Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Б. Диттмар, А. Ю. Солынин

ИСКАЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ РОБИНА ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

1. Введение

В [1] П. Дюрен и Дж. Пфальцграф, обобщая понятие емкости Робина (см. [2, 3]), ввели гиперболическую емкость Робина и исследовали многие ее свойства.

Пусть E – компактное подмножество единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ со связным дополнением $\Omega = U \setminus E$, ограниченное замкнутыми аналитическими кривыми Жордана $C_1, C_2, \ldots, C_N$, $N \geqslant 1$.

Пусть внутренняя граница $C = \bigcup_{k=1}^{N} C_k$ области Ω разбита на непересекающиеся замкнутое множество A и открытое множество B. Пусть $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Следуя определению в [1], под гиперболической функцией Робина (h-функцией Робина) множества A относительно области Ω будем понимать ограниченную функцию $R_h = R_h(z, A, \Omega)$, гармоническую в Ω и удовлетворяющую граничным условиям

$$R_h(z, A, \Omega) = 1 \qquad \text{при} \quad z \in \mathbb{T}, \tag{1.1a}$$

$$R_h(z, A, \Omega) = 0 \qquad \text{при} \quad z \in A, \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} R_h(z, A, \Omega) = 0 \quad \text{при} \quad z \in B, \tag{1.1c}$$

где через $\partial/\partial n$ обозначена внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Гиперболическая емкость Робина (h-емкость Робина) определяется соотношением

$$\delta_h(A, \Omega) = \iint\limits_{\Omega} \left|\nabla R_h\right|^2 dm. \tag{1.2}$$

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 97-01-00259.

Пусть $\mathcal{F}(\Omega)$ – класс конформных отображений $f:\Omega\to U$, нормированных условием $f(\mathbb{T})=\mathbb{T}$. Как легко видеть, при $f\in\mathcal{F}(\Omega)$ функция $R_h\circ f^{-1}$ служит h-функцией Робина множества $f(A)$ относительно области $f(\Omega)$ и

$$\delta_h(f(A),f(\Omega))=\delta_h(A,\Omega).$$

Здесь и далее через $f(A)$ и т.п. обозначается предельное множество функции f при $U\ni z\to A$. Указанная конформная инвариантность позволяет распространить понятие h-функции и h-емкости Робина и на конечносвязные области с негладкой границей.

В случае $A=C$ h-функция Робина сводится к гармонической мере $\omega(z,\mathbb{T},\Omega)$ окружности $\mathbb{T}$ относительно области Ω, а h-емкость Робина равна гиперболической емкости компакта E:

$$\delta_h(C,\Omega)=\operatorname{cap}_h E.$$

Определение и свойства гиперболической емкости см. в [4, 5].

При $f\in\mathcal{F}(\Omega)$ предельное множество $f(A)$ является компактным подмножеством круга U. В отличие от емкости Робина, гиперболическая емкость граничных множеств $A\subset C$ не является в общем случае инвариантом относительно отображений класса $\mathcal{F}(\Omega)$. В случае произвольного A известно [1], что

$$\operatorname{cap}_h f(A)\geqslant\delta_h(f(A),f(\Omega))=\delta_h(A,\Omega). \tag{1.3}$$

Таким образом, h-емкость Робина дает нижнюю оценку гиперболической емкости образов фиксированного граничного подмножества при отображениях из класса $\mathcal{F}(\Omega)$.

Неравенство (1.3) является простым следствием характеризации емкостей в терминах модулей семейств кривых (или в терминах экстремальных длин), данной Л. Альфорсом и А. Бёрлингом [6], см. утверждение 1 §2 настоящей работы. В отличие от самого неравенства (1.3), вопрос о его точности и о возможных случаях равенства в (1.3) является более трудным.

Для приложений достаточно рассматривать случай, когда каждое из множеств A и B состоит из конечного числа невырожденных граничных дуг или целых граничных компонент. В дальнейшем рассматривается только этот случай. При этом удобно использовать "двуцветную" терминологию: множество A, его дуги и их образы при конформных отображениях называем "красными", а аналогичные объекты, соответствующие множеству

B, – “синими”. Конфигурации рассматриваемого типа называем “красно-синими”.

Теорема 1 в [3] утверждает, что неравенство для (обычной) емкости Робина, аналогичное (1.3), является точным для красно-синих конфигураций. Однако, как отмечено в [7], доказательство этой теоремы в [3] содержит пробел, что ограничивает класс конфигураций, к которым указанное неравенство применимо, тем случаем, когда каждое из множеств A и B состоит из целых граничных компонент. В [1] для этого же класса граничных множеств A установлена точность оценки (1.3) для гиперболической емкости Робина и дана характеризация экстремальных отображений.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1, устанавливающая точность неравенства (1.3) для каждой красно-синей конфигурации. Доказательство этой теоремы, приведенное в §3, использует упомянутый результат Дюрена и Пфальцграфа и известные утверждения о непрерывности модуля семейства кривых, как функции множества. Необходимые нам результаты о емкостях и модулях формулируются в §2.

В §§4 и 5 рассматривается вопрос о множестве функций $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, реализующих минимум в (1.3). Приводимые здесь примеры показывают, что экстремальная функция в общем случае неединственна, а также демонстрируют возможный топологический вид экстремальных конфигураций.

После того как работа над данной статьей была закончена, П. Дюрен и Д. Бетсакос сообщили авторам, что в случае (обычной) емкости Робина утверждение о точности неравенства для произвольных красно-синих конфигураций, аналогичного неравенству (1.3), доказано также М. Д. О'Нейлом и Р. Е. Турманом [8]. Эти авторы также используют результат Дюрена и Пфальцграфа и аппроксимацию. Однако технически их доказательство существенно отличается от нашего. Кроме того, насколько нам известно, в [8] вопрос о множестве экстремальных отображений вовсе не затрагивается.

2. Предварительные результаты

Использование введенных выше понятий h-функции и h-емкости Робина связано с необходимостью доказывать существование гармонической функции, удовлетворяющей условиям (1a)–(1c). Этих затруднений удается избежать, если использовать характеризацию емкостей в терминах модуля семейства кривых, данную Альфорсом и Бёрлингом [6]. Определение и свойства модулей приведены, например, в [5, 6, 9, 10].

Пусть E и F – замкнутые непересекающиеся множества, лежащие в замыкании области Ω. Через $\Gamma(E, F, \Omega)$ обозначаем семейство кривых $\gamma \subset \Omega$, соединяющих E и F. Если $\Omega = U$, $F = \mathbb{T}$, то полагаем $\Gamma(E) = \Gamma(E, \mathbb{T}, U)$. Далее, через $\operatorname{mod}(E, F, \Omega)$ обозначаем модуль семейства $\Gamma(E, F, \Omega)$. В качестве следствия теоремы 4–5 в [6] и ее доказательства получаем

Утверждение 1 (Альфорс–Бёрлинг [6]). *Пусть красно-синей конфигурации (A, B) соответствует область Ω и пусть существует функция Робина $R_h(z, A, \Omega)$. Тогда*

$$\delta_h(A, \Omega) = \operatorname{mod}(A, \mathbb{T}, \Omega). \tag{2.1}$$

При этом метрика $\rho(z)|dz| = |\nabla R_h(z, A, \Omega)|\,|dz|$ является в существенном единственной экстремальной метрикой для семейства $\Gamma(A, \mathbb{T}, \Omega)$.

Если $B = \varnothing$, то (2.1) сводится к хорошо известному равенству между гиперболической емкостью и модулем семейства кривых, соединяющих пластины $A (= C)$ и $\mathbb{T}$ конденсатора $(C, \mathbb{T})$:

$$\operatorname{cap}_h C = \operatorname{mod}(C, \mathbb{T}, \Omega). \tag{2.2}$$

Ввиду соотношений (2.1), (2.2) и конформной инвариантности модулей, неравенство (1.3) является следствием свойства возрастания модуля при расширении семейства кривых.

Так как h-функция и h-емкость Робина инвариантны при конформных отображениях, то в качестве исходной можно выбрать надлежащую каноническую область, например, круговую. Будем говорить, что красно-синяя конфигурация (A, B) принадлежит классу $B[k_1, \ldots, k_n, n_1, n_2]$, где все параметры – целые неотрицательные числа, если ей соответствует круговая область $\Omega \subset U$, ограниченная абсолютом $\mathbb{T}$ и красно-синими окружностями $C_1, \ldots, C_N$, $N = n + n_1 + n_2$, и если при этом окружность C_j при $1 \leqslant j \leqslant n$ состоит из k_j замкнутых красных дуг $A_{j,s}$ и k_j открытых синих дуг $B_{j,s}$, чередующихся и занумерованных в порядке положительного обхода C_j; окружности C_j при $n < j \leqslant n + n_1$ считаем красными, а при $n + n_1 < j \leqslant n + n_1 + n_2$ – синими.

Следующее утверждение, являющееся требующейся нам модификацией известных результатов, гарантирует существование рассматриваемых в данной работе функций Робина.

Утверждение 2. *Пусть (A, B) – красно-синяя конфигурация класса $B[k_1, \ldots, k_n, n_1, n_2]$ и пусть Ω – соответствующая ей круговая область. Тогда существует h-функция Робина $R_h(z, A, \Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим круговую область $\Omega_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, ограниченную окружностями C_j и окружностями C_j^*, симметричными C_j относительно $\mathbb{T}$. Рассмотрим дубль R области Ω_1; как известно, R – компактная риманова поверхность. Пусть $\widehat{\Omega}$ – область на R, граница которой состоит из окружностей $\mathbb{T}$ и $\widehat{\mathbb{T}}$, где $\widehat{\mathbb{T}}$ – проекция $\mathbb{T}$ на второй лист дубля R, и разрезов по дугам и окружностям множества A. В области $\widehat{\Omega}$ рассмотрим задачу Дирихе:

$$\begin{aligned} &\Delta u(p) = 0 \quad &&\text{при} \quad p \in \widehat{\Omega}, \\ &u(p) = 1 \quad &&\text{при} \quad p \in \mathbb{T} \cup \widehat{\mathbb{T}}, \\ &u(p) = 0 \quad &&\text{при} \quad p \in A, \end{aligned}$$

которая, как хорошо известно, имеет единственное решение u, см. [11, с. 141]. В силу единственности, $u(z) = u(\widehat{z})$, где $\widehat{z}$ – проекция $z \in \Omega$ на второй лист дубля. Отсюда заключаем, что $\frac{\partial}{\partial n} u(z) = 0$ при $z \in B$. Следовательно, сужение u на Ω является искомой h-функцией Робина. $\square$

Приведем в требующейся нам форме известные свойства модулей, которые существенно используются в данной работе.

Утверждение 3 (о непрерывности модулей, см. [12])**.** *При $m = 1, 2, \ldots$ пусть $(A^{(m)}, B^{(m)})$ – конфигурации класса $B[k_1, \ldots, k_n, n_1, n_2]$ с общей круговой областью Ω и множествами*

$$A^{(m)} = \Big(\bigcup_{i,j} A_{i,j}^{(m)}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{j} A_j^{(m)}\Big)$$

такими, что

1) $A_{i,j}^{(m)} \supset A_{i,j}^{(m+1)}$, $A_j^{(m)} = A_j$ *при всех* i, j *и* m;
2) *множество* $A_{i,j}^{(\infty)} = \bigcap\limits_m A_{i,j}^{(m)}$ *является невырожденной дугой на* $\partial\Omega$.

Пусть $(A^{(\infty)}, B^{(\infty)})$ – *конфигурация класса* $B[k_1, \dots, k_n, n_1, n_2]$ *с областью* Ω *и красным множеством*

$$A^{(\infty)} = \Big(\bigcup_{i,j} A_{i,j}^{(\infty)}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{j} A_j\Big).$$

Тогда

$$\operatorname{mod}\Big(A^{(m)}, \mathbb{T}, \Omega\Big) \to \operatorname{mod}\Big(A^{(\infty)}, \mathbb{T}, \Omega\Big) \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Следующее утверждение, являющееся вариантом "леммы об избытке площади над модулем", см. [9, леммы 2.1 и 2.3], известно специалистам по геометрической теории функций. Мы приводим его доказательство, так как не смогли отыскать подходящей ссылки на данный конкретный случай.

Утверждение 4 (о семействе кривых, огибающих препятствие)**.** *Пусть* Ω – *круговая область в* U, $\mathbb{T} \subset \partial\Omega$ *и пусть* E – *компактное подмножество в* $\overline{\Omega}$, *состоящее из конечного числа компонент связности. Пусть* Γ *и* $\Gamma(E)$ – *семейства кривых, соединяющих множества* $\mathbb{T}$ *и* $\partial\Omega \setminus \mathbb{T}$ *в* Ω *и* $\Omega \setminus E$, *соответственно. Тогда*

$$\operatorname{mod}\Gamma(E) \leqslant \operatorname{mod}\Gamma. \tag{2.3}$$

Равенство в (2.3) *имеет место тогда и только тогда, когда* E *принадлежит конечному множеству ортогональных линий уровня гармонической меры* $\omega(z, \mathbb{T}, \Omega)$.

Доказательство. Неравенство (2.3) является следствием свойства возрастания модуля при расширении семейства кривых. Докажем утверждение о равенстве в (2.3).

Пусть $\operatorname{mod}\Gamma(E) = \operatorname{mod}\Gamma$, но E пересекает бесконечное число ортогональных линий уровня функции $\omega = \omega(z, \mathbb{T}, \Omega)$. Тогда найдутся четырехугольник Q, сторонами которого являются регулярные ортогональные линии уровня l' и l'' функции ω, дуга $\alpha' \subset \mathbb{T}$, дуга α'', лежащая на некоторой окружности C_k, и континуум $e \subset E \cap (Q \cup \alpha' \cup \alpha'')$, соединяющий стороны l' и l''.

Пусть $g(z) = \omega(z) + i\omega^*(z)$, где ω^* – гармонически сопряжена с ω. Тогда g однозначна в четырехугольнике Q и, при надлежащем выборе аддитивной мнимой константы, отображает его на прямоугольник $\Pi(1, h)$, где $h = (1/2)\operatorname{mod} Q$, и

$$\Pi(a, b) = \big\{w = u + iv : 0 < u < a, \ |v| < b\big\}, \quad a, b > 0.$$

Выбирая Q достаточно узким, можем считать, что $0 < h < 1$. Выберем ε и δ такими, что

$$0 < \varepsilon < 1 - \sqrt{1 - h^2}, \quad 0 < \delta \leqslant h - \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}. \tag{2.4}$$

Пусть $Q_{\varepsilon,\delta} = g^{-1}(\Pi(\varepsilon,\delta))$. Как известно, см. доказательство теоремы 4–5 в [6], метрика

$$\rho(z)|dz| = |g'(z)|\,|dz| \tag{2.5}$$

является в существенном единственной экстремальной метрикой для семейства Γ. Покажем, что метрика

$$\widetilde{\rho}(z)|dz| = \begin{cases} \rho(z)|dz|, & \text{если} \quad z \in \Omega \setminus Q_{\varepsilon,\delta}, \\ 0, & \text{если} \quad z \in Q_{\varepsilon,\delta}, \end{cases}$$

допустима для $\Gamma(e)$. Если $\gamma \in \Gamma(e)$ не пересекает $Q_{\varepsilon,\delta}$, то

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}|dz| = \int\limits_\gamma \rho|gz| \geqslant 1,$$

в силу допустимости метрики $\rho|dz|$ для семейства Γ. Пусть $\gamma \in \Gamma(e)$ пересекает $Q_{\varepsilon,\gamma}$. Тогда непрерывная кривая $l = g(\gamma)$, соединяющая в w-плоскости прямые $\{w : u = 0\}$ и $\{w : u = 1\}$, пересекает прямоугольник $\Pi(\varepsilon,\delta)$ и хотя бы одну из горизонтальных сторон прямоугольника $\Pi(1,h)$. Пусть $l^- = l \setminus \Pi(\varepsilon,\delta)$ и пусть l_u и l_v – проекции l^- на вещественную и мнимую оси, соответственно. Тогда

$$\operatorname{length} l_u \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \operatorname{length} l_v \geqslant h - \delta.$$

Используя (2.4), отсюда получаем

$$\operatorname{length} l^- \geqslant \sqrt{(1-\varepsilon)^2 + (h-\delta)^2} \geqslant 1.$$

Пусть $\gamma^- = g^{-1}(l^-)$. Тогда

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}(z)|dz| \geqslant \int\limits_{\gamma^-} \widetilde{\rho}(z)|dz| = \int\limits_{\gamma^-} |g'(z)|\,|dz| = \operatorname{length} l^- \geqslant 1,$$

и допустимость метрики $\widetilde{\rho}|dz|$ для семейства $\Gamma(e)$, значит, и для семейства $\Gamma(E)$ доказана. Следовательно,

$$\operatorname{mod}\Gamma(E) \leqslant \iint\limits_\Omega \widetilde{\rho}^{\,2}\,dm = \operatorname{mod}\Gamma - \iint\limits_{Q_{\varepsilon,\delta}} |g'(z)|^2\,dm = \operatorname{mod}\Gamma - \varepsilon\delta,$$

что противоречит предложению, что $\operatorname{mod}\Gamma(E) = \operatorname{mod}\Gamma$.

Утверждение о равенстве в одну сторону доказано. Предположим теперь, что E лежит на конечном множестве ортогональных линий уровня $l_1, \dots, l_m$ функции $\omega(z, \mathbb{T}, \Omega)$. Из хорошо известных свойств линий уровня гармонической функции, в частности, гармонической меры, следует, что линии $l_1, \dots, l_m$ вместе с критическими ортогональными линиями уровня $l_{m+1}, \dots, l_{m+m_1}$ функции $\omega(z, \mathbb{T}, \Omega)$ разбивают Ω на конечное число четырехугольников $Q_1, \dots, Q_M$. При этом две противоположные стороны Q_j лежат на множестве $\bigcup_j l_j$, а двумя другими сторонами являются некоторые дуги $\alpha_j' \subset \mathbb{T}$ и $\alpha_j'' \subset C = \partial\Omega \setminus \mathbb{T}$.

Метрика $|g'(z)|\,|dz|$, где $g(z)$ определена выше, экстремальна для семейства Γ. Она также экстремальна и для семейств Γ_j кривых $\gamma \subset Q_j$, соединяющих стороны α_j' и α_j'' четырехугольника Q_j. Поэтому

$$\operatorname{mod}\Gamma = \sum_{j=1}^{M} \operatorname{mod} Q_j. \tag{2.6}$$

Так как Γ_j – подсемейства $\Gamma(E)$, лежащие в непересекающихся областях, то по известному свойству модулей, см. [10, с. 15],

$$\operatorname{mod}\Gamma \geqslant \operatorname{mod}\Gamma(E) \geqslant \sum_{j=1}^{M} \operatorname{mod} Q_j. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) следует неравенство (2.3) со знаком равенства. □

Далее всюду через Ω обозначается область в U, соответствующая красно-синей конфигурации (A, B). Обозначения $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Omega}_1$, $\widetilde{\Omega}_f$ и т.п. зарезервированы для областей, граница которых состоит из окружности $\mathbb{T}$ и множества точек красных дуг, входящих в состав границы соответствующей из областей Ω, Ω_1, Ω_f и т.п.

Утверждение 5 (Дюрен, Пфальцграф [1]). *Неравенство* (1.3) *является точным для любой красно-синей конфигурации* (A, B), *не содержащей окружностей с двойной окраской. При этом каждая экстремальная функция* $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ *отображает* B *на систему дуг, лежащих на ортогональных линиях уровня гармонической меры* $\omega(w, f(A), \widetilde{\Omega}_f)$, *где* $w = f(z)$, $\Omega_f = f(\Omega)$.

3. Теорема существования

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Для любой конфигурации* (A, B) *класса* $B[k_1,\ldots,k_n,n_1,n_2]$, *где все параметры – целые неотрицательные числа, хотя бы одно из которых не равно нулю, существует отображение* $f\in\mathcal{F}(\Omega)$, *доставляющее минимум в задаче об искажении гиперболической емкости, т.е. такое, что*

$$\operatorname{cap}_h f(A) = \delta_h(f(A), f(\Omega)) = \delta_h(A, \Omega). \tag{3.1}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы удобно считать, что $0\in\Omega$, а вместо класса $\mathcal{F}(\Omega)$ рассматривать его нормированный подкласс $\mathcal{F}_0(\Omega) = \{f \in \mathcal{F}(\Omega) : f(0) = 0, f(1) = 1\}$, так как такая нормировка делает класс $\mathcal{F}_0(\Omega)$ компактным. Понятно, что эти предположения не ограничивают общности рассуждений.

1) Предварительно покажем, что существует функция $f_1 \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- при фиксированном j граничные множества $A^1_{j,i} = f_1(A_{j,i})$, $1 \leqslant i \leqslant k_j$, являются дугами, составляющими разбиение некоторой окружности $C^{(1)}_j$;
- каждое из граничных множеств $B^1_{j,i} = f_1(B_{j,i})$ является разрезом вдоль аналитической дуги, ортогональной $C^1_{j,i}$ в одном из своих концов;
- множества $A^1_j = f_1(A_j)$ являются окружностями, а множества $B^1_j = f_1(B_j)$ – разрезами вдоль аналитических дуг.

Функция f_1 с требуемыми свойствами может быть построена в несколько этапов последовательным применением известных теорем Кёбе.

(a) Пусть Ω' – область, ограниченная окружностями $\mathbb{T}$, C_1 и синими окружностями $C_{n+n_1+1}, \ldots$, если таковые имеются. Пусть Ω'' – область, симметричная Ω' относительно C_1, а Ω^* – область, полученная объединением областей Ω', Ω'' и внутренних точек красных дуг окружности C_1. По теореме Кёбе, см. [9, теорема 5.7], существует отображение g_1 области Ω^* на надлежащее кольцо $K(\rho^2, 1)$, $0 < \rho < 1$, с радиальными разрезами, при котором окружность $\mathbb{T}$ переходит в себя, а окружность, симметричная $\mathbb{T}$ относительно C_1, переходит в окружность $\mathbb{T}_{\rho^2}$. При условии $g_1(1) = 1$ такое отображение единственно. Поэтому, в силу симметрии области Ω^*, $g_1(C_1) = \mathbb{T}_\rho$. Таким образом, g_1 отображает Ω' на кольцо $K(\rho, 1)$ с разрезами вдоль радиальных отрезков.

Пусть $\widehat{\Omega}$ – область, ограниченная окружностями $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}_\rho$ и кривыми $g_1(C_j)$, $j = 2, \ldots, n+n_1$. По известной теореме Кёбе, см. [13, гл. 5, §6, теорема 4], существует отображение g_2 области $\widehat{\Omega}$ на круговую область $\Omega^{(1)}$, которое можно нормировать условиями: $g_2(1) = 1$, $g_2(g_1(0)) = 0$. Граница области $\Omega^{(1)}$ состоит из красно-синих окружностей $C_j^{(1)} = g_2(g_1(C_j))$, $2 \leqslant j \leqslant n$, некоторых красных окружностей и синих разрезов по аналитическим дугам. При этом функция $f^{(1)} = g_2 \circ g_1 \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ отображает Ω на $\Omega^{(1)}$.

(b) Взяв $C_2^{(1)}$ вместо окружности C_1 и повторяя процедуру п. (a), получим область $\Omega^{(2)}$, имеющую на одну красно-синюю окружность меньше, чем $\Omega^{(1)}$, а также функцию $f^{(2)} \in \mathcal{F}(\Omega^{(1)})$, отображающую $\Omega^{(1)}$ на $\Omega^{(2)}$. Применяя последовательно указанную процедуру, получим области $\Omega^{(3)}, \ldots, \Omega^{(n)}$ и соответствующие им функции $f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$. Взяв $f_1 = f^{(n)} \circ \ldots \circ f^{(1)}$, получим функцию с требуемыми свойствами.

2) Пусть $\Omega_1 = f_1(\Omega)$, где f_1 – функция п. 1). Покажем, что существует отображение $g \in \mathcal{F}(\Omega_1)$, при котором красные окружности $C_j^{(1)}$ переходят в красные окружности $C_j^{(2)}$, которые вместе с $\mathbb{T}$ ограничивают круговую область $\widetilde{\Omega}_2$, а синие дуги переходят в разрезы, лежащие на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_2)$. Доказательство проведем индукцией по числу N точек, в которых синие дуги присоединяются к красным окружностям.

При $N = 0$ (точек присоединения нет) требуемое утверждение уже доказано Дюреном и Пфальцграфом, см. утверждение 5. Допустим, что требуемое утверждение выполняется для всех конфигураций, имеющих $N \geqslant 0$ точек присоединения.

Предположим, что Ω_1 имеет $N+1$ точку присоединения. Пусть $z_0 \in \partial\Omega_1$ – одна из них. Тогда z_0 – конец синей аналитической дуги γ, которая в точке z_0 ортогональна некоторой красной окружности C. Пусть z_n – последовательность точек γ, монотонно на γ сходящаяся к z_0. Пусть γ_n – открытая дуга на γ, соединяющая точки z_0 и z_n. Тогда последовательность областей $\Omega^n = \Omega_1 \cup \gamma_n$ сходится к ядру Ω_1 при $n \to \infty$.

Область Ω^n имеет N точек присоединения. Поэтому по индуктивному предположению существует функция $g_n \in \mathcal{F}_0(\Omega^n)$, отображающая Ω^n на область Ω_n' так, что красные окружности $C_j^{(1)}$ переходят в красные окружности $C_j^{(1,n)}$, которые вместе с $\mathbb{T}$ ограничивают круговую область $\widetilde{\Omega_n'}$, а синие дуги переходят в разрезы, лежащие на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(z,\mathbb{T},\widetilde{\Omega_n'})$.

Последовательность $\{g_n\}$ является компактным семейством, поэтому она содержит подпоследовательность (будем считать, что таковой является сама $\{g_n\}$), которая, в силу условий нормировки класса $\mathcal{F}_0(\Omega^n)$, сходится к функции $g\in\mathcal{F}_0(\Omega_1)$. В оставшейся части этого доказательства мы покажем, что g удовлетворяет требуемым условиям. Это будет вытекать из доказываемых ниже предельных соотношений для гармонической меры и модулей специальных семейств кривых.

Обозначая через $O_j^{(n)}$ и $r_j^{(n)}$ центры и радиусы красных окружностей $C_j^{(1,n)}$, без ограничения общности можем считать, что

$$O_j^{(n)}\to O_j^{(\infty)},\quad r_j^{(n)}\to r_j^{(\infty)}\quad \text{при}\quad n\to\infty,$$

где $O_j^{(\infty)}\in\overline{U}$, $0\leqslant r_j^{(\infty)}\leqslant 1$.

Пусть $C_j^{(\infty)}$ – окружность радиуса $r_j^{(\infty)}$ с центром $O_j^{(\infty)}$. Покажем, что $r_j^{(\infty)}>0$ при всех $j=1,\dots,n+n_1$, а окружности $\mathbb{T}$, $C_1^{(\infty)},\dots,C_{n+n_1}^{(\infty)}$ попарно не имеют общих точек. Функции g_n однолистны в кольце $K(1-\varepsilon_0,1)$, где $K(r_1,r_2)=\{z:r_1<|z|<r_2\}$, а $\varepsilon_0>0$ – достаточно малое фиксированное число. При этом $g_n(z)\neq 0$ при $z\in K(1-\varepsilon_0,1)$. Поэтому в силу известного результата Гретша, см. [10, с. 35; 14, гл. 2, §2], существует δ_0, $0<\delta_0<1$, такое, что $|g_n(z)|\leqslant\delta_0$ для всех n и всех z таких, что $|z|\leq 1-\varepsilon_0$. Тем самым доказано, что все окружности $C_j^{(\infty)}$ отделены от $\mathbb{T}$.

Покажем, что $r_j^{(\infty)}>0$. Допустим, что $r_j^{(n)}\to 0$. Выберем произвольный четырехугольник $Q\subset\Omega_1$, имеющий в качестве отмеченной пары сторон дугу $A_{j,1}^1$ на окружности $C_j^{(1)}$, и произвольную дугу Γ на $\mathbb{T}$. Пусть $\operatorname{mod}Q$ означает модуль Q относительно семейства кривых в Q, соединяющих отмеченные стороны. Модуль семейства кривых инвариантен при конформных отображениях и увеличивается при расширении и укорочении семейства кривых, см. [5, 6, 9], поэтому выполняется цепочка соотношений

$$0<\operatorname{mod}Q=\operatorname{mod}g_n(Q)\leqslant\operatorname{mod}\left(U\setminus\overline{\Delta}_n\right)\leqslant\frac{2\pi}{\log(\delta_0/r_j^{(n)})}\to 0,$$

где Δ_n – круг радиуса $\tau_j^{(n)}$ с центром $O_j^{(n)}$, приводящая к противоречию со сделанным предположением.

Для того, чтобы исключить возможность касания окружностей $C_l^{(\infty)}$ и $C_m^{(\infty)}$ при $l \neq m$, выберем произвольную двусвязную область $D \subset \Omega_1$, которая отделяет окружность $C_l^{(1)}$ от окружностей $C_m^{(1)}$ и $\mathbb{T}$. Пусть $\operatorname{mod} D$ означает модуль D относительно семейства кривых, разделяющих граничные компоненты. Пусть $r_l^{(n)}(1+\varepsilon_{l,m}^{(n)})$ – расстояние от точки $O_l^{(n)}$ до окружности $C_m^{(n)}$. Тогда $\varepsilon_{l,m}^{(n)} \to 0$, если расстояние между окружностями $C_l^{(n)}$ и $C_m^{(n)}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Используя конформную инвариантность и свойство возрастания модуля при расширении области, получаем цепочку соотношений

$$0 < \operatorname{mod} D = \operatorname{mod} g_n(D) \leqslant \operatorname{mod} D'_n \leqslant 4\log(1+\varepsilon_{l,m}^{(n)}) \to 0, \tag{3.2}$$

которая ведет к противоречию, если допустить возможность касания окружностей $C_l^{(\infty)}$ и $C_m^{(\infty)}$. Здесь через D'_n обозначена двусвязная область, ограниченная окружностью $C_l^{(n)}$ и внешней граничной компонентой области $g_n(D)$. Явная оценка модуля, использованная в (3.2), хорошо известна, см. [10, гл. 2; 14, гл. 2, §2].

Итак, утверждение о непересечении окружностей $\mathbb{T}, C_1^{(\infty)}, \dots, \dots, C_{n+n_1}^{(\infty)}$ доказано. Пусть $\widetilde{\Omega}_\infty$ – круговая область, ограниченная этими окружностями. Тогда $\widetilde{\Omega'_n} \to \widetilde{\Omega}_\infty$ как к ядру и

$$\omega\bigl(z,\mathbb{T},\widetilde{\Omega'_n}\bigr) \to \omega\bigl(z,\mathbb{T},\widetilde{\Omega}_\infty\bigr) \tag{3.3}$$

равномерно на компактных подмножествах $\widetilde{\Omega}_\infty$. При больших n область $\widetilde{\Omega'_n}$ является вариацией Адамара области $\widetilde{\Omega}_\infty$, поэтому (3.3) следует, например, из вариационной формулы (П3.10) в [15].

Займемся доказательством необходимых предельных соотношений для модулей семейств кривых. Пусть Γ и Γ_n – семейства кривых, соединяющих множества $A^{(1)} = f_1(A)$ и $\mathbb{T}$ в областях Ω_1 и Ω^n, соответственно. Так как $\Gamma \subset \Gamma_n$, то

$$\operatorname{mod}\Gamma \leqslant \operatorname{mod}\Gamma_n. \tag{3.4}$$

Пусть Γ'_n – семейство кривых в Ω_1, соединяющих множества $A^{(1)} \cup \gamma_n$ и $\mathbb{T}$. Тогда семейство Γ'_n короче семейства Γ_n и, значит,

$$\operatorname{mod}\Gamma_n \leqslant \operatorname{mod}\Gamma'_n. \tag{3.5}$$

По утверждению 3 (о непрерывности модуля) имеем

$$\operatorname{mod}\Gamma_n' \to \operatorname{mod}\Gamma \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6) заключаем, что

$$\operatorname{mod}\Gamma_n \to \operatorname{mod}\Gamma \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.7}$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}_n$, где n – натуральное число или ∞, – семейство кривых, соединяющих $\mathbb{T}$ и $\partial\widetilde{\Omega_n'} \setminus \mathbb{T}$ внутри области $\widetilde{\Omega_n'}$. Согласно утверждению о случаях равенства в (2.3),

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma}_n = \operatorname{mod} g_n(\Gamma_n) = \operatorname{mod}\Gamma_n. \tag{3.8}$$

Используя известные результаты о сходимости модулей семейств кривых, получаем

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma}_n \to \operatorname{mod}\widetilde{\Gamma}_\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Отметим, что (3.9) следует, например, из равенства

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma}_n = \operatorname{cap}\ (\mathbb{T}, \partial\widetilde{\Omega_n'} \setminus \mathbb{T}),$$

см. утверждение 1, и вариационной формулы (П3.11) в [15]. Из (3.7)–(3.9) и свойства конформной инвариантности модуля заключаем, что

$$\operatorname{mod} g(\Gamma) = \operatorname{mod}\Gamma = \operatorname{mod}\widetilde{\Gamma}_\infty. \tag{3.10}$$

Так как $g(\Gamma)$ – подсемейство $\widetilde{\Gamma}_\infty$, состоящее из кривых, огибающих множество $g(B^{(1)})$, то из (3.10), применяя утверждение о равенстве в (2.3), заключаем, что $g(B^{(1)})$ есть конечное подмножество дуг, лежащих на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_\infty)$. Таким образом, функция g удовлетворяет требуемым условиям. В соответствии с принципом индукции, утверждение о существовании искомого отображения доказано.

Из равенств (3.10) и характеризации емкостей в терминах модулей семейств кривых, см. равенства (2.1) и (2.2), следует (3.1). $\square$

Следствие 1. *Пусть область Ω соответствует конфигурации (A, B) класса $B[k_1, \ldots, k_n, n_1, n_2]$. Тогда*

$$R_h(z, A, \Omega) = \omega\big(f(z), \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_f\big), \tag{3.11}$$

где f – экстремальное отображение теоремы 1 и $\Omega_f = f(\Omega)$ – область, соответствующая конфигурации $(f(A), f(B))$.

Действительно, функция $R_h(z, A, \Omega)$, определенная равенством (3.11), ограничена и гармонична в Ω, принимает значения 0 и 1 на A и $\mathbb{T}$, соответственно. Кроме того, при $z \in B$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial n} R_h(z, A, \Omega) = |f'(z)| \frac{\partial}{\partial n_0} \omega(f(z), \mathbb{R}, \widetilde{\Omega}_f) = 0, \tag{3.12}$$

где n_0 – нормаль к ортогональной линии уровня функции $\omega(\zeta, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_f)$ в точке $\zeta = f(z)$. Равенство (3.12) выполняется, если ζ не является точкой ветвления ортогональной линии уровня или концевой точкой некоторой из синих дуг. Если же z_0 такова, что $g(f_1(z_0))$ является одной из таких точек, то, используя условие (3.12), можно продолжить функцию $R_h(z, A, \Omega)$ по принципу симметрии в проколотую окрестность точки z_0, а затем по теореме об изолированной особенности для гармонических функций $R_h(z, A, \Omega)$ может быть продолжена и в точку z_0, в которой по непрерывности будет выполняться равенство $\frac{\partial}{\partial n} R_h(z, A, \Omega) = 0$. $\square$

4. Единственность и неединственность. Примеры

Красно-синюю конфигурацию (A, B) называем экстремальной (для гиперболической емкости), если

$$\operatorname{cap}_h A = \delta_h(A, \Omega). \tag{4.1}$$

Экстремальные конфигурации (A_1, B_1) и (A_2, B_2) считаем эквивалентными (топологически эквивалентными), если существует конформное (гомеоморфное) отображение $g : \widetilde{\Omega}_1 \to \widetilde{\Omega}_2$ такое, что $g(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, $g(A_1) = A_2$, $g(B_1) = g(B_2)$.

Согласно теореме 1, для каждой красно-синей конфигурации (A, B) класса $B[k_1, \dots, k_n, n_1, n_2]$ найдется отображение $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, реализующее минимум в (1.3). Таким образом, каждой такой конфигурации (A, B) соответствует хотя бы одна экстремальная конфигурация $(f(A), f(B))$. В этом и следующем разделах приводятся примеры и изучаются свойства множества всех экстремальных конфигураций, соответствующих данной конфигурации $(A, B) \in B[k_1, \dots, k_n, n_1, n_2]$.

Объединяя утверждения 1 и 4, получаем

Критерий экстремальности (критерий E). *Красно-синяя конфигурация (A, B), соответствующая некоторой конфигурации класса $B[k_1, \dots, k_n, n_1, n_2]$, экстремальна тогда и только тогда, когда B*

принадлежит конечному множеству ортогональных линий уровня гармонической меры $\omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega})$.

Пример 1 (единственность). Пусть

$$A = C_\rho = \{z : |z| = \rho\}, \quad B = \bigcup_{k=1}^{n} \left(e^{2\pi ik/n}\, I(r_1, r_2)\right),$$

где $0 < \rho < r_1 < r_2 < 1$, n – натуральное; $I(r_1, r_2) = \{t \in \mathbb{R} : r_1 \leqslant t \leqslant r_2\}$. Так как отрезки множества B лежат на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(z, \mathbb{T}, K(\rho, 1))$, то, согласно критерию E, конфигурация (A, B) экстремальна для гиперболической емкости, см. рис. 1a.

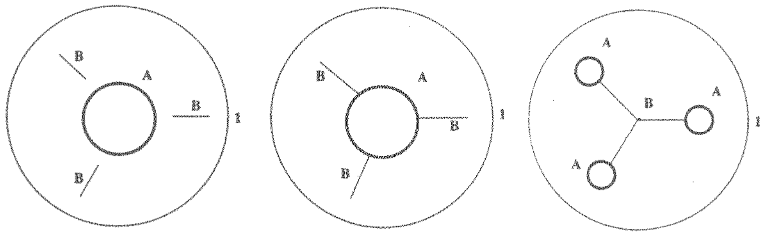

Рис. 1a Рис. 1b Рис. 1c

Рис. 1.

Пусть $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ такова, что конфигурация (A_f, B_f), где $A_f = f(A)$, $B_f = f(B)$, также экстремальна. Тогда экстремальной является и конфигурация $(A_{g\circ f}, B_{g\circ f})$, где $g \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_f)$ отображает $\widetilde{\Omega}_f$ на надлежащее кольцо $K(\rho_1, 1)$, $0 < \rho_1 < 1$. Вновь используя критерий E, заключаем, что $\Omega_{g\circ f}$ является кольцом $K(\rho_1, 1)$ с разрезами вдоль радиальных отрезков. Так как $g(f(\mathbb{T})) = \mathbb{T}$ и $g(f(C_1)) = C_{\rho_1}$, то из утверждения о единственности теоремы Кёбе об отображении на кольцо с радиальными разрезами, см. [9, теорема 5.7], имеем $g(f(z)) \equiv z$. Значит, $f = g^{-1} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega})$, следовательно, конфигурации (A, B) и (A_f, B_f) эквивалентны.

Таким образом, экстремальное отображение задачи об искажении гиперболической емкости множества A функциями $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ единственно с точностью до эквивалентности.

Пример 2 (неединственность). Полагая $r_1 = \rho$ в предыдущем примере, получим предельную для рассмотренных там конфигурацию (A, B), см. рис.1в. Интересно, что такое изменение конфигурации, непрерывное в смысле сходимости к ядру, но меняющее её топологический вид, приводит к существованию неэквивалентных экстремальных конфигураций.

Согласно критерию E, конфигурация (A, B) остается экстремальной. Пусть $\Omega_1 = \Omega_1(\tau, \delta)$ – двусвязная область, внешней граничной компонентой которой служит окружность $\mathbb{T}$, а внутренняя граничная компонента состоит из окружностей $\widehat{C}_k = \{z : |z - \tau e^{\pi i(2k-1)/n}| = \delta\}$ и отрезков $J_k = \{z : te^{\pi i(2k-1)/n} : 0 \leqslant t \leqslant \tau - \delta\}$, где $k = 1, \dots, n$, $0 < \delta < \tau < 1 - \delta$. Пусть $A_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \widehat{C}_k$. Используя принцип симметрии Римана–Шварца, нетрудно построить отображение $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ области Ω, соответствующей конфигурации (A, B), на надлежащую область $\Omega_1 = \Omega_1(\tau, \delta)$. При этом параметры $\tau = \tau(\rho, r_1)$ и $\delta = \delta(\rho, r_1)$ могут быть выбраны так, что $f(A_{1,k}) = \widehat{C}_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $f(B) = B_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$. Так как область $\widetilde{\Omega}_1$ симметрична относительно прямых, содержащих отрезки J_k, то эти отрезки лежат на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(z, A_1, \widetilde{\Omega}_1)$. Последнее, согласно критерию E, влечет экстремальность конфигурации (A_1, B_1).

Так как область $\widetilde{\Omega}$ двусвязна, а область $\widetilde{\Omega}_1$ является $(n+1)$-связной, то при $n \geqslant 2$ не существует гомеоморфизма области $\widetilde{\Omega}$ на $\widetilde{\Omega}_1$, значит, конфигурации (A, B) и (A_1, B_1) не эквивалентны даже топологически.

Пример 3 (неединственность). В предыдущем примере конформно (и даже топологически) различные экстремальные конфигурации возникали по той причине, что одна из граничных компонент содержала как красные, так и синие дуги. Теперь мы покажем, что эффект неединственности может иметь место даже в простейшей ситуации, рассмотренной в [1], когда каждое из множеств A и B состоит из целых граничных компонент.

Пусть $A = C^+ \cup C^-$, где $C^{\pm} = \{z : |z \mp r| = \delta\}$, $B = I_{r-\delta}$, где $I_\rho = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \rho\}$, $0 < \rho < r - \delta < r + \delta < 1$. При $0 \leqslant \tau \leqslant \rho$ пусть $g_\tau \in \mathcal{F}(U \setminus \overline{I}_\tau)$ отображает $U \setminus \overline{I}_\tau$ на область $U \setminus (e^{\pi i/2} I_\tau)$. Отметим, что $g_\tau(z) \not\equiv iz$, так как g_τ нормирована условием $g_\tau(1) = 1$. Пусть

$f_\tau = h_\tau \circ g_\tau \in \mathcal{F}(\Omega)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \rho$, где h_τ отображает область Ω^τ, ограниченную окружностью $\mathbb{T}$ и кривыми $g_\tau(C^+)$ и $g_\tau(C^-)$, на симметричную относительно координатных осей круговую область $\Omega_\tau \subset U$ так, что $h_\tau(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, $h_r(1) = 1$. Рассмотрим однопараметрическое семейство конфигураций (A_τ, B_τ), где $A_\tau = f_\tau(A)$, $B_\tau = f_\tau(B)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \rho$, см. рис. 2. Как и в предыдущих примерах, из критерия E следует, что каждая из конфигураций (A_τ, B_τ) экстремальна в задаче об искажении гиперболической емкости.

Из утверждения о единственности теоремы Кёбе об отображении на круговую область следует, что если найдется функция $g \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_{\tau_1})$, отображающая $\widetilde{\Omega}_{\tau_1}$ на $\widetilde{\Omega}_{\tau_2}$, то $\widetilde{\Omega}_{\tau_1} = \widetilde{\Omega}_{\tau_2}$ и $g(z) \equiv z$. Последнее, как нетрудно показать, влечет равенство $\tau_1 = \tau_2$. Следовательно, при условии $\tau_1 \neq \tau_2$, конфигурации (A_{τ_1}, B_{τ_1}) и (A_{τ_2}, B_{τ_2}) не эквивалентны.

Отметим, что конфигурации рис. 2а, 2в и 2с топологически не эквивалентны друг другу. Однако при всех $0 < \tau_1 < \rho$, $0 < \tau_2 < \rho$ конфигурации (A_{τ_1}, B_{τ_1}) и (A_{τ_2}, B_{τ_2}) топологически эквивалентны.

Приведенные примеры показывают, что множество экстремальных конфигураций может быть достаточно широким и содержать конфигурации различной топологической природы. Экстремальная конфигурация теоремы 1 выделяется тем, что она содержит минимально возможное число красных окружностей. Как показывает пример 3, такая *минимальная* экстремальная конфигурация в общем случае не единственна. Следующая теорема дает достаточное условие единственности минимальной экстремальной конфигурации.

Теорема 2. *Пусть (A, B) – минимальная экстремальная конфигурация, соответствующая некоторой конфигурации класса $B[k_1, \ldots$ $\ldots, k_n; n_1, n_2]$. Если гармоническая мера $\omega(z, A, \widetilde{\Omega})$ не имеет особых точек на множестве B, то (A, B) единственна (как минимальная конфигурация) с точностью до эквивалетности.*

Доказательство. Пусть (A_1, B_1) – минимальная экстремальная конфигурация, отличная от (A, B), и пусть $f : \Omega \to \Omega_1$ – нормированное конформное отображение. В силу следствия 1 и конформной инвариантности h-функции Робина имеем

$$\omega(\zeta, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_1) = \omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}), \tag{4.2}$$

если $\zeta = f(z)$ и $z \in \Omega$. Из (4.2) вытекает, что $\omega(\zeta, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_1)$ не имеет особых точек на множестве B_1 и что при отображении f линии уровня и ортогональные линии уровня гармонической меры $\omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega})$ переходят соответственно в линии уровня и ортогональные линии уровня гармонической меры $\omega(\zeta, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega}_1)$.

Пусть γ_a – дуга множества B, имеющая конец в точке $a \in \widetilde{\Omega}$. Из предыдущих рассуждений нетрудно заключить, что $f(\gamma_a)$ является дугой множества B_1, имеющей конец в точке $f(a) \in \widetilde{\Omega}_1$. Пусть l – дуга ортогональной линии уровня $\omega(z, \mathbb{T}, \widetilde{\Omega})$ с концами в точках b и c, где $b \in \gamma_a$, содержащая точку a внутри и такая, что дуга $l_{a,c} \subset l$, соединяющая точки a и c, лежит в области Ω. Пусть L и $L_{a,c}$ – образы l и $l_{a,c}$ при отображении f. По принципу симметрии, функция f продолжима через l и такое продолжение совпадает с продолжением f через поддугу $l_{a,c} \subset l$. Отсюда вытекает, что f можно доопределить до функции, осуществляющей конформное отображение области $\widetilde{\Omega}$ на область $\widetilde{\Omega}_1$, что и доказывает требуемое утверждение. $\square$

5. Экстремальные конфигурации и соответствующие им графы

Число принципиально различных экстремальных конфигураций ограничено топологическими условиями. Проследим за конфигурациями, которые могут возникать при наличии только одной красно-синей окружности, состоящей из n красных и n синих дуг. Удобная классификация конфигураций получается при использовании специальных красно-синих графов. Под таким графом мы будем понимать положительно ориентированную границу L односвязной области Ω, $\infty \in \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, состоящую из конечного числа непересекающихся красных окружностей C_k, ограничивающих круги Δ_k, и конечного числа синих кусочно-аналитических граничных дуг B_l, если эти окружности и дуги удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \big((\bigcup\limits_k \overline{\Delta}_k) \cup (\bigcup\limits_l B_l) \big)$;

(b) B_l – открытая граничная дуга, имеющая концевые точки на множестве $C = \bigcup\limits_k C_k$;

(c) из каждой точки $z \in C$ выходит не более одной дуги, лежащей на границе области Ω.

Отметим, что при движении вдоль красно-синего графа L красные дуги окружностей C_k чередуются с синими участками границы Ω, лежащими на $B = \bigcup_l B_l$. Эти части границы, рассматриваемые в порядке их следования на L, будем обозначать $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$, где A_1 – некоторая начальная красная дуга. Пару (L, A_1) называем направленным графом, а число красных дуг на L называем его порядком.

Два направленных графа (L^1, A_1^1) и (L^2, A_1^2), порядка n каждый, считаем эквивалентными, если им соответствует одинаковое число красных кругов Δ_k^1 и Δ_k^2 и если существует гомеоморфизм f множества $\overline{\Omega^1} \cup (\bigcup_k \overline{\Delta_k^1})$ на множество $\overline{\Omega^2} \cup (\bigcup_k \overline{\Delta_k^2})$ такой, что $f(A_k^1) = A_k^2$ и $f(\overline{\Delta_l^1}) = \overline{\Delta_l^2}$ при надлежащей нумерации кругов Δ_l^1 и Δ_l^2. Здесь Ω^1, A_k^1 и Ω^2, A_k^2 – области и дуги, сопоставляемые графам (L^1, A_1^1) и (L^2, A_1^2), соответственно. Пусть $M(n)$ – число классов эквивалентности направленных красно-синих графов порядка n.

Нетрудно показать, что каждая конфигурация, экстремальная в задаче об искажении гиперболической емкости для одной красно-синей окружности, может быть сопоставлена некоторому направленному графу. Действительно, пусть (A, B) – экстремальная конфигурация, которой соответствует двусвязная область Ω. Тогда множество A состоит из конечного числа замкнутых невырожденных компонент. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – связная компонента $U \setminus A$ такая, что $\mathbb{T} \subset \partial\widetilde{D}$, и пусть E_k – связные компоненты множества $U \setminus \widetilde{\Omega}$. По теореме Кёбе, существует функция f, отображающая $\widetilde{\Omega}$ на круговую область $f(\widetilde{\Omega}) \subset U$ такая, что $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Так как конфигурация $(f(A), f(B))$ экстремальна в задаче об искажении гиперболической емкости, то из следствия 1 вытекает, что синие дуги $f(B)$ лежат на ортогональных линиях уровня гармонической меры $\omega(f(z), \mathbb{T}, f(\widetilde{\Omega}))$. Отсюда следует, что внутренняя граница области $f(\Omega)$ с соответствующей раскраской граничных дуг представляет собой направленный красно-синий граф порядка n. Таким образом, число “графически” различных экстремальных конфигураций не превышает $M(n)$. Было бы интересно найти явное выражение для $M(n)$. Для малых n значения $M(n)$ приведены в следующей таблице.

n	1	2	3	4
$M(n)$	1	2	5	12

Как показывает пример 3, экстремальные конфигурации, соответствующие одному и тому же направленному графу, не обязаны быть топологически эквивалентными.

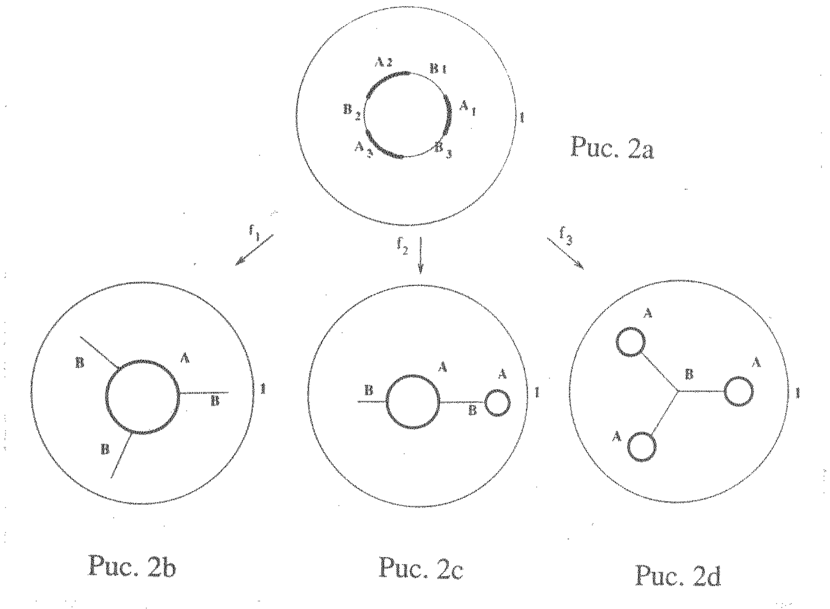

Рис. 2.

Конфигурации рис. 2 демонстрируют существование нетривиальных красно-синих конфигураций (A, B) таких, что для каждого из возможных направленных красно-синих графов соответствующего порядка (равного 3 на рис. 2) найдется хотя бы одно экстремальное отображение, ассоциированное в описанном выше смысле с выбранным графом. В случае $n = 3$ имеем 5 различных направленных графов, из которых по одному графу соответствует рисункам $2b$ и $2d$ и три графа соответствуют рис. $2c$. Доказательство существования соответствующих конформных отображений f_1, f_2 и f_3 (при надлежащем выборе параметров конфигурации) не представляет трудности и мы его опускаем.

Литература

1. P. Duren, J. Pfaltzgraff, *Hyperbolic capacity and its distortion under conformal mapping,* J. Analyse Math. **78** (1999), 205–218.
2. P. L. Duren, M. M. Schiffer, *Robin functions and energy functionals of multiply connected domains,* Pacific J. Math. **148** (1991), 251–273.
3. P. L. Duren, M. M. Schiffer, *Robin functions and distortion of capacity under conformal mappinf,* Complex Variables **21** (1993), 189–196.
4. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory,* Tokyo, 1959.
5. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. МИАН **139** (1980), 1–240.
6. L. V. Ahlfors, *Conformal invariants: topicts in geometric function theory,* McGraw-Hill, New York, 1973.
7. P. Duren, *Robin capacity,* in: Computational Methods and Function Theory 1997. World Scientific Publ. Co., Singapore, 177–190.
8. M. D. O'Neill, R. E. Thurman, *Extremal domains for Robin capacity,* to appear.
9. Дженкинс Дж., *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
10. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям,* М., 1969.
11. L. V. Ahlfors, L. Sario, *Riemann surfaces,* Princeton, 1960.
12. П. М. Тамразов, *О непрерывности некоторых конформных инвариантов,* Укр. мат. ж. **18** (1966), No. 6 78–84.
13. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. М., 1966.
14. O. Lehto, V. K. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen,* Springer-Verlag, Berlin etc., 1965.
15. М. Шиффер, *Некоторые новые результаты в теории конформных отображений.* Приложение к кн.: Курант Р. *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности,* с. 234–301, М., 1953.

Martin-Lüther Universität
zu Halle-Wittenberg,
Fachbereich Mathematik und Informatik
Halle, Deutschland
E-mail:dittmar@cantor.mathematik.uni-halle.de

Поступило 15 февраля 1999 г.,
в переработанном виде
11 октября 1999 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:solynin@pdmi.ras.ru