Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

В. И. Васюнин

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

В последние годы резко активизировался интерес к подходу к гипотезе Римана, предложенному Б. Ниманом [1] (см. [2–10]). Суть этого подхода состоит в равносильности гипотезы Римана и плотности в $L^2([0,1])$ семейства ступенчатых функций

$$\rho_\alpha(x) = \left[\frac{\alpha}{x}\right] - \alpha\left[\frac{1}{x}\right], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где $[t]$ – целая часть числа t.

На самом деле (см. цитировавшиеся выше работы) утверждение о плотности семейства $\rho_\alpha(x)$ равносильно возможности аппроксимировать единственную функцию, тождественно равную единице, линейными комбинациями функций ρ_α. А тождество

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mu(n)\rho_{\frac{1}{n}}(x) = 1, \tag{2}$$

справедливое при всех x, $x \in (0,1)$, указывает на особую роль параметров $\alpha = \frac{1}{n}$. Хотя ряд (2) не сходится в норме L^2 (см. [9]), вопрос о возможности аппроксимации единицы линейными комбинациями функций $\rho_{1/n}$ остается открытым.

Заметим, что конечные линейные комбинации функций ρ_α имеют вид конечных сумм

$$\sum c_k \left[\frac{\alpha_k}{x}\right], \tag{3}$$

подчиненных условию

$$\sum c_k \alpha_k = 0. \tag{4}$$

Последнее условие – это просто условие принадлежности функции (3) пространству L^2.

Исследование частично поддержано Российским Фондом Фундаментальных исследований (грант 98-01-00312).

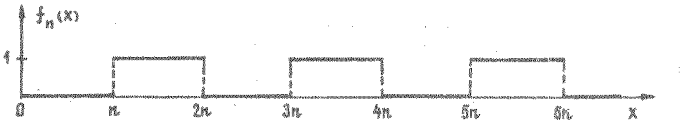
При работе с функциями $\rho_{1/n}$ удобно сделать замену переменной $x \mapsto \frac{1}{x}$ и перейти из $L^2((0,1), dx)$ в $L^2\left((1,\infty), \frac{dx}{x^2}\right)$, тогда все линейные комбинации функции $\rho_{1/n}$ перейдут в кусочно-постоянные функции со скачками лишь в целых точках, т.е. будут иметь вид

$$\sum c_k \left[\frac{x}{m_k}\right], \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad \sum \frac{c_k}{m_k} = 0. \tag{5}$$

Отметим сразу, что все функции вида (5) периодичны с периодом $M = $ Н.О.К.(m_k).

Среди функций вида (5) нетрудно выделить простейшее семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,

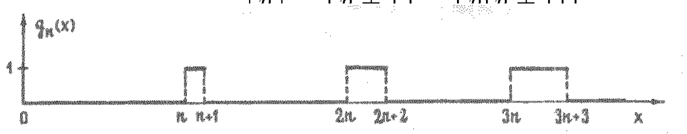
$$f_n(x) = \left[\frac{x}{n}\right] - 2\left[\frac{x}{2n}\right], \tag{6}$$



достаточное для поточечной аппроксимации тождественной константы. Действительно, $f_1(x) = 1$ при $x \in (1,2)$, и мы построим требуемую последовательность $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ по индукции, просто полагая $c_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_k(n)$.

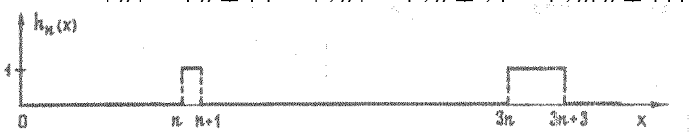
Однако, "исправляя" функцию в окрестности точки n, мы вносим слишком большое возмущение на интервале $(n+1, \infty)$. Поэтому для выполнения той же самой процедуры гораздо предпочтительнее будет семейство $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$g_n(x) = \left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x}{n+1}\right] - \left[\frac{x}{n(n+1)}\right], \tag{7}$$



или, еще лучше, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$h_n(x) = \left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x}{n+1}\right] - \left[\frac{x}{2n}\right] + \left[\frac{x}{2n+2}\right] - \left[\frac{x}{2n(n+1)}\right]. \tag{8}$$



Поиск функций, имеющих первое плато на заданном интервале, после которого функция достаточно долго равна нулю, естественно привел к следующей задаче.

0. Задача. Описать все конечные суммы вида

$$\sum c_k \left[\frac{x}{m_k}\right], \quad m_k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

принимающие только значения 0 и 1.

1. Замечание. Сгруппировав в (9) слагаемые с одинаковыми m_k, мы можем считать все m_k различными. Тогда коэффициенты c_k обязательно имеют целочисленные значения. Действительно, пусть $m_1 = \min\{m_k\}$, тогда, очевидно, $c_1 = 1$. Поскольку скачок в точке x, равный сумме $\sum\limits_{m_k|x} c_k$, может принимать лишь значения $0, \pm 1$, по индукции заключаем, что все c_k могут принимать только целые значения.

2. Замечание. Если f – решение **Задачи 0**, $r \in \mathbb{N}$, то $f\left(\frac{x}{r}\right)$ – тоже решение с $m'_k = rm_k$. И наоборот, если $r =$ Н.О.Д.$\{m_k\}$, то $f(rx)$ – тоже решение. Поэтому естественно рассматривать неприводимые решения с Н.О.Д. $\{m_k\} = 1$. Та же замена переменной показывает, что мы получим в существенном тот же кдасс решений, если позволим m_k пробегать множество положительных рациональных чисел. Это может быть несколько удобнее, поскольку мы тогда можем выбрать нормировку, отличную от условия Н.О.Д. $\{m_k\} = 1$, а положить, например, $m_1 = 1$.

3. Утверждение. *Все решения* **Задачи 0** *можно представить в виде*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{x}{m_k}\right] - \sum_{k=N+1}^{2N+1} \left[\frac{x}{m_k}\right]. \tag{10}$$

Доказательство. Так как согласно **Замечанию 1** все коэффициенты c_k – целые, то допуская равные значения m_k, мы можем считать все c_k равными по модулю единице. Тогда равенство (10) равносильно утверждению

$$\sum c_k = -1.$$

Чтобы проверить это тождество, воспользуемся соотношением

$$[x] + [-x] = -1,$$

справедливом при любом нецелом x.

Пусть $M = \text{Н.О.К.}\{m_k\}$ – период функции f. Тогда

$$f(x) + f(M-x) = \sum c_k \left[\frac{x}{m_k}\right] + \sum c_k \left[\frac{M}{m_k} - \frac{x}{m_k}\right] =$$

$$= \sum c_k \left(\left[\frac{x}{m_k}\right] + \left[-\frac{x}{m_k}\right]\right) + M\sum \frac{c_k}{m_k} = -\sum c_k$$

при любом нецелом x. Возьмем две точки x_0 и x_1, такие что $f(x_0) = 0$ и $f(x_1) = 1$, тогда

$$1 \leqslant f(x_1) + f(M - x_1) = -\sum c_k = f(x_0) + f(M - x_0) \leqslant 1,$$

т.е. $\sum c_k = -1$, что и требовалось доказать. •

Итак, согласно доказанному утверждению все искомые функции распадаются на классы функций с фиксированным нечетным числом членов вида $\left[\frac{x}{m_k}\right]$. Трехчленные функции допускают простое описание.

4. Утверждение. *Функция*

$$f(x) = \left[\frac{x}{m_1}\right] - \left[\frac{x}{m_2}\right] - \left[\frac{x}{m_3}\right] \tag{11}$$

принимает значения 0 *и* 1 *в том и только том случае, когда*

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, что условие (12) необходимо, оно уже содержится в (5) и является просто условием ограниченности функции (11). Предположим теперь, что условие (12) выполнено и воспользуемся тождеством

$$[x] = x - \{x\},$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x, $0 \leqslant \{x\} < 1$. Тогда в силу тождества (12) имеем

$$f(x) = -\left\{\frac{x}{m_1}\right\} + \left\{\frac{x}{m_2}\right\} + \left\{\frac{x}{m_3}\right\},$$

и, следовательно, $-1 < f(x) < 2$. А посольку f принимает лишь целочисленные значения, это могут быть только числа 0 и 1. •

5. Замечание. В предыдущем утверждении мы нигде не использовали целочисленность значений m_k, оно справедливо при любых положительных значениях m_k. Множество решений с целочисленными m_k можно описать следующим образом

6. Следствие. *Все неприводимые трехчленные решения* **Задачи** 0 *имеют вид*

$$f(x) = \left[\frac{x}{a \cdot b}\right] - \left[\frac{x}{a(a+b)}\right] - \left[\frac{x}{b(a+b)}\right], \tag{13}$$

где $a \leqslant b$, *а Н.О.Д.* $\{a, b\} = 1$.

Доказательство. Сперва опишем рациональные решения, отнормировав их условием $m_2 \leqslant m_3 = 1$. Положим $m_2 = \frac{a}{b}$ с взаимно простыми $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_2} + 1 = \frac{b}{a} + 1 = \frac{a+b}{a}$, $m_1 = \frac{a}{a+b}$. Из найденного рационального решения получаем решение с целыми взаимно простыми m_k, домножая на $b(a+b)$:

$$m_1 = ab, \quad m_2 = a(a+b), \quad m_3 = b(a+b). \qquad \bullet$$

7. Замечание. Решение **Задачи 0** вида (10) будем записывать символом

$$[m_1, \dots, m_N; m_{N+1}, \dots, m_{2N+1}],$$

предполагая $m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_N$; $m_{N+1} \leqslant \ldots \leqslant m_{2N+1}$.

Таким образом семейство трехчленных решений имеет вид

$$[ab; a(a+b), b(a+b)].$$

Упомянутая во введении последовательность функций g_n (см. формулу (7)) получается из (13) при $a = 1$, $b = n$.

Существует аналогичная непрерывная серия 5-членных решений (частный случай – последовательность h_n, задаваемая формулой (8)), однако кроме того существуют 29 особых неприводимых решений, найденных с помощью компьютера. Более того, компьютерный эксперимент показывает, что при больших периодах существуют лишь трехчленные и пятичленные решения из упомянутых серий, а бесконечных серий решений с числом членов больше пяти, по всей видимости, не существует. По результатам компьютерного эксперимента можно сформулировать следующую гипотезу.

8. Гипотеза. *Существует только 21 неприводимое 7-членное решение* **Задачи 0**:

M=12:	[1, 4, 6; 2, 2, 3, 12]
M=60:	[2, 20, 30; 4, 6, 10, 15]
	[2, 12, 15; 4, 5, 6, 30]
	[2, 12, 20; 4, 5, 6, 60]
	[3, 10, 60; 5, 6, 20, 30]
	[4, 10, 60; 5, 12, 20, 30]
M=72:	[3, 18, 24; 6, 8, 9, 36]
	[4, 18, 24; 8, 9, 12, 36]
M=84:	[6, 14, 21; 7, 12, 28, 42]
M=90:	[3, 10, 18; 5, 6, 9, 90]
M=120:	[4, 24, 30; 8, 12, 15, 20]
	[5, 24, 60; 10, 12, 15, 120]
	[6, 40, 60; 12, 15, 20, 120]
M=126:	[7, 42, 63; 14, 18, 21, 126]
M=140:	[7, 20, 70; 10, 14, 35, 140]
M=168:	[7, 42, 168; 14, 21, 24, 84]
	[7, 24, 42; 12, 14, 21, 168]
M=180:	[9, 20, 30; 10, 18, 45, 60]
M=210:	[7, 42, 70; 14, 21, 30, 35]
	[21, 35, 210; 30, 42, 70, 105]

Существует только 2 неприводимых 9-членных решения **Задачи 0**:

M=72:	[3, 8, 12, 18; 4, 6, 9, 24, 36]
M=120:	[4, 24, 40, 60; 8, 12, 15, 20, 120]

Решений **Задачи 0** *с количеством членов большим девяти не существует.*

Вероятно, имеется достаточно простая арифметическая причина, препятствующая существования решений с большим количеством членов. Без выяснения этой причины, как мы увидим, даже анализ 5-членных решений превращается в слишком громоздкую задачу.

Опишем сперва непрерывные серии 5-членных решений.

9. Утверждение. *Если*

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_5}, \tag{14}$$

$$m_3 = 2m_1, \tag{15}$$

и либо

$$m_4 = 2m_2, \tag{16}$$

либо

$$m_2 = 2m_4, \tag{17}$$

то функция

$$f(x) = \left[\frac{x}{m_1}\right] + \left[\frac{x}{m_2}\right] - \left[\frac{x}{m_3}\right] - \left[\frac{x}{m_4}\right] - \left[\frac{x}{m_5}\right] \tag{18}$$

принимает только значения 0 *и* 1.

Доказательство. Как и при доказательстве **Утверждения 4**, соотношение (14) позволяет переписать функцию (18) в виде

$$f(x) = -\left\{\frac{x}{m_1}\right\} - \left\{\frac{x}{m_2}\right\} + \left\{\frac{x}{m_3}\right\} + \left\{\frac{x}{m_4}\right\} + \left\{\frac{x}{m_5}\right\}.$$

Теперь воспользуемся неравенством $-1/2 \leqslant \{x\} - \left\{\frac{x}{2}\right\} < 1/2$. Тогда тождество (15) влечет оценку $-1/2 < -\left\{\frac{x}{m_1}\right\} + \left\{\frac{x}{m_3}\right\} \leqslant 1/2$, а как из (16), так и из (17) вытекает неравенство $-1/2 \leqslant -\left\{\frac{x}{m_2}\right\} + \left\{\frac{x}{m_4}\right\} \leqslant 1/2$. Добавляя к этим двум неравенствам оценку $0 \leqslant \left\{\frac{x}{m_5}\right\} < 1$, получаем $-1 < f(x) < 2$, откуда в силу целочисленности функции f и вытекает, что она принимает лишь значения 0 и 1. •

10. Следствие. *Решения* **Задачи 0**, *содержащиеся в предыдущем утверждении, можно сгруппировать в следующие четыре серии:*

$$[a(a-b), ab; 2b(a-b), 2a(a-b), 2ab],$$
$$a, b \in \mathbb{N},\ \ b < a < 2b,\ \ b \geqslant 3,\ \ \textit{Н.О.Д.}\ (a, 2b) = 1; \tag{19}$$
$$[a(2a-b), ab; b(2a-b), 2a(2a-b), 2ab],$$
$$a, b \in \mathbb{N},\ \ a < b < 2a,\ \ b \text{ – \textit{нечетное}},\ \ \textit{Н.О.Д.}\ (a, b) = 1; \tag{20}$$
$$[a(b-a), 2ab; 2a(b-a), ab, 2b(b-a)],$$
$$a, b \in \mathbb{N},\ \ a < b,\ \ b \geqslant 4,\ \ \textit{Н.О.Д.}\ (a, 2b) = 1; \tag{21}$$
$$[a(b-2a), 2ab; 2a(b-2a), ab, b(b-2a)],$$

$$a, b \in \mathbb{N}, \;\; 2a < b, \;\; b \text{ – \textit{нечетное}}, \;\; \textit{Н.О.Д.}\ (a, b) = 1. \tag{22}$$

Доказательство. Сперва найдем рациональные решения, удовлетворяющие условиям (14), (15) и (16), нормированные условием $m_5 = 1$. В силу симметрии между m_1 и m_2 можем сразу считать, что $m_1 < m_2$, и положим $m_1 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, Н.О.Д.$(a, b) = 1$. Тогда уравнение (14)

$$\frac{b}{a} + \frac{1}{m_2} = \frac{b}{2a} + \frac{1}{2m_2} + 1$$

решаем относительно m_2 и получаем

$$m_2 = \frac{a}{2a - b}.$$

Условие $m_1 > m_2$ эквивалентно условию $0 < 2a - b < b$, т.е.

$$a < b < 2a. \tag{23}$$

В результате получаем серию рациональных решений

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{a}{2a - b}; \frac{2a}{b}, \frac{2a}{2a - b}, 1\right]. \tag{24}$$

Чтобы перейти к неприводимым целочисленным решениям, рассмотрим отдельно два случая четных и нечетных значений b.

Если b четно, заменяя в (24) b на $2b$, получим

$$\left[\frac{a}{2b}, \frac{a}{2(a - b)}; \frac{a}{b}, \frac{a}{a - b}, 1\right]; \tag{25}$$

при этом условие (23) перейдет в

$$b < a < 2b. \tag{26}$$

Поскольку наименьшим общим знаменателем дробей из (25) является число $2b(a - b)$, решение (25) эквивалентно целочисленному неприводимому решению

$$[a(a - b), ab; 2a(a - b), 2ab, 2b(a - b)].$$

Размещая члены в порядке возрастания $m_3 \leqslant m_4 \leqslant m_5$, при условии (26) получим

$$[a(a - b), ab; 2b(a - b), 2a(a - b), 2ab]. \tag{27}$$

Отметим, что параметры a и b определяются решением однозначно, поскольку $m_1 + m_2 = a^2$. Теперь осталось удалить из приведенного списка вырождающиеся решения, когда $m_i = m_j$; $i = 1, 2$; $j = 3, 4, 5$. Условие $a < 2b$ влечет неравенства

$$a(a-b) < 2b(a-b) < ab,$$

поэтому единственно возможное совпадение

$$ab = 2a(a-b),$$

что эквивалентно условию

$$3b = 2a.$$

Поскольку Н.О.Д. $(a, 2b) = 1$, последнее равенство имеет место лишь при $a = 3$, $b = 2$. Эти значения параметров дают вырожденное решение

$$[3, 6; 4, 6, 12] = [3; 4, 12].$$

Так как при $b = 2$ единственным значением a, удовлетворяющим условию (26), является $a = 3$, то при $b = 2$ семейство (27) не дает 5-членных решений. Так мы приходим к ограничению $b \geqslant 3$ и получаем семейство решений (19).

Теперь пусть b нечетно, тогда наименьшим общим знаменателем дробей из (24) является число $b(2a - b)$. Поэтому при нечетном b решение (24) эквивалентно целочисленному решению

$$[a(2a-b), ab; 2a(2a-b), 2ab, b(2a-b)].$$

Снова размещая члены в порядке возрастания, при условии (23) получим

$$[a(2a-b), ab; b(2a-b), 2a(2a-b), 2ab]. \tag{28}$$

Условие $m_1 + m_2 = 2a^2$ обеспечивает нам, во-первых, однозначное определение параметров a и b по заданному решению (28), а во-вторых, то, что семейства (28) и (19) не имеют общих решений. Тем самым, чтобы получить серию решений (20), осталось проверить, что ни при каких допустимых значениях параметров a и b решение (28) не вырождается в трехчленное решение.

Поскольку при условии $a < b$ справедливы неравенства

$$a(2a-b) < b(2a-b) < ab,$$

вырождение возможно лишь при совпадении

$$ab = 2a(2a - b),$$

что эквивалентно условию

$$3b = 4a,$$

а это невозможно, поскольку b нечетно.

Теперь перейдем к решениям, удовлетворяющим условиям (14), (15) и (17). Снова нормируем рациональное решение условием $m_5 = 1$ и положим $m_1 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, Н.О.Д.$(a, b) = 1$. Решая (14) относительно m_4, получаем

$$m_4 = \frac{a}{b - 2a}.$$

Так как $m_4 > 0$, то необходимым является ограничение на значения параметров

$$b > 2a. \tag{29}$$

Тогда получаем серию рациональных решений

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{2a}{b - 2a}; \frac{2a}{b}, \frac{a}{b - 2a}, 1\right]. \tag{30}$$

При переходе к целочисленным решениям опять рассмотрим отдельно случай четных и нечетных значений b.

Пусть b четно. Заменяя его в (30) и (29) на $2b$, получим семейство решений

$$\left[\frac{a}{2b}, \frac{a}{b - a}; \frac{a}{b}, \frac{a}{2(b - a)}, 1\right] \tag{31}$$

при ограничении

$$b > a. \tag{32}$$

Умножая члены (31) на наименьший общий знаменатель $2b(b - a)$, получаем неприводимое целочисленное решение

$$[a(b - a), 2ab; 2a(b - a), ab, 2b(b - a)]. \tag{33}$$

Здесь условие (32) накладывает единственное ограничение на взаимное расположение трех последних членов: $2b(b-a) > 2a(b-a)$. Если $a < b \leqslant \frac{3}{2}a$, то $2a(b - a) < 2a(b - a) \leqslant ab$, если $a\frac{3}{2}a \leqslant b \leqslant 2a$, то $2a(b - a) \leqslant ab \leqslant 2b(b - a)$, если $b \geqslant 2a$, то $ab \leqslant 2a(b - a) < 2b(b - a)$.

Чтобы не разбивать семейство (33) на три отдельных множества, мы в данном случае не будем предполагать, что три последних члена расположены в порядке возрастания.

Соотношение $m_2 - 2m_1 = 2a^2$ показывает, что параметры a и b определяются однозначно заданным решением семейства (33).

Теперь удалим из найденного семейства вырожденные решения и те, которые уже входят в семейства (19) и (20). Единственным совпадением среди членов решения (33) может быть лишь

$$2ab = 2b(b-a),$$

что эквивалентно условию

$$b = 2a.$$

Поскольку Н.О.Д. $(a,b) = 1$, единственным решением последнего управления является пара $a = 1$, $b = 2$, что дает вырожденное решение

$$[1,4;2,2,4] = [1;2,2].$$

Так как при $b = 2$ единственное значение параметра a, удовлетворяющее условию (32), это $a = 1$, то ограничение $b \geqslant 3$ является условием невырожденности решения (33).

Теперь найдем значения параметров a и b, при которых решение (33) принадлежит одному из уже найденных семейств (19) или (20). Для этого необходимо и достаточно, чтобы одно из чисел m_i, $i \geqslant 3$, совпадало с удвоенным значением $m_2 = 2ab$. Поскольку среды всех m_i, $i \geqslant 3$, в семействе (33) лишь $2b(b-a)$ может быть больше, чем $m_2 = 2ab$, искомые значения параметров a и b должны удовлетворять уравнению

$$2b(b-a) = 2(2ab),$$

откуда $b = 3a$. Так как Н.О.Д. $(a,b) = 1$, то единственная пара значений параметров, при которых решение (33) содержится в ранее найденных семействах, это $a = 1$, $b = 3$. Действительно, это – решение

$$[2,6;3,4,12],$$

которое принадлежит семейству (20) при $a = 2$, $b = 3$. Поскольку при $b = 3$ единственным значением параметра a, удовлетворяющим условиям $a < b$, Н.О.Д. $(a, 2b) = 1$, является $a = 1$, семейство

(33) не дает новых решений при $b = 3$, т.е. мы должны ограничиться условием $b \geqslant 4$, что и дает семейство (21).

Осталось рассмотреть случай нечетного b в рациональном решении (30). Тогда наименьший общий знаменатель – $b(b-2a)$ и, следовательно, эквивалентное неприводимое целочисленное решение – это

$$[a(b-2a), 2ab; 2a(b-2a), ab, b(b-2a)]. \tag{34}$$

Соотношение $m_2 - 2m_1 = 4a^2$, во-первых, гарантирует то, что параметры, a и b однозначно определяются решением (34), а во-вторых, что множества решений (34) и (21) не пересекаются, поскольку для решений (21) выражение $m_2 - 2m_1 = 2a^2$ не является полным квадратом. Осталось проверить, что среди решений (34) нет вырожденных и совпадающих с решениями из семейств (19) и (20). Так как $2a(b-2a) < 2ab$ и $ab < 2ab$, то условием вырожденности является равенство

$$b(b-2a) = 2ab, \tag{35}$$

а условием совпадения с одним из решений из семейств (19) или (20) является равенство

$$b(b-2a) = 2(2ab), \tag{36}$$

но ни уравнение (35), ни (36) решений не имеют, так как b – нечетно, а (35) и (36) равносильны тождествам

$$b = 4a \qquad \text{и} \qquad b = 6a.$$

Таким образом мы получаем серию решений (22). •

11. Гипотеза. *Множество 5-членных неприводимых решений* **Задачи 0** *кроме решений составляющих семейства* (19)–(22) *содержит только следующие* 29 *решений*:

M=12: [1, 12; 2, 3, 4]
M=24: [2, 24; 3, 8, 12]
[2, 8; 3, 4, 24]
M=30: [1, 30; 2, 3, 5]
[2, 15; 3, 5, 30]
M=36: [2, 36; 4, 6, 9]
[2, 9; 3, 4, 36]
[3, 18; 4, 9, 36]

	[4, 18; 6, 9, 36]
M=60:	[3, 20; 5, 6, 60]
	[4, 30; 6, 15, 20]
	[4, 15; 5, 12, 30]
	[5, 20; 10, 12, 15]
	[5, 12; 6, 15, 20]
M=72:	[8, 18; 9, 24, 36]
M=84:	[7, 42; 12, 21, 28]
M=90:	[5, 45; 10, 15, 18]
	[6, 90; 10, 18, 45]
	[9, 15; 10, 18, 45]
	[10, 90; 18, 30, 45]
M=120:	[5, 120; 10, 15, 24]
	[6, 120; 12, 15, 40]
	[8, 120; 15, 24, 40]
	[8, 30; 15, 20, 24]
M=126:	[9, 42; 14, 18, 126]
M=140:	[7, 140; 14, 20, 35]
M=180:	[9, 60; 18, 20, 45]
M=210:	[14, 30; 15, 42, 70]
	[15, 210; 30, 42, 70]

В том, что приведенные 29 функций действительно являются решениями **Задачи 0**, легко убедиться, выписывая для каждой функции последовательности положительных и отрицательных скачков и проверяя, что это – перемежающиеся последовательности. Не удалось найти приемлемого доказательства того, что перечислены все неприводимые решения. Имеющееся рассуждение чрезвычайно громоздко и состоит в переборе огромного числа подмножеств возможных значений параметров, и для каждого такого подмножества находится всякий раз своя точка, в которой функция принимает значение равное либо 2, либо -1, т.е. не может быть решением. Это несмотря на то, что множество “запрещенных” значений параметров может быть выписано явно. Чтобы явно выписать допустимые параметры, условимся о нормировке. Мы выберем $m_1 = 1$ и будем рассматривать функцию

$$f(t) = [t] + \left[\frac{t}{m_2}\right] - \left[\frac{t}{m_3}\right] - \left[\frac{t}{m_4}\right] - \left[\frac{t}{m_5}\right] \qquad (37)$$

при произвольных вещественных значениях параметров m_i. Как и раньше, мы предполагаем, что $m_2 > m_1$ (в силу симметрии мы можем выбрать $m_2 \geqslant m_1$, а при $m_2 = m_1$ нет невырожденных решений). Тогда неотрицательность $f(t)$ при $t < 1$ позволяет нам ограничиться рассмотрением параметров $m_i \geqslant 1$, а невырожденность приводит к условию $m_i > 1$, $i \geqslant 2$. Положим $x_i = \frac{1}{m_i}$, тогда тройки $\{x_3, x_4, x_5\}$ пробегают внутренность единичного куба $0 < x_i < 1$, а параметр x_2 однозначно задается точкой из единичного куба через соотношение

$$x_2 = x_3 + x_4 + x_5 - 1,$$

что представляет собой просто условие (14) ограниченности функции f. Поскольку $0 < x_2 < 1$, допустимыми значениями параметров $\{x_3, x_4, x_5\}$ могут быть лишь точки единичного куба, лежащие между плоскостями $x_3 + x_4 + x_5 = 1$ и $x_3 + x_4 + x_5 = 2$.

Теперь мы можем сформулировать утверждение, описывающее множество значений параметров $\{x_3, x_4, x_5\}$, которые задают функции f, принимающие значения 0 и 1.

12. Утверждение. *Пусть n_i – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие соотношению*

$$n_1 \leqslant n_3 + n_4 + n_5 \leqslant 2n_1 + 1.$$

Обозначим символом $\left(\frac{n_3, n_4, n_5}{n_1}\right)_+$ множество внутренних точек многогранника с вершинами

$$\left.\begin{array}{c}
\left\{\dfrac{n_3}{n_1}, \dfrac{n_4}{n_1}, \dfrac{n_5}{n_1}\right\}, \\
\left\{\dfrac{n_3 - 1}{n_1}, \dfrac{n_4}{n_1}, \dfrac{n_5}{n_1}\right\}, \quad \left\{\dfrac{n_3}{n_1}, \dfrac{n_4 - 1}{n_1}, \dfrac{n_5}{n_1}\right\}, \quad \left\{\dfrac{n_3}{n_1}, \dfrac{n_4}{n_1}, \dfrac{n_5 - 1}{n_1}\right\}, \\
\left\{\dfrac{n_3}{n_1 + 1}, \dfrac{n_4}{n_1 + 1}, \dfrac{n_5}{n_1 + 1}\right\},
\end{array}\right\} \tag{38}$$

и символом $\left(\frac{n_3, n_4, n_5}{n_1}\right)_-$ множество внутренних точек многогранника с вершинами

$$\left.\begin{array}{c}
\left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\}, \\
\left\{\frac{n_3+1}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4+1}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5+1}{n_1+1}\right\}, \\
\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}.
\end{array}\right\} \tag{39}$$

Тогда параметры m_i, $m_i > 1$, $2 \leqslant i \leqslant 5$, задают функцию (37), *принимающую только значения* 0 *и* 1, *в том и только в том случае, если*

$$1 < \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_5} < 2, \tag{40}$$

$$\frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_5} - 1, \tag{41}$$

и точка с координатами $\left\{\frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_4}, \frac{1}{m_5}\right\}$ *не принадлежит множеству* $\Omega_+ \cup \Omega_-$, *где*

$$\Omega_+ = \bigcup_{\substack{1 \leqslant n_i \leqslant n_1,\, i=3,4,5 \\ n_1+1 \leqslant n_3+n_4+n_5 \leqslant 2n_1+1}} \left(\frac{n_3, n_4, n_5}{n_1}\right)_+,$$

$$\Omega_- = \bigcup_{\substack{0 \leqslant n_i \leqslant n_1,\, i=3,4,5 \\ n_1+1 \leqslant n_3+n_4+n_5 \leqslant 2n_1+1}} \left(\frac{n_3, n_4, n_5}{n_1}\right)_-.$$

Доказательство. Сначала заметим, что функция вида (37) принимает целочисленные значения, не меньшие -1 и не большие 2, если выполнено (41). Действительно, в этом случае

$$f(t) = -\{t\} - \left\{\frac{t}{m_2}\right\} + \left\{\frac{t}{m_3}\right\} + \left\{\frac{t}{m_4}\right\} + \left\{\frac{t}{m_5}\right\}$$

и, следовательно, $-2 < f(t) < 5$. Поэтому утверждение будет доказано, если мы проверим, что f принимает значение 2 в некоторой точке в том и только в том случае, если $\left\{\frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_4}, \frac{1}{m_5}\right\} \in \Omega_+$, а значение -1 функция f принимает в том и только в том случае, если $\left\{\frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_4}, \frac{1}{m_5}\right\} \in \Omega_-$.

Пусть точка t такова, что $f(t) = 2$. Введем числа n_i равенствами

$$[t] = n_1, \tag{42}$$

$$\left[\frac{t}{m_2}\right] = n_2, \tag{43}$$

$$\left[\frac{t}{m_3}\right] = n_3 - 1, \tag{44}$$

$$\left[\frac{t}{m_4}\right] = n_4 - 1, \tag{45}$$

$$\left[\frac{t}{m_5}\right] = n_5 - 1. \tag{46}$$

Тогда условие $f(t) = 2$ примет вид

$$n_1 + n_2 + 1 = n_3 + n_4 + n_5. \tag{47}$$

Поскольку функция f меняет значения только в точках скачков, не умаляя общности, мы можем считать, что $t = n_1$ или $t = n_2 m_2$.

Сначала рассмотрим случай $t = n_1$. Положим $x_i = \frac{1}{m_i}$ и перепишем условия (43)–(46) в следующем виде

$$n_2 \leqslant n_1 x_2 < n_2 + 1, \tag{48}$$

$$n_3 - 1 \leqslant n_1 x_3 < n_3, \tag{49}$$

$$n_4 - 1 \leqslant n_1 x_4 < n_4, \tag{50}$$

$$n_5 - 1 \leqslant n_1 x_5 < n_5. \tag{51}$$

Проверим, что семейство условий (48)–(51) равносильно следующим условиям

$$n_1 x_2 \geqslant n_2, \tag{52}$$

$$n_1 x_3 < n_3, \tag{53}$$

$$n_1 x_4 < n_4, \tag{54}$$

$$n_1 x_5 < n_5. \tag{55}$$

Действительно, складывая неравенства (53)–(55), получаем

$$n_1(x_3 + x_4 + x_5) < n_3 + n_4 + n_5.$$

Воспользовавшись тождествами (41) и (47), перепишем это неравенство в виде

$$n_1(x_2 + 1) < n_1 + n_2 + 1,$$

т.е.

$$n_1 x_2 < n_2 + 1,$$

что вместе с (52) дает (48).

В следующей выкладке мы предполагаем, что индексы i, j, k принимают разные значения из множества $\{3, 4, 5\}$. Выражая n_2 из (47) и x_2 из (41), преобразуем (52) следующим образом

$$\begin{aligned}(52) &\Longrightarrow n_1(x_2+1) \geqslant n_1 + n_2\\ &\Longrightarrow n_1(x_3+x_4+x_5) \geqslant n_3+n_4+n_5-1\\ &\Longrightarrow n_1x_i \geqslant n_i - 1 + (n_j - n_1x_j) + (n_k - n_1x_k).\end{aligned}$$

В силу (53)–(55) в последнем неравенстве выражения в скобках положительны и, следовательно,

$$n_1x_i \geqslant n_i - 1, \quad i = 3, 4, 5,$$

т.е. справедливы неравенства (49)–(51).

Рассматривая (52)–(55) как условия на координаты точки $\{x_3, x_4, x_5\}$ в трехмерном пространстве, мы видим, что неравенствам

$$x_3 + x_4 + x_5 \geqslant \frac{n_3+n_4+n_5-1}{n_1}, \tag{56}$$

$$x_3 < \frac{n_3}{n_1}, \tag{57}$$

$$x_4 < \frac{n_4}{n_1}, \tag{58}$$

$$x_5 < \frac{n_5}{n_1} \tag{59}$$

удовлетворяют точки, лежащие внутри правильной пирамиды с вершиной в точке $\left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\}$, основанием которой служит треугольник с вершинами

$$\left\{\frac{n_3-1}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\}, \left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4-1}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\}, \left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5-1}{n_1}\right\},$$

плюс еще точки самого основания за исключением его границы.

Теперь рассмотрим случай, когда $f(n_1m_2) = 2$. Тогда переписываем условия (42), (44)–(46) в виде двусторонних неравенств

$$n_1 \leqslant \frac{n_2}{x_2} < n_1 + 1,$$

$$n_3 - 1 \leqslant n_2\frac{x_3}{x_2} < n_3,$$

$$n_4 - 1 \leqslant n_2 \frac{x_4}{x_2} < n_4,$$

$$n_5 - 1 \leqslant n_2 \frac{x_5}{x_2} < n_5.$$

Как и в предыдущем случае эта система двусторонних неравенств равносильна системе односторонних неравенств

$$n_2 \geqslant n_1 x_2,$$

$$n_2 x_3 < n_3 x_2,$$

$$n_2 x_4 < n_4 x_2,$$

$$n_2 x_5 < n_5 x_2.$$

Опять, делая замену $x_2 = x_3 + x_4 + x_5 - 1$ и $n_2 = n_3 + n_4 + n_5 - n_1 - 1$, приходим к условиям

$$x_3 + x_4 + x_5 \leqslant \frac{n_3 + n_4 + n_5 - 1}{n_1}, \tag{60}$$

$$\frac{n_1 + 1 - n_4 - n_5}{n_3} x_3 + x_4 + x_5 > 1, \tag{61}$$

$$x_3 + \frac{n_1 + 1 - n_3 - n_5}{n_4} x_4 + x_5 > 1, \tag{62}$$

$$x_3 + x_4 + \frac{n_1 + 1 - n_3 - n_4}{n_5} x_5 > 1. \tag{63}$$

Если $n_3 + n_4 + n_5 > n_1 + 1$, то неравенства (60)–(63) задают тетраэдр с тем же основанием, что и у пирамиды (56)–(59), и еще одной вершиной в точке $\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}$, расположенной по другую сторону плоскости $x_3 + x_4 + x_5 = \frac{n_3+n_4+n_5-1}{n_1}$, нежели вершина пирамиды (56)–(59). Таким образом, объединение этих двух множеств дает выпуклый многогранник $\left(\frac{n_3, n_4, n_5}{n_1}\right)_+$ с вершинами (38).

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие значения могут принимать параметры n_i. Условие $m_2 > 1$ влечет неравенство $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1$, откуда

$$n_1 + 1 \leqslant n_3 + n_4 + n_5 \leqslant 2n_1 + 1. \tag{64}$$

Любой набор $\{n_3, n_4, n_5\}$, $1 \leqslant n_i \leqslant n_1$, удовлетворяющий неравенствам (64), определяет область $\left(\frac{n_3,n_4,n_5}{n_1}\right)_+$. Особо рассмотреть надо лишь случай $n_3 + n_4 + n_5 = n_1 + 1$. В этом случае условия (60)–(63) задают пустое множество, и множество $\left(\frac{n_3,n_4,n_5}{n_1}\right)_+$ сводится к пирамиде (56)–(59), основание которой лежит в плоскости $x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Условие (64) гарантирует не только выпуклость многогранника $\left(\frac{n_3,n_4,n_5}{n_1}\right)_+$, но и тот факт, что он имеет непустое пересечение с интересующей нас полосой $1 < x_3 + x_4 + x_5 < 2$.

Теперь перейдем к несколько более сложному случаю, когда $f(t) = -1$, и определим числа n_i равенствами, несколько отличающимися от (42)–(46), а именно, положим

$$n_i = \left[\frac{t}{m_i}\right] \tag{65}$$

для всех $i = 1, \ldots, 5$. При таком определении условие $f(t) = -1$ вновь влечет тождество (47).

Теперь в качестве точки t может выступать одна из трех точек, где функция имеет отрицательный скачок: $t = n_3m_3$, $t = n_4m_4$, $t = n_5m_5$. В силу симметрии достаточно рассмотреть какой-нибудь один случай, а два других получатся формальной циклической перестановкой индексов $\{3, 4, 5\}$. Пусть $t = n_3m_3$, тогда (65) дает следующие четыре двойных неравенства

$$n_1 \leqslant \frac{n_3}{x_3} < n_1 + 1, \tag{66}$$

$$n_2 \leqslant n_3\frac{x_2}{x_3} < n_2 + 1, \tag{67}$$

$$n_4 \leqslant n_3\frac{x_4}{x_3} < n_4 + 1, \tag{68}$$

$$n_5 \leqslant n_3\frac{x_5}{x_3} < n_5 + 1. \tag{69}$$

Как и раньше семейство двусторонних неравенств (66)–(69) приводится к следующему семейству односторонних неравенств:

$$n_3 < (n_1 + 1)x_3, \tag{70}$$

$$n_3x_2 < (n_2 + 1)x_3, \tag{71}$$

$$n_4x_3 \leqslant n_3x_4, \tag{72}$$

$$n_5x_3 \leqslant n_3x_5. \tag{73}$$

Складывая (72) и (73) и добавляя к обеим частям слагаемое n_3x_3, получаем

$$(n_3+n_4+n_5)x_3 \leqslant n_3(x_3+x_4+x_5),$$

что с учетом (41) и (47) даст

$$(n_1+n_2+1)x_3 \leqslant n_3(1+x_2).$$

Это неравенство вместе с (70) и (71) влечет (66):

$$n_1x_3 \leqslant n_3 + [n_3x_2 - (n_2+1)x_3] < n_3,$$

и (67):

$$n_2x_3 \leqslant n_3x_2 + [n_3 - (n_1+1)x_3] < n_3x_2.$$

Аналогично, складывая (70) и (71), восстанавливаем недостающие неравенства в (68) и (69):

$$n_3(1+x_2) < (n_1+n_2+2)x_3,$$

$$n_3(x_3+x_4+x_5) < (n_3+n_4+n_5+1)x_3,$$

$$n_3(x_4+x_5) < (n_4+n_5+1)x_3,$$

$$n_3x_4 < (n_4+1)x_3 + [n_5x_3 - x_3x_5] \leqslant (n_4+1)x_3,$$

$$n_3x_5 < (n_5+1)x_4 + [n_4x_3 - n_3x_4] \leqslant (n_5+1)x_4.$$

Множество, описываемое неравенствами (70)–(73), представляет собой внутренность тетраэдра с вершинами

$$\left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\}, \tag{74}$$

$$\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4+1}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \quad \left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5+1}{n_1+1}\right\}, \tag{75}$$

$$\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \tag{76}$$

плюс внутренние точки граней, примыкающие к ребру с вершинами (74), (76), плюс внутренние точки самого этого ребра.

Аналогично, условие $t = n_4 m_4$ приводит к тетраэдру с вершинами

$$\left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\},$$

$$\left\{\frac{n_3+1}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \quad \left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5+1}{n_1+1}\right\},$$

$$\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\},$$

и условие $t = n_5 m_5$ к тетраэдру с вершинами

$$\left\{\frac{n_3}{n_1}, \frac{n_4}{n_1}, \frac{n_5}{n_1}\right\},$$

$$\left\{\frac{n_3+1}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}, \quad \left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4+1}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\},$$

$$\left\{\frac{n_3}{n_1+1}, \frac{n_4}{n_1+1}, \frac{n_5}{n_1+1}\right\}.$$

Объединение этих множеств и дает множество $\left(\frac{n_3,n_4,n_5}{n_1}\right)_-$ – множество внутренних точек выпуклого многогранника с вершинами (39).

Осталось отметить, что условие $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1$ приводит к следующему множеству допустимых значений параметров n_i, $i = 3, 4, 5$:

$$0 \leqslant n_i \leqslant n_1, \quad n_1 + 1 \leqslant n_3 + n_4 + n_5 \leqslant 2n_1 + 1. \quad \bullet$$

В заключение сформулируем еще одно предположение.

13. Гипотеза. *Пусть*

$$\Pi = \big\{\{x_3, x_4, x_5\} : 0 < x_i < 1,\, 1 < x_3 + x_4 + x_5 < 2\big\}.$$

Тогда

$$\Pi \cap \Omega_+ = \Pi \cap \Omega_-. \tag{77}$$

Эта гипотеза основана на тождестве

$$f(x) + f(M - x) = -\sum c_i = 1,$$

справедливом для периодических 5-членных функций f в любой точке, отличной от точки скачка. Следовательно, область значения такой функции содержит и точку -1 и точку 2 или не содержит ни одну из них. Справедливость тождества (77) означала бы то, что это утверждение остается в силе и для непериодических функций.

Литература

1. B. Nyman, *On some groups and semigroups of translation.* These, Uppsala, 1950.
2. A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function.* Proc. Nat. Acad. Sci., **41** (1955), 312–314.
3. H. Bercovici and C. Foiaş, *A real variable restatement of Riemann's hypothesis.* Israel J. of Maths., **48** (1984), 57–68.
4. L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis.* Adv. in Maths., **101** (1993), 10–30.
5. N. Nikolski, *Distance formulae and invariant subspaces, with an application to localization of zeroes of the Riemann ζ-function.* Ann. Inst. Fouries, **45** (1995), 143–159.
6. В. Васюнин, *Об одной биортогональной системе, связанной с гипотезой Римана.* Алгебра и анализ, **7** (1995), No. 3, 118–135; English transl. in: St. Petersburg Math. J., **7** (1996), 405–419.
7. J. Lee, *Convergence and Riemann hypothesis.* Comm. Korean Math. Soc., **11** (1996), 57–62.
8. M. Balazard et É. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 1.* Adv. in Maths, **139** (1998), 310–321.
9. L. Báez-Duarte, *A class of invariant unifary operators.* to appear in Adv. in Math..
10. L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landrean et É. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3.* to appear.

Vasyunin V. I. On a system of step functions.

It is well-known that the Riemann hypothesis is equivalent to the assertion that the identity function belongs to the linear span in $L^2(0,1)$ of the following function set

$$\left[\frac{\alpha}{x}\right] - \alpha\left[\frac{1}{x}\right], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{$*$}$$

A step is presented in describing the set of all idempotents representable as a finite sum of functions of the form $(*)$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 сентября 1999 г.