Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

Г. М. Губреев, Е. И. Олефир

БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ, МАТРИЧНОЕ УСЛОВИЕ МАКЕНХАУПТА И СЕРИИ КАРЛЕСОНА В СПЕКТРЕ

0. Введение

Пусть w^2 – произвольный A_2-вес на вещественной оси, w_- – внешняя в области $\operatorname{Im} z < 0$ функция, обладающая свойством

$$w^2(x) \overset{\text{п.в.}}{=} |w_-(x-i0)|^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция w_- допускает интегральное представление

$$w_-(z) = z \int\limits_0^\infty e^{-izt} y_w(t)\, dt, \quad \operatorname{Im} z < 0, \tag{0.1}$$

с некоторой функцией $y_w \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Формула

$$y_w(x,t) := \frac{d}{dt} \int\limits_0^t y_w(t-s) e^{izs}\, ds, \quad z \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждому весу Макенхаупта w^2 относит ядро $y_w(x,t)$, которое будем называть w-ядром [1].

Пусть теперь w_k^2 $(k = 1, 2, \dots, n)$ – произвольная система весов Макенхаупта на $\mathbb{R}$. В пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$ вектор-функций (столбцов) со стандартной нормой

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^n \int\limits_0^a |f_k(t)|^2\, dt < \infty, \quad f = \operatorname{Col}(f_k)_{k=1}^n,$$

Работа выполнена при частичной поддержке Правительства Украины и Фонда гражданских исследований США, грант UMI-298, а также Украинско-Израильского проекта научного сотрудничества, договор No. 2M/1516-97.

рассмотрим семейство функций

$$Y(\lambda_p,t) := \mathrm{Col}\,\bigl(c_k^p\, y_{w_k}(\lambda_p,t)\bigr)_{k=1}^n, \quad c_p := \mathrm{Col}\,(c_k^p)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n, \tag{0.2}$$

где $y_{w_k}(z,t)$ – соответствующее w_k-ядро, а λ_p пробегает последовательность комплексных чисел Λ.

С этой же системой весов свяжем еще одно семейство функций, но уже в пространстве $L_2(0,a)$:

$$Y(\lambda_p,t) := \sum_{k=1}^n c_k^p\, y_{w_k}(\lambda_p,t), \quad c_p := \mathrm{Col}\,(c_k^p)_{k=1}^n, \quad \lambda_p \in \Lambda. \tag{0.3}$$

Если в первом случае веса w_k^2 не предполагаются даже различными, то во втором будем считать, что система функций $y_{w_k} \in L_2(0,a)\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, отвечающая этим весам в силу формулы (0.1), линейно независима.

Статья посвящена выяснению условий на последовательность комплексных чисел Λ и последовательность векторов $\{c_p\}_{-\infty}^{+\infty}$, при которых семейства (0.2) и (0.3) образуют безусловные базисы в соответствующих пространствах. В обоих случаях мы предполагаем, что

$$\inf_{\lambda_p \in \Lambda} \mathrm{Im}\,\lambda_p > -\infty. \tag{0.4}$$

С точки зрения теории операторов обе задачи сводятся к изучению спектральной структуры n-мерных возмущений операторов интегрирования в соответствующих пространствах. Поэтому для их решения применяется общий подход, который представляет собой модификацию варианта метода проектирования Б. С. Павлова, изложенного в работе [1]. Вместе с тем, различия между этими задачами весьма существенны. В §1 мы даем полное описание (по модулю задачи о безусловной базисности семейств векторных дробей) безусловных базисов вида (0.2) в пространстве $L^{(n)}(0,a)$. Почему предыдущие рассуждения не приводят к полному решению второй задачи, объяснено в §2. Здесь получены лишь достаточные условия для безусловной базисности семейств (0.3) и доказана необходимость двухвесовой оценки для преобразования Гильберта в пространствах вектор-функций. Не исключено, что техника, необходимая для полного решения этой задачи, еще до конца не разработана. Тот факт, что задача о безусловной базисности рассматриваемых семейств приводит к весовым оценкам векторного преобразования Гильберта, нами был осознан давно; толчком к написанию предлагаемой статьи послужили недавние успехи в этой области [2].

При подготовке статьи к печати мы обнаружили, что в одном важном для приложений частном случае семейства (0.2) изучались в работах С. А. Авдонина и С. А. Иванова [3]. Речь идет о семействах векторных экспонент, что соответствует выбору:

$$w_k^2(x) \equiv 1, \quad y_{w_k}(z,t) = e^{izt}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти авторы вводят понятие порождающей матрицы-функции для семейства проекций векторных дробей, и их результат также формулируется в терминах ограниченности взвешенного преобразования Гильберта. Само же определение порождающей функции довольно сложно и опирается на понятие внутренне-внешней факторизации матричнозначных функций. Наш операторный подход позволяет дать простое определение порождающих матриц-функций как в первом, так и во втором случае. В их терминах формулируются основные результаты о базисности (теоремы 1.1 и 2.1).

В изучении базисных свойств семейства вида (0.3) у нас тоже были предшественники [4]. В случае степенных весов

$$w_k^2(x) = |x|^{2(1-\alpha_k)}, \quad y_{w_k}(z,t) = t^{\alpha_k - 1} E_1(izt, \alpha_k),$$

$$1/2 < \alpha_k < 3/2, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

семейство (0.3) совпадает с линейными комбинациями ядер, которые выражаются через функции Миттаг–Леффлера

$$E_1(z; \alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha + k)}.$$

В упомянутой работе рассматривались ряды по системам

$$Y(\lambda_p, t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, t^{\alpha_k - 1} E_1(i\lambda_p t; \alpha_k), \quad \lambda_p \in \Lambda, \tag{0.5}$$

где Λ – множество корней заданной целой функции. Доказанный здесь вариант равносходимости с классическими рядами Фурье позволил сделать вывод, что функции из некоторого подкласса

$L_2(0,a)$ разлагаются в ряды по системам (0.5). То обстоятельство, что коэффициенты c_k не зависят от p, сильно упрощает задачу о безусловной бизисности этих семейств. Можно показать, что существует изоморфизм пространства $L_2(0,a)$, переводящий систему (0.5) в семейство

$$\left\{t^{\gamma-1}\, E_1(i\lambda_p t;\gamma) : \lambda_p \in \Lambda\right\}, \quad \gamma = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$$

для которого критерий безусловной базисности известен [1].

На протяжении всей статьи мы неоднократно используем некоторые факты теории Винера–Пэли для w-ядер [1]. Чтобы эту статью можно было читать независимо от работы [1], приведем здесь их формулировки, в которых w^2 – произвольный A_2-вес на $\mathbb{R}$, w_- – отвечающая ему внешняя в $\operatorname{Im} z < 0$ функция, $y_w(z,t)$ – соответствующее w-ядро.

1. *Целая функция f конечной степени тогда и только тогда допускает интегральное представление*

$$f(z) = \int\limits_0^a y_w(z,t)h(t)\,dt, \quad h \in L_2(0,a), \tag{0.6}$$

когда она удовлетворяет условиям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} w^{-2}(x)|f(x)|^2 dx < \infty, \quad h\left(f, +\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0, \quad h\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) \leqslant a,$$

где $h(f,\varphi)$ – индикатор роста. Если функция f записана в виде (0.6), *то при каждом $b \leqslant 0$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+bi)|^2\, |w_-(x+bi)|^{-2} dx \leqslant M(b) \int\limits_0^a |h(t)|^2 dt.$$

2. *Значение интеграла*

$$h(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} y_w\left((x+bi),t\right)g(x)dx, \tag{0.7}$$

для любой функции g такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |w_-(x+bi)|^2\, |g(x)|^2 dx < \infty, \quad b \leqslant 0,$$

при любом $a > 0$ принадлежит $L_2(0,a)$, причем

$$\|h\|^2_{L_2(0,a)} \leqslant M(a,b) \int\limits_{\mathbb{R}} |w_-(x+bi)|^2 \, |g(x)|^2 dx.$$

3. *Если в* (0.7) *положить*

$$g(x) = \big(w_-(x+bi)\big)^{-1} \int\limits_0^a e^{-i(x+bi)s} f(s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

где f – произвольная функция из $L_2(0,a)$, то $h = 2\pi i f$.

4. *Класс Харди $H^2_-(w^2)$ определяется как совокупность аналитических в $\operatorname{Im} z < 0$ функций f таких, что $f(z)w_-(z) \in H^2_-$, причем*

$$\|f\|^2_{H^2_-(w^2)} := \|f w_-\|^2_{H^2_-}.$$

Аналогично определяется класс $H^2_+(w^2)$ с заменой w_- на $w_+(z) := \overline{w_-(\overline{z})}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$. После стандартного вложения этих классов в L_2 с мерой $w^2(x)dx$, имеем:

$$L_2\big(\mathbb{R}, w^2\, dx\big) = H^2_+(w^2) \dot{+} H^2_-(w^2).$$

Значение $f(z)\,(\operatorname{Im} z > 0)$ функции класса $H^2_+(w^2)$ восстанавливается по угловым предельным значениям на $\mathbb{R}$ с помощью интеграла Коши.

5. *Класс Харди $H^2_+(w^{-2})$ совпадает с множеством функций f, допускающих представление*

$$f(z) = \int\limits_0^\infty y_w(z,t) h(t)\, dt, \quad h \in L_2(\mathbb{R}_+),$$

причем

$$\|f\|^2_{H^2_-(w^{-2})} \asymp \|h\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

6. *В каждой области $\operatorname{Im} z \leqslant b < 0$ имеет место двусторонняя оценка*

$$\|y_w(z,t)\|^2_{L_2(0,a)} \asymp |w_-(z)|^2 \, |\operatorname{Im} z|^{-1} \exp\{-2a \operatorname{Im} z\}.$$

Рассуждения этой статьи полностью пригодны и в том случае, когда последовательность Λ в (0.2), (0.3) имеет кратные элементы. Важно лишь, чтобы все кратности были ограничены в совокупности. Для рассматриваемых здесь операторов это будет означать либо то, что размерности собственных подпространств больше 1, либо наличие корневых векторов, либо то и другое одновременно. Возникающие здесь трудности несущественны, носят сугубо технический характер и в этой статье не рассматриваются.

§1. Безусловные базисы в пространствах вектор-функций

1. Пусть w_k^2 $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – система весов Макенхаупта на вещественной прямой $\mathbb{R}$, y_{w_k} – функции, отвечающие им в силу формулы (0.1). Введем обозначения:

$$y_k(t) = \mathrm{Col}\left(y_{w_j}(t)\,\delta_{kj}\right)_{j=1}^{n}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где δ_{kj} – дельта Кронекера. В пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$ рассмотрим оператор

$$Kh := \sum_{k=1}^{n}(h, x_k)y_k + i\int_0^t h(s)\,ds, \tag{1.1}$$

где $x_k \in L_2^{(n)}(0,a)$, скобки обозначают скалярное произведение в $L_2^{(n)}(0,a)$, оператор интегрирования действует покоординатно. Простые вычисления, которые мы опускаем, дают:

$$K(I - zK)^{-1}h = \sum_{j=1}^{n} x_j(h,z)y_j(z,t) + J(I - zJ)^{-1}h,$$

$$h \in L_2^{(n)}(0,a), \quad (Jh)(t) := i\int_0^t h(s)\,ds, \tag{1.2}$$

$$y_j(z,t) := (I - zJ)^{-1}y_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

функционалы $x_j(h,z)$ определяются из системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\Phi_{kj}(z)x_j(h,z)=\big((I-zJ)^{-1}h,x_k\big),$$
$$1\leqslant k\leqslant n,\quad \Phi(z):=E-z\varphi(z),\tag{1.3}$$
$$\varphi(z):=\|\varphi_{ij}(z)\|,\quad \varphi_{ij}(z):=\big(y_{w_j}(z,t),x_i^j\big)_{L_2(0,a)},$$

где $y_{w_j}(z,t)$ – w_j-ядро, $x_i=\mathrm{Col}\,(x_i^j)_{j=1}^n$.

Отсюда немедленно вытекает, что $\sigma(K)$ состоит из замыкания последовательности λ_p^{-1}, где множество $\Lambda:=\{\lambda_p\}_{-\infty}^{+\infty}$ совпадает с множеством корней уравнения

$$\Delta(\lambda):=\det\Phi(\lambda)=0.$$

Учитывая нашу основную задачу о базисности семейств вида (0.2), мы предполагаем, что это уравнение имеет бесконечное множество корней. Соответствующие собственные векторы имеют вид

$$Y(\lambda_p,t):=\mathrm{Col}\,\big(c_j^p\,y_{w_j}(\lambda_p,t)\big)_{j=1}^n,\tag{1.4}$$

причем векторы $c_p:=\mathrm{Col}\,(c_j^p)_{j=1}^n$ находятся из системы уравнений

$$\Phi(\lambda_p)c_p=0.\tag{1.5}$$

Таким образом, если выполнены условия

$$\mathrm{rank}\,\Phi(\lambda_p)=n-1,\quad \lambda_p\in\Lambda,$$

то собственные подпространства одномерны и собственные векторы находятся из формул (1.4), (1.5). Кроме того, если все корни детерминанта Δ простые, то присоединенные векторы отсутствуют. В дальнейшем будем рассматривать такие операторы K, для которых эти условия выполнены. Другими словами, в этом случае система собственных векторов оператора K совпадает с одним из семейств вида (0.2).

Выведем ряд необходимых для дальнейшего изложения формул. Рассмотрим отображение

$$(Sh)(\lambda):=X(h,\lambda),\quad X(h,\lambda)=\mathrm{Col}\,\big(x_j(h,\lambda)\big)_{j=1}^n,\tag{1.6}$$

где $x_j(h,\lambda)$ удовлетворяют системе (1.3), и введем обозначение

$$Y_z(\mu,t)=\mathrm{Col}\,\big(z_j\,y_{w_j}(\mu,t)\big)_{j=1}^n,\quad z=\mathrm{Col}\,(z_j)_{j=1}^n.\tag{1.7}$$

Правые части системы (1.3) при $h = Y_z(\mu, t)$ легко вычисляются:

$$\big((I-\lambda J)^{-1}h, x_k\big) = \sum_{j=1}^{n} \big((I-\lambda J)^{-1}(I-\mu J)^{-1}y_{w_j}, x_k^j\big)_{L_2(0,a)} z_j =$$

$$(\mu-\lambda)^{-1}\sum_{j=1}^{k}\big(\Phi_{kj}(\lambda)-\Phi_{kj}(\mu)\big)z_j, \quad \Phi(\lambda) = \|\Phi_{kj}(\lambda)\|.$$

Поэтому

$$S\big(Y_z(\mu,t)\big)(\lambda) = (\mu-\lambda)^{-1}\Phi^{-1}(\lambda)\big(\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)\big)z, \quad \lambda^{-1} \notin \sigma(K). \quad (1.8)$$

Далее, так как все координаты столбца $X(h,\lambda)$ суть непрерывные в $L_2^{(n)}(0,a)$ функционалы, то имеют место представления Рисса:

$$x_k(h,\lambda) = \big(h, \Psi^k(\overline{\lambda})\big)\Delta^{-1}(\lambda), \qquad \Psi^k(\overline{\lambda}) \in L_2^{(n)}(0,a). \quad (1.9)$$

Интегрируя резольвенту $K^*(I-zK^*)^{-1}$ по замкнутому контуру, охватывающему точку $(\overline{\lambda}_p)^{-1}$, заключаем, что собственное подпространство оператора K^*, отвечающее этой точке, натягивается на векторы $\Psi^k(\overline{\lambda}_p)\,(1 \leqslant k \leqslant n)$. В силу сделанных предположений оно одномерно, то есть все эти векторы пропорциональны одному из них. Из (1.7)–(1.9) вытекает, что

$$\begin{aligned}\big(Y_z(\mu,t), \Psi^k(\overline{\nu})\big) &= \Delta(\nu)x_k\big(Y_z(\mu,t),\nu\big) = \\ &= \Delta(\nu)(\nu-\mu)^{-1}\big\{\Phi^{-1}(\nu)\big(\Phi(\mu)-\Phi(\nu)\big)z\big\}_k,\end{aligned} \quad (1.10)$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, а $\{\,\boldsymbol{.}\,\}_k$ обозначает k-ую координату соответствующего столбца. Поэтому, если $y = \mathrm{Col}\,(y_i)_{i=1}^n$, то

$$\left(Y_z(\mu,t), \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi^k(\overline{\lambda}_p)\right) = (\lambda_p-\mu)^{-1}\big(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\,\Phi(\mu)z, y\big)_{\mathbb{C}^n}, \quad (1.11)$$

где $\widetilde{\Phi}(\lambda_p)$ – матрица, присоединенная к $\Phi(\lambda_p)$.

2. Будем считать, что $\sigma(K)$ удовлетворяет условию

$$\inf_p\ \mathrm{Im}\,\lambda_p > -\infty, \quad \sigma(K) = \left\{\overline{\lambda_p^{-1}} : p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

В дальнейшем $\mathbb{R}+bi$ – какая-нибудь прямая, лежащая ниже последовательности Λ (и на положительном расстоянии от нее).

Для удобства будем предполагать, что всегда $b<0$. Введем в рассмотрение матричный вес

$$W(x):=\big(\Phi_w(x+bi)\Phi_w^*(x+bi)\big)^{-1},\ \Phi_w(\lambda):=\Phi(\lambda)w^{-1}(\lambda),$$
$$w(\lambda):=\operatorname{diag}\big\{w_j^-(\lambda)\big\},\quad \operatorname{Im}\lambda<0,$$

где w_j^- – внешняя функция, отвечающая весу w_j^2, то есть

$$w_j^2(x)\overset{\text{п.в.}}{=}|w_j^-(x-i0)|^2,\quad x\in\mathbb{R},\ \ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Лемма 1.1. *Следующие условия равносильны:*

1) *имеет место оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\sum_{j=1}^n|w_j^-(z)|^2\,|x_j(h,z)|^2dz\leqslant M\|h\|^2,\quad h\in L_2^{(n)}(0,a);\qquad(1.12)$$

2) *вес W удовлетворяет матричному условию Макенхаупта*

$$\sup_J\left\{\left\|\frac{1}{|J|}\bigg(\int\limits_J W^{-1}(x)dx\bigg)^{1/2}\frac{1}{|J|}\bigg(\int\limits_J W(x)dx\bigg)^{1/2}\right\|\right\}<\infty,\qquad(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$$

где J – произвольный интервал вещественной оси.

Доказательство. Пусть имеет место оценка (1.12). Положим в ней

$$h(t)=\operatorname{Col}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}y_{w_j}(x+bi)f_j(x)\,dx\bigg)_{j=1}^n,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^n|w_k^-(x+bi)|^2\,|f_k(x)|^2dx<\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant a,\qquad(1.13)$$

где w_k^- – внешняя в области $\operatorname{Im}z<0$ функция, отвечающая весу w^2. Сразу же заметим, что (§0, п. 2)

$$\|h\|^2_{L_2^{(n)}(0,a)}\leqslant L\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^n|w_k^-(x+bi)|^2|f_k(x)|^2\,dx.\qquad(1.14)$$

Для таких h вычислим столбец $X(h,\lambda)$. Из формул (1.6)–(1.8) при $z=\operatorname{Col}\left(f_j(x)\right)_{j=1}^n$ выводим:

$$X(h,\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}}S\big(Y_z(x+bi,t)\big)(\lambda)dx=$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi^{-1}(\lambda)(\Phi(\lambda) - \Phi(x+bi))}{x+bi-\lambda} f(x)\,dx.$$

Соединяя это с (1.12) и (1.14), найдем

$$\int_{\mathbb{R}+bi} \|w(\lambda)X(h,\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^n}\,d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\| w(y+bi)\Phi^{-1}(y+bi) \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(y+bi)-\Phi(x+bi)}{x-y} f(x)dx \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dy \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_{\mathbb{R}} \|w(y+bi)f(y)\|^2_{\mathbb{C}^n}\,dy. \tag{1.15}$$

Если вспомнить определение матрицы Φ_w, то последнюю оценку можно переписать в виде

$$\left\| w(y+bi)\mathcal{H}w^{-1}(y+bi)g - \Phi_w^{-1}(y+bi)\mathcal{H}\Phi_w(y+bi)g \right\|^2_{L_2^{(n)}(\mathbb{R})} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \|g\|^2_{L_2^{(n)}(\mathbb{R})}, \tag{1.16}$$

где $\mathcal{H}$ – преобразование Гильберта в пространстве вектор-функций $L_2^{(n)}(\mathbb{R})$. Поскольку матрица w диагональна и веса $|w_j^-(y+bi)|^2$ удовлетворяют условию Макенхаупта при любом $b<0$, первое слагаемое в (1.16) ограничено в $L_2^{(n)}(\mathbb{R})$. Поэтому ограничено второе слагаемое и, стало быть, в силу теоремы С. Трейля, матричный вес W удовлетворяет условию $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$ [2].

Пусть теперь вес $W(x)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$. Рассуждая в обратном порядке, приходим к выводу, что (1.16) влечет за собой оценку

$$\int_{\mathbb{R}+bi} \|w(z)X(h,z)\|^2_{\mathbb{C}^n}\,dz \leqslant K \int_{\mathbb{R}+bi} \sum_{k=1}^{n} |w_k^-(x+bi)|^2\,|f_k(x)|^2 dx, \tag{1.17}$$

в которой вектор-функции h и f связаны равенством (1.13). Возьмем здесь в качестве f вектор-функцию вида

$$f(x) = \left(w^-(x+bi)\right)^{-1} \int_0^a e^{-i(x+bi)s} g(s)\,ds, \quad g \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Как отмечалось во введении (§0, п. 3), при таком выборе f имеем $h = 2\pi i g$, причем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} \sum_{k=1}^{n} |w_k^-(x+bi)|^2 \, |f_k(x)|^2 dx \leqslant L \|g\|^2_{L_2^{(n)}(0,a)}.$$

Так как в этих рассуждениях g – произвольная функция из $L_2^{(n)}(0,a)$, то из (1.17) вытекает условие (1.12). □

Напомним, что

$$\Delta(z) = \det \Phi(z).$$

Лемма 1.2. *Если имеет место оценка* (1.12) *и*

$$h\left(\Delta, -\frac{\pi}{2}\right) = na, \quad h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{1.18}$$

то системы собственных функций операторов K и K^* полны в пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$.

Доказательство. Докажем сначала полноту семейства собственных векторов оператора K^*. Обозначим через $\mathcal{F}$ ортогональное дополнение ко всем векторам $\Psi^k(\overline{\lambda_p})$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ \lambda_p \in \Lambda)$ и докажем, что $\mathcal{F} = \{0\}$. Из (1.9) вытекает, что при $f \in \mathcal{F}$ все функции $x_k(f, \lambda)$ целые и, в силу (1.12),

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_k^-(z)|^2 \, |x_k(f,z)|^2 dz < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Элементы матрицы-функции Φ суть функции вполне регулярного роста. Поэтому из (1.3), (1.8) следует, что

$$h\left(x_k(f,z), -\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0, \quad h\left(x_k(f,z), \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Следовательно (§0, п. 1) $X(f,z) \equiv 0$, и, стало быть, в силу (1.9)

$$(f, \Psi^k(\overline{z})) \equiv 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{1.19}$$

Вспоминая формулу (1.1), вычислим:

$$\operatorname{Sp} \operatorname{Im} K = \operatorname{Im} \operatorname{Sp} \sum_{k=1}^{n} (\,\cdot\,, x_k) y_k + \operatorname{Sp} \operatorname{Im} J = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} (y_k, x_k) + \frac{1}{2} na.$$

Из определения (1.3) матрицы Φ и функций y_k вытекает равенство

$$-\mathrm{Sp}\Phi'(0) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_{w_k}, x_k^k\right)_{L_2(0,a)} = \sum_{k=1}^{n} (y_k, x_k).$$

Поскольку [5]

$$\frac{d}{dz} \log \det \Phi(z)\Big|_{z=0} = \mathrm{Sp}\Phi'(0),$$

приходим к формуле

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}\, K = -\,\mathrm{Im}\, \frac{d}{dz} \log \Delta(z)\Big|_{z=0} + \frac{1}{2} na.$$

Целая функция Δ, будучи функцией класса Картрайт, допускает каноническое мультипликативное представление. В силу условия (1.18) оно имеет вид:

$$\Delta(z) = e^{i\frac{na}{2}z}\,\mathrm{v.p.} \prod_{\lambda_p \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_p}\right).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dz} \log \Delta(z) = \frac{i}{2} na + \mathrm{v.p.} \sum_{\lambda_p} \frac{1}{z - \lambda_p},$$

$$\mathrm{Im}\, \frac{d}{dz} \log \Delta(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} na - \sum_{\lambda_p \in \Lambda} \mathrm{Im}\, \frac{1}{\lambda_p}.$$

Окончательно имеем:

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}\, K = \sum_{\lambda_p \in \Lambda} \mathrm{Im}\, \frac{1}{\lambda_p}. \tag{1.20}$$

С другой стороны, подпространство $\mathcal{F}$ инвариантно относительно K, причем, в силу (1.19), $K\big|\mathcal{F} = J\big|\mathcal{F}$. Пусть G – ортогональное дополнение к $\mathcal{F}$. Тогда $K^*G \subseteq G$, и семейство собственных векторов оператора $K^*\big|G$ полно в G. Поэтому [5]

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}\,\left(K^*\big|G\right) = \sum_{\lambda_p \in \Lambda} \frac{1}{\overline{\lambda}_p} = -\sum_{\lambda_p \in \Lambda} \mathrm{Im}\, \frac{1}{\lambda_p}.$$

Таким образом

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}\, K = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}(J|\mathcal{F}) - \mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}(K^*|G) = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}(J|\mathcal{F}) + \sum_{\lambda_p} \mathrm{Im}\, \frac{1}{\lambda_p},$$

что вместе с (1.20) влечет равенство $\operatorname{Sp}\operatorname{Im}(J|\mathcal{F}) = 0$. Поскольку J – диссипативный оператор, отсюда вытекает, что $\mathcal{F} = \{0\}$.

Перейдем теперь к доказательству полноты системы собственных векторов оператора K. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\sum_{k=1}^{n} x_k\big(Y_z(\mu,t),\lambda\big)y_k(\lambda,t)d\lambda, \qquad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \operatorname{Im}\mu < b, \tag{1.21}$$

где функции $y_k(\lambda,t)$, $x_k(h,\lambda)$, $Y_z(\mu,t)$ были определены в п. 1. Оценка (1.12) обеспечивает сходимость этого интеграла, причем $h \in L_2^{(n)}(0,a)$ (§0, п. 2). Пользуясь уже доказанной полнотой оператора K^*, вычислим этот интеграл. Принимая во внимание равенство

$$Y_z(\mu,t) = \sum_{k=1}^{n} z_k\, y_k(\mu,t), \qquad z = \operatorname{Col}(z_k)_{k=1}^n,$$

а также формулы (1.6), (1.8), (1.11), для произвольного вектора $y = \operatorname{Col}(y_k)_{k=1}^n$ найдем

$$\Big(h, \sum_{j=1}^{n} y_j\Psi^j(\overline{\lambda}_p)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big(Y_z(\mu,t),\lambda\big)y_k(\lambda,t), \sum_{j=1}^{n} y_j\Psi^j(\overline{\lambda}_p)\Big)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}(\lambda_p-\lambda)^{-1}\big(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\lambda)X\big(Y_z(\mu,t),\lambda\big),y\big)_{\mathbb{C}^n}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\big(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)\big(\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)\big)z,y\big)_{\mathbb{C}^n}(\lambda_p-\lambda)^{-1}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\frac{(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\mu)z,y)}{(\lambda_p-\lambda)(\lambda-\mu)}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\frac{(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\lambda)z,y)}{(\lambda_p-\lambda)(\lambda-\mu)}d\lambda =$$

$$= -\frac{(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\mu)z,y)}{(\lambda_p-\mu)} + \frac{\Delta(\lambda_p)(z,y)}{\lambda_p-\mu} = -\frac{(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\mu)z,y)}{(\lambda_p-\mu)}, \quad \operatorname{Im}\mu < b.$$

Заметим, что при вычислении второго интеграла мы воспользовались тем, что элементы матрицы $\Phi(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}$ принадлежат классам Харди с весами Макенхаупта в области $\operatorname{Im}\lambda > b$ (§0, п. 1, 4). Снова вспоминая (1.11), приходим к равенствам

$$\Big(h, \sum_{k=1}^{n} y_k\, \Psi^k(\overline{\lambda}_p)\Big) = \Big(-Y_z(\mu,t), \sum_{k=1}^{n} y_k\, \Psi^k(\overline{\lambda}_p)\Big),\ \ \lambda_p \in \Lambda,\ \ y \in \mathbb{C}^n,$$

то есть в формуле (1.21) $h(t) = -Y_z(\mu,t)\,(\operatorname{Im}\mu < b)$.

Предположим теперь, что вектор $f \neq 0$ ортогонален всем собственным векторам оператора K. Рассматривая проекторы Рисса, с учетом формулы (1.2) получим

$$0 = \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} K(I-zK)^{-1}h\,dz, f\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{k=1}^{h} x_k(h,z)(y_k(z,t),f)dz$$

для любого $h \in L_2(0,a)$ и любого замкнутого контура γ, который не проходит через точки последовательности Λ. В силу простоты $\sigma(K)$ функции $x_k(h,z)$ могут иметь полюсы лишь только первого порядка. Равенство нулю интегралов означает, что это устранимые особенности. Таким образом, принимая во внимание (1.9), заключаем, что при каждом $h \in L_2^{(n)}(0,a)$ функции

$$F_h(z) := \frac{\sum_{k=1}^{n}(h,\Psi^k(\overline{z}))(y_{w_k}(z,t),f_k)}{\Delta(z)}, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a),$$

являются целыми. Разделим теперь числитель и знаменатель этой дроби на подходящий полином степени $2n$ так, чтобы они стали ограниченными функциями в области $\operatorname{Im} z > b$. Существование такого полинома вытекает из формул (1.3), (1.9). В силу второго условия (1.18) внутренний множитель во внешне-внутренней факторизации знаменателя сводится к произведению Бляшке. И, наконец, в силу (1.12) и (§0, п. 1) имеем:

$$\int_{\mathbb{R}+bi} |F_h(z)|\,dz \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k(h,z)|\, \big|(y_{w_k}(z,t),f_k)\big| dz \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{\mathbb{R}+bi} |x_k(h,z)|^2\,|w_k^-(z)|^2\,dz\Big)^{1/2} \times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}+bi}|w_k^-(z)|^{-2}|(y_{w_k}(z,t),f_k)|^2dz\Bigg)^{1/2}\leqslant C\|h\|\sum_{k=1}^n\|f_k\|_{L_2(0,a)}.$$

Поэтому функции F_h принадлежат пространству H^1 в области $\operatorname{Im}z>b$ [6] и, стало быть,

$$0=\int\limits_{\mathbb{R}+bi}F_h(z)\,dz=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\sum_{k=1}^n x_k(h,z)\,y_k(z,t)dz,f\Bigg),\ \ h\in L_2^{(n)}(0,a).$$

При $h=Y_z(\mu,t)$ этот интеграл мы вычислили. Таким образом, для каждого $z\in\mathbb{C}^n$

$$\big(Y_z(\mu,t),f\big)\equiv 0,$$

то есть $f=0$. $\square$

Лемма 1.3. *Если семейства собственных векторов операторов K и K^* полны в пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$ и имеет место оценка* (1.12), *то*

$$h\Big(\Delta,-\frac{\pi}{2}\Big)=na,\quad h\Big(\Delta,\frac{\pi}{2}\Big)=0.$$

Доказательство. Из определения Δ следует, что

$$h\Big(\Delta,-\frac{\pi}{2}\Big)\leqslant na,\quad h\Big(\Delta,\frac{\pi}{2}\Big)\leqslant 0.$$

Так как система собственных векторов оператора K полна в $L_2^{(n)}(0,a)$, то [5]

$$\operatorname{Sp}\operatorname{Im}K=\sum_{\lambda_p\in\Lambda}\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_p}.$$

Функция Δ допускает представление

$$\Delta(\lambda)=e^{i\delta\lambda}\text{v.p.}\prod_{\lambda_p\in\Lambda}\Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\Big),\quad \delta\in\mathbb{R}.$$

Приведенные при доказательстве леммы 1.2 вычисления показывают, что

$$\operatorname{Sp}\operatorname{Im}K=-\operatorname{Im}\frac{d}{d\lambda}\log\Delta(\lambda)\big|_{\lambda=0}+\frac{1}{2}na=-\delta+\frac{1}{2}na+\sum_{\lambda_p\in\Lambda}\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_p},$$

то есть $\delta = na/2$. Поскольку индикаторная диаграмма бесконечного произведения симметрична относительно вещественной оси, достаточно доказать лишь одно из двух равенств для индикатора. Докажем второе. Допустим противное, то есть

$$h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = -\alpha < 0.$$

Пусть $Y(\lambda_p, t)$ – собственный вектор оператора K, отвечающий собственному числу λ_p^{-1}. Из (1.4), (1.5) выводим:

$$Y(\lambda_p, t) = Y_{c_p}(\lambda_p, t), \quad c_p = \mathrm{Col}\,(c_j^p)_{j=1}^n, \quad \Phi(\lambda_p)c_p = 0.$$

Поэтому из (1.9) следуют равенства

$$\big(Y(\lambda_p, t), \Psi^k(\overline{\lambda})\big) = \frac{\Delta(\lambda)c_k^p}{\lambda_p - \lambda}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_p \in \Lambda.$$

Таким образом, для плотного в $L_2^{(n)}(0, a)$ множества векторов f имеем

$$h\left(F_f; \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\alpha, \quad F_f(\lambda) := \big(f, \Psi^k(\overline{\lambda})\big).$$

Снова разделим числитель и знаменатель дроби

$$x_k(f, \lambda) = \frac{(f, \Psi^k(\overline{\lambda}))}{\Delta(\lambda)} = \frac{(f, \Psi_{2n}^k(\overline{\lambda}))}{\Delta_{2n}(\lambda)}$$

на соответствующий полином степени $2n$ с корнями в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda < b$. Здесь Ψ_{2n}^k, Δ_{2n} обозначают результаты деления функций Ψ^k, Δ на этот полином. Таким образом, $x_k(h, \lambda)\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ являются функциями ограниченного вида в области $\mathrm{Im}\,\lambda < b$. Далее, поскольку $(w_j^-(z))^{-1}(z+i)^{-1} \in H_-^2$, из оценки (1.12) выводим

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Delta^{-1}(\lambda)(f, \Psi^k(\overline{\lambda}))|^2 d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}+bi} \frac{|w_k^-(\lambda)|^2\,|(f, \Psi^k(\overline{\lambda}))|^2}{|\Delta(\lambda)|^2} \cdot \frac{|w_k^-(\lambda)|^{-2}}{|\lambda - \lambda_0|^2}\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_k^-(\lambda)|^2\, |x_k(f, \lambda)|^2\, d\lambda \leqslant K\|f\|^2, \quad f \in L_2^{(n)}(0, a), \quad \mathrm{Im}\,\lambda_0 < b.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{(f, \Psi_{2n}^k(\overline{\lambda}))}{(\lambda-\lambda_0)\Delta_{2n}^{\mathrm{out}}(\lambda)} \in H^2 \ (\operatorname{Im}\lambda > b), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

при любом $f \in L_2^{(n)}(0,a)$, где $\Delta_{2n}^{\mathrm{out}}$ – внешняя часть функции Δ_{2n}. Поэтому неравенство

$$h\left(F_f; \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\alpha$$

справедливо уже для всех $f \in L_2^{(n)}(0,a)$, поскольку ранее была установлена его справедливость для плотного множества векторов f. Полагая $f = Y_z(\mu, t)$, из (1.10) найдем

$$F_f(\lambda) = \left\{\frac{\widetilde{\Phi}(\lambda)\Phi(\mu)z - \Delta(\lambda)z}{\lambda-\mu}\right\}_k, \quad \operatorname{Im}\mu < b, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Выбирая должным образом векторы z, заключаем, что

$$h\left(\widetilde{\Phi}_{kj}, \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\alpha, \quad 1 \leqslant k,\ j \leqslant n,$$

где $\widetilde{\Phi}_{kj}$ – элементы присоединенной матрицы $\widetilde{\Phi}$. Обозначим через $u_{kj}(\lambda)$ элементы матрицы-функции, присоединенной к $\widetilde{\Phi}(\lambda)$. В силу последнего неравенства

$$h\left(u_{kj}, \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\alpha(n-1), \quad 1 \leqslant k,\ j \leqslant n.$$

Поскольку

$$\Phi_{kj}(\lambda) = u_{kj}(\lambda)\Delta^{-(n-2)}(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \|\Phi_{kj}(\lambda)\|,$$

имеем

$$h\left(\Phi_{kj}(\lambda), \frac{\pi}{2}\right) = h\left(u_{kj}(\lambda), \frac{\pi}{2}\right) - (n-2)h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\alpha.$$

Но теперь из формулы (1.10) следует (§0, п. 1), что носители вектор-функций $\Psi^k(\overline{\lambda}_p)$ лежат на сегменте $[\alpha, a]$, что противоречит полноте системы собственных функций оператора K^*. $\square$

3. Вернемся теперь к задаче о безусловной базисности семейств вектор-функций вида (0.2), порождаемых системой весов Макенхаупта $w_k^2 (1 \leqslant k \leqslant n)$ на вещественной оси. Введем в рассмотрение класс целых матриц-функций Φ экспоненциального типа, размером $n \times n$, удовлетворяющих условиям

1) $h\left(\Phi_{kj}, \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0$, $h\left(\Phi_{kj}, -\frac{\pi}{2}\right) \leqslant a$, $\Phi(\lambda) := \|\Phi_{kj}(\lambda)\|$, $1 \leqslant k,\ j \leqslant n$;

2) $\Phi(z) = E - z\varphi(z)$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} w_k^{-2}(x)|\varphi_{ik}(x)|^2 dx < \infty, \quad \varphi(\lambda) = \|\varphi_{kj}(\lambda)\|, \quad 1 \leqslant k,\ j \leqslant n;$$

3) $\operatorname{rank} \Phi(\lambda_p) = n - 1$, где $\Lambda := \{\lambda_p : p \in \mathbb{Z}\}$ – множество корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) := \det \Phi(\lambda),$$

которые простые.

По каждой такой матрице-функции Φ в пространстве $L_2^{(n)}(0, a)$ построим систему вектор-функций вида (0.2)

$$Y(\lambda_p, t) := \operatorname{Col}\left(c_j^p\, y_{w_j}(\lambda_p, t)\right)_{j=1}^n, \tag{1.22}$$

где столбец $c_p = \operatorname{Col}(c_j^p)_{j=1}^n$ является решением системы

$$\Phi(\lambda_p) c_p = 0.$$

Условимся говорить, что матрица-функция Φ является порождающей для семейства вектор-функций (1.22).

Пусть теперь произвольная система функций (0.2) образует безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0, a)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin \Lambda$. Тогда оператор K, задаваемый на элементах базиса равенствами

$$KY(\lambda_p, t) = \lambda_p^{-1} Y(\lambda_p, t), \quad \lambda_p \in \Lambda,$$

продолжается до ограниченного в $L_2^{(n)}(0, a)$ оператора. Если записать оператор K в виде

$$K = J + \Gamma, \quad (Jh)(t) = i\int\limits_0^t h(s)\, ds,$$

и воспользоваться обозначениями п. 1, то последние равенства дают:

$$\Gamma Y(\lambda_p, t) = \lambda_p^{-1} Y(\lambda_p, t) - JY(\lambda_p, t) = \lambda_p^{-1} \mathrm{Col}\,\left(c_j^p\, y_{w_j}(t)\right)_{j=1}^n =$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_p^{-1}\, c_j^p\, y_j, \quad \lambda_p \in \Lambda.$$

Таким образом, оператор Γ является конечномерным, и поэтому существуют функции x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ из $L_2^{(n)}(0, a)$ такие, что

$$\Gamma h = \sum_{k=1}^n (h, x_k) y_k, \quad h \in L_2^{(n)}(0, a).$$

Эти функции однозначно определяются проблемами моментов:

$$\left(Y(\lambda_p, t), x_k\right) = \lambda_p^{-1}\, c_k^p, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Итак, оператор K имеет вид (1.1), его спектр и собственные функции описываются с помощью матрицы-функции Φ, определяемой формулами (1.3). Из этих формул вытекает (§0, п. 1), что Φ удовлетворяет условиям 1)–3) из определения порождающей матрицы-функции. Другими словами, *нами доказано, что каждый безусловный базис* (0.2) *пространства* $L_2^{(n)}(0, a)$ *обладает единственной порождающей матрицей-функцией.*

В следующей формулировке предполагается, что $0 \notin \Lambda$, и использованы следующие обозначения:

$$\Phi_w(\lambda) := \Phi(\lambda)\, w^{-1}(\lambda), \quad w(\lambda) := \mathrm{diag}\left\{w_j^-(\lambda)\right\}_{j=1}^n, \quad \mathrm{Im}\,\lambda < 0.$$

Теорема 1.1. *Пусть Φ – порождающая матрица-функция семейства* (0.2) *и выполнено условие* (0.4). *Для безусловной базисности этого семейства в $L_2^{(n)}(0, a)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования:*

1) $h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $h\left(\Delta, -\frac{\pi}{2}\right) = na$, *где* $\Delta(\lambda) = \det \Phi(\lambda)$;

2) *матричный вес* $W(x) := \left(\Phi_w(x + bi)\Phi_w^*(x + bi)\right)^{-1}$ *удовлетворяет условию* (A_2^{m}) *при каком-нибудь* $b < \min\left\{\inf\limits_{\lambda_p \in \Lambda} \mathrm{Im}\,\lambda_p, 0\right\}$;

3) *семейство рациональных дробей*

$$\widetilde{c}_p(\lambda-\mu_p)^{-1},\quad \mu_p=\lambda_p-bi,\quad \widetilde{c}_p=\mathrm{Col}\left(c_k^p\,\overline{w_k^-(\overline{\lambda}_p+2bi)}\right)_{k=1}^n$$

образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в векторнозначном классе Харди $H_-^2(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. *Необходимость.* Из условий 1)–2), входящих в определение порождающей матрицы-функции Φ, вытекает (§0, п. 1), что она может быть записана в виде

$$\Phi(\lambda)=E-\lambda\varphi(\lambda),\quad \varphi_{ij}(\lambda)=\left(y_{w_j}(\lambda,t),x_i^j\right)_{L_2(0,a)},\quad x_i^j\in L_2(0,a).$$

Составим теперь вектор-функцию $x_i=\mathrm{Col}\,(x_i^j)_{j=1}^n\,(1\leqslant i\leqslant n)$ и рассмотрим, как и в п. 1, оператор K вида (1.1):

$$Kh=\sum_{k=1}^n(h,x_k)y_k+Jh,\quad y_k=\mathrm{Col}\,\left(y_{w_j}(t)\delta_{kj}\right)_{j=1}^n.$$

Формулы (1.2)–(1.4) показывают, что семейство собственных векторов оператора K совпадает с семейством (0.2), причем

$$KY(\lambda_p,t)=\lambda_p^{-1}\,Y(\lambda_p,t),\quad \lambda_p\in\Lambda.$$

Для любого вектора $h\in L_2^{(n)}(0,a)$ имеют место разложения

$$h=\sum_{\lambda_p\in\Lambda}z_p\,Y(\lambda_p,t),\quad K(I-\lambda K)^{-1}h=\sum_{\lambda_p\in\Lambda}(\lambda_p-\lambda)^{-1}Y(\lambda_p,t).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\|K(I-\lambda K)^{-1}h\|d\lambda\leqslant M\sum_{\lambda_p}|z_p|^2\int\limits_{\mathbb{R}+bi}|\lambda-\lambda_p|^{-2}d\lambda\|Y(\lambda_p,t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant M_1\sum_{\lambda_p}|z_p|^2\,\|Y(\lambda_p,t)\|^2\leqslant M_2\|h\|^2,\quad h\in L_2^{(n)}(0,a),$$

где b – любое число из формулировки теоремы. Легко проверяется, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\|J(I-\lambda J)^{-1}h\|^2\,d\lambda\leqslant L\|h\|^2,\quad h\in L_2^{(n)}(0,a).$$

Так как (§0, п. 6)

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j(h,\lambda) y_j(\lambda,t) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j(h,\lambda)|^2 \, \|y_j(\lambda,t)\|^2 \asymp \sum_{j=1}^{n} |x_j(h,\lambda)|^2 \, |w_j^-(\lambda)|^2$$

на прямой $\mathbb{R}+bi$, то из (1.2) вытекает наличие оценки (1.12). Из лемм 1.1, 1.3 следует, что выполнены требования 1)–2).

Если w^2 – произвольный вес Макенхаупта на $\mathbb{R}$, то $\widetilde{w^2}(x) := |w^-(x+bi)|^2$ также является весом Макенхаупта, причем [1]

$$y_w(\lambda,t) = e^{-bt}\, y_{\widetilde{w}}(\lambda - bi, t).$$

Поэтому безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0,a)$ образует также система векторов

$$\widetilde{Y}(\mu_p,t) := \mathrm{Col}\ \left(c_j^p\, y_{\widetilde{w}_j}(\mu_p,t)\right)_{j=1}^{n}, \quad \mu_p = \lambda_p - bi.$$

Кроме того, для произвольного веса Макенхаупта w^2 имеет место формула (см. [1])

$$\int_0^{\infty} y_{\widetilde{w}}(\mu,t) e^{-itz}\, dt = \frac{w^-(z+bi)}{z-\mu}, \quad \mathrm{Im}\,\mu > 0, \quad \mathrm{Im} < z \leqslant 0.$$

Таким образом, для любой линейной комбинации

$$h = \sum_p z_p Y(\lambda_p,t)$$

справедливо неравенство:

$$\left\| \sum_p z_p Y(\lambda_p,t) \right\|^2 \leqslant m \left\| \sum_p z_p \widetilde{Y}(\mu_p,t) \right\|^2 =$$

$$= m \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a} \left| \sum_p z_p\, c_k^p\, y_{\widetilde{w}_k}(\mu_p,t) \right|^2 dt < m \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \left| \sum_p z_p\, c_k^p\, y_{\widetilde{w}_k}(\mu_p,t) \right|^2 dt =$$

$$= 2\pi m \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_p z_p\, c_k^p (x-\mu_p)^{-1} \right|^2 |w_k^-(x+bi)|^2\, dx.$$

Покажем теперь, что имеет место обратное неравенство. Снова рассмотрим отображение S, определяемое формулой (1.6). Из (1.8) и (1.5) вытекает, что

$$S\Big(\sum_p z_p\, Y(\lambda_p,t)\Big)=$$

$$\sum z_p(\lambda_p-\lambda)^{-1}\big(c_p-\Phi^{-1}(\lambda)\Phi(\lambda_p)c_p\big)=\sum z_p\, c_p(\lambda_p-\lambda)^{-1}.$$

Оценка (1.12) означает, что для любой линейной комбинации собственных векторов

$$\sum_{k=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\Big|\sum_p z_p\, c_k^p(\lambda_p-\lambda)^{-1}\Big|^2|w_k^-(\lambda)|^2d\lambda=$$

$$=\sum_{k=1}^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_p z_p\, c_k^p(x-\mu_p)^{-1}\Big|^2|w_k^-(x+bi)|^2dx\leqslant M\Big\|\sum_p z_p\, Y(\lambda_p,t)\Big\|^2.$$

Следовательно, приходим к двусторонним оценкам

$$\Big\|\sum_p z_p\, Y(\lambda_p,t)\Big\|^2\asymp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^n\Big|\sum_p z_p\, c_k^p(x-\mu_p)^{-1}\Big|^2|w_k^-(x+bi)|^2dx.$$

В работе [1] доказано, что для любого A_2-веса w^2 на $\mathbb{R}$ и любой конечной совокупности ν_p ($\operatorname{Im}\nu_p<0$) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_p a_p(x-\nu_p)^{-1}\Big|^2w^2(x)dx\asymp$$

$$\asymp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_p a_p\, w^-(\nu_p)(x-\nu_p)^{-1}\Big|^2dx,\quad a_p\in\mathbb{C}.$$

Поэтому

$$\Big\|\sum_p z_p\, Y(\lambda_p,t)\Big\|^2\asymp\Big\|\sum_p z_p\,\widetilde{c}_p(x-\mu_p)^{-1}\Big\|^2_{H^2_-(\mathbb{C}^n)},\quad \operatorname{Im}\mu_p>0,\quad (1.23)$$

где введено обозначение

$$\widetilde{c}_p := \mathrm{Col}\,\left(c_k^p\,\overline{w_k^-(\overline{\lambda}_p + 2bi)}\right)_{k=1}^n .$$

Таким образом, требование 3) выполнено.

Достаточность. Снова по матрице-функции Φ построим оператор K. Из лемм 1.1, 1.3 вытекает, что система (0.2) полна в пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$ и имеет место оценка (1.12). Повторяя соответствующие рассуждения из доказательства необходимости, приходим к (1.23), то есть семейство (0.2) образует безусловный базис $L_2^{(n)}(0,a)$. $\square$

4. Требование 3) теоремы 1.1 наверняка выполнено, если последовательность $\{\mu_p\}_{-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет условию Карлесона:

$$\inf_n \prod_{p\neq k} \left|\frac{\mu_k - \mu_p}{\mu_k - \overline{\mu}_p}\right| > 0. \tag{C}$$

Для формулировки более точных признаков базисности векторных дробей воспользуемся результатами Никольского–Павлова о сериях Карлесона [7]. Нормируем векторные коэффициенты $\widetilde{c}_p$ (норма евклидова):

$$e_p := \left(\|\widetilde{c}_p\|^{-1}\right)^{-1}\widetilde{c}_p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Подмножество $M_1 = \{\mu_k^1\}_{-\infty}^{+\infty}$ множества $M = \{\mu_p\}_{-\infty}^{+\infty}$ называется серией Карлесона, если:

1) M_1 удовлетворяет условию Карлесона (C);

2) существует предельный вектор

$$\lim_{|\mu_k^1|\to\infty} e_p^1 = e_1,$$

где e_p^1 – нормированный векторный коэффициент дроби $c_p^1(\lambda - \mu_p^1)^{-1}$.

Две серии Карлесона называются асимптотически ортогональными, если их предельные векторы ортогональны.

В [7] доказано, что условие 3) теоремы 1.1 выполнено, если множество M распадается в конечное объединение асимптотически ортогональных серий Карлесона.

Прямое применение теоремы 1.1 затруднено из-за необходимости проверки условия $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$. Простое необходимое для выполнения $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$ условие заключается в том, что все веса

$$W_f^{\pm}(x) := \left(W^{\pm 1}(x)f, f\right), \quad f \in \mathbb{C}^n$$

удовлетворяет скалярному условию Макенхаупта.

Остановимся на одном признаке выполнения условия $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$ для веса W из формулировки теоремы 1.1. Обозначим через $u_{kj}(\lambda)$, $v_{kj}(\lambda)$ элементы матриц Φ_w и Φ_w^{-1} соответственно:

$$\sum_{j=1}^{n} v_{kj}(\lambda) u_{js}(\lambda) \equiv \delta_{ks}, \quad 1 \leqslant k, \ s \leqslant n.$$

Основное загрубление в следующей теореме происходит из-за требования

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}+bi} \sum_{j=1}^{n} \left| v_{kj}(\lambda) u_{js}(\lambda) \right| < \infty, \quad 1 \leqslant k, \ s \leqslant n. \tag{1.24}$$

Теорема 1.2. *Если имеет место* (1.24) *и все веса* $|u_{kj}(\lambda)|^2$ $(1 \leqslant k, j \leqslant n)$ *удовлетворяют скалярному условию Макенхаупта на прямой* $\mathbb{R} + bi$, *то вес* W *удовлетворяет условию* (A_2^{m}).

Доказательство. Перепишем выражение в правой части (1.3) в виде

$$\left((I - \lambda J)^{-1} h, x_k\right) = \sum_{p=1}^{n} \left((I - \lambda J)^{-1} h_p, \, x_k^p\right)_{L_2(0,a)},$$

$$h = \operatorname{Col}(h_p)_{p=1}^n, \quad x_k = \operatorname{Col}(x_k^p)_{p=1}^n,$$

где оператор интегрирования в $L_2(0, a)$ снова обозначается через J. Теперь из (1.3), (1.24) вытекает:

$$\int_{\mathbb{R}+bi} |w_k^-(\lambda)|^2 \, |x_k(h, \lambda)|^2 d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}+bi} \left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{kj}(\lambda) u_{jp}(\lambda) w_p^-(\lambda) \frac{((I - \lambda J)^{-1} h_p, x_j^p)}{\Phi_{jp}(\lambda)} \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{j,p} \int_{\mathbb{R}+bi} |w_p^-(\lambda)|^2 \, |\Phi_{jp}(\lambda)|^{-2} \left| \left((I - \lambda J)^{-1} h_p, x_j^p\right) \right|^2 d\lambda.$$

Поэтому оценка (1.12) будет иметь место, если мы докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_p^-(\lambda)|^2 \, |\Phi_{jp}(\lambda)|^{-2} \left| \left((I-\lambda J)^{-1} \, h_p, x_j^p \right) \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant M_{pj} \int\limits_0^a |h_p(s)|^2 ds. \tag{1.25}$$

Поскольку веса $|u_{kj}(\lambda)|^2$ удовлетворяют условию Макенхаупта на прямой $\mathbb{R}+bi$, справедливы оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_p^-(\lambda)|^2 \left| \;\;\fint\limits_{\mathbb{R}+bi} \frac{f(z)dz}{z-\lambda} - \Phi_{jp}^{-1}(\lambda) \fint\limits_{\mathbb{R}+bi} \frac{\Phi_{jp}(z)f(z)dz}{z-\lambda} \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{\mathbb{R}+bi} |f(\lambda)|^2 \, |w_p^-(\lambda)|^2 d\lambda,$$

которые можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_p^-(\lambda)|^2 \, |\Phi_{jp}(\lambda)|^{-2} \left| \left((I-\lambda J)^{-1} \, h_p, x_j^p \right) \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{\mathbb{R}+bi} |f(\lambda)|^2 \, |w_p^-(\lambda)|^2 d\lambda,$$

где h_p принадлежит пространству $L_2(0,a)$ и задается формулой

$$h_p(t) = \int\limits_{\mathbb{R}+bi} y_{w_p}(z,t) f(z) dz, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}+bi} |f(z)|^2 \, |w_p^-(z)|^2 dz < \infty.$$

Как и при доказательстве леммы 1.1, положим в ней

$$f(z) = (w_p^-(z))^{-1} \int\limits_0^a e^{izs} g(s) ds,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_p^-(z)|^2 \, |f(z)|^2 dz \leqslant c \int\limits_0^a |g(s)|^2 ds,$$

где g – произвольная функция из $L_2(0,a)$. Тогда $h_p = 2\pi i g$ и, стало быть, неравенства (1.25) выполняются для произвольной функции $h_p \in L_2(0,a)$. $\square$

Заканчивая этот параграф, приведем простейший пример, в котором сдвинутая последовательность $\{\mu_p\}_{-\infty}^{+\infty}$ не удовлетворяет условию Карлесона, но распадается на карлесоновы серии. Будем считать, что $n = 2$, $a = 2\pi$, $w_1^2 = w_2^2 = 1$. Рассмотрим функции

$$g_1(z) := \frac{e^{i2\pi z} - 1}{z}(z - i), \quad g_2(z) := \int\limits_0^{2\pi} e^{izt} f(t)dt, \quad f \in L_2(0,a),$$

и пусть

$$G(z) := \begin{pmatrix} \alpha g_1(z) + g_2(z) & \beta g_1(z) - g_2(z) \\ g_1(z) & g_1(z) \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Легко подобрать функцию g_2 так, чтобы матрица-функция

$$\Phi(z) = G^{-1}(0)\, G(z)$$

была порождающей для соответствующего семейства вида (0.2). Последовательность Λ совпадает с множеством корней уравнения

$$g_1(z)\big((\alpha - \beta) g_1(z) + 2 g_2(z)\big) = 0. \tag{1.26}$$

Ясно, что при любом сдвиге последовательность $\mu_p = \lambda_p - bi$ $(p \in \mathbb{Z})$ не удовлетворяет условию Карлесона. При этом последовательность M распадается на две асимптотически ортогональные серии Карлесона, отвечающие каждому множителю в (1.26). Легко видеть также, что первые два условия теоремы 1.1 выполнены. Таким образом, система векторных экспонент, порождаемая матрицей-функцией Φ, образует безусловный базис пространства $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$.

§2. Безусловная базисность линейных комбинаций w-ядер

1. В этом параграфе мы сосредоточимся только лишь на различиях между задачами о безусловной базисности семейств (0.2) и (0.3). Использование обозначений §1 не приведет к путанице, поскольку здесь будет идти речь только о системах вида (0.3).

Пусть снова w_k^2 – вес Макенхаупта на $\mathbb{R}$, y_{w_k} – отвечающая ему согласно (0.1) функция ($1 \leqslant k \leqslant n$). Предположив, что y_{w_k} ($k = 1, 2, \ldots, n$) линейно независимы на $[0, a]$, в пространстве $L_2(0, a)$ рассмотрим оператор

$$Kh := \sum_{k=1}^{n} (h, x_k) y_{w_k} + Jh, \quad (Jh)(t) = i \int\limits_0^t h(s)\, ds, \quad x_k \in L_2(0, a).$$

Снова имеем

$$K(I - zK)^{-1} h = \sum_{k=1}^{n} x_k(h, z) y_{w_k}(z, t) + J(I - zJ)^{-1} h, \tag{2.1}$$

где $y_{w_k}(z, t)$ – ядро, порожденное весом w_k^2, а $x_k(h, z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi_{kj}(z)\, x_j(h, z) = ((I - \lambda J)^{-1} h, x_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\Phi(z) := E - z\varphi(z), \quad \varphi(z) := \|\varphi_{kj}(z)\|, \tag{2.2}$$

$$\varphi_{kj}(z) := (y_{w_j}(z, t), x_k).$$

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_p\}_{-\infty}^{+\infty}$ множество корней уравнения

$$\Delta(z) := \det \Phi(z) = 0,$$

которые предполагаются простыми. Если $\operatorname{rank} \Phi(\lambda_p) = n - 1$ ($\lambda_p \in \Lambda$), то собственный вектор оператора K, отвечающий собственному числу λ_p^{-1}, имеет вид

$$Y(\lambda_p, t) := \sum_{j=1}^{n} c_j^p\, y_{w_j}(\lambda_p, t), \tag{2.3}$$

где вектор $c_p = \operatorname{Col}(c_j)_{j=1}^n$ находится из системы уравнений

$$\Phi(\lambda_p) c_p = 0. \tag{2.4}$$

Предположив эти все условия выполненными, снова рассмотрим отображение

$$(Sh)(z) := X(h, z), \quad X(h, z) = \operatorname{Col}(x_j(h, z))_{j=1}^n, \quad h \in L_2(0, a),$$

и запишем снова аналоги формул (1.8)–(1.11). Полагая

$$Y_z(\mu,t)=\sum_{j=1}^{n} z_j\, y_{w_j}(\mu,t), \quad z=\mathrm{Col}\,(z_j)_{j=1}^{n}\in\mathbb{C}^n,$$

найдем

$$S(Y_z(\mu,t))(\lambda)=(\mu-\lambda)^{-1}\Phi^{-1}(\lambda)(\Phi(\lambda)-\Phi(\mu))z, \quad \lambda^{-1}\notin\sigma(K). \tag{2.5}$$

Остальные формулы также сохраняют свой прежний вид:

$$\begin{gathered}(Y_z(\mu,t),\Psi^k(\overline{\nu}))=\Delta(\nu)(\nu-\mu)^{-1}\big\{\Phi^{-1}(\nu)(\Phi(\mu)-\Phi(\nu))z\big\}_k,\\ \left(Y_z(\mu,t),\sum_{k=1}^{n} y_k\,\Psi^k(\overline{\lambda}_p)\right)=(\lambda_p-\mu)^{-1}\big(\widetilde{\Phi}(\lambda_p)\Phi(\mu)z,y\big), \\ \lambda_p\in\Lambda, \quad y=\mathrm{Col}\,(y_i)_{i=1}^{n}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь вектор-функции $\Psi^k(\lambda)$ определяются равенствами

$$x_k(h,\lambda)=(h,\Psi^k(\overline{\lambda}))\Delta^{-1}(\lambda), \quad \Psi^k(\overline{\lambda})\in L_2(0,a), \quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{2.7}$$

Если спектр оператора K удовлетворяет условию

$$\inf_p \operatorname{Im}\lambda_p > b > -\infty,$$

то в случае безусловной базисности семейства его собственных векторов, как и в §1, приходим к оценке:

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(h,\lambda) y_{w_k}(\lambda,t)\right\|^2 d\lambda\leqslant M\|h\|^2, \quad h\in L_2(0,a),$$

которую можно переписать так:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}+bi}(v(\lambda)X(h,\lambda))_{\mathbb{C}^n}\,d\lambda\leqslant M\|h\|^2,\\ v_{kj}(\lambda):=\big(y_{w_k}(\lambda,t),y_{w_j}(\lambda,t)\big)_{L_2(0,a)},\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $\mathbb{R}+bi$ – какая-нибудь прямая, лежащая ниже Λ. Не ограничивая общности, считаем, что $b<0$. Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ матричные веса:

$$\begin{gathered}\widetilde{W}(x):=(\Phi^*(x+bi))^{-1}v(x+bi)\Phi^{-1}(x+bi),\\ W(x):=(\Phi_w(x+bi)\Phi_w^*(x+bi))^{-1},\\ \Phi_w(\lambda):=\Phi(\lambda)w^{-1}(\lambda), \quad w(\lambda):=\mathrm{diag}\,\{w_j^-(\lambda)\}, \quad \operatorname{Im}\lambda<0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Следующие условия равносильны:*

1) *оценка (2.8) имеет место для всех $h \in L_2(0,a)$;*
2) *для преобразования Гильберта $\mathcal{H}$ справедлива двухвесовая оценка*

$$\int_{\mathbb{R}} \big(\widetilde{W}(x)(\mathcal{H}f)(x), (\mathcal{H}f)(x)\big)_{\mathbb{C}^n} dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \big(W(x)f(x), f(x)\big)_{\mathbb{C}^n} dx. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть выполняется оценка (2.8). Положим в ней

$$h(t) = \sum_{j=1}^{n} y_{w_j}(x+bi, t) f_j(t) dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |w_j^-(x+bi)|^2 \, |f_j(x)|^2 dx < \infty. \tag{2.11}$$

Снова используя сведения из §0, найдем

$$\|h\|^2_{L_2(0,a)} \leqslant K \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} |w_j^-(x+bi)|^2 \, |f_j(x)|^2 dx =$$

$$= K \int_{\mathbb{R}} \|w(x+bi) f(x)\|^2_{\mathbb{C}^n} dx,$$

а также

$$\big((I-\lambda J)^{-1} h, x_k\big) = \sum_{j=1}^{n} \big((I-\lambda J)^{-1} y_{w_j}(x+bi,t), x_k\big) f_j(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_{kj}(\lambda) - \Phi_{kj}(x+bi)}{x+bi-\lambda} f_j(x) dx.$$

Поэтому

$$X(h,\lambda) = \Phi^{-1}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(x+bi)}{x+bi-\lambda} f(x) dx,$$

$$f(x) = \mathrm{Col}\,(f_j)_{j=1}^n.$$

Следовательно, если ввести обозначение

$$\big(v(x+bi)g(x), g(x)\big)_{\mathbb{C}^n} = \|g(x)\|_v^2,$$

то из (2.8) выводим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big\|(\mathcal{H}f)(x) - \Phi^{-1}(x+bi)\mathcal{H}\Phi(x+bi)f(x)\big\|_v^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \|w(x+bi)f(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx.$$

Поскольку (§0, п. 6)

$$v(x+bi) \leqslant Lw^*(x+bi)w(x+bi), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

из последней оценки вытекает (2.10).

Пусть теперь имеет место (2.10). Принимая во внимание (2.12) и рассуждая в обратном порядке, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} \big(v(\lambda)X(h,\lambda), X(h,\lambda)\big)_{\mathbb{C}^n} d\lambda \leqslant M \int\limits_{\mathbb{R}} \|w(x+bi)f(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx,$$

в котором h и f связаны соотношением (2.11). Если положить здесь

$$f_1(x) = w_1^-(x+bi)\int\limits_0^a e^{-i(x+bi)s}g(s)ds,$$

$$g \in L_2(0,a), \quad f_k(x) \equiv 0, \quad 2 \leqslant k \leqslant n,$$

то тогда $h = 2\pi i g$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|w(x+bi)f(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \leqslant K\|g\|_{L_2(0,a)}^2.$$

Поэтому оценка (2.8) имеет место для любого $g \in L_2(0,a)$. $\square$

Следствие. *Оценка (2.8) выполняется наверняка, если матричный вес W удовлетворяет условию Макенхаупта (A_2^{m}). В свою очередь, это условие равносильно оценке*

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} \sum_{k=1}^n |w_k^-(\lambda)|^2\, |x_k(h,\lambda)|^2 d\lambda \leqslant L\|h\|^2, \ h \in L_2(0,a). \tag{2.13}$$

Первое утверждение вытекает из неравенства $\widetilde{W}(x) \leqslant LW(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доказательство второго получается дословным повторением рассуждений из доказательства леммы 1.1.

Лемма 2.2. *Если семейства собственных векторов операторов K и K^* полны в пространстве $L_2(0,a)$ и имеет место* (2.13), *то*

1) $h\left(\Delta, -\frac{\pi}{2}\right) = a$, $h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = 0$;
2) *элементы матрицы* $w(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}$ $(\operatorname{Im}\mu > b)$ *принадлежат классу Харди H^2 в области* $\operatorname{Im}\lambda < b$.

Доказательство. 1. Снова вычислим

$$\operatorname{Sp}\operatorname{Im}K = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}(y_{w_k}, x_k) + \frac{1}{2}a = -\operatorname{Sp}\Phi'(0) + \frac{1}{2}a =$$

$$= -\operatorname{Im}\frac{d}{d\lambda}\log\Delta(\lambda)\Big|_{\lambda=0} + \frac{1}{2}a.$$

Поскольку детерминант Δ представим в виде

$$\Delta(\lambda) = e^{i\delta\lambda}\,\text{v.p.}\prod_{\lambda_p\in\Lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}\right), \quad \delta\in\mathbb{R},$$

из соответствия [5]

$$\operatorname{Sp}\operatorname{Im}K = \sum_{\lambda_p\in\Lambda}\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_p}$$

вытекает, что $\delta = a/2$. Поэтому достаточно доказать равенство $h(\Delta, \pi/2) = 0$, в справедливости которого легко убедиться, дословно повторяя соответствующие рассуждения из доказательства леммы 1.3.

2. Из формул (2.3)–(2.5) следует, что для любой конечной совокупности комплексных чисел $\{z_p\}$ имеем

$$S\left(\sum_p z_p\,Y(\lambda_p, t)\right) = \sum_p z_p\frac{c_p}{\lambda_p - \lambda}.$$

Это означает, что для плотного в $L_2(0,a)$ множества векторов h значения функционалов $x_k(h,\lambda)$ принадлежат классу Харди H^2 в области $\operatorname{Im}\lambda < b$ с весом $|w_k^-(x+bi)|^2$ (§0). В силу (2.13) этот вывод остается верным и для любого $h \in L_2(0,a)$. Полагая $h = Y_z(\mu,t)$ и принимая во внимание формулу (2.5), убеждаемся в справедливости утверждения 2. $\square$

Лемма 2.3. *Если выполняются следующие требования:*

1) $h\left(\Delta, -\frac{\pi}{2}\right) = a$, $h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = 0$;

2) *при некотором* μ $(\operatorname{Im}\mu > b)$ *элементы матрицы*

$$w(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}$$

принадлежат классу Харди H^2 *в области* $\operatorname{Im}\lambda < b$;

3) *имеет место оценка* (2.13),

то семейства собственных векторов операторов K *и* K^* *полны в пространстве* $L_2(0,a)$.

Доказательство. Докажем полноту семейства собственных векторов оператора K^*. Пусть $\mathcal{F}$ – подпространство, ортогональное всем собственным векторам оператора K^*. Из (2.7) следует, что все функции $x_k(f,\lambda)$ $(f \in \mathcal{F}, 1 \leqslant k \leqslant n)$ целые, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} |w_k^-(\lambda)|^2\,|x_k(f,\lambda)|^2 d\lambda < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Из формулы (2.2) вытекает также, что $h\big(x_k(f,\lambda); \frac{\pi}{2}\big) \leqslant 0$. Поэтому (§0, п. 1, 5) каждая функция $x_k(f, x+bi)$ принадлежит классу Харди H^2 с весом $|w_k^-(x+bi)|^2$ в области $\operatorname{Im} z > 0$. С другой стороны, $x_k(f, z+bi)$ принадлежит H^2 с весом $|w_k^-(x+bi)|^2$ в нижней полуплоскости, и, стало быть (§0, п. 4),

$$x_k(f,\lambda) \equiv 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{2.14}$$

В самом деле, из условия 2) и формулы (2.5) выводим, что этому классу принадлежат все функции вида

$$x_k(y_{w_1}(\mu,t),\lambda) = (\mu-\lambda)^{-1}\Phi^{-1}(\lambda)\big(\Phi(\lambda)-\Phi(\mu)\big)e, \quad e = \operatorname{Col}(\delta_{1j})_{j=1}^n,$$

где $\lambda = z + bi$, $\operatorname{Im}\mu > b$. Известно [1], что семейство

$$y_{w_1}(\mu_n,t), \quad \mu_n = \frac{2\pi}{a}n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

образует безусловный базис пространства $L_2(0,a)$. Если теперь разложить каждый вектор $f \in \mathcal{F}$ в ряд по этой системе и учесть оценку (2.13), то придем к нужному заключению.

После того, как установлены равенства (2.14), доказательство заканчивается по той же схеме, что и доказательство леммы 1.2. $\square$

Замечание. Не всегда условие 2) из формулировки леммы является независимым от остальных двух условий. Нетрудно доказать, что оно из них вытекает в том случае, когда

$$h\left(\Delta_{kj}, -\frac{\pi}{2}\right) \leqslant a, \quad 1 \leqslant k,\ j \leqslant n,$$

где Δ_{kj} – произвольный минор порядка $n-1$ матрицы-функции Φ. Таким образом, если $n = 1, 2$, то требование 2) в формулировке леммы можно опустить.

2. Дадим теперь определение порождающих матриц-функций для семейств вида (0.3). Так называется целая матрица-функция Φ, удовлетворяющая условиям:

1) Φ представима в виде

$$\Phi(z) = E - z\varphi(z), \quad \varphi_{kj}(z) := (y_{w_j}(z,t), x_k)_{L_2(0,a)},$$
$$\varphi(z) = \|\varphi_{kj}(z)\|, \tag{2.15}$$

где $x_k \in L_2(0,a)$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

2) $\operatorname{rank}\Phi(\lambda_p) = n-1$, где $\Lambda := \{\lambda_p, p \in \mathbb{Z}\}$ – множество корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) := \det \Phi(\lambda),$$

которые простые.

Каждой порождающей матрице-функции Φ отвечает в пространстве $L_2(0,a)$ система функций вида (0.3):

$$Y(\lambda_p, t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^p\, y_{w_k}(\lambda_p, t), \quad \lambda_p \in \Lambda,$$

причем

$$\Phi(\lambda_p)c_p = 0, \quad c_p = \operatorname{Col}(c_k^p)_{k=1}^n.$$

Как и в §1, доказывается, что каждый безусловный базис вида (0.3) пространства $L_2(0,a)$ ($0 \notin \Lambda$) обладает порождающей матрицей-функцией Φ. Напомним, что матрица-функция Φ_w определяется формулой (2.9). Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть Φ – порождающая матрица-функция семейства функций* (0.3) *и выполнено условие* (0.4). *Тогда это семейство образует безусловный базис пространства $L_2(0,a)$, коль скоро выполнены условия:*

1) $h\left(\Delta, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $h\left(\Delta, -\frac{\pi}{2}\right) = a$;

2) *матричный вес* $W(x) := \left(\Phi_w(x+bi)\Phi_w^*(x+bi)\right)^{-1}$ *удовлетворяет условию Макенхаупта* (A_2^{m}) *при каком-нибудь* $b < \min\left\{\inf\limits_{\lambda_p\in\Lambda} \operatorname{Im}\lambda_p, 0\right\}$;

3) *при некотором* μ ($\operatorname{Im}\mu > b$) *элементы матрицы* $\Phi_w^{-1}(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}$ *принадлежат классу Харди* H^2 *в области* $\operatorname{Im}\lambda < b$;

4) *система рациональных дробей*

$$\widetilde{c}_p(\lambda-\mu_p)^{-1}, \quad \mu_p := \lambda_p - bi,$$

$$\widetilde{c}_p = \operatorname{Col}\left(c_k^p\,\overline{w_k^-(\overline{\lambda}_p + 2bi)}\right)_{k=1}^n$$

образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в классе Харди $H_-^2(\mathbb{C}^n)$.

Замечания. 1. Напомним, что по крайней мере при $n = 1, 2$ условие 3) в формулировке теоремы можно опустить.

2. Для безусловной базисности семейства (0.3) необходимо наличие двухвесовой оценки (2.10). Если окажется, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi} \|w(\lambda)f(\lambda)\|_{\mathbb{C}^n}^2\,d\lambda \leqslant K \int\limits_{\mathbb{R}+bi} \left(v(\lambda)f(\lambda), f(\lambda)\right)_{\mathbb{C}^n} d\lambda,$$

где f – произвольный элемент линейной оболочки семейства $\{c_p(\lambda-\lambda_p)^{-1} : \lambda_p \in \Lambda\}$, то условия 1)–4) будут и необходимыми для базисности этой системы.

Поскольку снова имеет место оценка

$$\left\|\sum_p z_p Y(\lambda_p, t)\right\|_{L_2(0,a)}^2 \leqslant C\sum_{k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\sum_p z_p\, c_k^p (x-\mu_p)^{-1}\right|^2 |w_k^-(x+bi)|^2 dx,$$

доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

Остановимся еще на аналоге теоремы 1.2. Обозначая через $\Phi_{kj}(\lambda)$, $\Psi_{kj}(\lambda)$ элементы матриц Φ и Φ^{-1} соответственно, потребуем, чтобы

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}+bi}\sum_{j=1}^{n}|\Psi_{kj}(\lambda)\Phi_{jk}(\lambda)|<\infty,\quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{2.16}$$

Элементы матрицы-функции Φ_w снова обозначаются через $u_{kj}(\lambda)$.

Теорема 2.2. *Если выполнено условие* (2.16) *и все веса* $|u_{kj}(\lambda)|^2$ $(1\leqslant k,\ j\leqslant n)$ *удовлетворяют условию Макенхаупта на* $\mathbb{R}+bi$, *то вес* W *(из формулировки теоремы* 2.1*) удовлетворяет условию* (A_2^{m}).

Действительно, поскольку

$$|x_k(h,\lambda)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\Psi_{kj}(\lambda)\Phi_{jk}(\lambda)\right|\,\left|\left((I-\lambda J)^{-1}h,x_j\right)\right|\,|\Phi_{jk}(\lambda)|^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant M\max_{j}\left|\left((I-\lambda J)^{-1}h,x_j\right)\right|\,|\Phi_{jk}(\lambda)|^{-1},\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

все снова сводится к оценкам

$$\int\limits_{\mathbb{R}+bi}|w_k(h,\lambda)|^2|\Phi_{jk}(\lambda)|^{-2}\left|\left((I-\lambda J)^{-1}h,x_j\right)\right|^2d\lambda\leqslant M_{kj}\int\limits_0^a|h(s)|^2ds,$$

которые обеспечиваются условиями теоремы.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть

$$w_1^2(x)=|x|^{2(1-\alpha)},\quad w_2^2(x)=|x|^{2(1-\beta)}\quad\left(\frac{1}{2}<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\right).$$

Тогда, полагая

$$w_1^-(z)=e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}}\,z^{1-\alpha},\quad w_2^-(z)=e^{-i\frac{\pi\beta}{2}}\,z^{1-\beta},\quad 0>\arg z>-\pi, \tag{2.17}$$

получим

$$y_{w_1}(y)=\Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1},\quad y_{w_1}(z,y)=t^{\alpha-1}\,E_1(izt;\alpha);$$

$$y_{w_2}(y)=\Gamma^{-1}(\beta)t^{\beta-1},\quad y_{w_2}(z,y)=t^{\beta-1}\,E_1(izt;\beta).$$

Воспользовавшись формулой [8]

$$\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int\limits_0^a (a-t)^{\omega-1}\,t^{\nu-1}\,E_1(izt;\nu)dt = a^{\nu+\omega-1}E_1(iza;\omega+\nu),\quad \omega,\,\nu>0,$$

заключаем, что матрица-функция

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 1 - za^{\alpha+\gamma-1}\,E_1(iza;\alpha+\gamma) & -za^{\beta+\gamma-1}\,E_1(iza;\beta+\gamma) \\ -za^{\alpha+\delta-1}\,E_1(iza;\alpha+\delta) & 1 - za^{\beta+\delta-1}\,E_1(iza;\beta+\delta) \end{pmatrix},$$

где $\gamma,\delta>\frac{1}{2}$, допускает представление (2.15) с функциями:

$$x_1(t)=\Gamma^{-1}(\gamma)(a-t)^{\gamma-1},\quad x_2(t)=\Gamma^{-1}(\gamma)(a-t)^{\delta-1},\quad 0\leqslant t\leqslant a.$$

Не анализируя подробно все возникающие здесь ситуации, покажем, что можно выбрать γ, δ так, чтобы матрица-функция Φ была порождающей для соответствующего семейства (0.3) и удовлетворяла условиям теоремы 2.1. Выберем γ и δ так, чтобы $\alpha+\gamma=2$, $\alpha+\delta>2$. Тогда и подавно $\beta+\gamma>2$, $\beta+\delta>2$.

Применим теперь известные асимптотические формулы [8]

$$E_1(iza;\mu) = -\frac{(iza)^{-1}}{\Gamma(\mu-1)} + O(|z|^{-2})$$

внутри каждого угла $0<|\pi/2-\arg z|<\varepsilon\,(\varepsilon<\pi/2)$ и

$$E_1(iza;\mu) = (iaz)^{1-\mu}\,e^{iaz} - \frac{(iza)^{-1}}{\Gamma(\mu-1)} + O(|z|^{-2})$$

вне этих углов. Из этих формул вытекает, что корни функции $\Delta(z)$ можно считать простыми, почти все они лежат в углах $|\pi/2-\arg z|\geqslant\varepsilon>0$, причем в этих углах

$$\Delta(z) =$$
$$=\Delta_0 - d_1\,e^{iza} + e^{iza}\left(d_2\,z^{2-(\beta+\gamma)} + d_3\,z^{2-(\alpha+\delta)} + d_4\,z^{2-(\beta+\delta)}\right) + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

где Δ_0, $d_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ – отличные от нуля константы. Поэтому условие 1) теоремы 2.1 выполнено. Кроме того, при подходящих $b<0$ сдвинутая последовательность $M=\{\lambda_p-bi;p\in\mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию Карлесона. Чтобы проверить, что матричный вес W удовлетворяет условию $(\mathrm{A}_2^{\mathrm{m}})$, воспользуемся теоремой 2.2. Отметим, что требование (2.16) сводится к одному условию

$$\sup_{z\in\mathbb{R}+bi}|\Phi_{11}(z)\,\Phi_{22}(z)|\;|\Delta(z)|^{-1}<\infty,$$

которое выполнено при правильном выборе b. И, наконец, из формул (2.17) вытекает, что квадраты модулей элементов матрицы $\Phi(z)\, w^{-1}(z)$ удовлетворяют скалярному условию Макенхаупта на прямой $\mathbb{R}+bi$. Поэтому соответствующее семейство функций вида (0.3) образует безусловный базис пространства $L_2(0,a)$.

Литература

1. Г. М. Губреев, *Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **190** (1991), 34–80.
2. Ф. Л. Назаров, С. Р. Трейль, *Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегралов и к другим классическим задачам гармонического анализа.* — Алгебра и Анализ **8**, вып. 5 (1996), 32–162.
3. С. А. Авдонин, С. А. Иванов, *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент.* УМК ВО, Киев, 1989.
4. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян, *Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка.* — Труды ММО **10** (1961), 89–179.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М. 1965.
6. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. 1984.
7. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Наука, М. 1980.
8. М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* Наука, М. 1966.

Gubreev G. M., Olefir E. I. Unconditional bases, the matrix Muckenhoupt condition, and Carleson series in the spectrum.

For two families of functions generated by a system of n scalar Muckenhoupt weights, criteria are obtained for being unconditional basic sequences. From the point of view of the spectral operator theory, the problem is reduced to analyzing the structure of n-dimensional perturbations of the integration operator. With the help of weighted estimates for the Hilbert transform in the spaces of vector-functions, an operator is constructed that transforms the functions of the given families into vector-valued rational functions. The concept of Carleson series is used for solving the problem of being an unconditional basis.

Южно-Украинский
педагогический
государственный университет
г. Одесса
rector@tm.odessa.ua (for Gubreev)

Поступило 28 июня 1999 г.