Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. Е. Степанов

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО КОНФОРМНО–КИЛЛИНГОВЫХ ФОРМ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

§1. Введение и результаты

1.1. Установленная нами связь (см. [10] и [11]) между уравнениями Максвелла релятивистской электродинамики и дифференциальными конформно-киллинговыми 2-формами побудила нас написать статью [24], идеи и результаты которой получили дальнейшее развитие в настоящей работе. Методические соображения, что будет ясно из нижеследующего, обязали нас провести исследование на римановом многообразии, хотя большинство формулируемых результатов практически без изменения переносится на многообразия с неопределенной квадратичной формой (см. [12]).

1.2. Будем рассматривать расслоение дифференциальных p-форм $\Lambda^p M$ для всех $1 \leqslant p \leqslant m-1$ над m-мерным римановым многообразием (M, g) и *естественные операторы* D порядка 1, определенные на пространстве сечений $C^\infty\Lambda^p M$ расслоения $\Lambda^p M$. Не углубляясь в общую теорию (см., напр., [7] и [22]) скажем, что будем рассматривать дифференциальные операторы естественные в том смысле, в каком оператор внешнего дифференцирования $d : C^\infty\Lambda^p M \to C^\infty\Lambda^{p+1} M$ естественен для дифференцируемых отображений $f : (M, g) \to (M', g')$, когда $d \circ f^* = f^* \circ d$ для линейного транспонированного дифференциалу f_* отображения f^* (см. [5], стр. 17, 18). Так, например, все естественные операторы $D : C^\infty\Lambda^p M \to C^\infty\Lambda^{p+1} M$ исчерпываются (см. [23]) операторами вида $D = \lambda d$ для $\lambda \in \mathbf{R}$.

Жан-Поль Бургиньон изучал (см. [1], стр. 260–279) естественные дифференциальные операторы порядка 1, определенные на пространстве $C^\infty\Lambda^p M$. Среди естественных им выделялись *фундаментальные дифференциальные операторы*. По определению главные символы таких операторов являются проекторами на поточечно $O(m)$-неприводимые подпространства разложения пространств $T^*M \otimes \Lambda^p M$ и $\Lambda^p M$. Пространство $\Lambda^p M$ из-за его поточечной $O(m)$-неприводимости Ж.-П. Бургиньон исключил из рассмотрения и все внимание сосредоточил на $T^*M \otimes \Lambda^p M$. В результате было доказано существование трех фундаментальных операторов, но в явном виде он привел только два. Это, очевидно, оператор внешнего дифференцирования d и сопряженный ему оператор кодифференцирования d^*. В статье было отмечено (см. [1], стр. 265): "Имеется еще один фундаментальный оператор ... . Помимо случая $p = 1$ он не имеет просто геометрической интерпретации". И далее для $p = 1$ уточнялось (см. [1], стр. 274): "Ядро оператора состоит из инфинитезимальных конформных преобразований". В заключении Ж.-П. Бургиньоном было доказано, что все три фундаментальных оператора образуют базис пространства естественных дифференциальных операторов на $C^\infty \Lambda^p M$ со значениями в пространстве однородных тензоров.

В предлагаемой статье продолжено исследование, начатое Ж.-П. Бургиньоном. Выписан в явном виде третий фундаментальный дифференциальный оператор и доказано, что его ядро составляют введенные еще за десять лет до работы Ж.-П. Бургиньона конформно-киллинговые p-формы (см. [21] и [26]), которые служат обобщением конформно-киллинговых векторных полей (см., напр., [19], стр. 46, 47). В результате оказывается справедливой

Теорема 1. *Пусть (M, g) – риманово многообразие m измерений с метрикой g и связностью Леви–Чивита ∇. Существуют три фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка на пространстве $C^\infty \Lambda^p M$ сечений расслоения $\Lambda^p M$ дифференциальных p-форм $(1 \leqslant p \leqslant m-1)$ над M. Этими операторами будут*

$$D_1 = \frac{1}{p+1}\, d, \quad D_2 = \frac{1}{m-p+1}\, g \,\square\, d^*$$

и

$$D_3 = \nabla - \frac{1}{p+1}\, d - \frac{1}{m-p+1}\, g \,\square\, d^*.$$

Ядром первого оператора служат замкнутые, второго – козамкнутые, третьего – конформно-киллинговые p-формы, образующие три подпространства $\mathbf{D}^p(M, \mathbf{R})$, $\mathbf{F}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ векторного пространства дифференциальных p-форм $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$.

С помощью выделенного Ж.-П. Бургиньоном базиса $\{D_1, D_2, D_3\}$ пространства естественных дифференциальных операторов проведена классификация сечений расслоения $\Lambda^p M$, когда к одному классу относились дифференциальные p-формы, принадлежащие ядрам одного, двух или сразу трех базисных дифференциальных операторов. В дополнении к перечисленным в теореме, выделены векторное пространство $\mathbf{H}^p(M,\mathbf{R})$ замкнутых козамкнутых p-форм или, по другой терминологии, *гармонических p-форм* (см., напр., [19], стр. 43); векторное пространство $\mathbf{K}^p(M,\mathbf{R})$ козамкнутых конформно-киллинговых p-форм или, по другой терминологии, *киллинговых p-форм* (см., напр., [27] и [30]); векторное пространство $\mathbf{P}^p(M,\mathbf{R})$ замкнутых конформно-киллинговых p-форм или, по другой терминологии, *плоских p-форм* (см. [25] и [13]). Результатом может служить следующая таблица включений

$$\mathbf{D}^p(M,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{P}^p(M,\mathbf{R})$$

$$\mathbf{\Omega}^p(M,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{T}^p(M,\mathbf{R}) \qquad \mathbf{H}^p(M,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^p(M,\mathbf{R})$$

$$\mathbf{F}^p(M,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{K}^p(M,\mathbf{R}),$$

где $\mathbf{C}^p(M,\mathbf{R})$ – векторное пространство ковариантно постоянных или *параллельных p-форм* (см., напр., [17]), которые принадлежат ядрам сразу трех базисных дифференциальных операторов.

Далее продолжено исследование пространства $\mathbf{T}^p(M,\mathbf{R})$ конформно-киллинговых p-форм в его связи со своими подпространствами козамкнутых $\mathbf{K}^p(M,\mathbf{R})$ и замкнутых $\mathbf{P}^p(M,\mathbf{R})$ конформно-киллинговых p-форм.

Очевидно, что сумма произвольных козамкнутой и замкнутой конформно-киллинговых p-форм будет конформно-киллинговой p-формой. Обратное справедливо только для многообразия (M,g) постоянной секционной кривизны, что и составляет один из основных результатов работ Т. Кашивады (см. [21]) и Ш. Тачибаны (см. [26]). На основании этого формулируется

Следствие 1. *На m-мерном римановом многообразии (M,g) постоянной ненулевой секционной кривизны $\mathbf{T}^p(M,\mathbf{R}) = \mathbf{K}^p(M,\mathbf{R}) \oplus \mathbf{P}^p(M,\mathbf{R})$.*

Введем локальную ориентацию многообразия (M,g) и через $*$ обозначим оператор Ходжа, тогда справедлива следующая

Теорема 2. *На m-мерном римановом многообразии (M, g) $\mathbf{R}$-модули $\mathbf{P}^p(M, \mathbf{R})$ замкнутых конформно-киллинговых p-форм и $\mathbf{K}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ козамкнутых конформно-киллинговых $(m-p)$-форм являются $*$-изоморфными.*

Из этой Теоремы 2 и Следствия 1 выводится два результата, один из которых является аналогом известного факта $*$-изоморфизма $\mathbf{R}$-модулей $\mathbf{H}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{H}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ гармонических p- и $(m-p)$-форм.

Следствие 2. *На m-мерном римановом многообразии (M, g) постоянной ненулевой секционной кривизны $\mathbf{R}$-модули $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{T}^{m-p}(M, \mathbf{R})$ являются $*$-изоморфными.*

Следствие 3. *На m-мерном римановом многообразии постоянной секционной кривизны* $\dim \mathbf{K}^p(M, \mathbf{R}) \geqslant \frac{m!}{p!(m-p)!}$ *и* $\dim \mathbf{P}^p(M, \mathbf{R}) \geqslant \frac{m!}{p!(m-p)!}$.

В релятивистской физике особый интерес представляют *симметрические тензоры Киллинга* второго порядка, поскольку они связаны с квадратичными первыми интегралами движения для геодезических и с разделением переменных в различных дифференциальных уравнениях в частных производных, например, в уравнениях Гамильтона–Якоби (см. об этом [8], стр. 339, 340). Из компонент киллинговой или плоской p-форм всегда можно построить невырожденный тензор Киллинга второго порядка (см. [8], стр. 339, 340 и [13]). Оказывается, это можно сделать и из компонент конформно-киллинговой p-формы.

Теорема 3. *Если на m-мерном римановом многообразии (M, g) существует конформно-киллинговая p-форма $(1 \leqslant p \leqslant m-1)$, то на (M, g) существует и невырожденный симметрический тензор Киллинга второго порядка.*

Анализ дифференциальных уравнений замкнутых конформно-киллинговых p-форм позволил получить их интегралы на локально плоском римановом многообразии, а установленный в Теореме 2 $*$-изоморфизм пространств замкнутых и козамкнутых конформно-киллинговых форм позволил утверждать, что справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть ω и ω' суть замкнутая и козамкнутая конформно-киллинговые p-формы на m-мерном локально плоском римановом*

новом многообразии (M, g). Тогда существует окрестность U каждой точки $x \in M$, где компоненты форм имеют следующий вид:

$$\omega_{i_1\dots i_p} = x_{[i_1} A_{i_2\dots i_p]} + B_{i_1\dots i_p},$$

$$\omega'_{i_1\dots i_p} = x^l A'_{li_1\dots i_p} + B'_{i_1\dots i_p},$$

для локальной декартовой системы координат $x^1, \dots, x^m$ в окрестности U и постоянных компонент $A'_{li_1\dots i_p}$, $B'_{i_1\dots i_p}$, $A_{i_2\dots i_p}$, $B_{i_1\dots i_p}$ кососимметрических тензоров в U.

Выражение, аналогичное приведенному в Теореме 4, известно только для замкнутой конформно-киллинговой 2-формы в евклидовом пространстве E^m (см. [27]).

Пусть (M', g') есть n-мерное подмногообразие многообразия (M, g) с естественным вложением $f : (M', g') \to (M, g)$, тогда форму $\omega' = f^*\omega$ назовем *проекцией формы* ω из (M, g) на (M', g'). Справедлива

Теорема 5. *Для произвольной конформно-киллинговой p-формы на m-мерном римановом многообразии (M, g) ее проекция на n-мерное омбилическое подмногообразие (M', g') для $m > n > p > 0$ будет конформно-киллинговой p-формой.*

Используя сформулированной утверждение, Теорему 4, а также упоминавшийся уже результат Т. Кашивады (см. [21]) и Ш. Тачибаны (см. [26]) о строении конформно-киллинговых p-форм на римановом многообразии постоянной секционной кривизны нами найден вид конформно-киллинговой p-формы на гиперсфере S^{m-1} евклидова пространства E^m.

1.3. Вторым основным результатом Т. Кашивады (см. [21]) являлось найденное им условие, запрещающее существование отличных от нулевых конформно-киллинговых p-форм ω на m-мерном $(m > 2p)$ замкнутом, то есть компактном без границы, ориентированном римановом многообразии (M, g). Это условие выражалось в виде отрицательной определенности квадратичной формы $\mathcal{F}_p(\omega)$, чьи коэффициенты известным образом (см., напр., [19], стр. 53) выражаются через компоненты тензоров кривизны и Риччи многообразия (M, g). При этом необходимо отметить, что геометрический смысл условия знакоопределенности квадратичной формы $\mathcal{F}_p(\omega)$ на римановом многообразии (M, g) еще не до конца прояснен (см. об этом [28], стр. 985–987).

Позднее (см. [25]) нами было установлено, что неравенство $\mathcal{F}_p(\omega) < 0$ является условием, запрещающим существование на m-мерном замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) отличных от нулевых конформно-киллинговых p-форм ω при всех $p = 1, \ldots, m-1$.

Означенное "условие препятствия" было распространено (см. [30]) для киллинговых, а в виде $\mathcal{F}_p(\omega) > 0$ и для гармонических, p-форм на компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с краем ∂M при дополнительном условии знакоопределенности второй квадратичной формы края ∂M. Это побудило нас продолжить исследование. В результате был получен аналогичный результат для замкнутой конформно-киллинговой p-формы (см. [14]).

Рассмотрим теперь конформно-киллинговую p-форму ω на компактном римановом многообразии (M, g) с краем ∂M. Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть m-мерное компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с краем ∂M несет касающуюся ∂M конформно-киллинговую p-форму ω для $1 \leqslant p \leqslant m-1$. Если многообразие (M, g) является*

(1) *выпуклым и имеет неположительную секционную кривизну, то $\|\omega\| = \mathrm{const}$ и либо локально (M, g)-многообразие риманова произведения, либо ω удовлетворяет равенствам (3.11);*

(2) *выпуклым и имеет квазиотрицательную секционную кривизну, то ω удовлетворяет равенствам (3.11);*

(3) *строго выпуклым и имеет неположительную секционную кривизну, то $\omega = 0$.*

Уточним, что в формулировке Теоремы 6 равенство (3.11) имеет вид:

$$\omega_{ii_2\ldots i_p}\omega^{ji_2\ldots i_p} = \frac{p!}{m}\,\|\omega\|^2\delta_i^j \quad \text{для} \quad \|\omega\|^2 = \frac{1}{p!}\,g(\omega,\omega) = \mathrm{const}\,.$$

Конформно-киллинговые p-формы в работе [29] рассматривались на замкнутых кэлеровых многообразиях, где было доказано, что на $2m$-мерном ($m \geqslant 5$) замкнутом кэлеровом многообразии любая конформно-киллинговая p-форма ($m \geqslant p > 3$) параллельна. С точки зрения приложений будет интересным и тот факт, который дополняет доказанное автором в статье [13] утверждение о замкнутых и козамкнутых конформно-киллинговых 2-

формах максимального ранга на замкнутом римановом многообразии (M, g).

Следствие 4. *Пусть замкнутое риманово многообразие (M, g) размерности $2m$ несет конформно-киллинговую 2-форму ω максимального ранга. Если многообразие (M, g) имеет квазиотрицательную секционную кривизну или неположительную секционную кривизну и при этом локально не является многообразием риманова произведения, то (M, g) будет почти эрмитовым многообразием с фундаментальной 2-формой $\Omega = (\sqrt{2m}\|\omega\|)^{-1}\omega$.*

Следует отметить, что в отличие от классического результата М. Аудина и Дж. Лафонтена (см. [20]) в Следствие 4 обсуждается вопрос эрмитовости почти симплектического многообразия по отношению к фиксированной метрике.

§2. Локальная геометрия пространства конформно-киллинговых форм

2.1. Воспользовавшись классической теорией представлений полной линейной и ортогональной групп (см. [2] и [1], стр. 154–162) поставим задачу найти все фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка вида

$$D : C^{\infty}\Lambda^p M \to C^{\infty}(T^*M \otimes \Lambda^p M)$$

и доказать справедливость Теоремы 1.

Имеет место поточечно $GL(m, \mathbf{R})$-неприводимое разложение расслоения

$$T^*M \otimes \Lambda^p M = \Lambda^{p+1}M \oplus \operatorname{Ker}\Lambda^{p+1}.$$

Непосредственно проверяется, что подрасслоения $\Lambda^{p+1}M$ и $\operatorname{Ker}\Lambda^{p+1}$ ортогональны. Далее, тензорное расслоение $\operatorname{Ker}\Lambda^{p+1}$ можно разложить в ортогональную сумму двух поточечно $O(m)$-инвариантных подрасслоений – "следовой" $\mathbf{R}g \,\square\, \Lambda^{p-1}$ и "бесследовой" $\operatorname{Ker}\Lambda^{p+1} \cap \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}_{12}$ тензорных частей. Здесь по определению $\operatorname{Tr}_{12} : T^*M \otimes \Lambda^p M \to \Lambda^{p-1}M$ полагаем поточечно $O(m)$-эквивариантным отображением свертки и

$$(g \,\square\, \omega)(X_0, X_1, \ldots, X_p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}(-1)^i g(X_0, X_i)\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \ldots, X_p)$$

для произвольной $\omega \in C^\infty \Lambda^{p-1} M$ и любых $X_0, \dots, X_p \in C^\infty TM$. При этом ортогональные компоненты разложения

$$T^*M \otimes \Lambda^p M = \Lambda^{p+1} M \oplus (\mathbf{R}g \,\square\, \Lambda^{p-1} M) \oplus (\mathrm{Ker}\,\Lambda^{p+1} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}_{12}) \quad (2.1)$$

являются поточечно $O(m)$-неприводимыми, поскольку при $1 \leqslant p \leqslant m-1$ пространство $O(m)$-инвариантных квадратичных форм на пространстве $T^*M \otimes \Lambda^p M$ трехмерно. Это пространство порождается формами вида

$$\mathcal{Q}_1(K) = g(K, K); \quad \mathcal{Q}_2(K) = g(\mathrm{Tr}_{12} K, \mathrm{Tr}_{12} K);$$

$$\mathcal{Q}^3(K) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_{p+1} = 1}^{m} K(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p+1}}) K(e_{i_2}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{p+1}}),$$

которые представляют собою всевозможные следы формы $K \otimes K$ для произвольного поля тензоров $K \in C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^p M)$.

Из (2.1) выводим известное поточечно $O(m)$-неприводимое разложение

$$\otimes^2 T^*M = \Lambda^2 M \oplus S^2 M = \Lambda^2 M \oplus S_0^2 M \oplus C^\infty M g. \qquad (2.2)$$

Ортогональные проекции на неприводимые подрасслоения в разложении (2.1) задаются формулой

$$\mathrm{Id}_{T^*M \otimes \Lambda^p M} = \mathrm{Pr}_{\Lambda^{p+1} M} + \mathrm{Pr}_{\mathbf{R}g \,\square\, \Lambda^{p-1} M} + \mathrm{Pr}_{\mathrm{Ker}\,\Lambda^{p+1} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}_{12}},$$

где для произвольного поля $K \in C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^p M)$ имеем

$$[\mathrm{Pr}_{\Lambda^{p+1} M} K](X_0, X_1, \dots, X_p) =$$

$$= \frac{1}{p+1}[K(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}, X_p) + K(X_1, \dots, X_{p-1}, X_p, X_0) + \dots$$

$$\dots + K(X_p, X_0, X_1, \dots, X_{p-1}];$$

$$[\mathrm{Pr}_{\mathbf{R}g \,\square\, \Lambda^{p-1} M} K](X_0, X_1, \dots, X_p) =$$

$$= \frac{1}{m-p+1} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{p} (-1)^i g(X_0, X_i)(\mathrm{Tr}_{12} K)(X_1, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_p) \right];$$

$$[\mathrm{Pr}_{\mathrm{Ker}\,\Lambda^{p+1} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}_{12}} K](X_0, X_1, \dots, X_{p-1}, X_p) =$$

$$= K(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}, X_p) - \frac{1}{p+1}[K(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}, X_p)+$$

$$+K(X_1, \dots, X_{p-1}, X_p, X_0) + \dots + K(X_p, X_0, X_1, \dots, X_{p-1})]-$$

$$-\frac{1}{m-p+1}\times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^i g(X_0, X_i)(\mathrm{Tr}_{12}K)(X_1, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_p)\right];$$

где $\{e_1, \dots, e_m\}$ – произвольный ортонормированный базис T_xM.

Значение на $\Theta \in C^\infty T^*M$ главного символа $\sigma(d)$ оператора внешнего дифференцирования $d : C^\infty\Lambda^pM \to C^\infty\Lambda^{p+1}M$ будет (см. [9], стр. 76, 77) линейным отображением $C^\infty M$-модуля $C^\infty\Lambda^pM$ в $C^\infty\Lambda^{p+1}M$ по следующему закону:

$$\sigma(d)\Theta : \omega \in C^\infty\Lambda^pM \to \Theta \wedge \omega \in C^\infty\Lambda^{p+1}M.$$

Поэтому первым фундаментальным дифференциальным оператором первого порядка D_1 на $C^\infty\Lambda^pM$, как это нетрудно усмотреть, будет нормированный оператор внешнего дифференцирования

$$D_1 = \frac{1}{p+1}\, d.$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор первого порядка

$$D_2 : C^\infty\Lambda^pM \to C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^pM),$$

представляющий композицию двух операторов: оператора кодифференцирования $d^* : C^\infty\Lambda^pM \to C^\infty\Lambda^{p-1}M$ и алгебраического оператора $C^\infty\Lambda^{p-1}M \to C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^pM)$, действующего по следующему закону:

$$\Theta \in C^\infty\Lambda^{p-1}M \to \frac{1}{m-p+1}\, g \,\square\, \Theta \in C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^pM).$$

Напомним, что значением на произвольной 1-форме $\Theta \in C^\infty T^*M$ главного символа $\sigma(d^*)$ оператора кодифференцирования является (см. [9], стр. 71 и 79) линейное отображение $C^\infty M$-модуля $C^\infty\Lambda^pM$ в $C^\infty M$-модуль $C^\infty\Lambda^{p-1}M$ по следующему закону:

$$\sigma(d^*)\Theta : \omega \in C^\infty\Lambda^pM \to -i_\Theta\omega \in C^\infty\Lambda^{p+1}M,$$

где i_Θ – внутреннее произведение. Тогда значение на $\Theta \in C^\infty T^*M$ главного символа оператора D_2 будет согласно (1.9) следующим отображением $C^\infty M$-модулей:

$$\sigma(D_2)\Theta : \omega \in C^\infty \Lambda^p M \to -\frac{1}{m-p+1}\, g \,\Box\, i_\Theta \omega \in C^\infty \Lambda^{p+1} M.$$

Таким образом, главный символ $\sigma(D_2)$ оператора D_2 будет проектором на поточечно неприводимую относительно действия группы $O(m)$ компоненту $\mathbf{R}g \,\Box\, \Lambda^{p-1}M$ разложения (1.5), а потому вторым фундаментальным оператором будет оператор

$$D_2 = \frac{1}{m-p+1}\, g \,\Box\, d^*.$$

И, наконец, рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка

$$D_3 = \nabla - \frac{1}{p+1}\, d - \frac{1}{m-p+1}\, g \,\Box\, d^*;$$

значение на $\Theta \in C^\infty T^*M$ его главного символа является линейным отображением $C^\infty M$-модулей по следующему закону:

$$\begin{gathered} \sigma(D_3)\Theta : \omega \in \\ \in C^\infty \Lambda^p M \to \left(\Theta \otimes \omega - \frac{1}{p+1}\, \Theta \wedge \omega + \frac{1}{m-p+1}\, g \,\Box\, (i_\Theta \omega)\right) \in \\ \in C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^p M). \end{gathered}$$

Нетрудно усмотреть, что главный символ $\sigma(D_3)$ оператора D_3 является проектором на третью поточечно неприводимую компоненту разложения (2.1), а потому третьим фундаментальным оператором на пространстве $C^\infty \Lambda^p M$ сечений расслоения $\Lambda^p M$ будет оператор D_3.

Нетрудно усмотреть, что ядром первого дифференциального оператора D_1 служат замкнутые p-формы, составляющие подпространство $\mathbf{D}^p(M, \mathbf{R})$ векторного пространства $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$ *дифференциальных p-форм* на (M, g). В свою очередь, ядро второго дифференциального оператора D_2 составляет козамкнутые p-формы ω, для каждой из которых справедливо равенство $d^*\omega = 0$. Непосредственно проверяется, что множество таких форм образует подпространство пространства $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$. Обозначим его через $\mathbf{F}^p(M, \mathbf{R})$.

Опишем ядро третьего фундаментального оператора D_3. Полагаем $p = 1$, тогда для $\omega \in C^\infty T^*M$ будем иметь

$$(D_3\omega)(X,Y) = \frac{1}{2}[(\nabla_X \omega)Y + (\nabla_Y \omega)X] + \frac{1}{n}\,g(X,Y)d^*\omega =$$

$$= \frac{1}{2}(L_\xi g)(X,Y) - \frac{1}{n}(\operatorname{div}\xi)g(X,Y), \tag{2.3}$$

где ξ – векторное поле, двойственное 1-форме ω. Следовательно, для $p = 1$ ядро оператора D_3 состоит из инфинитезимальных конформных преобразований (см. [19], стр. 47), что и подтверждает вывод Ж.-П. Бургиньона (см. [1], стр. 274).

Вернемся к общему случаю, когда $p \geqslant 1$. Очевидно, что ядро оператора D_3 состоит из таких p-форм $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$, что

$$\nabla\omega = \frac{1}{p+1}\,d\omega + \frac{1}{m-p+1}\,g \,\Box\, d^*\omega. \tag{2.4}$$

Тогда по аналогии с (2.3) найдем выражение для следующей суммы ковариантных производных:

$$(\nabla_{X_0}\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_p) + (\nabla_{X_1}\omega)(X_0, X_2, \ldots, X_p) =$$

$$= \frac{1}{p+1}[(d\omega)(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_p) + (d\omega)(X_1, X_0, X_2, \ldots, X_p)] +$$

$$+ \frac{1}{m-p+1}\bigg\{\bigg[-g(X_0, X_1)(d^*\omega)(X_2, \ldots, X_p) + \sum_{i=2}^{p}(-1)^i g(X_0, X_i)\times$$

$$\times (d^*\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \ldots, X_p)\bigg] +$$

$$+\bigg[-g(X_1, X_0)(d^*\omega)(X_2, \ldots, X_p) +$$

$$+\sum_{i=2}^{p}(-1)^i g(X_1, X_i)(d^*\omega)(X_0, X_2, \ldots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \ldots, X_p)\bigg]\bigg\} =$$

$$= \frac{-2}{m-p+1}\,g(X_0, X_1)(d^*\omega)(X_2, \ldots, X_p) + \frac{1}{m-p+1}\sum_{i=1}^{p}[g(X_0, X_i)\times$$

$$\times (d^*\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \ldots, X_p) +$$

$$+g(X_1, X_i)(d^*\omega)(X_0, X_2, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_p)].$$

Принимая обозначения

$$\Theta = -\frac{1}{m-p+1}\, d^*\omega,$$

приходим к следующему уравнению:

$$(\nabla_{X_0}\omega)(X_1, X_2, \dots, X_p) + ((\nabla_{X_1}\omega)(X_0, X_2, \dots, X_p) =$$

$$= 2g(X_0, X_i)\Theta(X_2, \dots, X_p) -$$

$$-\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[g(X_0, X_i)\Theta(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_p) +$$

$$+g(X_1, X_i)\Theta(X_0, X_2, \dots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_p)]. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является определяющим (см. [21] и [26]) для конформно-киллинговой p-формы ω на римановом многообразии (M, g). Следовательно, нами доказано, что любая p-форма ω на римановом многообразии (M, g), принадлежащая ядру оператора D_3, является конформно-киллинговой.

С помощью уравнения (2.4) непосредственно доказывается, что множество конформно-киллинговых p-форм на (M, g) образует подпространство пространства $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$. Обозначим его через $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$.

Условие $\omega \in \operatorname{Ker} D_2 \cap \operatorname{Ker} D_3$ характеризует p-форму ω как козамкнутую конформно-киллинговую, то есть киллинговую p-форму. В свою очередь, условие $\omega \in \operatorname{Ker} D_2 \cap \operatorname{Ker} D_3$ выделяет замкнутую конформно-киллинговую, то есть плоскую p-форму. Замкнутые и козамкнутые конформно-киллинговые p-формы образуют на M подпространства $\mathbf{P}^p(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{K}^p(M, \mathbf{R})$ пространства $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$.

Еще один класс состоит из p-форм, принадлежащих ядрам сразу двух фундаментальных дифференциальных операторов D_1 и D_2. Формы этого класса образуют подпространство $\mathbf{H}^p(M, \mathbf{R})$ пространства $\mathbf{\Omega}^p(M, \mathbf{R})$ и носят название гармонических (см., напр., [27], стр. 43).

И, наконец, для любой p-формы ω, которая принадлежит ядрам сразу трех фундаментальных операторов, справедливо очевидное равенство $\nabla\omega = 0$. Теорема доказана.

2.2. Приступим к доказательству Теоремы 2. Для чего выберем локальную ориентацию многообразия M и обозначим через η форму объема многообразия M, полагая $\eta = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ в координатной окрестности $U \subset M$ с локальной системой координат $x^1, \ldots, x^m$, согласованной с локальной ориентацией M. Тогда можно определить для любого числа $p(0 \leqslant p \leqslant m)$ *оператор Ходжа* $*$, как единственный локальный изоморфизм векторных расслоений $* : \Lambda^p M \to \Lambda^{m-1} M$, для которого $\omega \wedge (*\omega) = g(\omega, \omega)\eta$ при всех $\omega, \omega' \in C^\infty \Lambda^p T_x^* M$ и $x \in M$.

Внешний дифференциал $d : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty \Lambda^{m-p} M$ и формально сопряженный ему оператор кодифференцирования d^* на локально ориентированном римановом многообразии (M, g) можно связать (см., напр., [9], стр. 78) следующим равенством: $d^* = - * \circ d \circ *$. В результате для любой p-формы $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$

$$*(d^*\omega) = -d(*\omega); \quad d^*(*\omega) = - * (d\omega). \tag{2.6}$$

Полагаем ω произвольной замкнутой конформно-киллинговой p-формой, то есть $\nabla\omega = \frac{1}{m-p+1}\, g \,\square\, d^*\omega$, тогда для $(m-p)$-формы $*\omega$ будет выполняться равенство

$$(\nabla_X * \omega)(X_{p+1}, \ldots, X_m) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!(m-p+1)} \times$$
$$\times \sum_{i_2, \ldots, i_p = 1}^{m} \eta(X, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}, X_{p+1}, \ldots, X_m)(d^*\omega)(e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}),$$

а потому $\nabla * \omega \in C^\infty \Lambda^{m-p+1} M$, и, следовательно, $*\omega$-козамкнутая конформно-киллинговая $(m-p)$-форма.

Обратно, пусть ω-козамкнутая конформно-киллинговая p-форма, то есть $d\omega = (p+1)\nabla\omega$, тогда контравариантные компоненты $(m-p)$-формы $*\omega$ будут удовлетворять равенству

$$\nabla_j (*\omega)^{i_{p+1} \ldots i_m} = \eta^{i_1 \ldots i_p \, i_{p+1} \ldots i_m} \nabla_{[j} \omega_{i_1 \ldots i_p]},$$

где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant m$; $1 \leqslant i_{p+1} < \ldots < i_m$; $j \neq i_1, \ldots, i_p$ и при этом $i_\alpha \neq i_a$ для $a = 1, \ldots, p$ и $\alpha = p+1, \ldots, m$. В этом случае $\nabla_j (*\omega)^{i_{p+1} \ldots i_m} = 0$ для всех $j \neq i_{p+1}, \ldots, i_m$.

Поскольку $*\omega$-кососимметрическая $(m-p)$-форма, то все индексы ее компоненты $(*\omega)^{i_{p+1} \ldots i_m}$ равноправны. На этом основании рассмотрим случай, когда $i_{p+1} = j$. Зафиксируем значения индексов $i_{p+2},\ldots,i_m$, так что $1\leqslant i_{p+2}<\ldots<i_m\leqslant m$, тогда значения для индекса $i_{p+1}=j$ можно будет выбрать $p+1$ способом среди оставшихся $p+1$ чисел среди $1,\ldots,m$. Наконец, значения индексов $i_1,\ldots,i_p$, таких, что $1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant m$ определяется однозначно, поскольку на них придется уже ровно p чисел среди $1,\ldots,m$. В результате получим равенство

$$\nabla_j(*\omega)^{j i_2\ldots i_m}=\eta^{i_1\ldots i_p j i_{p+2}\ldots i_m}\nabla_{[j}\omega_{i_1\ldots i_p]},$$

где, как в левой, так и в правой частях, отсутствует суммирование. Причем для тех же самых значений индексов $i_{p+2},\ldots,i_m$, но уже другого значения индекса $i_{p+1}=k$ будем иметь

$$\eta^{l_1\ldots l_p k i_{p+2}\ldots i_m}\nabla_{[k}\omega_{l_1\ldots l_p]}=\eta^{i_1\ldots i_p j i_{p+2}\ldots i_m}\nabla_{[j}\omega_{i_1\ldots i_p]},$$

поскольку $[k\,l_1\ldots l_p]$ и $[j\,i_1\ldots i_p]$ – это два упорядоченных набора из одних и тех же натуральных $p+1$ чисел, выбранных в промежутке от 1 до m. В результате

$$\nabla_j(*\omega)^{i_{p+1}i_{p+2}\ldots i_m}=\frac{1}{p+1}\big\{\big(\delta_j^{i_{p+1}}\eta^{i_1\ldots i_p l i_{p+2}\ldots i_m}-$$

$$-\delta_j^{i_{p+2}}\eta^{i_1\ldots i_p l i_{p+1}i_{p+3}\ldots i_m}-\ldots-\delta_j^{i_m}\eta^{i_1\ldots i_p l i_{p+1}i_{m-1}i_{p+1}}\big)\nabla_{[l}\omega_{i_1\ldots i_p]}\big\},$$

а потому $*\omega$ – замкнутая конформно-киллинговая $(m-p)$-форма. Теорема 2 доказана.

Теперь из следствия 1 и Теоремы 2 вытекает справедливость Следствия 2.

Известно (см. 18], стр. 165, 166), что проективно-плоское m-мерное $(m>2)$ риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну. Верно и обратное. В работе [15] нами было доказано, что m-мерное проективно-плоское многообразие допускает $\frac{m!}{p!(m-p)!}$ линейно независимых козамкнутых конформно-киллинговых p-форм. С учетом этого факта на основании Теоремы 2 заключаем, что справедливо Следствие 3.

2.3. В этом пункте построим пример невырожденного симметрического киллингова 2-тензора на основе конформно-киллинговой p-формы и тем самым докажем Теорему 3. Определим в произвольной координатной окрестности U на римановом многообразии (M,g) симметрический 2-тензор φ следующими равенствами:

$$\varphi_{ij}=g^{l_2k_2}\ldots g^{l_pk_p}\omega_{il_2\ldots l_p}\omega_{jk_2\ldots k_p}=\omega_{il_2\ldots l_p}\omega_j^{\ l_2\ldots l_p}. \qquad (2.7)$$

Полагаем ω конформно-киллинговой p-формой, тогда на основании равенств (2.4) и (2.7) выводим такие уравнения:

$$\nabla_k\varphi_{ij} = \nabla_k\omega_{il_2\dots l_p}\omega_j^{l_2\dots l_p} + \omega_i^{l_2\dots l_p}\nabla_k\omega_{jl_2\dots l_p} +$$

$$+\frac{1}{m-p+1}\{g_{kj}\Theta_i + g_{ki}\Theta_j - (p-1)(\Theta_{ikj} + \Theta_{jki})\},$$

где нами приняты следующие обозначения:

$$\Theta_l = g^{l_2k_2}\dots g^{l_pk_p}\omega_{ll_2\dots l_p}\nabla_k\omega^k_{k_2\dots k_p};$$
$$\Theta_{jlk} = g^{l_sk_s}\dots g^{l_pk_p}\omega_{jll_s\dots l_p}\nabla_j\omega^j_{kk_s\dots k_p}.$$

Простой подстановкой проверяется, что для любых $X, Y, Z \in C^\infty TM$

$$(\delta^*\varphi)(X,Y,Z) =$$

$$= -\frac{2}{m-p+2}\{g(X,Z)(\delta\varphi)(Y) + g(Y,Z)(\delta\varphi)(X) + g(X,Y)(\delta\varphi)(Z)\}, \tag{2.8}$$

где операторы δ^* и δ определяются на (M, G) относительно локальной системы координат $x^1, \dots, x^m$ следующими равенствами:

$$(\delta^*\varphi)_{ijk} = 3\nabla_{(i}\varphi_{jk)}; \quad (\delta\varphi) = -\nabla^i\varphi_{ik}. \tag{2.9}$$

Пусть в качестве ω выступает конформно-киллинговая p-форма. Если воспользоваться уравнениями (2.5) и (2.8) и равенствами (2.7) и (2.9), можно убедиться, что симметрический 2-тензор $\varphi' = \varphi - 1/p(\mathrm{Tr}\,\varphi)g$ является невырожденным киллинговым, то есть φ' не является нуль-тензором и $\delta^*\varphi' = 0$. Доказана Теорема 3.

2.4. Докажем Теорему 4. Рассмотрим закнутую конформно-киллинговую p-форму ω на римановом многообразии (M, g) и представим ее уравнение в следующем виде:

$$\nabla_k\omega_{i_1\dots i_p} = g_{k[i_1}\Theta_{i_2\dots i_p]}, \tag{2.10}$$

где, как это нетрудно установить,

$$\Theta_{i_2\dots i_p} = -p(m-p+1)^{-1}(d^*\omega)_{i_2\dots i_p}.$$

Условием интегрируемости уравнений типа (2.10) служат (см., напр., [18], стр. 43) тождества Риччи:

$$\nabla_j \nabla_k \omega_{i_1 \dots i_p} - \nabla_k \nabla_j \omega_{i_1 \dots i_p} = -\sum_{a=1}^{p} \omega_{i_1 \dots i_{a-1} l i_{a+1} \dots i_p} R^l_{i_a j k}, \qquad (2.11)$$

где R^l_{ikj} суть компоненты тензора R^∇ кривизны связности Леви–Чивита ∇ в локальной системе координат $x^l, \dots, x^m$ на (M, g).

Полагаем (M, g) римановым многообразием постоянной ненулевой секционной кривизны C, тогда

$$R^l_{ijk} = C(\delta^i_j g_{ik} - \delta^j_k g_{ij}).$$

В этом случае условия интегрируемости (2.11) уравнений (2.10) примут следующий вид:

$$g_{j[i_l} \nabla_{|k|} \Theta_{i_2 \dots i_p]} - g_{k[i_l} \nabla_{|j|} \Theta_{i_2 \dots i_p]} =$$
$$= 2C\{g_{i_l[k} \omega_{j]i_2 \dots i_p} + g_{i_2[k} \omega_{|i_1|j]i_3 \dots i_p} + \dots + g_{ip[k} \omega_{|i_l \dots i_{p-l}|j]}\}. \qquad (2.12)$$

Умножим левые и правые части каждого из равенств (2.12) на $g^{i_l j}$, а затем произведем суммирование по индексам i_l и j от 1 до m. Тогда получим

$$\nabla_k \Theta_{i_2 \dots i_p} = -pC\omega_{k i_2 \dots i_p}. \qquad (2.13)$$

Из вида уравнений (2.13) следует, что $\nabla\Theta \in C^\infty \Lambda^p M$ и Θ является козамкнутой конформно-киллинговой $(p-1)$-формой, т.е. $d\Theta = p\nabla\Theta$. Тогда, в случае $C \neq 0$ имеем $\omega = d\Theta'$, где $\Theta' = \frac{1}{p^2 C}\,\Theta$.

В случае локально плоского риманова многообразия (M, g) каждая его точка x имеет окрестность U, изометричную открытому подмножеству евклидова пространства. В этой окрестности $C = 0$ и всегда можно подобрать (см., напр., [3], стр. 88) локальную декартову систему координат $x^1, \dots, x^m$, в которой уравнения (2.13) примут вид $\partial_k \Theta_{i_2 \dots i_p} = 0$, где $\partial_k = \partial/\partial x^k$. А потому в этой окрестности $(p-1)$-форма Θ имеет постоянные компоненты $A_{i_2 \dots i_p}$. В свою очередь, условия интегрируемости (2.11) относительно той же системы координат перепишутся так:

$$\partial_j \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} = \partial_k \partial_j \omega_{i_1 \dots i_p}.$$

В этом случае интегралы самих уравнений (2.10) будут иметь в U следующий вид:

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = x_{[i_1} A_{i_2 \dots i_p]} + B_{i_1 \dots i_p}, \qquad (2.14)$$

где $B_{i_1\dots i_p}$ суть постоянные компоненты некоторой p-формы.

Здесь же на основании Теоремы 2 заключаем, что в координатной окрестности U многообразия (M,g) локальными компонентами козамкнутой конформно-киллинговой $(m-p)$-формы ω' будут

$$\omega'_{i_{p+1}\dots i_m} = (*\omega)_{i_{p+1}\dots i_m} = x^l A'_{l\, i_{p+1}\dots i_m} + B'_{i_{p+1}\dots i_m},$$

что и завершает доказательство Теоремы 4.

2.5. Для доказательства Теоремы 5 полагаем, что M' является n-мерным подмногообразием (M,g) с метрикой g'. Поскольку наши рассуждения локальные, то вложение $f : (M',g') \to (M,g)$ можно задать в терминах локальных координат уравнениями $x^i = x^i(u^1,\dots,u^n)$ для координатных окрестностей $U \subset M$ с координатами $x^1,\dots,x^m$ и $U' \subset M'$ с координатами $u^1,\dots,u^n$, такими, что $f(U') \subset U$. При этом будем полагать, что $\alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n$.

Дифференциал df отображения f обозначим через f_* так, что вектор f_*X' для $X' \in C^\infty TM'$ и $X' = X'^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ имеет координаты $f_*X' = f^i_\alpha X'^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Для каждой точки $x \in M'$ обозначим через $T^\perp_x M'$ подпространство пространства T_xM, которое является ортогональным дополнением T_xM' и обладает следующим свойством: $T^\perp_x M' \cap T_xM' = \{0\}$.

Обозначим через ∇' связность Леви–Чивита на (M',g'), порождаемую метрикой g'. Последняя совпадает со связностью, спроектированной на (M',g') из риманова многообразия (M,g). Тогда имеет место равенство

$$\nabla_{f_*X'} f_*Y = f_*\nabla'_{X'}Y' + \mathcal{Q}(X',Y'), \tag{2.15}$$

где билинейная форма $\mathcal{Q} : TM' \otimes TM' \to T^\perp M'$ называется *второй фундаментальной формой* (M',g'), причем (см. [30], стр. 193, 194)

$$\mathcal{Q}(X',Y') = (\nabla'_{X'} f_*)Y', \tag{2.16}$$

где

$$(\nabla'_{X'} f_*)Y' = \nabla_{f_*X'} f_*Y' - f_*(\nabla'_{X'}Y').$$

Уравнения (2.16) называются уравнениями Гаусса, а $\nabla' f_*$ – производной Ван дер Вардена–Бортолотти.

Подмногообразие (M', g') называется *омбилическим*, если (см., напр., [18], стр. 216, 217) существует сечение $\mathcal{N}$ векторного расслоения $T^{\perp}M'$, такое, что для любых $X', Y' \in C^{\infty}TM'$

$$\mathcal{Q}(X', Y') = g'(X', Y')\mathcal{N}. \tag{2.17}$$

С помощью транспонированного к f_* отображения f^* для любой p-формы ω на (M, g) можно определить p-форму $f^*\omega$ на (M', g') как $\omega' = f^*\omega$ или подробнее

$$(f^*\omega)(X'_1, \dots, X'_p) = \omega(f_* X'_1, \dots, f^* X'_p) \tag{2.18}$$

для $X'_1, \dots, X'_p \in C^{\infty}TM'$. Форму $\omega' = f^*\omega$ назовем *проекцией формы* ω из (M, g) на подмногообразие (M', g').

Продифференцируем ковариантным образом вдоль (M', g') равенство (2.18) с учетом (2.15) и (2.16), получим

$$(\nabla'_{X'} f^*\omega)(X'_1, X'_2, \dots, X'_p) = (\nabla_{f_* X'}\omega)(f_* X'_1, f_* X'_2, \dots, f_* X'_p)+$$

$$+\omega(\mathcal{Q}(X', X'_1), f_* X'_2, \dots, f_* X'_p) + \omega(f_* X'_1, \mathcal{Q}(X', X'_2), \dots, f_* X'_p) + \dots$$

$$\dots + \omega(f_* X'_1, f_* X'_2, \dots, \mathcal{Q}(X', X'_p)).$$

Потребуем, чтобы p-форма ω была конформно-киллинговой, тогда для омбилического (M', g') в соответствии с (2.17) получим

$$(\nabla'_{X'} f^*\omega)(X'_1, X'_2, \dots, X'_p) = \frac{1}{p+1}\, d(f^*\omega)(X', X'_1, X'_2 \dots, X'_p)+$$

$$+g'(X', X'_1)(f^*\Theta + i_{\mathcal{N}}\omega)(X'_2, \dots, X'_p)-$$

$$-g'(X', X'_2)(f^*\Theta + i_{\mathcal{N}}\omega)(X'_1, X'_3, \dots, X'_p)\dots$$

$$\dots - g'(X', X'_p)(f^*\Theta + i_{\mathcal{N}}\omega)(X'_2, \dots, X'_{p-1}, X'_1). \tag{2.19}$$

Здесь принято во внимание, что $d \circ f^* = f^* \circ d$. Равенство (2.19) означает, что $f^*\omega$ является конформно-киллинговой p-формой.

В заключение отметим, что аналогичное свойство для замкнутой конформно-киллинговой p-формы можно получить из (2.19), если положить $d\omega = 0$.

2.6. Пусть в качестве M выступает m-мерное евклидово пространство E^m со скалярным произведением $\langle , \rangle$. Рассмотрим единичную гиперсферу S^{m-l} в E^m, задаваемую уравнением

$$X = X(u^1, \dots, u^{m-1}),$$

где $X = x^i(u^1, \dots, u^m)e_i$ есть радиус-вектор точки гиперсферы S^{m-1} в ортонормированном репере $\{O, e_1, \dots, e_m\}$ с вершиной – точкой O, являющейся центром S^{m-1}.

Полагаем $X_\alpha = \partial/\partial u^\alpha X$ и $g'_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$. Обозначим через ∇_α оператор ковариантного дифференцирования с символами Кристофеля $\left\{ {\beta \atop \alpha\ \gamma} \right\}$, определяемыми индуцированной на гиперсфере S^{m-1} метрикой $g' = \{g_{\alpha\beta}\}$. Тогда уравнени Гаусса (2.16) гиперсферы S^{m-1} в E^m примут вид

$$\nabla_\alpha X_\beta = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} X_\beta - \left\{ {\beta \atop \alpha\ \gamma} \right\} X_\gamma = \mathcal{Q}_{\alpha\beta}\mathcal{N}, \tag{2.20}$$

где через $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ обозначены компоненты второй фундаментальной формы $\mathcal{Q}'$ гиперсферы S^{m-1} и через $\mathcal{N}$-поле единичных нормальных S^{m-1} векторов с компонентами $\mathcal{N}^i = x^i$.

При этом для гиперсферы S^{m-1} единичного радиуса будем иметь

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}. \tag{2.21}$$

Для построения примера конформно-киллинговой p-формы обратимся к рассуждениям п. 2.4.

Заметим, что в нашем случае $f'_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = X^i_\alpha$ и при этом $\sum_{i=1}^m x^i X^i_\alpha = 0$ для любого $\alpha = 1, \dots, m-1$, т.к. $\langle X, X_\alpha \rangle = 0$. Кроме того,

$$\nabla_\alpha X^i_\beta = g'_{\alpha\beta}\mathcal{N}^i. \tag{2.22}$$

Напомним, что компоненты $\omega_{i_1, i_2 \dots i_p}$ замкнутой конформно-киллинговой p-форме ω в E^m находятся из равенств

$$\omega_{i_1, i_2 \dots i_p} = x_{[i_1} A_{i_2 \dots i_p]} + B_{i_1, i_2 \dots i_p}$$

для произвольных постоянных кососимметрических $(p-1, 0)$-тензора A с компонентами $A_{i_2 \dots i_p}$ и $(p, 0)$-тензора B с компонентами $B_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ в ортонормированном репере пространства E_m.

Проекция $f^*\omega$ формы ω на S^{m-1} предстанет в следующем виде:

$$(f^*\omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = B_{i_1 \dots i_p} X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_p}_{\alpha_p}, \tag{2.23}$$

поскольку $x_{i_1} A_{i_2 \dots i_p} X^{i_1}_{[a_1} \dots X^{i_p}_{a_p]} = 0$. Проверяется непосредственно, что

$$\nabla_\alpha (f^* \omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = g'_{\alpha \alpha_1} (B_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathcal{N}^{i_1} X^{i_2}_{\alpha_2} \dots X^{i_p}_{\alpha_p} -$$

$$-g'_{\alpha \alpha_2} (B_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathcal{N}^{i_1} X^{i_2}_{\alpha_1} \dots X^{i_p}_{\alpha_p}) - \dots - g'_{\alpha \alpha_p} (B_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathcal{N}^{i_1} X^{i_2}_{\alpha_2} \dots X^{i_p}_{\alpha_1}).$$

Следовательно, p-форма ω, компоненты которой находятся из равенства (2.23) для произвольного постоянного кососимметрического тензорного поля B с компонентами $B_{i_1 i_2 \dots i_p}$ является замкнутой конформно-киллинговой формой, заданной на гиперсфере S^{m-1}.

Поскольку $(m-1)$-форма объема η' гиперсферы S^{m-1} определяется из равенства

$$\eta'_{a_1 \dots a_{m-1}} = \eta_{k i_1 \dots i_{m-1}} \mathcal{N}^k X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_{m-1}}_{\alpha_{m-1}} = \eta_{k i_1 \dots i_{m-1}} x^k X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_{m-1}}_{\alpha_{m-1}},$$

то примером козамкнутой конформно-киллинговой p-формы, заданной на гиперсфере S^{m-1}, будет p-форма ω' с компонентами

$$\omega'_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A'_{k i_1 \dots i_p} x^k X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_p}_{\alpha_p},$$

то есть $\omega' = *(f^* \omega)$ для некоторой замкнутой конформно-киллинговой $(m-p-1)$-формы ω на S^{m-1}.

В соответствии со Следствием 1 можем утверждать, что примером, заданной на гиперсфере S^{m-1} конформно-киллинговой p-формы, будет форма с компонентами

$$\omega'_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A'_{k i_1 \dots i_p} x^k X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_p}_{\alpha_p} + B_{i_1 \dots i_p} X^{i_1}_{\alpha_1} \dots X^{i_p}_{\alpha_p}.$$

§3. Некоторые аспекты глобальной геометрии пространства конформно-киллинговых форм

3.1. Пусть (M, g) будет m-мерным $(m \geqslant 2)$ компактным ориентированным римановым многообразием с краем ∂M. Последний является замкнутым подмногообразием в (M, g) с естественным вложением $f : \partial M \to (M, g)$. При этом ориентация на (M, g) индуцирует естественную ориентацию на ∂M с помощью задания в каждой точке $x \in \partial M$ направленного наружу единичного нормального к ∂M вектора $\mathcal{N}_x \in T_x M$.

Пусть локальные уравнения края в окрестности $U' = U \cap \partial M$ для координатной окрестности U в M произвольной точки $x \in$

∂M имеют вид $x^i = x^i(u^1, \dots, u^{m-1})$. Полагаем, как и раньше f_* дифференциалом (естественного) вложения f с компонентами $f^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ в U'. Тогда индуцированную на ∂M метрику g' зададим равенством $g' = g(f_*, f_*)$.

Выпишем для края ∂M как вложенного в M подмногообразия уравнения Гаусса

$$(\nabla'_{X'} f_*)Y' = \mathcal{Q}'(X', Y')\mathcal{N} \tag{3.1}$$

и Вейнгартена (см., напр., [30], стр. 92, 93)

$$\nabla'_{X'}\mathcal{N} = -f_* BX', \tag{3.2}$$

где $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \otimes \mathcal{N}$ – вторая фундаментальная форма ∂M и B – оператор Вейнгартена, определяемый равенством $\mathcal{Q}'(X', Y') = g'(BX', Y')$ для произвольных касательных к ∂M векторных полей X' и Y'.

3.2. Рассмотрим на M p-форму $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$. По аналогии с векторным полем p-форму ω называют (см. [30], стр. 126) *касательной к краю* ∂M, если вдоль него $f^* i_{\mathcal{N}}\omega = 0$, то есть

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}\mathcal{N}^{i_1} f^{i_2}_{\alpha_2} \dots f^{i_p}_{\alpha_p} = 0. \tag{3.3}$$

Условимся для дальнейшего, что $f^\alpha_i = g'^{\alpha\beta} g_{ij} f^j_\beta$, тогда

$$\mathcal{N}_j \mathcal{N}^i + f^\alpha_j f^i_\alpha = \delta^i_j. \tag{3.4}$$

Здесь $g'^{\alpha\beta}$ – контрвариантные компоненты матрического тензора g' края ∂M.

Свернем левую и правую части равенства (3.3) с $f^\alpha_j f^{\alpha_2}_{j_2} \dots f^{\alpha_p}_{j_p} \omega^{j j_2 \dots j_p}$ и принимая во внимание тождество (3.4), получим

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega_j^{\; i_2 \dots i_p} \mathcal{N}^{i_1} f^j_\alpha = 0. \tag{3.5}$$

Свернем левую и правую части равенства (3.3) с $\mathcal{N}^j f^{\alpha_2}_{j_2} \dots f^{\alpha_p}_{j_p} \omega_j^{\; i_2 - i_p}$, получим

$$\omega_{i i_2 \dots i_p} \omega_j^{\; i_2 \dots i_p} \mathcal{N}^i \mathcal{N}^j = 0. \tag{3.6}$$

Из этих двух равенств следует, что симметрический тензор φ с локальными компонентами (2.7) вдоль края ∂M многообразия M удовлетворяет условиям

$$\varphi(\mathcal{N}, f_* Y') = \varphi(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = 0 \tag{3.7}$$

для произвольного $Y' \in C^\infty T\partial M$.

Воспользовавшись компонентами симметрического тензорного поля φ построим векторное поле Z с локальными компонентами

$$Z^i = (\nabla_k \varphi^{ij})\varphi_j^k - (\nabla_l \varphi^{lj})\varphi_j^i.$$

Согласно [13] будем иметь

$$\operatorname{div} Z = \frac{1}{2}\sum_{i<j} R(e_i, e_j, e_i, e_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 + \frac{1}{6}\|\delta^*\varphi\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 - \|\delta\varphi\|^2.$$

Здесь $\{e_1, \dots, e_m\}$ – ортонормированный базис пространства T_xM в произвольной точке $x \in M$, для которого $\varphi(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ и $\mathcal{K}(e_i, e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j)$ – секционная кривизна многообразия M в направлении 2-подпространства из T_xM с базисом $\{e_i, e_j\}$ для тензора кривизны R.

С другой стороны, в силу (3.7) вдоль края ∂M многообразия M будем иметь $g(Z, \mathcal{N}) = (\nabla_k \varphi_{ij})\varphi^{kj}\mathcal{N}^i$. Придадим правой части этого равенства геометрически содержательный вид. Для чего продифференцируем вдоль края ∂M многообразия M с учетом уравнений Гаусса (3.1), Вейнгартена (3.2) и равенств (3.7) следующее равенство $\varphi_{ij} f_\alpha^j \mathcal{N}^i$, получим

$$f_\beta^k (\nabla_k \varphi_{ij}) f_\alpha^j \mathcal{N}^i + \varphi_{ij} f_\gamma^i f_\beta^j \mathcal{Q}_\alpha^\gamma = 0.$$

Свернем левую и правую части полученного равенства с $f_n^\alpha f_l^\beta \varphi^{nl}$, затем воспользуемся тождествами (3.4) и равенствами (3.7). В результате придем к следующему выражению:

$$(\nabla_k \varphi_{ij})\varphi^{kj}\mathcal{N}^i = \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(f_i^\alpha \varphi_l^i)(f_j^\beta \varphi^{jl}). \tag{3.8}$$

Обозначая квадратичную форму в правой части равенства (3.8) через $\mathcal{Q}(\varphi)$ будем иметь $g(Z, \mathcal{N}) = \mathcal{Q}(\varphi)$.

Воспользуемся теперь Теоремой Стокса

$$\int_M \operatorname{div} Z dv = \int_{\partial M} g(Z, \mathcal{N}) dv', \tag{3.9}$$

где $\operatorname{div} = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ и $dv' = \sqrt{\det g'}\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^{m-1}$. Последняя в нашем случае примет следующий вид:

$$\int_M \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i<j} R(e_i, e_j, e_i, e_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 + \frac{1}{6}\|\delta^*\varphi\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 - \|\delta\varphi\|^2 \right\} dv =$$

$$= \int\limits_{\partial M} \mathcal{Q}(\varphi) dv'. \tag{3.10}$$

3.3. Вернемся к рассмотрению дифференциальных p-форм. Пусть симметрический 2-тензор φ, задается в координатной окрестности U равенствами (2.7). Тогда условие $\nabla\varphi = 0$, записываемое в следующем виде:

$$\nabla_k \varphi_{ij} = (\nabla_k \omega_{i\, i_2 \ldots i_p}) \omega_j^{\;i_2 \ldots i_p} + \omega_{i\, i_2 \ldots i_p} (\nabla_k \omega_j^{\;i_2 \ldots i_p}) = 0,$$

в результате операции свертки приводит к равенству $\nabla \|\omega\|^2 = 0$. В свою очередь, условие $\varphi = \lambda g$ для $\lambda = \mathrm{const}$ в данном случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{i i_2 \ldots i_p} \omega_j^{\;i_2 \ldots i_p} &= \frac{p!}{m} \|\omega\|^2 g_{ij} \\ \|\omega\|^2 &= \mathrm{const} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Пусть теперь участвующие в равенствах (2.7) компоненты $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ принадлежат конформно-киллинговой p-форме ω для $1 \leqslant p \leqslant m-1$, касающейся края ∂M. Тогда для симметрического бесследового 2-тензора $\varphi' = \varphi - 1/p(\operatorname{Tr}\varphi) g$, как это отмечалось, $\delta^* \varphi' = 0$. Воспользуемся интегральной формулой (3.10). В нашем случае для $\int_M \sum_{i<j}^{1\ldots m} \mathcal{K}(e_i', e_j')(\lambda_i' - \lambda_j')^2 dv \leqslant 0$ и $\mathcal{Q}' \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{i<j}^{1\ldots m} \mathcal{K}(e_i', e_j')(\lambda_i' - \lambda_j')^2 = 0; \tag{3.12}$$

$$\nabla \varphi' = \nabla \varphi - \frac{1}{p} \nabla (\operatorname{Tr}\varphi) g = 0; \tag{3.13}$$

$$(\delta\varphi')(X) = (\delta\varphi)(X) + \frac{1}{p} X (\operatorname{Tr}\varphi) = 0, \tag{3.14}$$

где $\varphi_{ij}' = \lambda_i' \delta_{ij}$ в ортонормированном базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и любого $X \in C^\infty TM$.

Неравенство $\int_M \sum_{i<j}^{1\ldots m} \mathcal{K}(e_i', e_j')(\lambda_i' - \lambda_j')^2 dv \leqslant 0$ может быть следствием одного из следующих требований:

(1) секционная кривизна $\mathcal{K}$ *квазиотрицательная* (см. [28], стр. 975, 976), то есть $\mathcal{K} \leqslant 0$ всюду на (M, g) за исключением, по меньшей мере, одной точки $x \in M$, где для всех 2-мерных направлений $\sigma \subset T_x M$ справедливо неравенство $\mathcal{K}(\sigma) < 0$;

(2) секционная кривизна $\mathcal{K} \leqslant 0$ всюду на (M, g).

Первое требование в силу (3.12) повлечет равенства $\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_m = \lambda'$ и $\varphi' = \lambda' g$. Тогда на основании равенства $\varphi' = \varphi - p^{-1}(\mathrm{Tr}\,\varphi)g$ заключаем, что

$$\lambda' = \frac{p-m}{mp}\,\mathrm{Tr}\ \varphi;$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{p}(\mathrm{Tr}\,\varphi)g = \frac{p-m}{mp}(\mathrm{Tr}\,\varphi)g + \frac{1}{p}(\mathrm{Tr}\,\varphi) = \frac{1}{m}(\mathrm{Tr}\,\varphi)g.$$

Кроме того, в предположении, что $1 \leqslant p \leqslant m-1$, из (3.22) имеем: $\mathrm{Tr}\,\varphi = \mathrm{const}$. Следовательно, если замкнутая конформно-киллинговая p-форма ω отлична от нуля, то она должна удовлетворять равенствам (3.11).

Второе требование в силу равенств (2.8), (2.9) и (3.14) приводит к условию $\Theta' = 0$. Вследствие этого $\delta\varphi = \nabla(\mathrm{Tr}\,\varphi) = 0$ и, более того, из (3.13) при этом выводим, что $\nabla\varphi = 0$. Наличие на многообразии (M, g) поля ковариантно постоянных симметрических 2-тензорных φ в силу теоремы П. А. Широкова (см. [17]) позволяет рассматривать локально (M, g) в виде многообразия риманова произведения.

И, наконец, при условии $\mathcal{K} \leqslant 0$ и $\mathcal{Q}' > 0$ из интегрального уравнения (3.10) в случае конформно-киллинговой p-формы ω выводим $\omega = 0$.

Здесь же заметим, что условие $\mathcal{Q}' \geqslant 0$ означает (см. [4], стр. 285) *выпуклость* многообразия (M, g). В свою очередь, условие $\mathcal{Q}' > 0$ означает *строгую выпуклость* многообразия (M, g).

Подводя итог, можем сформулировать Теорему 6.

3.4. Полагаем (M, g) замкнутым римановым многообразием, удовлетворяющим одному из двух приведенных в Теореме 6 условиям, тогда произвольная заданная на (M, g) конформно-киллинговая 2-форма ω максимального ранга должна подчиняться равенствам:

$$g^{lk}\omega_{il}\omega_{jk} = \frac{1}{2m}\|\omega\|^2 g_{ij} \quad \text{для} \quad \|\omega\|^2 = \mathrm{const}\,.$$

Тогда можно усмотреть, что тензорное поле J типа (1.1) с компонентами

$$J^i_j = (\sqrt{2m}\|\omega\|)^{-1} g^{il}\omega_{lj}$$

обладает следующими свойствами: $J^2 = -\mathrm{Id}$ и $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для произвольных $X, Y \in C^\infty TM$. Следовательно, риманово (M, g) является *почти эрмитовым многообразием* (см. [6], стр. 139, 140) с фундаментальной 2-формой $\Omega = (\sqrt{2m}\|\omega\|)^{-1}\omega$.

Литература

1. А. Бессе, *Четырехмерная риманова геометрия.* Мир, М., 1985.
2. Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления.* ИЛ, М., 1947.
3. Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны.* Наука, М., 1982.
4. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом.* Мир, М., 1971.
5. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии.* т. 1, Наука, М., 1981.
6. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии.* т. 2, Наука, М., 1981.
7. И. Коларж, *Естественные расслоения и операторы.* Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Пробл. геометрии **23** (1990), 67–98.
8. Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херль, М. Мак-Каллум, *Точные решения уравнений Эйнштейна.* Энергоиздат, М., 1982.
9. Р. Пале, *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе.* Мир, М., 1970.
10. С. Е. Степанов, *Об одном применении теории представлений групп в релятивистской электродинамике.* Известия вузов. Физика No. 5 (1996), 90–93.
11. С. Е. Степанов, *О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла.* Теор. и матем. физика **111**, No. 1 (1997), 32–43.
12. С. Е. Степанов, *Плоские дифференциальные 2-формы и специальные уравнения Максвелла.* Дифф. геомет. многооб. фигур No. 27 (1996), 107–111.
13. С. Е. Степанов, *О применении одной теоремы П. А. Широкова в технике Бохнера.* Известия вузов. Математика No. 9 (1996), 53–59.
14. С. Е. Степанов, *Формы Киллинга на компактном многообразии с краем.* Тезисы докладов Межд. геом. семин. им. Н. И. Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей," Казанский гос. ун-т, Казань, 1997, с.114.
15. С. Е. Степанов, И. И. Цыганок, *Оператор Ходжа на многообразии с эквиаффинной структурой.* Дифф. геом. многооб. фигур No. 27 (1996), 114–117.
16. С. Е. Степанов, *Симметрические тензоры на компактном римановом многообразии.* Матем. заметки **52**, No. 4 (1992), 85–88.
17. П. А. Широков, *Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'-овых пространствах.* Известия Физ.-матем. о-ва, Казань **25** (1925), 86–114.
18. Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия.* ИЛ, М., 1948.
19. К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти.* ИЛ, М., 1957.
20. M. Audin, J. Lafontaine, *Holomorphic curves in sympletic geometry.* Progg. Math **117** (1944), 40–45.
21. T. Kashiwada, *On conformal Killing tensor.* Natural Sci. Rep., Ochanomizu Univ. **19**, no. 2 (1968), 67–74.

22. I. Kolař, P. W. Michor, J. Slovak, *Natural operation in differential geometry.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1993.
23. R. Palais, *Natural operations on differential forms.* Transl. Amer. Math. Soc. **92**, no. 1 (1959), 125–141.
24. S. E. Stepanov, *A class of closed forms and special Maxwell's equations.* Tensor, N.S. **58** (1997), 245–255.
25. S. E. Stepanov, *The seven classes of almost symplectic structures.* Webs & Quasigroups, Tver' State Univ., Tver', 1992, 93–96.
26. Th. Tashibana, *On conformal Killing tensor in a Riemannian space.* Tohoku Math. J. **21** (1969), 56–64.
27. Th. Tashibana, *On Killing tensor in a Riemannian space.* Tohoku Math. J. **20** (19689), 257–264.
28. H. Wu, *The Bochner technique.* Proc. Beijing symp. Diff. geom. and diff. equat., Sci.-Press & Gordon-Breach, New York, 1982, pp. 929–1071.
29. S. Yamaguchi, Jun Jae-Bok, S. Ayabe, *On the conformal Killing p-form in compact Kaehlerian manifolds,.* Tensor **42**, no. 3 (1985), 258–271.
30. K. Yano, *Integral formulas in Riemannian geometry.* Marcel Dekker, New York, 1970.

Stepanov S. E. The vector space of the conformal Killing forms on a Riemannian manifold.

The concept of a conformal Killing p-form in a Riemannian manifold of dimension $m > p \geqslant 1$ was introduced by S. Tashibana and T. Kashiwada. They generalized some results of a conformal Killing vector field to a conformal Killing p-form.

In this paper we define a conformal Killing p-form with the help of natural differental operators on Riemannian manifolds and representations of orthogonal groups. Then we consider the vector space $\mathbf{T}^p(M, \mathbf{R})$ of conformal Killing p-forms and it's two subspaces $\mathbf{K}^p(M, \mathbf{R})$ of coclosed conformal Killing p-forms and $\mathbf{P}^p(M, \mathbf{R})$ of closed conformal Killing p-forms. In particular, we generalize some local and global results of Tashibana and Kashiwada about a conformal Killing and Killing p-forms.

In the end of the paper we give an interesting application to Hermitian geometry.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 29 марта 1999 г.