок конформного радиуса обусловлена их связью с теоремами искажения, которые рассматриваются во втором параграфе.

В дальнейшем $\mathbb{U}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$, $\mathbb{U}_r = \mathbb{U}_r(0)$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1$, $S$ – класс регулярных и однолистных в $\mathbb{U}$ функций $f$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$; $S_M = \{f \in S : |f(z)| < M$ при $|z| < 1\}$, $M > 1$. Функции Кебе и Пика обозначаем через $k$ и $k_M$, обратные им, соответственно, $l$ и $l_M$. Таким образом,

$$k(z) = z(1-z)^{-2}, \qquad l(w) = (1 + 2w - \sqrt{1+4w})/2w,$$
$$k_M(z) = Ml(k(z)/M), \qquad l_M(w) = l(Mk(w/M)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00443) и ISSEP (грант s99-406).

Известны многочисленные теоремы искажения для функций из классов $S$ и $S_M$ (см., например, [2–5]). Некоторые из них могут быть непосредственно перенесены на функции, обратные элементам этих классов. Например, из оценки $|f(z)|$ в классе $S_M$ следует, что при $g^{-1} \in S_M$ и $|w_0| = \rho < -M\, l(-1/(4M))$ выполняется неравенство

$$l_M(\rho) \leqslant |g(w_0)| \leqslant -l_M(-\rho). \qquad (1)$$

Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (1) достигается только при $g(w) = w_0\rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0\rho^{-1} l_M(-\rho w_0^{-1} w)$).

Тем не менее, многие теоремы искажения для обратных функций не сводятся к соответствующим оценкам для прямых функций. Например, используя классическую теорему Бибербаха

$$k'(-|z|) \leqslant |f'(z)| \leqslant k'(|z|), \quad f \in S, \quad |z| < 1,$$

вместе с неравенством $-k(-|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant k(|z|)$, $f \in S$, $|z| < 1$, для оценки модуля производной обратной функции, получим

$$\frac{1}{k'(-l(-\rho))} \leqslant |g'(w_0)| \leqslant l'(-\rho), \quad g^{-1} \in S, \quad |w_0| = \rho < \frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Равенство достигается в правой части (2) тогда и только тогда, когда $g(w) = -w_0\rho^{-1} l(-\rho w_0^{-1} w)$. В левой части (2) равенство не имеет места ни при каком $\rho > 0$. Точная оценка $|g'(w)|$ снизу будет дана в §2 (следствие 2).

Изучение аналогичной проблемы для класса $S_M$ показывает (см. следствие 1), что функция $l_M$ не дает минимума модуля производной при $M < 8/7$. Вопрос о точной оценке $|g'(w)|$ снизу в этом случае остается открытым.

## §1. Оценки конформного радиуса

Решение задач 1 и 2 основывается на следующей лемме.

**Лемма 1.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, имеющая более одной граничной точки, $z_0 \in D$. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(r(D, z_0 + \varepsilon) - r(D, z_0)) \leqslant 4, \qquad (3)$$

*где равенство достигается только при $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0 + x : x \leqslant c\}$, где $c < 0$.*

*Если, дополнительно, $D$ – выпуклая область, то*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}(r(D, z_0+\varepsilon) - r(D, z_0)) \leqslant 2, \tag{4}$$

*где равенство достигается только при $D = \{z : \operatorname{Re} z > c\}$, где $c < \operatorname{Re} z_0$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можем считать, что $z_0 = 0$. Пусть $r = r(D,0)$. Существует такая функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in S$, что $z \mapsto rf(z)$ отображает $\mathbb{U}$ на $D$. Ввиду равенств

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}(r(D,\varepsilon) - r) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}(r|f'(f^{-1}(\varepsilon/r))|(1-|f^{-1}(\varepsilon/r)|^2) - r) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1} r(|1+2c_2\varepsilon/r| - 1) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1} r \operatorname{Re}(2c_2\varepsilon/r) = 2\operatorname{Re} c_2, \tag{5}$$

оба утверждения леммы следуют из известных оценок для $\operatorname{Re} c_2$ (см., например, [2, с.50, 204]).

**Теорема 1** (Е. Г. Емельянов, [1, с.100]). *При $D \in \mathcal{D}(R)$ выполняется неравенство*

$$r(D,1) \leqslant R + 4.$$

*Равенство достигается только при $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -R/4]$.*

**Доказательство.** Предположим, что $[0,1] \subset D$. Тогда, интегрируя неравенство (3) вдоль отрезка $[0,1]$, получим

$$r(D,1) - r(D,0) \leqslant 4$$

с соответствующим утверждением о случае равенства. В случае $[0,1] \not\subset D$ с учетом теоремы Кебе о покрытии получаем

$$r(D,1) \leqslant 4\operatorname{dist}(1, \partial D) < 4.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *При $D \in \mathcal{D}^c(R)$ выполняется неравенство*

$$r(D,1) \leqslant R + 2.$$

*Равенство достигается только при $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -R/2\}$.*

**Доказательство.** В силу условий теоремы $[0,1] \subset D$. Интегрируя неравенство (4) вдоль отрезка $[0,1]$, получим $r(D,1) -$

$r(D,0) \leqslant 2$ с требуемым утверждением о знаке равенства. Теорема доказана.

С использованием дополнительных геометрических характеристик области $D \in \mathcal{D}^c(R)$ теорема 2 может быть уточнена следующим образом.

**Теорема 3.** *Пусть* $D \in \mathcal{D}^c(R)$.

а) *Если* $z_0 \in \partial D \cap (-\infty, 0)$ *и выходящие из точки* $z_0$ *касательные к* $\partial D$ *образуют с положительным направлением вещественной оси углы* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, *то*

$$r(D,1) \leqslant R + \frac{2}{\pi}(\varphi_1+\varphi_2)\sin\frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2}.$$

*Равенство достигается в том и только том случае, если* $D$ – *внутренность угла с вершиной на луче* $(-\infty,0)$.

б) *Если* $(-\infty,0) \subset D$, *то*

$$r(D,1) \leqslant R.$$

*Равенство достигается в том и только в том случае, если* $D$ – *горизонтальная полоса или полуплоскость, ограниченная горизонтальной прямой.*

**Доказательство.** а) Пусть $G$ – внутренность угла, образованного касательными к $\partial D$ в точке $z_0$, $G \supset D$. При $k > 0$ положим

$$D(k) = \{z_0 + k(z - z_0) : z \in D\}.$$

В силу выпуклости области $D$ при $k_1 < k_2$ имеем $D(k_1) \subset D(k_2)$, где равенство возможно только при $D = G$. Следовательно, функция

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} r(D, z_0 + x)/x = r(D(1/x), z_0 + 1)$$

строго убывает при $x > 0$, за исключением случая $D = G$, когда она постоянна. Учитывая, что $\bigcup_{x>0} D(x) = G$, находим

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = r(G, z_0 + 1) = \frac{2}{\pi}(\varphi_1+\varphi_2)\sin\frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2}.$$

Следовательно,

$$r(D,1) = (|z_0|+1)f(|z_0|+1) \leqslant (|z_0|+1)f(|z_0|) = R + f(|z_0|) \leqslant$$
$$\leqslant R + \frac{2}{\pi}(\varphi_1+\varphi_2)\sin\frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2},$$

где равенство достигается только при $D = G$.

б) Легко видеть, что $\{z-1 : z \in D\} \subset D$, где равенство возможно только в случаях, указанных в формулировке. Следовательно,

$$r(D, 1) = r(\{z-1 : z \in D\}, 0) \leqslant R.$$

Теорема доказана.

В заключение первого параграфа приведем пример приложения оценок конформного радиуса.

**Теорема 4.** *Если $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S^c$, то при $|z| < 1$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re}(c_2 f(z)) > -\frac{1}{2}. \tag{6}$$

*Константа $-1/2$ является наибольшей возможной.*

Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** *Если $D \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область, $D \neq \mathbb{C}$, то $r(D, a)$ – вогнутая функция от $a$ при $a \in D$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можем считать, что $0 \in D$, $r(D, 0) = 1$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ лежит в $D$. Для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-2}(r(D, \varepsilon) + r(D, -\varepsilon) - 2) \leqslant 0. \tag{7}$$

Пусть функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S^c$ отображает $\mathbb{U}$ на $D$. Пусть $z_1 = f^{-1}(\varepsilon)$, $z_2 = f^{-1}(-\varepsilon)$. Из соотношений $z_1 + c_2 z_1^2 + o(\varepsilon^2) = \varepsilon$ и $z_2 + c_2 z_2^2 + o(\varepsilon^2) = -\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, получим

$$z_1 + z_2 = -c_2(z_1^2 + z_2^2) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

С учетом разложения $|1+w| = 1 + \operatorname{Re} w + (\operatorname{Im} w)^2/2 + o(|w|^2)$, $w \to 0$, находим

$$|f'(z_i)| = 1 + \operatorname{Re}(2c_2 z_i + 3c_3 z_i^2) + \\ + 2(\operatorname{Im}(c_2 z_i))^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Из (9), (8) и соотношений $z_1 = \varepsilon + o(1)$, $z_2 = -\varepsilon + o(1)$, $\varepsilon \to 0$, следует

$$|f'(z_1)| + |f'(z_2)| = 2 + 2\varepsilon^2 \operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 4\varepsilon^2(\operatorname{Im} c_2)^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$r(D,\varepsilon)+r(D,-\varepsilon)=|f'(z_1)|(1-|z_1|^2)+|f'(z_2)|(1-|z_2|^2)=$$
$$=2+2\varepsilon^2(\operatorname{Re}(3c_3-2c_2^2)+2(\operatorname{Im}c_2)^2-1)+o(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\to 0.$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-2}(r(D,\varepsilon)+r(D,-\varepsilon)-2)=2(\operatorname{Re}(3c_3-2c_2^2)+2(\operatorname{Im}c_2)^2-1),$$

и остается показать, что $\operatorname{Re}(3c_3-2c_2^2)+2(\operatorname{Im}c_2)^2\leqslant 1$.

В силу условия $f\in S^c$ функция

$$g(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1+2c_2z+(6c_3-4c_2^2)z^2+\dots=1+a_1z+a_2z^2+\dots$$

удовлетворяет условию $\operatorname{Re}g(z)>0$, $z\in\mathbb{U}$. Тогда при $\alpha\in\mathbb{R}$ функция

$$g_\alpha(z)=\frac{(1+e^{i\alpha})g(z)+1-e^{i\alpha}}{(1-e^{i\alpha})g(z)+1+e^{i\alpha}}=$$
$$=1+e^{i\alpha}a_1z+e^{i\alpha}(a_2-(1-e^{i\alpha})a_1^2/2)z^2+\dots$$

также имеет положительную вещественную часть в $\mathbb{U}$. Следовательно (см. [2, с. 109]), $|a_2-(1-e^{i\alpha})a_1^2/2)|\leqslant 2$. Учитывая, что

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}}|a_2-a_1^2/2+e^{i\alpha}a_1^2/2|=|a_2-a_1^2/2|+|a_1|^2/2=6|c_3-c_2^2|+2|c_2|^2,$$

получаем неравенство $3|c_3-c_2^2|+|c_2|^2\leqslant 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}(3c_3-2c_2^2)+2(\operatorname{Im}c_2)^2=3\operatorname{Re}(c_3-c_2^2)+|c_2|^2\leqslant 1.$$

Неравенство (7), из которого следует утверждение леммы, доказано.

**Доказательство теоремы 4.** Пусть $D=\{f(z):|z|<1\}$. Из (5) следует асимптотическое равенство

$$r(D,w)=1+2\operatorname{Re}(c_2w)+o(|w|),\quad w\to 0.$$

В силу леммы 2 имеет место неравенство

$$r(D,w)\leqslant 1+2\operatorname{Re}(c_2w),\quad w\in D.$$

Учитывая, что конформный радиус положителен, приходим к утверждению (6). Так как при $0<p\leqslant 1$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ функция

$$f_{p,\alpha}(z)=\frac{e^{-i\alpha}}{2p}\left\{\left(\frac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z}\right)^p-1\right\}=z+pe^{i\alpha}z^2+\dots,$$

принадлежит классу $S^c$ и

$$\lim_{r\uparrow 1} pe^{i\alpha} f_{p,\alpha}(-re^{-i\alpha}) = -\frac{1}{2},$$

то константа $-1/2$ в (6) является наибольшей возможной при любом $c_2 \neq 0$.

## §2. Теоремы искажения для однолистных функций

Начнем со вспомогательного утверждения, устанавливающего связь между конформными радиусами областей, образующих экстремальное разбиение области $D$, и конформным радиусом области $D$. Через $g_D(z, z_0)$ обозначаем функцию Грина области $D$ с полюсом в точке $z_0 \in D$.

**Лемма 3.** *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область, дополнение которой содержит не менее двух точек; $a_1, \ldots, a_n \in D$ – различные точки, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Пусть $Q(z)dz^2$ – квадратичный дифференциал, круговые области $D_1, \ldots, D_n$ которого реализуют максимум произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(G_k, a_k)$ по всем непересекающимся односвязным областям $G_k \subset D$. Если $Q(z)dz^2$ не имеет в $D$ нулей нечетного порядка, то найдутся такие числа $j_1, \ldots, j_n \in \{-1, 1\}$, что:*

*a) если $k \neq l$ и $D \cap \partial D_k \cap \partial D_l \setminus \bigcup_{m\neq k,l} \partial D_m \neq \varnothing$, то $j_k + j_l = 0$;*

*b) при $k = 1, \ldots, n$*

$$r(D_k, a_k) = r(D, a_k) \exp\left\{\frac{1}{j_k\sqrt{\alpha_k}} \sum_{l\neq k} j_l\sqrt{\alpha_l} g_D(a_k, a_l)\right\}.$$

**Доказательство.** С помощью конформного отображения сведем задачу к случаю $D = \mathbb{U}$. Нормируем $Q(z)$ из условия $Q(z) \sim -\alpha_k(z-a_k)^{-2}$, $z \to a_k$. Условия леммы обеспечивают существование в области $D$ однозначной ветви функции $Q^{1/2}(z)$. Определим $j_1, \ldots, j_n$ соотношениями

$$Q^{1/2}(z) \sim i\,\frac{j_k\sqrt{\alpha_k}}{z - a_k}, \quad z \to a_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда функция

$$Q^{1/2}(z) - i\sum_{k=1}^{n} \frac{j_k\sqrt{\alpha_k}}{z - a_k}$$

регулярна в $D$. Следовательно, функция

$$\operatorname{Im}\int Q^{1/2}(z)\,dz-\sum_{k=1}^{n} j_k\sqrt{\alpha_k}\log|z-a_k|$$

является гармонической в $D$. Множество $\Phi=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\partial D_k$ связно, содержит границу $\partial D$ области $D$ и состоит из замыканий траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$. Следовательно, $\operatorname{Im}\displaystyle\int Q^{1/2}(z)\,dz=$ конст на $\Phi$; без ограничения общности эту константу можно считать равной нулю. Обозначая

$$h(z)=\sum_{k=1}^{n} j_k\sqrt{\alpha_k}g_D(z,a_k),$$

по принципу максимума получим $\operatorname{Im}\displaystyle\int Q^{1/2}(z)\,dz=-h(z),\ z\in D$. Следовательно, $\Phi=\{z\in\overline{D}:h(z)=0\}$. Пусть $k\neq l$, $z_0\in D\cap\partial D_k\cap\partial D_l\setminus\bigcup_{m\neq k,l}\partial D_m$. Тогда при малых $r>0$ имеем $\mathbb{U}_r(z_0)\subset\overline{D_k}\cup\overline{D_l}$. Так как функция $h(z)$ принимает в $\mathbb{U}_r(z_0)$ значения разных знаков, то с учетом равенств $\operatorname{sign}h(z)=j_m,\ z\in D_m,\ m=k,l$, получаем $j_k+j_l=0$. Утверждение (a) доказано.

По принципу максимума $g_{D_k}(z,a_k)=h(z)/j_k\sqrt{\alpha_k},\ z\in D_k$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $\log|z-a_k|$ и переходя к пределу при $z\to a_k$, получим (b). Лемма доказана.

**Замечание 1.** Пусть область $D$, точки $a_1,a_2$ и числа $\alpha_1,\alpha_2$ удовлетворяют условиям леммы 3. Если $B$ – односвязная область, $b_1,b_2\in B$ и $g_B(b_1,b_2)=g_D(a_1,a_2)$, то область $B$, точки $b_1,b_2$ и числа $\alpha_1,\alpha_2$ также удовлетворяют условиям леммы 3.

Действительно, в этом случае существует конформное отображение $D$ на $B$, переводящее $a_1,a_2$ в $b_1,b_2$ соответственно.

Перед формулировкой основных результатов заметим, что по теореме Кебе о покрытии область определения функции $g$, удовлетворяющей условию $g^{-1}\in S$, заведомо содержит круг $\mathbb{U}_{1/4}$, но не всегда содержит круг $\mathbb{U}_r$ при $r>1/4$ (в случае $g^{-1}\in S_M$ число $1/4$ следует заменить на $-M\,l(-1/(4M))$). Следовательно, ограничения, налагаемые в нижеследующих формулировках на переменную $\rho$, не могут быть ослаблены.

**Теорема 5.** *Пусть* $g^{-1} \in S_M$, $0 < \rho < -Ml(-1/(4M))$. *Тогда для любого* $\delta \leqslant \delta(\rho, M) = 1 + \dfrac{1 - 2Mk(\rho/M)}{\sqrt{1 + 4Mk(\rho/M)}}$ *при* $|w_0| = \rho$ *имеет место неравенство*

$$\frac{|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geqslant \frac{l'_M(\rho)}{l_M(\rho)^\delta}. \tag{10}$$

*Равенство в* (10) *достигается только при* $g(w) = w_0\rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$.

*При* $\delta > \delta(\rho, M)$ *неравенство (10) в общем случае неверно.*

**Доказательство.** Зафиксируем $\rho \in (0, -M\,l(-1/(4M)))$ и введем константы $\rho' = Mk(\rho/M)$, $\rho'' = -Mk(-\rho/M)$, $\alpha_1 = 1/\sqrt{1+4\rho'}$, $\alpha_2 = 1/\sqrt{1-4\rho''}$, $R = M/\rho$, $A = (R+1)/(R-1)$. Заметим, что $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ в силу неравенства $\rho'' < 1/4$, вытекающего из условия $\rho < -M\,l(-1/(4M))$. Рассмотрим квадратичный дифференциал $Q_\alpha(w)dw^2$, где

$$Q_\alpha(w) = -P_\alpha(w)\left(z(z-1)(z-R^2)\right)^{-2},$$

$$P_\alpha(w) =$$

$$= \begin{cases} (z+R)^2\big(z^2 + \big(\big(\frac{R-1}{\alpha}\big)^2 - R^2 - 1\big)z + R^2\big), & \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant A^{-1}, \\ \big(z^2 + \big((R^2-1)/\alpha^2 - R^2 - 1\big)\,z + R^2\big)^2, & A^{-1} \leqslant \alpha \leqslant A, \\ (z-R)^2\big(z^2 + \big(\big(\frac{R+1}{\alpha}\big)^2 - R^2 - 1\big)z + R^2\big), & A \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2. \end{cases}$$

Критические траектории этого дифференциала разбивают $\mathbb{U}_R$ на две круговые области $D_0(\alpha)$, $D_1(\alpha)$, причем

$$r^{\alpha^2}(D_0(\alpha), 0)r(D_1(\alpha), 1) \geqslant r^{\alpha^2}(G_0, 0)r(G_1, 1)$$

для любых непересекающихся односвязных областей $G_i \subset \mathbb{U}_R$.

При $\alpha_1 \leqslant \alpha < A^{-1}$ полином $P_\alpha$ имеет в $\mathbb{U}_R$ один нуль $c < 0$. Обозначим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R \setminus [-1, c]$. Учитывая равенство

$$c + R^2/c = R^2 + 1 - (R-1)^2/\alpha^2,$$

вытекающее из формулы Виета, нетрудно вычислить

$$r(B(\alpha), 0) = \frac{4R^2}{2R - c - R^2/c} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{1}{(1-\rho/M)^2},$$

$$g_{B(\alpha)}(0,1) = \log\frac{\sqrt{R^2 - (c + R^2/c) + 1} + R - 1}{\sqrt{R^2 - (c + R^2/c) + 1} - R + 1} = \log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

При $A^{-1} \leqslant \alpha \leqslant A$ положим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R$. В этом случае $r(B(\alpha), 0) = R$, $g_{B(\alpha)}(0,1) = \log R$.

Наконец, при $A < \alpha \leqslant \alpha_2$ обозначим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R \setminus [c, 1]$, где $c$ – единственный нуль полинома $P_\alpha$ в $\mathbb{U}_R$. Аналогично первому случаю, находим

$$r(B(\alpha),0) = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-1}\frac{1}{(1+\rho/M)^2}, \quad g_{B(\alpha)}(0,1) = \log\frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

Заметим, что $r(B(\alpha_1), 0) = r(B(\alpha_2), 0) = 1/\rho$, что в силу возрастания функции $r(B(\alpha), 0)$ на отрезке $[\alpha_1, A^{-1}]$ и ее убывания на $[A, \alpha_2]$ влечет неравенство $r(B(\alpha), 0) \geqslant 1/\rho$ при всех $\alpha$.

По аналогии с [1, с.95] введем в рассмотрение семейство областей $\{D(\alpha) : \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$, определяемых следующими условиями:

(1) $D(\alpha) \in \mathcal{D}(1/\rho)$;
(2) $D_0(\alpha) \cup D_1(\alpha) \subset D(\alpha) \subset B(\alpha)$;
(3) $D(\alpha)$ симметрична относительно вещественной оси.

Найдем явное выражение для функции $r(\alpha) = \exp(-g_{D(\alpha)}(0,1))$. Применяя лемму 3 к области $D(\alpha)$ и дифференциалу $Q_\alpha(w)dw^2$, находим

$$r(D_0(\alpha), 0) = r(\alpha)^{1/\alpha}/\rho. \tag{11}$$

Применяя эту же лемму к области $B(\alpha)$ и квадратичному дифференциалу $Q_\alpha(w)dw^2$, получим

$$r(D_0(\alpha),0) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha} \dfrac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}\dfrac{1}{(1-\rho/M)^2}, & \alpha_1 \leqslant \alpha < A^{-1}, \\ (M/\rho)^{1-1/\alpha}, & A^{-1} \leqslant \alpha \leqslant A, \\ \left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{1/\alpha} \dfrac{4\alpha^2}{\alpha^2-1}\dfrac{1}{(1+\rho/M)^2}, & A < \alpha \leqslant \alpha_2. \end{cases}$$

Из двух последних равенств немедленно следует

$$r(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\dfrac{4\alpha^2\rho'}{1-\alpha^2}\right)^{\alpha}, & \alpha_1 \leqslant \alpha < A^{-1}, \\ M^{\alpha-1}\rho, & A^{-1} \leqslant \alpha \leqslant A, \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\left(\dfrac{4\alpha^2\rho''}{\alpha^2-1}\right)^{\alpha}, & A < \alpha. \end{cases} \tag{12}$$

В силу соотношений

$$(\log r(\alpha))' = \begin{cases} \log \dfrac{4\alpha^2\rho'}{1-\alpha^2} > \log \dfrac{4\alpha_1^2\rho'}{1-\alpha_1^2} = 0, & \alpha_1 < \alpha < A^{-1}, \\ \log M > 0, & A^{-1} < \alpha < A, \\ \log \dfrac{4\alpha^2\rho''}{\alpha^2-1} > \log \dfrac{4\alpha_2^2\rho''}{\alpha_2^2-1} = 0, & A < \alpha < \alpha_2 \end{cases}$$

функция $r(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ и строго возрастает от $r(\alpha_1) = l_M(\rho)$ до $r(\alpha_2) = -l_M(-\rho)$.

Пусть $|w_0| = \rho$, $\delta \leqslant \delta(\rho, M)$. Обозначим $f = g^{-1} \in S_M$ и положим $G = \{f(z)/w_0 : |z| < 1\}$. Легко видеть, что $r(G, 0) = 1/\rho$ и $g_G(0,1) = -\log|g(w_0)|$. Из (1) следует, что уравнение $r(\alpha) = |g(w_0)|$ имеет единственный корень $\gamma \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Пусть $G_0, G_1$ – непересекающиеся односвязные области, лежащие в $G$ и реализующие максимум произведения $r^{\gamma^2}(G_0, 0)r(G_1, 1)$ по всем областям данного вида. Из условия $G \subset \mathbb{U}_R$ следует $r^{\gamma^2}(G_0, 0)r(G_1, 1) \leqslant r^{\gamma^2}(D_0(\gamma), 0)r(D_1(\gamma), 1)$. Применяя лемму 3 с учетом равенств $g_G(0,1) = g_{D(\gamma)}(0,1)$, $r(G,0) = r(D(\gamma), 0)$ и замечания 1, получим $r(G,1) \leqslant r(D(\gamma), 1)$. Следовательно,

$$\frac{\rho|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} = \frac{1-|g(w_0)|^2}{|g(w_0)|^\delta r(G,1)} \geqslant \frac{1-r(\gamma)^2}{r(\gamma)^\delta r(D(\gamma),1)}. \tag{13}$$

В силу леммы 4, приведенной ниже,

$$\frac{1-r(\gamma)^2}{r(\gamma)^\delta r(D(\gamma),1)} \geqslant \frac{1-r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1),1)},$$

причем равенство достигается только при $\gamma = \alpha_1$, т.е. $|g(w_0)| = l_M(\rho)$, что влечет $g(w) = w_0\rho^{-1}l_M(\rho w_0^{-1}w)$. Нетрудно видеть, что в последнем случае $G = B(\alpha_1) = D(\alpha_1)$, поэтому в (13) также достигается равенство. Суммируя вышесказанное, заключаем, что имеет место неравенство

$$\frac{\rho|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geqslant \frac{1-r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1),1)},$$

со знаком равенства только для функции $g(w) = w_0\rho^{-1}l_M(\rho w_0^{-1}w)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Предположим, что $\delta > \delta(\rho, M)$, и покажем, что в этом случае (10) неверно. Действительно, по лемме 4 существует $\alpha' \in (\alpha_1, \alpha_2)$

такое, что

$$\frac{1-r(\alpha')^2}{r(\alpha')^\delta r(D(\alpha'),1)} < \frac{1-r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1),1)}.$$

Пусть $f \in S_M$ отображает $\{z : |z| < 1\}$ на $\{\rho z : z \in D(\alpha')\}$. Нетрудно убедиться, что для функции $g = f^{-1}$ при $w_0 = \rho$ неравенство (10) не выполняется. Теорема доказана полностью.

**Следствие 1.** *При $M \geqslant 8/7$ и $g^{-1} \in S_M$ имеет место неравенство*

$$l'_M(\rho) \leqslant |g'(w_0)| \leqslant l'_M(-\rho), \tag{14}$$

*где $|w_0| = \rho < -M\,l(-1/(4M))$. Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (14) достигается только при $g(w) = w_0\rho^{-1}l_M(\rho w_0^{-1}w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0\rho^{-1}l_M(-\rho w_0^{-1}w)$).*

*При $M < 8/7$ справедлива только оценка сверху.*

**Доказательство.** Правая часть неравенства (14) доказывается аналогично (2) при всех $M > 1$. Оценка снизу следует из теоремы 5 и легко проверяемого соотношения

$$\operatorname{sign}\delta(-M\,l(-1/(4M)), M) = \operatorname{sign}(M - 8/7), \quad M > 1.$$

**Лемма 4.** *При $\delta \leqslant \delta(\rho, M)$ функция*

$$\Phi(\alpha) = \log(1 - r(\alpha)^2) - \delta\log r(\alpha) - \log r(D(\alpha), 1)$$

*строго возрастает на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$.*

*При $\delta > \delta(\rho, M)$ точка минимума $\Phi(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ не совпадает с $\alpha_1$.*

**Доказательство.** В силу строгого возрастания функции $r(\alpha)$ при доказательстве первого утверждения достаточно рассмотреть случай $\delta = \delta(\rho, M) = 1 + \dfrac{1-2\rho'}{\sqrt{1+4\rho'}}$. С учетом леммы 3 находим

$$\frac{d}{d\alpha}\log r(D(\alpha),1) = \frac{d}{d\alpha}\log r(D_1(\alpha),1) - \log r(\alpha) - \alpha\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}. \tag{15}$$

Из экстремального свойства областей $D_0(\alpha)$, $D_1(\alpha)$ следует равенство

$$\alpha^2\frac{d}{d\alpha}\log r(D_0(\alpha),0) + \frac{d}{d\alpha}\log r(D_1(\alpha),1) = 0.$$

Ввиду (11) это равенство влечет

$$\frac{d}{d\alpha}\log r(D_1(\alpha),1)=\log r(\alpha)-\frac{\alpha r'(\alpha)}{r(\alpha)}. \tag{16}$$

Используя (15) и (16), получим

$$\Phi'(\alpha)=\left\{\frac{-2\,r(\alpha)}{1-r(\alpha)^2}-\frac{\delta}{r(\alpha)}+\frac{2\alpha}{r(\alpha)}\right\}r'(\alpha)=$$
$$=\left\{\frac{\alpha-\delta/2}{1+\alpha-\delta/2}-r(\alpha)^2\right\}\frac{2r'(\alpha)}{r(\alpha)(1-r(\alpha)^2)}. \tag{17}$$

Введем вспомогательную функцию

$$f(\alpha)=\log r(\alpha)-\log\sqrt{\frac{\alpha-\delta/2}{1+\alpha-\delta/2}},\qquad \alpha\geqslant\alpha_1,$$

где $r(\alpha)$ определяется формулами (12). Заметим, что $f\in S^1(\alpha_1,+\infty)$ в силу непрерывной дифференцируемости $r(\alpha)$ и легко проверяемого неравенства $\alpha_1>\delta(\rho,M)/2$. Остается показать, что $f(\alpha)<0$ при $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$. Для этого достаточно установить следующие свойства функции $f(\alpha)$:

$$f(\alpha_1)=0; \tag{18}$$
$$f(\alpha)-\alpha\log(4\rho'')\to 0,\quad \alpha\to+\infty; \tag{19}$$
$$f''(\alpha)>0,\quad \alpha_1<\alpha<A,\ \alpha\neq A^{-1}; \tag{20}$$
$$\text{если } \rho''\geqslant 1/5, \text{ то } f''(\alpha)<0,\quad \alpha>A; \tag{21}$$
$$\text{если } \rho''\leqslant 1/5, \text{ то } f(\alpha)<0,\quad A\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2. \tag{22}$$

Действительно, в случае $\rho''\geqslant 1/5$ из (19) и (21) следует, что $f(\alpha)-\alpha\log(4\rho'')<0$ при $\alpha\geqslant A$. Так как $\rho''<1/4$, получаем $f(\alpha)<0$, $\alpha\geqslant A$. Ввиду (22) неравенство $f(\alpha)<0$, $A\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ имеет место вне зависимости от значения $\rho''$. Учитывая (18), (20) и условие $f(A)<0$, получим, что $f(\alpha)<0$ при $\alpha_1<\alpha<A$.

Проверка свойств (18) и (19) элементарна. Утверждение (20) немедленно следует из равенства

$$f''(\alpha)=\frac{2\chi(\alpha)}{\alpha(1-\alpha^2)}+\frac{1+2(\alpha-\delta/2)}{2(\alpha-\delta/2)^2(1+\alpha-\delta/2)^2},\quad \alpha\notin\{A^{-1},A\},$$

где $\chi$ – характеристическая функция множества $[\alpha_1,A^{-1}]\cup[A,+\infty)$.

Обозначим $\tilde{\delta} = 1 + \dfrac{1-2\rho''}{\sqrt{1+4\rho''}}$. Из неравенства $\rho'' < \rho'$ следует, что $\tilde{\delta} > \delta$. Отсюда

$$f''(\alpha) < \frac{2}{\alpha(1-\alpha^2)} + \frac{1+2(\alpha-\tilde{\delta}/2)}{2(\alpha-\tilde{\delta}/2)^2(1+\alpha-\tilde{\delta}/2)^2}, \quad \alpha > A.$$

Следовательно, при $\alpha > A$ имеем $\operatorname{sign} f''(\alpha) \leqslant \operatorname{sign} p(\alpha)$, где

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= (1+2(\alpha-\tilde{\delta}/2))\alpha(\alpha^2-1) - 4(\alpha-\tilde{\delta}/2)^2(1+\alpha-\tilde{\delta}/2)^2 = \\ &= -2(\alpha-1)^4 + (7\tilde{\delta}-15)(\alpha-1)^3 + (-6\tilde{\delta}^2+33\tilde{\delta}-39)(\alpha-1)^2 + \\ &\quad + 2(\tilde{\delta}-3)(\tilde{\delta}^2-6\tilde{\delta}+7)(\alpha-1) - (\tilde{\delta}-2)^2(\tilde{\delta}-4)^2/4. \end{aligned}$$

Заметим, что при $1/5 \leqslant \rho'' < 1/4$ выполняется $1+2^{-3/2} < \tilde{\delta} \leqslant 1+1/\sqrt{5}$ и потому все коэффициенты в последнем разложении отрицательны. Следовательно, $p(\alpha) < 0$ при $\alpha > 1$ и (21) доказано. В силу неравенства

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\leqslant \log r(\alpha_2) - \log\sqrt{\frac{1-\delta/2}{2-\delta/2}} < \\ &< \log r(\alpha_2) - \log\sqrt{\frac{1-\tilde{\delta}/2}{2-\tilde{\delta}/2}}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2, \end{aligned}$$

для доказательства (22) достаточно проверить, что в случае $0 < \rho'' \leqslant 1/5$ выполняется

$$r(\alpha_2)^2 < \frac{1-\tilde{\delta}/2}{2-\tilde{\delta}/2},$$

$$\frac{1-2\rho''-\sqrt{1-4\rho''}}{1-2\rho''+\sqrt{1-4\rho''}} < \frac{\sqrt{1+4\rho''}-1+2\rho''}{3\sqrt{1+4\rho''}-1+2\rho''}.$$

Последнее неравенство преобразуется к виду

$$(1-2\rho'')(\sqrt{1+4\rho''}+\sqrt{1-4\rho''}) < 2\sqrt{1-16\rho''^2}.$$

Остается заметить, что при $0 < \rho'' \leqslant 1/5$

$$\begin{aligned} (1-2\rho'')(\sqrt{1+4\rho''}+\sqrt{1-4\rho''}) &< 2(1-2\rho'') = 2\sqrt{1-4\rho''+4\rho''^2} = \\ &= 2\sqrt{1-16\rho''^2+4\rho''(5\rho''-1)} \leqslant 2\sqrt{1-16\rho''^2}. \end{aligned}$$

Справедливость предложений (18)–(22), а вместе с тем и первого утверждения леммы, установлена.

Докажем второе утверждение леммы. Из (18) следует, что при $\delta > \delta(\rho, M)$ выполняется $f(\alpha_1) > 0$. Ввиду (17), при достаточно малых $\alpha > \alpha_1$ имеет место неравенство $\Phi'(\alpha) < 0$. Лемма доказана.

**Замечание 2.** В статье [1] для нахождения производной функции $\log r(D(\alpha), 1)$ привлекается вспомогательное конформное отображение и формулы дифференцирования, данные в [6, 7]. Подход, основанный на применении леммы 3, в данном случае позволяет упростить вычисления и избежать обращения к формулам [6,7].

Хотя при помощи предельного перехода $M \to \infty$ из теоремы 5 можно получить аналогичную оценку для функций, обратных элементам класса $S$, доказать таким образом утверждение о случае равенства не удается. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** *Пусть $g^{-1} \in S$, $0 < \rho < 1/4$. Тогда для любого $\delta \leqslant \delta(\rho) = 1 + (1 - 2\rho)/\sqrt{1 + 4\rho}$ при $|w_0| = \rho$ имеет место неравенство*

$$\frac{|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geqslant \frac{l'(\rho)}{l(\rho)^\delta} = \left(\frac{1 + 2\rho - \sqrt{1 + 4\rho}}{2\rho}\right)^{1-\delta} \frac{1}{\rho\sqrt{1 + 4\rho}}. \tag{23}$$

*Равенство в (23) достигается только при $g(w) = w_0\rho^{-1} l(\rho w_0^{-1} w)$.*

*При $\delta > \delta(\rho)$ неравенство (23) в общем случае неверно.*

**Доказательство** является упрощенным вариантом доказательства теоремы 5. Ограничимся описанием отличий: функции $k_M$ и $l_M$ следует заменить на $k$ и $l$ соответственно; $\delta(\rho, M)$ следует заменить на $\delta(\rho)$; $\rho' = \rho'' = \rho$; $A = 1$;

$$Q_\alpha(w)dw^2 = -\frac{1 - w/c(\alpha)}{w^2(1 - w)^2} dw^2, \qquad c(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

Из двух критических траекторий этого дифференциала одна является лучом $\{c(\alpha)t : t \geqslant 1\}$, а другая в обоих направлениях стремится к $c(\alpha)$. Кроме того, $B(\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{c(\alpha)t : t \geqslant 1\}$;

$$r(\alpha) = \frac{|\alpha - 1|}{\alpha + 1} \left(\frac{4\alpha^2\rho}{|\alpha^2 - 1|}\right)^\alpha.$$

С учетом этих изменений доказательства теоремы 5 и леммы 4 остаются в силе и в данном случае.

**Следствие 2.** *При $g^{-1} \in S$ имеет место неравенство*

$$l'(\rho) \leqslant |g'(w_0)| \leqslant l'(-\rho), \quad |w_0| = \rho < 1/4. \tag{24}$$

*Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (24) достигается только при $g(w) = w_0\rho^{-1}l(\rho w_0^{-1}w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0\rho^{-1}l(-\rho w_0^{-1}w)$).*

**Доказательство.** Оценка сверху установлена в (2). Левая часть (24) следует из теоремы 6 и очевидного неравенства

$$\delta(\rho) > 1 + 2^{-3/2} > 0, \quad 0 < \rho < 1/4.$$

Последний результат можно сформулировать в виде, подобном теореме об обратной функции.

**Следствие 3.** *Пусть $w = f(z)$ – отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, дифференцируемое по переменной $z$. Пусть $a \in \Omega$, $b = f(a)$ и $f$ инъективно в $\mathbb{U}_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $r = \varepsilon|f'(a)|/4$ обратное отображение $g$ дифференцируемо в $\mathbb{U}_r(b)$, причем*

$$|f'(a)|^{-1}l'\left(\frac{|w-b|}{4r}\right) \leqslant |g'(w)| \leqslant |f'(a)|^{-1}l'\left(-\frac{|w-b|}{4r}\right), \quad w \in \mathbb{U}_r(b).$$

*Оценки являются точными.*

## Литература


1. Е. Г. Емельянов, *О максимуме конформного радиуса в семействах областей, удовлетворяющих дополнительным условиям,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 93–108.
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. М., 1966.
3. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
4. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций,* М., 1975.
5. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II,* Алгебра и анализ **9**, вып.3 (1997), 41–103; вып.5 (1997), 1–50.
6. Е. Г. Емельянов, *Некоторые свойства модулей семейств кривых,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 72–82.
7. А. Ю. Солынин, *Зависимость проблемы модуля для семейства нескольких классов кривых от параметров,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 136–145.


Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток

Поступило 12 июля 1999 г.