Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. А. Крат

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУППЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Введение

Идея рассматривать группы как геометрические объекты и изучать их свойства методами геометрии последовательно развита М. Громовым в работе [4]. К числу наиболее важных свойств бесконечных дискретных групп относятся их асимптотические свойства, т.е. грубо говоря, метрические свойства, которые можно наблюдать неограниченно удаляясь от группы. Формально, соответствующее пространство определяется как предел по Хаусдорфу–Громову гомотетий метрики слов на группе с коэффициентами стремящимися к нулю и называется асимптотическим конусом группы. Асимптотический конус является квазиинвариантом и дает полную картину поведения дискретной группы на бесконечности.

Для конечно-порожденных абелевых групп асимптотический конус является пространством Минковского (конечно-мерным банаховым пространством) и, согласно замечательному результату Д. Бураго [1], этот конус удален от самой абелевой группы на конечное расстояние по Хаусдорфу–Громову.

Для дискретных нильпотентных групп известно, что их асимптотический конус всегда существует и является односвязной нильпотентной группой Ли с метрикой Карно-Каратеодори [7]. Такую метрическую структуру можно обнаружить изучая границу на бесконечности комплексных гиперболических пространств $\mathbb{CH}^n$.

В настоящей работе мы рассматриваем простейшую нетривиальную бесконечную дискретную нильпотентную группу – группу Гейзенберга Г. Нашей целью является получение обобщения результата Д. Бураго для этой группы, то есть получение оценок для расстояния между группой Гейзенберга с левоинвариантной внутренней метрикой и её асимптотическим конусом $\mathrm{Con}_\infty \Gamma$.

Основной результат работы состоит в следующем:

Теорема 0.1. *Для любой метрики слов на группе Гейзенберга* Γ *расстояние по Хаусдорфу–Громову между* Γ *и её конусом* $\mathrm{Con}_\infty\Gamma$ *конечно.*

Группа Γ является решёткой в 3-мерной односвязной нильпотентной группе Ли $H \simeq \mathbb{R}^3$. В стандартных координатах (x, y, z) на H ось Oz является центром группы и 1-форма $w = dz - xdy$ определяет 2-распределение на H, для которого метрика асимптотического конуса является метрикой Карно-Каратеодори (мы отождествляем $H \cong \mathrm{Con}_\infty\Gamma$). Пути в H обладают тем замечательным свойством, что разность высот конечной и начальной точки равна площади, ограничиваемой проекцией рассматриваемого пути на плоскость Oxy. Именно на это свойство опирается доказательство теоремы 0.1.

Опишем структуру работы. Работа состоит из введения и трех параграфов.

В первом параграфе напоминаются основные понятия и определения, используемые в работе. Описывается структура асимптотического конуса дискретной группы Гейзенберга с метрикой слов и приводится переформулировка теоремы 0.1, которая в дальнейшем доказывается в параграфах 2 и 3.

Во втором параграфе мы приводим доказательство основного результата работы для горизонтальных (см. параграф 2) метрик слов. Для этого мы устанавливаем связь сложения в группе Гейзенберга с площадью на плоскости и затем сводим доказательство к сравнению длин различных кривых в плоскости Oxy группы H, ограничивающих одинаковые площади.

В третьем параграфе мы завершаем доказательство теоремы 0.1, путем сведения общего случая метрики слов к случаю горизонтальной метрики слов.

1. Асимптотическая норма и предельный конус

В этом параграфе мы напоминаем понятие группы Гейзенберга и определение асимптотического конуса. Кроме того, мы приводим описание строения асимптотического конуса для группы Гейзенберга, опираясь на результат работы [7]. Для этого мы вводим понятие асимптотической нормы, использующее понятие растяжения в группе Гейзенберга. В конце пункта мы приводим переформулировку теоремы 0.1, которую в дальнейшем и будем доказывать.

Основной объект настоящей работы – дискретная группа Гейзенберга Γ, т.е. группа, которая допускает представление

$$< a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1 >,$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ – коммутатор. Элементы группы Γ можно считать точками решётки $\{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 2z \in \mathbb{Z}\}$ При этом групповая операция имеет вид:

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \big(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\big),$$

если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и $\gamma_1 = (x_1, y_1, z_1)$, а $\gamma_2 = (x_2, y_2, z_2)$. В этом случае порождающие элементы можно отождествить с $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), c = (0, 0, 1)$. Очевидно, что группа не коммутативна, а единичным элементом служит элемент $(0, 0, 0)$.

Напомним теперь определение асимптотического конуса, как оно дается в работе [5]. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – метрические пространства, *искажением* отображения $f : X \to X_n$ называется величина $\operatorname{dis}(f) = \sup\limits_{x,y\in X} \big||f(x), f(y)|_{X_n} - |x, y|_X\big|$. Пусть все пространства X_n являются компактными, тогда говорят, что X является *пределом по Хаусдорфу–Громову* последовательности метрических пространств X_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-сеть $A_\varepsilon \subset X$, являющаяся равномерным пределом некоторых ε-сетей $(A_\varepsilon)_n$ пространств X_n, т.е. существуют биекции $f_n : (A_\varepsilon)_n \to (A_\varepsilon)$ такие, что $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dis}(f_n) = 0$. В случае, когда пространства X_n не являются компактными, это определение не удобно, и понятие предела по Хаусдорфу–Громову вводится следующим образом. Пусть (X, x) – метрическое пространство с отмеченной точкой. Говорят, что (X, x) является *пределом по Хаусдорфу–Громову* последовательности метрических пространств с отмеченными точками (X_n, x_n) и пишут

$$\lim_{n\to\infty}(X_n, x_n) = (X, x),$$

если для любого $R > 0$ шар $B(R, x)$ радиуса R с центром в точке x с метрикой, индуцированной из пространства X, является пределом по Хаусдорфу–Громову последовательности шаров $B(R, x_n)$ радиусов R с центрами в точках x_n с метриками, индуцированными из пространств X_n. Если существует предел $\mathrm{Con}_\infty\Gamma = \lim\limits_{\lambda\to 0}(\Gamma, \lambda\|\cdot\|)$,то пространство $\mathrm{Con}_\infty\Gamma$ называется *асимптотическим конусом* группы Γ с метрикой $\|\cdot\|$.

Опишем теперь структуру асимптотического конуса группы Гейзенберга. Для этого, как уже было сказано выше введем понятие растяжения.

Определение 1.1. *Растяжением группы* Γ *с коэффициентом* k *называется функция* $\delta_k : \Gamma \to \Gamma$, $\delta_k(\gamma) = (kx, ky, k^2 z)$, *где* $\gamma = (x, y, z)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Растяжения δ_k играют для группы Γ ту же роль, что и гомотетии для коммутативных групп. Перечислим некоторые свойства растяжений, которые легко следуют из их определения.

Свойства:

(1) Растяжение δ_k является гомоморфизмом для всех $k \in \mathbb{Z}$; если $k \neq 0$, то гомоморфизм δ_k инъективен.
(2) $\delta_{km}(\gamma) = \delta_k\big(\delta_m(\gamma)\big)$.
(3) $\delta_{k+m}(\gamma) = \delta_k(\gamma) * \delta_m(\gamma) * c^{2kmz}$, где $\gamma = (x, y, z)$.
(4) Если $z = 0$, то $\delta_k(\gamma) = \gamma^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть на группе Γ введена норма $\|\cdot\| : \Gamma \to \mathbb{R}$. С любой нормой можно ассоциировать левоинвариантную метрику на Γ,

$$|\gamma_1, \gamma_2| = \|\gamma_1^{-1} * \gamma_2\|.$$

Напомним определение внутренней метрики на дискретной группе, как его приводит Пансу [7].

Определение 1.2. *Левоинвариантная метрика ассоциировонная с нормой* $\|\cdot\|$, *на дискретной группе* G *называется внутренней, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $p > 0$ *такое, что* $\forall \gamma \in G, \gamma$ *можно представить в виде* $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$, *где* $\|\gamma_i\| \leqslant p$ *и* $\|\gamma_1\| + \cdots + \|\gamma_n\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\gamma\|$.

Из результата Пансу [7] следует, что если левоинвариантная метрика ассоциированная с исходной нормой $\|\cdot\|$ на группе Гейзенберга Γ является внутренней, то асимптотическим конусом группы Гейзенберга с этой метрикой является пространство $(H, \|\cdot\|_\infty)$, где под H подразумевается непрерывная группа Гейзенберга, а именно группа верхних треугольных вещественных матриц 3×3 с единицами на главной диагонали. Левоинвариантная метрика d_∞ ассоциированная с нормой $\|\cdot\|_\infty$ является метрикой Карно–Каратеодори–Финслера, заданной парой (L_0, F_0), где L_0 – двумерное подпространство алгебры Ли группы Ли H, натянутое на векторы $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$, а F_0 – метрика Минковского на L_0. Кроме того для элементов $\gamma \in \Gamma \subset H$ существует предел $\lim_{k\to\infty} \frac{\|\delta_k(\gamma)\|}{k}$ и справедливо равенство

$$\|\gamma\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\delta_k(\gamma)\|}{k}.$$

Определение 1.3. *Величину $\|\gamma\|_\infty$ будем называть асимптотической нормой элемента $\gamma \in \Gamma$.*

Опишем формулу группового умножения в группе H.

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab_1 - ba_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\exp A * \exp A_1 = \exp(A + A_1 + \frac{1}{2}[A, A_1]),$$

здесь A, A_1 – элементы алгебры Ли группы H. Отождествляя алгебру Ли группы Ли H с помощью отображения обратного к экспоненциальному мы получим формулу группового умножения такую же как и в дискретном случае (см. [8]). Таким образом групп H – это множество $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, где сложение осуществляется по правилу

$$(x, y, z) * (x_1, y_1, z_1) = \big(x + x_1, y + y_1, z + z_1 + \frac{1}{2}(xy_1 - yx_1)\big).$$

В дальнейшем мы рассматриваем метрики слов на группе Гейзенберга Γ. Каждая такая метрика ассоциирована с конечным порождающим множеством $E \subset \Gamma$, которое будем называть *алфавитом.* Любой элемент $\gamma \in \Gamma$ может быть представлен в виде $\gamma = a_1 * \cdots * a_k$, $a_i \in E$. Наименьшее такое k называется длиной элемента γ, $\|\gamma\| = k$. Длина, очевидно, является нормой, и соответствующая левоинвариантная метрика на Γ называется *метрикой слов.*

Очевидно, что метрика слов является внутренней на группе Гейзенберга Γ.

В дальнейшем мы отождествляем E с подмножеством нашей решетки которую, в свою очередь, вкладываем в H. Таким образом считаем, что $E \subset H$. Будем также предполагать, что E симметрично, т.е. $E = E^{-1}$. В частности, $|E| = 2n$ – четное число. Конечную последовательность векторов алфавита будем называть *словом.* Количество векторов в слове называется *длиной* этого слова.

Переформулируем основной результат работы. Напомним, что расстоянием по Хаусдорфу–Громову между пространствами X и Y называется величина

$$|X, Y|_H = \max(\delta(X, Y), \delta(Y, X)),$$

где $\delta(X, Y) = \inf_{f:X \to Y} \mathrm{dis}(f)$. Для доказательства того факта, что

$$\big|(\Gamma, \|\cdot\|), (H, \|\cdot\|_\infty)\big|_H \leqslant \mathrm{Const},$$

где $\|\cdot\|$ является нормой слов на группе Гейзенберга Γ, достаточно сравнить две различные нормы на Γ $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\infty$. Доказав, что $\big|\|\gamma\| - \|\gamma\|_\infty\big| \leqslant \mathrm{Const}$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и рассмотрев вложение $\Gamma \to H$, получим требуемое утверждение. Иначе говоря, для доказательства теоремы 0.1 достаточно установить, что имеют место два неравенства

$$\|\gamma\|_\infty \leqslant \|\gamma\| + \mathrm{Const}, \tag{1}$$

$$\|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|_\infty + \mathrm{Const}. \tag{2}$$

Проверке этих оценок посвящена остальная часть этой работы.

2. Горизонтальные метрики слов

В этом параграфе мы приводим доказательство неравенств (1) и (2) для метрик слов некоторого специального вида, которые сейчас определим.

Определение 2.1. *Если третьи координаты всех векторов алфавита равны* 0*, то алфавит* E *будем называть горизонтальным, и соответствующую ему метрику слов горизонтальной метрикой слов.*

2.1. Неравенство $\|\gamma\|_\infty \leqslant \|\gamma\|$ в случае горизонтальной метрики. Пусть левоинвариантная метрика на группе Гейзенберга Γ

ассоциированная с нормой $\|\cdot\|$ является горизонтальной метрикой слов. Предположим, что $\|\gamma\| = N$ и γ представляется в виде $\gamma = a_1 * \cdots * a_N$, тогда

$$\delta_k(\gamma) = \delta_k(a_1) * \cdots * \delta_k(a_N) = {a_1}^k * \cdots * {a_N}^k$$

(по свойству 4 растяжения).

А тогда $\|\delta_k(\gamma)\| \leqslant kN = k\|\gamma\|$, и

$$\|\gamma\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|\delta_k(\gamma)\| \leqslant N = \|\gamma\|.$$

2.2. Связь сложения в группе Гейзенберга с площадью на плоскости. В этом пункте мы покажем, что третья координата элемента, равного сумме нескольких горизонтальных векторов, равна площади, ограничиваемой проекциями этих векторов на плоскости Oxy. Это дает новый способ вычислять норму произвольного элемента $\gamma = (x, y, z)$ в метрике слов, как количество элементов в наименьшем наборе векторов на плоскости Oxy, сумма которых равна вектору (x, y) и ограничивающих площадь z. Такой способ вычисления нормы дает возможность свести доказательство неравенств (1) и (2) к сравнению изопериметрических кривых на плоскости.

Определение 2.2. *Пусть $E \subset \Gamma$ – алфавит, $a_1 \dots a_k$ – слово в этом алфавите. Обозначим проекции векторов $a_1, \dots, a_k$ на плоскость Oxy как $\bar a_1, \dots, \bar a_k$. Пусть C – некоторая точка нашей решетки на плоскости. Составим ломаную из векторов $\bar a_1, \dots, \bar a_k$ так: вектор $\bar a_1$ отложим из точки C, а каждый следующий вектор этой последовательности будем откладывать из конца предыдущего. Точку, являющуюся концом вектора $\bar a_k$, обозначим A. Такую ломаную с фиксированным направлением обхода от C к A будем называть путем с началом C, соответствующим слову $a_1 \dots a_k$. Точку A будем называть концом этого пути. Если начало пути совпадает с концом, то будем называть его замкнутым.*

Определение 2.3. *Если слово $a_1 \dots a_k$ реализует некоторый элемент $\gamma \in \Gamma$, т.е.*

$$\gamma = a_1 * \cdots * a_k,$$

то путь с началом в 0, соответствующий слову $a_1 \dots a_k$, будем называть путем, реализующим элемент γ и обозначать l_γ. Конец пути, реализующего элемент γ, будем обозначать A_γ.

Определение 2.4. *Длиной пути l с началом в точке C, соответствующего слову $a_1 \dots a_k$, называется длина этого слова (т.е. k). Будем обозначать её $|l|$.*

Определение 2.5. *Если слово $a_1 \dots a_k$ реализует элемент $\gamma \in \Gamma$ и $k = \|\gamma\|$, то путь, реализующий γ, соответствующий этому слову, назовем кратчайшим путем, реализующим элемент γ.*

Введенная система координат задает на плоскости Oxy ориентацию, поэтому можно говорить о движении по или против часовой стрелки на этой плоскости.

Определение 2.6. *Пусть вектор $a = (x_a, y_a)$ отложен от точки C с координатами (x_1, y_1). Конец этого вектора попадет в точку A с координатами*

$$(x_2, y_2) = (x_1 + x_a, y_1 + y_a).$$

Площадь треугольника CAO, взятую со знаком “+”, если вектор a входит в его границу против часовой стрелки, и со знаком “−”, если вектор a входит в его границу по часовой стрелке назовем площадью, соответствующей вектору a, и обозначим $S(a)$ (см. рис. 1).

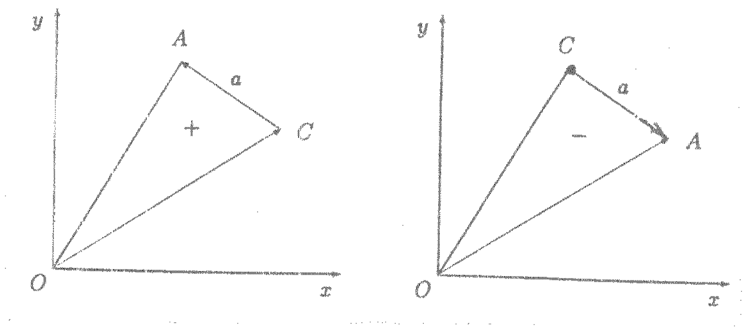

Рис. 1. Площадь, соответствующая вектору a.

Пусть l – путь с началом в точке C, соответствующий слову $a_1 \dots a_k$. Векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ – проекции векторов $a_1, \dots, a_k$ на *плоскость Oxy. Точка, из которой откладывается вектор $\bar{a}_i$ в пути l, однозначно определяется этим путем, поэтому площадь, соответствующую вектору $\bar{a}_i$, будем обозначать $S_l(\bar{a}_i)$.*

Площадью, ограниченной путем l, соответствующим слову $a_1 \ldots a_k$, будем называть сумму площадей $S_l(\bar{a}_i)$, соответствующих проекциям векторов слова. Эту площадь будем обозначать $S(l)$.

Теорема 2.1. *Пусть на группе Гейзенберга Γ введена горизонтальная метрика слов с алфавитом E. Если $\gamma = (x, y, z)$ – элемент из Γ, l_γ – путь, реализующий элемент γ, то $z = S(l_\gamma)$.*

Доказательство. Пусть путь l_γ соответствует слову $a_1 \ldots a_k$, т.е.

$$\gamma = a_1 * \cdots * a_k, \ a_i = (x_i, y_i, 0) \in E.$$

Обозначим путь с началом в 0, соответствующий слову $a_1 \ldots a_i$, через $l(i)$, а координаты произведения $a_1 * \cdots * a_i$через $x(i), y(i), z(i)$. Очевидно, имеем: $S\big(l(1)\big) = 0 = z(1)$. Пусть $S\big(l(i)\big) = z(i)$, докажем, что $S\big(l(i+1)\big) = z(i+1)$. Действительно, согласно формуле умножения имеем:

$$z(i+1) = z(i) + \frac{1}{2}(x(i)y_{i+1} - x_{i+1}y(i)) = S\big(l(i)\big) + S_l(\bar{a}_{i+1}) = S\big(l(i+1)\big).$$

Определение 2.7. *Пусть l – путь с началом в точке $C(x_1, y_1)$ и концом в точке $A(x_2, y_2)$, O – начало координат. Пополнением пути l называется ломаная L, составленная из ломаной l и двух векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$. В ней зафиксирован порядок обхода: сперва путь l, а потом векторы в указанном порядке.*

Замечание. Очевидно, что если разбить путь l на несколько меньших путей $l_1, \ldots, l_n$, то

$$S(l) = S(l_1) + \cdots + S(l_n).$$

Замечание. Если путь l не имеет самопересечений, т.е. ограничивает многоугольник, то площадь этого многоугольника равна $S(l)$.

Разбиение на замкнутые ломаные. Пусть l – путь с началом в точке C, соответствующий слову $a_1 \ldots a_k$, L – его пополнение.

L может иметь самопересечения и разбивать плоскость на несколько областей. Разобьем L на несколько замкнутых ломаных, используя следующий процесс. Рассмотрим векторы, составляющие ломаную L, являющуюся пополнением пути l, как направленные отрезки. Заметим, что эта ломаная состоит из конечного числа векторов, каждый из которых может пересекаться с другим по одному отрезку, одной точке или пустому множеству. Отрезки самопересечения ломаной L могут быть двух видов: первого вида, когда векторы пересекающиеся по отрезку являются соседними и второго вида, когда они не являются соседними (см. рис. 2).

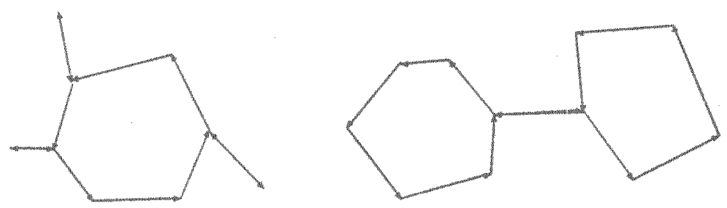

Рис. 2. Отрезки самопересечения первого и второго вида.

Рассмотрим естественную параметризацию $L : [0, x] \to \mathbb{R}^2$, $L(0) = L(x) = C$. Выйдем из точки C и будем идти по кривой L, пока первый раз не придем в точку самопересечения или в первую точку отрезка самопересечения второго вида. Отрезки самопересечения первого вида будем игнорировать. Когда-нибудь это обязательно случится, т.к. ломаная замкнутая. Обозначим эту точку через K. Пусть $L(t_1) = L(t_2) = K$, t_1 – момент первого прохождения точки K, t_2 – момент второго прохождения точки K. Кривую $L|_{[t_1,t_2]}$ обозначим l_1. Заменим L на кривую $L_1 : [0, x - (t_2 - t_1)] \to \mathbb{R}^2$,

$$L_1(t) = \begin{cases} L(t) & t < t_1, \\ L(t + t_2 - t_1) & t > t_1 \end{cases}$$

(см. рис. 3).

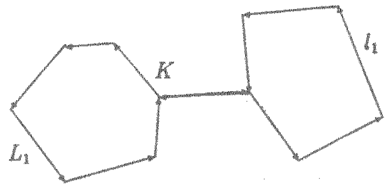

Рис. 3. Выделение замкнутой ломаной.

Получилась замкнутая кривая, к которой снова применим тот же процесс, и так до тех пор пока на очередном шаге полученная ломаная L не будет иметь точек самопересечения указанного вида. При каждой такой процедуре мы выделяем многоугольник l_i (может быть вырожденный).

Обозначение. Каждая из кривых l_i – замкнутая ломаная, которую можно считать многоугольником. Обозначим через S_i площадь многоугольника, ограниченного ломаной l_i, взятую со знаком "+", если l_i обходит многоугольник против часовой стрелки, и со знаком "−", если по часовой стрелке.

Из приведенных выше замечаний, очевидно, вытекает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть дан путь l с началом в точке C, соответствующий слову $a_1 \dots a_k$, L – его пополнение, а $l_1, \dots, l_m$ – разбиение L на замкнутые ломаные, произведенное по правилу, приведенному выше. Тогда*

$$S(l) = \sum_{i=1}^{m} S_i. \qquad \square$$

2.3. Обобщенная метрика слов. Вернемся теперь к пространству $(H, \|\cdot\|_\infty)$ являющемуся асимптотическим конусом пространства $(\Gamma, \|\cdot\|)$. В этом пункте мы опишем метрику этого пространства, которая, как легко видеть, является внутренней. Затем сравним длину кратчайшей, соединяющей произвольный элемент γ с нулевым с нормой элемента γ в пространстве $(\Gamma, \|\cdot\|)$.

Обозначение. Выпуклую оболочку проекций векторов алфавита исходной метрики слов на плоскость Oxy, отложенных из начала координат обозначим через P.

P является выпуклым центрально-симметричным многоугольником.

Как уже было сказано выше, левоинвариантная метрика, соответствующая норме $\|\cdot\|_\infty$ на группе Ли H является метрикой Карно–Каратеодори–Финслера, заданной парой (L_0, F_0), где L_0 – двумерное подпространство алгебры Ли группы Ли H, натянутое на векторы $(1,0,0)$ и $(0,1,0)$, а F_0 – метрика Минковского на L_0, где в качестве единичного шара взят многоугольник P. Это означает, что спрямляемыми в этом пространстве являются кривые $l(t)$, касающиеся распределения определяемого подпространством L_0, и их длина вычисляется как $|l| = \int F_0(\frac{dl}{dt})dt$. При этом расстояние между элементами $\gamma_1, \gamma_2 \in H$ вычисляется по формуле

$$d_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \inf\{|l| \mid l(0) = \gamma_1, l(1) = \gamma_2, l \text{ – спрямляемая}\}.$$

Согласно [8, теорема 1] проекции геодезических $(x(t), y(t), z(t))$ в пространстве $(H, \|\cdot\|_\infty)$ на плоскость Минковского Oxy являются либо метрическими прямыми либо периодическими траекториями на изопериметриксах. При этом $z(t)$ равно ориентированной площади, зачерчиваемой отрезком $[O, (x(t), y(t))]$. Кроме того, если геодезическая является кратчайшей, то она не может делать несколько оборотов вокруг изопериметрикса.

Напомним, что по определению, *метрической прямой* в пространстве с внутренней метрикой называется изометрическое вложение евклидовой прямой в это пространство. *Изопериметриксом* на плоскости Минковского называется простая замкнутая кривая, ограничивающая область наибольшей евклидовой площади среди кривых такой же длины [6]. Занумеруем векторы алфавита $E = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$ таким образом, что ориентированные углы α_i, которые составляют их проекции с осью Ox, возрастают от вектора a_1 к вектору a_{2n}, то есть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{2n}$. Ориентация углов однозначно задается ориентацией плоскости. Иными словами они занумерованы против часовой стрелки.

Пусть элемент $\gamma = (x, y, z)$. Рассмотрим вектор с координатами (x, y) как направленный отрезок, отложенный от начала координат.

Определение 2.8. *Будем говорить, что* $\gamma = (x, y, z)$ *элемент ти-*

па i, $i \in \{1, \dots, 2n\}$, если угол, который составляет вектор (x, y) с осью Ox, больше либо равен α_i и меньше α_{i+1}. Если угол, который составляет вектор (x, y) с осью Ox больше либо равен α_{2n} или меньше α_1, то будем говорить, что $\gamma = (x, y, z)$ элемент типа $2n$.

Обозначение. Пусть $\gamma = (x, y, z)$ – элемент типа i. Предположим, что $(x, y) = r_i\bar{a}_i + r_{i+1}\bar{a}_{i+1}$. Отложим из начала координат вектор $r_i\bar{a}_i$ и пусть конец этого вектора точка C, а конец вектора (x, y) – точка A. Тогда площадь треугольника OCA обозначим $C(x, y)$ (см. рис. 4).

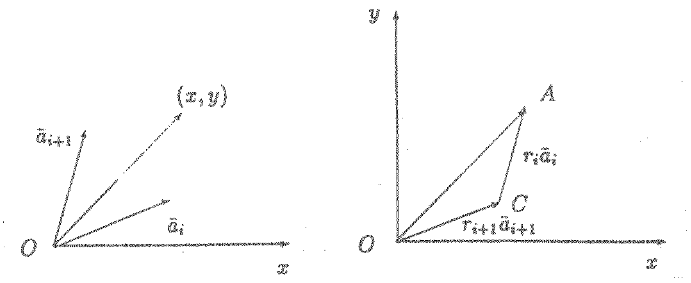

Рис. 4. Площадь $C(x, y)$.

Замечание. Отрезок метрической прямой, соединяющий точку с координатами (x, y) с началом координат, ограничивает площадь не большую, чем $C(x, y)$. Из этого, очевидно, вытекает, что если для элемента γ справедливо $|z| > C(x, y)$, то проекция кратчайшей, соединяющей γ с началом координат является частью изопериметрикса. В противном случае проекция кратчайшей является метрической прямой в пространстве Минковского.

Определение 2.9. *Метрические прямые, которые являются ломаными, составленными из векторов, сонаправленных с проекциями соседних векторов алфавита $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_{i+1}$, в которых присутствует хотя бы один вектор сонаправленный с вектором $\bar{a}_i$, будем называть алфавитными типа i.*

Лемма 2.3. *Для любого элемента* $\gamma = (x, y, z) \in H$, *такого что* $|z| \leqslant C(x, y)$ *существует кратчайшая, соединяющая указаный элемент с началом координат, проекция которой на плоскость Минковского является алфавитной метрической прямой того же типа, что и элемент* γ.

Доказательство. Пусть элемент γ имеет тип i. Возможны два случая: когда вектор с координатами (x, y) сонаправлен с вектором $\bar{a}_i$ и когда он не сонаправлен.

В первом случае $C(x, y) = 0$, а значит и $z = 0$ и искомой кратчайшей служит ломаная, состоящая из одного вектора с координатами $(x, y, 0)$.

Перейдем к доказательству второго случая. Предположим, что $(x, y) = r_i\bar{a}_i + r_{i+1}\bar{a}_{i+1}$. Из условия вытекает, что уравнение $z = C(x, y)\alpha^2 - C(x, y)(1 - \alpha)^2$ имеет единственное решение α и $\alpha \in [0, 1]$. Отложим из начала координат вектор $\alpha r_i\bar{a}_i$. Пусть точка C его конец. Затем отложим из точки C вектор $\alpha r_{i+1}\bar{a}_{i+1}$ и обозначим его конец через D. Отложим из точки D вектор $(1 - \alpha)r_{i+1}\bar{a}_{i+1}$. Пусть его конец точка E. И, наконец, отложим из точки E вектор $(1 - \alpha)r_i\bar{a}_i$, обозначив его конец через A (см. рис. 5).

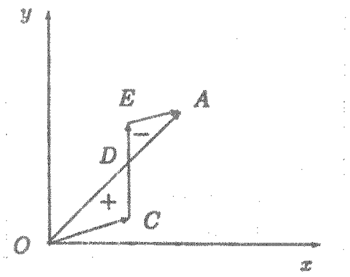

Рис. 5. Площадь $C(x, y)$.

Площади треугольников OCD и DEA равны соответственно $C(x, y)\alpha^2$ и $C(x, y)(1-\alpha)^2$. Поэтому ломаная, состоящая из векторов $\alpha r_i a_i, r_{i+1}a_{i+1}, (1 - \alpha)r_i a_i$, соединяет начало координат с элементом γ и является искомой кратчайшей. □

Напомним теперь какие кривые являются изопериметриксами в плоскости Минковского, где единичным телом служит многоугольник P – выпуклая облочка проекций векторов алфавита.

Из изопериметрического неравенства, приведенного в книге [6, глава 5, теорема 22.4], следует, что среди всех замкнутых кривых одинаковой длины в плоскости Минковского с единичным шаром P наибольшую площадь ограничивает многоугольник, подобный двойственному многоугольнику P^*, повернутому на $90°$.

Напомним, что *фигурой, двойственной к фигуре* Φ , называется фигура

$$\Phi^* = \{y \mid < x, y >\leqslant 1 \ \forall x \in \Phi\}.$$

Здесь $<,>$ – обычное скалярное произведение. Следующая лемма легко следует из определения двойственной фигуры.

Лемма 2.4. *Двойственная к P фигура P^* является центрально-симметричнм многоугольником, полученным пересечением полос, каждую из которых ограничивает пара прямых перпендикулярных одному из векторов алфавита a_i, проходящих на расстоянии $\frac{2}{|a_i|}$ по разные стороны от начала координат.*

Исходя из всего сказанного выше фигура, описанная в лемме 2.4, является изопериметриксом в плоскости Минковского, где единичным телом служит многоугольник P.

2.4. Технические леммы. В этом пункте мы показываем связь сложения не горизонтальных векторов в группе Гейзенберга Γ с площадью на плоскости Oxy. Эта связь несколько сложнее, чем для горизонтальных векторов.

Кроме того в этом пункте мы также вводим понятие обобщенного пути в $(H, \|\cdot\|_\infty)$ по аналогии с понятием пути в $(\Gamma, \|\cdot\|)$, приводим лемму, показывающую, как с помощью перемены мест векторов в обобщенном пути добиться того, чтобы этот путь соответствовал элементу, отличающегося от заданного не больше чем на константу, общую для всех элементов H.

С помощью этой леммы мы доказываем утверждение, которое в случае горизонтальной метрики слов эквивалентно неравенствам (1) и (2).

Для алфавита, не являющегося горизонтальным, теорема 2.1 не верна. Действительно, путь l, соответствующий слову, составленному из векторов этого алфавита, ограничивает некоторую площадь $S(l)$ (определение площади, ограниченной путем, было дано для произвольного алфавита). Пусть l – это путь, реализующий элемент $\gamma = (x, y, z)$, и каждый из векторов алфавита $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ входит в соответствующее l слово r_i раз. Тогда

$$z = S(l) + \sum_{i=1}^{2n} r_i z_i.$$

Эта формула легко выводится из того, что

$$a_i = (x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, 0) + (0, 0, z_i)$$

и того, что элемент $(0, 0, 1)$ коммутирует со всеми элементами.

Определение 2.10. *Пусть путь l реализует элемент $\gamma = (x, y, z)$. Тогда z будем называть высотой, набираемой путем l, а $\sum\limits_{i=1}^{2n} r_i z_i$ – добавкой.*

Определим понятие обобщенного пути в группе H. Это понятие соответствует понятию пути в группе Γ.

Определение 2.11. *Пусть $a_1, \ldots, a_N$ векторы алфавита E (взятые не обязательно по порядку), $r_1, \ldots, r_N$ – вещественные неотрицательные числа, а C – точка плоскости Oxy. Пусть*

$$a_k = (x_k, y_k, z_k), 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Введем векторы $\tilde{a}_k = (r_k x_k, r_k y_k, r_k^2 z_k)$ и обозначим их проекции на плоскость Oxy через $\bar{\tilde{a}}_k$.

Последовательность $\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_N$ будем называть обобщенным словом.

Отложим вектор $\bar{\tilde{a}}_1$ из точки C, а затем каждый из векторов $\bar{\tilde{a}}_k$ из конца $\bar{\tilde{a}}_{k-1}$. Обозначим точку, являющуюся концом вектора $\bar{\tilde{a}}_N$, за A. Полученную ломаную будем называть обобщенным путем с началом в точке C, соответствующим обобщенному слову $\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_N$, или обобщенным путем с началом в точке C и концом в точке A. Если

$$\gamma = \tilde{a}_1 * \cdots * \tilde{a}_N,$$

то обобщенный путь с началом в 0, соответствующий слову $\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_N$, будем называть обобщенным путем, реализующим элемент γ. Будем также говорить, что векторы $a_1, \ldots, a_N$ входят в этот обобщенный путь с коэффициентами $r_1, \ldots, r_N$ соответственно.

Определение 2.12. *Длиной обобщенного пути l будем называть сумму коэффициентов, с которыми векторы алфавита входят в этот путь. Обозначать длину будем $|l|$.*

Замечание. Длина обобщенного пути определенная выше совпадает с длиной этого пути в метрике Минковского.

Замечание. Проекция кратчайшей в $(H, \|\cdot\|_\infty)$ на плоскость Минковского Oxy, являющаяся частью изопериметрикса, является также примером обобщенного пути, так как изопериметрикс является многоугольником, стороны которого параллельны векторам алфавита. Более того, такой обобщенный путь является кратчайшим среди всех обобщенных путей, ограничивающих ту же площадь.

Все кратчайшие, соединяющие начало координат с точками, имеющими одни и те же первые координаты (x, y), проекции которых являются метрическими прямыми, имеют одну длину. Согласно лемме 2.3, среди алфавитных метрических прямых есть обобщенные пути, ограничивающие любую площадь $S \in [-C(x,y), C(x,y)]$. Тогда для произвольного элемента $\gamma \in H$ норма $\|\gamma\|_\infty$ равна длине кратчайшего обобщенного пути относительно горизонтального алфавита, реализующего γ.

Рассмотрим вложение $\Gamma \subset H$. Пути в Γ с горизонтальной метрикой слов, можно рассматривать как частный случай обобщенных путей в H. Из этого немедленно следует уже доказанное ранее неравенство $\|\gamma\|_\infty \leqslant \|\gamma\|$ для произвольного $\gamma \in \Gamma$ при горизонтальной метрике слов. Напомним, что $\|\gamma\|$ – длина кратчайшего пути в Γ, реализующего элемент γ.

Изопериметрикс является выпуклым центрально-симметричным многоугольником. Если проекция обобщенного пути l – граница выпуклого центрально-симметричного многоугольника, то последовательность векторов, из которой он состоит, – это $\bar{a}_1$ с коэффициентом $r_1, \ldots, \bar{a}_n$ с коэффициентом $r_n, \bar{a}_{n+1}$ с коэффициентом $r_1, \ldots, \bar{a}_{2n}$ с коэффициентом r_n. Будем это записывать так:

$$l = r_1\bar{a}_1 \ldots r_n\bar{a}_n r_1\bar{a}_{n+1} \ldots r_n\bar{a}_{2n}.$$

Лемма 2.5. *Пусть на группе Гейзенберга Γ введена метрика слов. E – алфавит этой метрики слов, l_1 – некоторый обобщенный путь.*

$$l_1 = r_1\bar{a}_1 \ldots r_N\bar{a}_N, \text{ где } a_i \in E, r_i \leqslant 1,$$

$F : \{1 \dots N\} \to \{1 \dots N\}$ – биекция,

$$l_2 = r_{F(1)}\bar{a}_{F(1)} \dots r_{F(N)}\bar{a}_{F(N)}.$$

Допустим, что путь l_1 реализует элемент (x, y, z_1), а l_2 – (x, y, z_2). Предположим для определенности $z_2 \geqslant z_1$. Тогда для кратчайшего обобщенного пути l, реализующего элемент $\gamma = (x, y, z)$, такой, что $z_2 \geqslant z \geqslant z_1$, справедливо $|l| \leqslant |l_1| + W(E)$. Здесь $W(E)$ – константа, зависящая только от алфавита. Если l – путь, т.е. все коэффициенты $r_i = 1$, то справедливо $\|\gamma\| \leqslant |l_1| + W(E)$.

Доказательство. Рассмотрим путь l_2. Проделаем следующую процедуру: поменяем местами соседние векторы (с коэффициентами) в слове, соответствующем этому пути. При этом площадь, которую ограничивает путь, изменится на площадь параллелограмма, натянутого на проекции этих векторов, а значит и высота, которую он набирает, изменится на то же число (см. рис. 6).

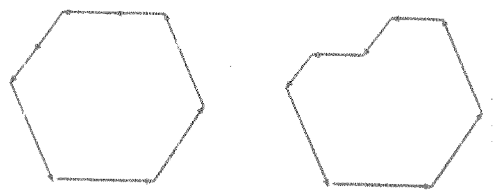

Рис. 6. Перемена мест векторов.

Введем обозначения:

(1) A_{ij} – площадь параллелограмма, натянутого на пару проекций векторов алфавита $\bar{a}_i, \bar{a}_j$.
(2) $W_0(E) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2n} A_{ij}$ – максимум площадей параллелограммов натянутых на пары проекций векторов алфавита,
(3) $W(E) = \max\limits_{|z| \leqslant W_0(E)} \|(0, 0, z)\|$.

В полученном пути проделаем эту процедуру ещё раз и так далее, пока векторы не будут переставлены в порядке, соответствующем пути l_1.

Каждый раз мы изменяли площадь, ограничиваемую путем, не более чем на W_0. Тогда в процессе этой процедуры мы в некоторый момент получим путь l_0, набирающий высоту z_0 такую, что $|z_0 - z| < W_0$, т.к. высота, которую набирает путь, складывается из площади, которую он ограничивает и добавки, которая не изменилась. Тогда

$$|l| \leqslant |l_0| + \|(0,0,z-z_0)\| \leqslant |l_1| + W(E).$$

Заметим, что $|l| = |l_1| = |l_2|$, так как эти обобщенные пути образованы при помощи перестановки одного и того же набора векторов. Поэтому $|l| \leqslant |l_1| + W(E)$.

Если l_1 – путь, то l_0 тоже путь, и тогда длина кратчайшего пути, реализующего γ, не больше суммы длин некоторого пути, реализующего элемент (x, y, z_0) и кратчайшего пути, реализующего $(0, 0, z - z_0)$, т.е.

$$\|\gamma\| \leqslant |l_0| + \|(0,0,z-z_0)\| \leqslant |l_1| + W(E).$$

Благодаря результату работы [8, теорема 1] мы точно знаем вид кратчайшего обобщенного пути, реализующего произвольный элемент группы H при горизонтальном алфавите. При не горизонтальном алфавите мы заменим такой кратчайший обобщенный путь на другой, вид которого мы точно знаем и который имеет такую же длину и реализует близкий элемент.

Опишем процедуру замены. Пусть $\gamma = (x, y, z)$ – элемент группы Гейзенберга H, l – обобщенный путь, реализующий γ. Напомним, что обобщенный путь l составлен из проекций векторов алфавита $\bar{a}_i$, входящих в него с вещественными коэффициентами r_i, и имеет вид

$$l = {r'}_{i_1}\bar{a}_{i_1} \dots {r'}_{i_N}\bar{a}_{i_N}$$

Рассмотрим путь

$$l_1 = r_1\bar{a}_1 \dots r_{2n}\bar{a}_{2n},$$

полученный из l соответствующей перестановкой векторов $\bar{a}_i$, входящих в l. Тогда ломаная $l_1 \bigcup [A_\gamma O]$ ограничивает выпуклую фигуру и обходит ее против часовой стрелки. Кроме того $S(l_1) \geqslant S(l)$. Значит и высота, которую набирает путь l_1, больше высоты, которую набирает путь l, так как добавка не меняется от перемены мест векторов.

Рассмотрим теперь путь

$$l_2 = r_{2n}\bar{a}_{2n} \dots r_1\bar{a}_1.$$

Ломаная $l_2 \bigcup [A_\gamma O]$ ограничивает выпуклую фигуру (симметричную предыдущей относительно середины отрезка $[A_\gamma, O]$) и обходит ее по часовой стрелке. Для него выполняется $S(l_2) \leqslant S(l)$, а значит, и высота, набираемая путем l_2, не больше высоты, набираемой путем l.

Вернемся теперь к пути l_1. Если некоторый вектор $\bar{a}$ входит в него с коэффициентом $r > 1$, то будем считать, что в l_1 входят $[r]$ векторов $\bar{a}$ и один вектор $(r - [r])\bar{a}$. И аналогично с путем l_2. Начнем менять местами векторы в слове, соответствующем пути l_1, по следующему правилу: сперва последний вектор $(r_{2n} - [r_{2n}])\bar{a}_{2n}$ поменяем с предпоследним, затем в полученном слове третий с конца вектор поменяем с предпоследним, а потом с последним, затем в полученном слове четвертый с конца вектор поменяем местами с третьим, предпоследним и, наконец с последним, и т.д. На каждом этапе этой процедуры мы берем вектор, который мы еще не двигали и последовательно меняем его местами со всеми векторами идущими за ним пока он не окажется на последнем месте. В конце этой процедуры мы поменяем порядок векторов на противоположный и получим путь l_2.

Вспомним доказательство леммы 2.5. В некоторый момент описанной выше процедуры мы получим путь, набирающий высоту z_0 такую, что $|z_0 - z| < W_0(E)$. Обозначим его l_0.

Определение 2.13. *Обобщенный путь l_0, построенный выше будем называть исправлением обобщенного пути l. Элемент $\gamma_0 = (x, y, z_0)$, реализуемый путем l_0 будем называть исправлением элемента γ, соответствующим пути l.*

Определение 2.14. *Пусть l – некоторый обобщенный путь. Группой векторов этого пути будем называть один или несколько сонаправленных векторов, длины проекций которых на плоскость Oxy не превосходят 1 в метрике Минковского, подряд входящих в слово, соответствующее этому пути.*

Например $r_1 a_1$ – это группа из $[r_1]$ векторов a_1 и одного вектора $(r_1 - [r_1])a_1$. Все группы векторов, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, будут иметь именно такой вид.

Замечание. Путь l_0 можно записать в виде

$$l_0 = r_1\bar{a}_1 \dots r_{m-1}\bar{a}_{m-1} r_m^1 \bar{a}_m r_{2n}\bar{a}_{2n} \dots r_k\bar{a}_k r_m^2 a_m r_{k-1}\bar{a}_{k-1} \dots r_m^3 \bar{a}_m,$$

так как в слово, соответствующее пути l_0 все, кроме может быть одного, векторы алфавита входят подряд, т.е. сперва r_1 векторов a_1, потом r_2 векторов a_2 и т.д. Единственным исключением служит вектор a_m, после перестановки которого мы получили путь l_0. Этот вектор входит в путь l_0 не более, чем тремя группами: первая – не перенесенные векторы $r_m^1\bar{a}_m$, вторая – один, переносимый в тот момент вектор $r_m^2\bar{a}_m$, третья – уже перенесенные в тот момент векторы $r_m^3\bar{a}_m$. Некоторые из этих групп могут не существовать.

Пусть $\gamma \in \Gamma \subset H$, l – кратчайший обобщенный путь, реализующий γ, и l_0 его исправление, а γ_0 исправление элемента γ, соответствующее пути l. Тогда $\|\gamma_0\| - W(E) \leqslant \|\gamma\| \leqslant \|\gamma_0\| + W(E)$. Здесь $W(E)$, $W_0(E)$ – константы, определенные в лемме (2.5). Эти неравенства следуют из того, что $\gamma = \gamma_0 + (0, 0, z - z_0)$ и $|z_0 - z| < W_0(E)$.

Определение 2.15. *Если l_1 – путь, соответствующий слову $a_1 \dots a_k$, а l_2 – путь, соответствующий слову $b_1 \dots b_m$, то объединением путей l_1 и l_2 называется путь $l_1 \bigcup l_2$, соответствующий слову $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m$.*

Лемма 2.6. *Пусть на группе Гейзенберга Γ введена метрика слов с алфавитом E, $\gamma \in \Gamma$, l – кратчайший обобщенный путь, реализующий γ. Тогда*

$$\big|\|\gamma\| - |l|\big| \leqslant C(E).$$

Здесь $C(E)$ – константа, зависящая только от алфавита.

Доказательство. Доказательство оценки $\big|\|\gamma\| - |l|\big| \leqslant C(E)$ сводится к доказательству двух неравенств:

$$|l| \leqslant \|\gamma\| \tag{3}$$

$$\|\gamma\| \leqslant |l| + C(E) \tag{4}$$

Неравенство (3) легко следует из того, что l – кратчайший обобщенный путь, реализующий γ, а $\|\gamma\|$ – длина кратчайшего пути, реализующего γ и понятие пути является частным случаем понятия обобщенного пути.

Перейдем к доказательству неравенства (4). Заменим элемент γ и путь l на их исправления γ_0 и l_0. Тогда, поскольку

$$\|\gamma_0\| - W(E) \leqslant \|\gamma\| \leqslant \|\gamma_0\| + W(E) \text{ и } |l| = |l_0|,$$

достаточно доказать неравенство $\|\gamma_0\| \leqslant |l_0| + C_0(E)$, где $C_0(E)$ – константа, зависящая только от алфавита. Тогда искомая константа есть $C(E) = W(E) + C_0(E)$.

Пусть алфавит $E = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$. В пути l_0 не более $2n+2$ групп векторов. Напомним, что он имеет вид

$$l_0 = r_1\bar{a}_1 \ldots r_{m-1}\bar{a}_{m-1}r_m^1\bar{a}_m r_{2n}\bar{a}_{2n} \ldots r_k\bar{a}_k r_m^2\bar{a}_m r_{k-1}\bar{a}_{k-1} \ldots r_m^3\bar{a}_m,$$

где $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant 2n$, $\ r_m^2 \leqslant 1$. Разобьем l_0 в объединение четырех путей: $l_0 = l_1 \bigcup l_2 \bigcup l_3 \bigcup l_4$, где

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_1\bar{a}_1 \ldots r_{m-1}\bar{a}_{m-1}r_m^1\bar{a}_m,\\
l_2 &= r_{2n}\bar{a}_{2n} \ldots r_k\bar{a}_k,\\
l_3 &= r_m^2\bar{a}_m,\\
l_4 &= r_{k-1}\bar{a}_{k-1} \ldots r_m^3\bar{a}_m.
\end{aligned}$$

Пусть γ_i – элементы, реализуемые путями l_i, $i = 1,2,3,4$. Тогда $\gamma_0 = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ и $\|\gamma_0\| \leqslant \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\| + \|\gamma_3\| + \|\gamma_4\|$. Поэтому достаточно доказать, что $\|\gamma_i\| \leqslant |l_i| + C_i(E)$, где $C_i(E)$ – константы, зависящие только от алфавита, $i = 1,2,3,4$. В каждом из путей l_i векторы идут по порядку (или в противоположном порядке) как они занумерованы в алфавите, то есть по возрастанию (или убыванию) углов, которые их проекции на плоскость Oxy составляют с осью Ox, поэтому все четыре неравенства доказываются аналогично.

Докажем, например, первое из них. Путь l_1 имеет начало в точке O, а конец в точке A_{γ_1}. Фигура, ограниченная путем l_1 и отрезком OA_{γ_1} – выпуклая. Построим два пути l_{11} и l_{12} близких к обобщенному пути l_1 следующим образом: в пути l_1 заменим коэффициенты при векторах $\bar{a}_i$ на $\max([r_i] - c_i, 0)$ для l_{11} и $[r_i] + 1 + c_i$ для l_{12}, $i \in \{1 \ldots 2n\}$. Здесь натуральные числа c_i определяются индуктивно так, чтобы фигура, которую ограничивает путь l_1, содержалась в фигуре, которую ограничивает путь l_{12}, и содержала фигуру, которую ограничивает путь l_{11}. Выбираем $c_1 = 0$,

c_2 – наименьшее натуральное число такое, что путь, соответствующий слову $([r_1]+1)a_1, ([r_2]+1+c_2)a_2$ лежит вне выпуклой фигуры, ограниченной ломаной $l_1 \bigcup [O, A_{\gamma_1}]$, а путь соответствующий слову $[r_1]a_1, (\max([r_2]-c_2, 0))a_2$ лежит внутри этой фигуры.

Числа c_i зависят только от длин векторов алфавита и углов между ними, т.е. от алфавита. Обозначим концы путей l_{11} и l_{12} через A_1 и A_2 соответственно. Соединим A_2 с A_{γ_1} кратчайшим путем l_{13}, причем так, чтобы путь $l_{12} \bigcup l_{13}$ ограничивал больше либо равную по модулю площадь, чем путь l_1 (достаточно сделать $l_{13} \bigcup [A_2, A_{\gamma_1}]$ выпуклым в нужную сторону) (рис. 7).

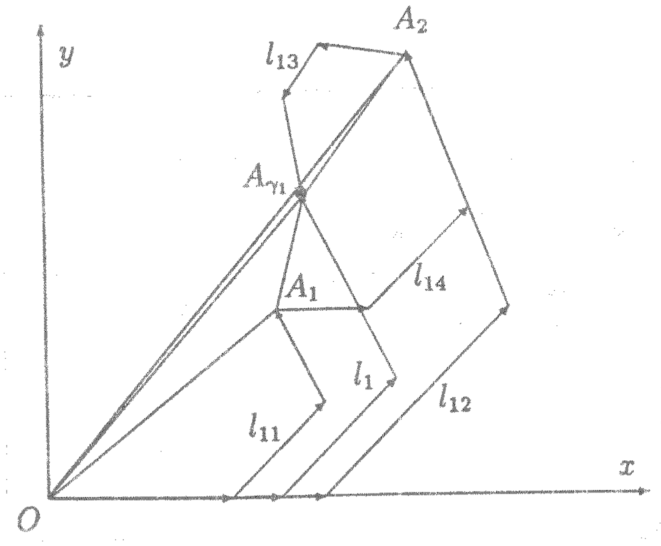

Рис. 7. Пути близкие к пути l_1.

Пусть координаты точки $A_2 = (x_{A_2}, y_{A_2})$, а векторы алфавита имеют координаты (x_i, y_i, z_i). Тогда

$$|x - x_{A_2}| \leqslant \sum_{j=1}^{2n} (1 + c_j)|x_j|,$$

$$|y - y_{A_2}| \leqslant \sum_{j=1}^{2n} (1 + c_j)|y_j|,$$

Значит точки A_γ и A_2 находятся друг от друга на Евклидовом расстоянии не большем, чем константа

$$\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{2n}(1+c_j)|x_j|\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2n}(1+c_j)|y_j|\right)^2},$$

не зависящая от γ. Тогда $|l_{13}| \leqslant C_3(E)$, где $C_3(E)$ – константа, зависящая только от алфавита.

Рассмотрим путь

$$l_{14} = (c_1 + \min([r_1], c_1))\bar{a}_1 \ldots (c_{2n} + \min([r_{2n}], c_{2n}))\bar{a}_{2n}$$

между точками A_1 и A_2. Путь $l_{12} \bigcup l_{13}$ получается из пути $l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13}$ перестановкой векторов. Обозначим $|\triangle z(l_{13})|$ площадь фигуры, ограниченной путем l_{13} и отрезком $A_{\gamma_1}A_2$ и $|\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})|$ площадь фигуры, ограниченной путем $l_{14} \bigcup l_{13}$ и отрезком $A_{\gamma_1}A_1$.

Из определения путей l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14} имеем

$$|S(l_{12} \bigcup l_{13})| \geqslant |S(l_1)| + |\triangle z(l_{13})|$$
$$|S(l_1)| + |\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})| \geqslant |S(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13})|$$
$$|S(l_{12} \bigcup l_{13})| \geqslant |S(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13})|$$
$$|\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})| \geqslant |\triangle z(l_{13})|.$$

Тогда, так как $S(l_{12} \bigcup l_{13})$, $S(l_1)$ и $S(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13})$ имеют один знак, то существует такое число $\triangle \bar{z}$, что $|\triangle z(l_{13})| \leqslant |\triangle \bar{z}| \leqslant |\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})|$ и справедливо неравенство

$$S(l_{12} \bigcup l_{13}) \geqslant S(l_1) + \triangle \bar{z} \geqslant S(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13}). \tag{5}$$

Высота, которую набирает путь – это сумма площади, которую он ограничивает, с добавкой. Пути $l_{12} \bigcup l_{13}$ и $l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13}$ имеют одинаковые добавки (см. определение 2.10). Добавка пути l_1 отличается от добавки пути $l_{12} \bigcup l_{13}$ на

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i z_i + \sum_{a_i \in l_{13}} z_i = D.$$

Для величины D справедливо неравенство

$$|D| \leqslant |\sum_{i=1}^{2n} c_i z_i| + |l_3| \max_{a_i \in E} |z_i| \leqslant C_d(E),$$

где $C_d(E)$ – константа, зависящая только от алфавита. Действительно, первое слагаемое суммы, ограничивающей D, является константой, зависящей только от алфавита, так как c_i зависят только от алфавита. Второе слагаемое ограничено константой, так как число векторов входящих в l_{13} зависит только от алфавита.

Обозначим через $z(l_1)$, $z(l_{12} \bigcup l_{13})$ и $z(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13})$ высоты, которые набирают пути l_1, $l_{12} \bigcup l_{13}$ и $l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13}$ соответственно. Тогда из неравенства (5) следует, что

$$z(l_{12} \bigcup l_{13}) \geqslant z(l_1) + \triangle\bar{z} - D \geqslant z(l_{11} \bigcup l_{14} \bigcup l_{13}).$$

Применив лемму 2.5 получаем, что $\|(x(l_1), y(l_1), z(l_1) + \triangle\bar{z} - D)\| \leqslant |l_{12} \bigcup l_{13}| + W(E)$. Тогда $\|\gamma_1\| \leqslant |l_{12} \bigcup l_{13}| + W(E) + \|(0, 0, D)\| + \|(0, 0, \triangle\bar{z})\|$. Так как $|D| \leqslant C_d(E)$, то норма $\|(0, 0, C_d)\|$ не превосходит константы, зависящей только от алфавита. Для числа $|\triangle\bar{z}|$ справедливо неравенство $|\triangle\bar{z}| \leqslant |\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})|$. Выражение, стоящее справа в этом неравенстве, равно площади, ограничиваемой путем $l_{14} \bigcup l_{13}$, отложенным из начала координат. Поскольку $|l_{14} \bigcup l_{13}| = |l_{14}| + |l_{13}| \leqslant 4n \max c_i + C_3(E)$, то $|\triangle z(l_{14} \bigcup l_{13})|$ ограничено константой, не зависящей от алфавита, а тогда и $\|(0, 0, \triangle\bar{z})\|$ тоже ограничено константой не зависящей от алфавита. И, наконец, $|l_{12} \bigcup l_{13}| = |l_{12}| + |l_{13}| \leqslant |l_1| + 2n \max c_i + C_3(E)$. В итоге получаем $\|\gamma_1\| \leqslant |l_1| + C_1(E)$, где $C_1(E) \geqslant 2n \max c_i + C_3(E) + W(E) + \|(0, 0, D)\| + \|(0, 0, \triangle\bar{z})\|$ – константа, зависящая только от алфавита, что и требовалось доказать.

2.5. Сравнение $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\infty$ при горизонтальном алфавите. В этом пункте приведено доказательство неравенств (1) и (2) для горизонтальной метрики слов. В дальнейшем будем считать, что все пути и обобщенные пути имеют начало в нуле, если не оговорено обратное.

Теорема 2.7. *Пусть на группе Гейзенберга Γ введена горизонтальная метрика слов. Для элемента $\gamma \in \Gamma$ с координатами (x, y, z)*

справедливо неравенство $\|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|_\infty + C(E)$, где $C(E)$ – константа, введенная в лемме 2.6.

Доказательство. Пусть l – кратчайший обобщенный путь, реализующий γ. Поскольку метрика слов горизонтальная, то $|l| = \|\gamma\|_\infty$. Возможны два случая

(1) $|z| \geqslant C(x,y)$,

(2) $|z| < C(x,y)$.

В первом случае l является частью изопериметрикса. Во втором случае l является одной из метрических прямых, причем опираясь на лемму 2.3, а также на тот факт, что длины отрезков метрических прямых, соединяющих начало координат с точкой с координатами (x,y) в плоскости Минковского, равны, можно считать, что это алфавитная прямая.

Применим лемму 2.6, согласно ей $\big|\|\gamma\| - |l|\big| \leqslant C(E)$, и следовательно $\big|\|\gamma\| - \|\gamma\|_\infty\big| \leqslant C(E)$.

Таким образом мы получили, что для любого элемента γ группы Гейзенберга, на которой введена горизонтальная метрика слов, справедливо неравенство

$$\Big|\|\gamma\| - \|\gamma\|_\infty\Big| \leqslant \mathrm{Const},$$

где Const – константа, не зависящая от γ.

3. Расстояние между группой Гейзенберга с произвольной метрикой слов и её асимптотическим конусом

В этом параграфе мы заменям произвольную метрику слов на близкую ей горизонтальную. Для этого вводим понятие исправленной метрики слов. Доказываем, что расстояния в исправленной метрике слов отличаются от расстояний в исходной метрике слов не более чем на константу и из этого выводим доказательство неравенств (1) и (2) для не горизонтальной метрики слов.

Определение 3.1. *Пусть E – произвольный алфавит. $E = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$, где $a_i = (x_i, y_i, z_i)$. Рассмотрим горизонтальный алфавит $E^0 = \{a_1^0, \ldots, a_{2n}^0\}$, где $a_i^0 = (x_i, y_i, 0)$. Будем называть такой алфавит горизонтальной проекцией алфавита E, а соответствующую метрику слов метрикой горизонтальной проекции. Норму, соответствующую алфавиту E^0, будем обозначать $\|\cdot\|^h$.*

Теорема 3.1. *Пусть на группе Гейзенберга* Γ *введена метрика слов* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^h$ *– соответствующая ей метрика горизонтальной проекции. Тогда для любого элемента* $\gamma \in \Gamma$ *имеем* $\left|\|\gamma\| - \|\gamma\|^h\right| \leqslant \mathrm{Const}$, *где* Const *– константа, не зависящая от выбора* γ.

Доказательство. Доказательство этой теоремы сводится к доказательству двух неравенств:

$$\|\gamma\|^h \leqslant \|\gamma\| + \mathrm{Const} \tag{6}$$

$$\|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|^h + \mathrm{Const} \tag{7}$$

Докажем неравенство 6, неравенство 7 доказывается аналогично.

Для элемента $\gamma = (x, y, z)$ рассмотрим кратчайший путь l, реализующий его в исходной метрике слов. Это значит, что путь l имеет конец в точке $A_\gamma(x, y)$ и набирает высоту z. Пусть каждый из векторов алфавита a_i входит в слово, соответствующее пути l, r_i раз. Тогда высота, которую набирает путь l, складывается из площади, которую он ограничивает, и из добавки, вызванной тем, что алфавит не горизонтальный, т. е.

$$z = S(l) + \sum_{i=1}^{2n} r_i z_i.$$

Рассмотрим исправление пути l – путь l_0. Он реализует элемент γ_0, являющийся исправлением элемента γ. Кроме того l_0 содержит не более $2n + 2$ групп векторов.

Для каждого вектора a_i не исправленного алфавита найдем число R_i такое, что площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{a}_i$ и $R_i \bar{a}_{i+1}$ равна $|z_i|$ (если $i = 2n$ то в качестве a_{i+1} берем a_1). В слове, соответствующем пути l_0, рассмотрим все группы одинаковых векторов, идущих подряд. Каждую такую группу $a_i, \dots, a_i$ заменим на группу $R_i a_{i+1}, a_i, \dots, a_i, R_i(-a_{i+1})$ или на группу $R_i(-a_{i+1}), a_i, \dots, a_i, R_i a_{i+1}$ в зависимости от того отрицательно или положительно выражение $-z_i$ (если отрицательно, то заменяем на второе выражение, иначе на первое) (рис. 8).

Напомним, что $|l| = |l_0|$. Обозначим через l_1 путь, соответствующий слову, построенному выше. Длина $|l_1| \leqslant |l_0| + 2(2n + 2) \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2n} R_i$, так как мы удлинили каждую группу векторов в слове, соответствующем пути l_0 не более, чем на $2 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2n} R_i$, а таких

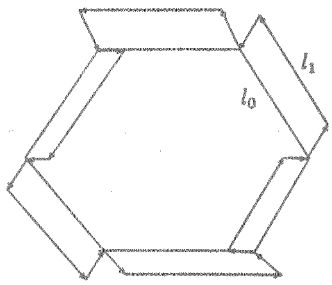

Рис. 8. Замена пути при переходе к исправленному алфавиту.

групп не более, чем $2n+2$, поскольку все векторы алфавита, кроме одного, образуют не более, чем по одной группе, а оставшийся вектор не более трех.

Обобщенное слово, соответствующее обобщенному пути l_1 в исправленном алфавите, реализует элемент γ_0. В исправленном алфавите нет добавки, входящей в высоту, набираемую путем, но за счет того, что мы добавили или вычли площади параллелограммов, имеем

$$S(l_1) = S(l_0) + \sum_{i=1}^{2n} r_i z_i.$$

Тогда $\|\gamma_0\|^h \leqslant |l_1| + C(E_0)$, поскольку длина l_1 не меньше, чем длина кратчайшего обобщенного пути, реализующего элемент γ_1 в исправленном алфавите, а длина кратчайшего обобщенного пути реализующего элемент, меньше нормы элемента не более, чем на константу $C(E_0)$.

Итак, из всех приведенных выше рассуждений имеем:

$$\|\gamma\| = |l| = |l_0|$$

$$|l_0| + 2(2n+2) \max_{1 \leqslant i \leqslant 2n} R_i \geqslant |l_1|$$

$$|l_1| + C(E_0) \geqslant \|\gamma_0\|^h$$

$$\|\gamma_0\|^h + W(E_0) \geqslant \|\gamma\|^h.$$

Последнее неравенство следует из того, что $|z - z_0| \leqslant W_0$. Применяя все эти неравенства имеем:

$$\|\gamma\| + \mathrm{Const} \geqslant \|\gamma\|^h,$$

здесь $\mathrm{Const} = 2(2n+2)\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2n} R_i + W(E_0) + C(E_0)$ – константа не зависящая от выбора γ.

Теорема 3.2. *Пусть на группе Гейзенберга* Γ *введена метрика слов. Тогда для всех элементов* $\gamma \in \Gamma$ *имеют место неравенства*

$$\|\gamma\|_\infty \leqslant \|\gamma\| + \mathrm{Const},$$

$$\|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|_\infty + \mathrm{Const},$$

где Const *– константа не зависящая от* γ*, введенная в теореме* 3.1.

Доказательство. Рассмотрим исправленную метрику слов, соответствующую исходной. Она горизонтальная и для неё указанные в условии неравенства верны. Согласно теореме 3.1 имеем:

$$\|\gamma\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\delta_k(\gamma)\|}{k} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\|\delta_k(\gamma)\|^h + \mathrm{Const}}{k} = \|\gamma\|^h_\infty.$$

Аналогично $\|\gamma\|^h_\infty \leqslant \|\gamma\|_\infty$. Откуда имеем $\|\gamma\|^h_\infty = \|\gamma\|_\infty$. Отсюда выводим:

$$\|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|^h + \mathrm{Const} \leqslant \|\gamma\|^h_\infty + \mathrm{Const} = \|\gamma\|_\infty + \mathrm{Const},$$

$$\|\gamma\|_\infty = \|\gamma\|^h_\infty \leqslant \|\gamma\|^h \leqslant \|\gamma\| + \mathrm{Const}.$$

Мы доказали требуемые неравенства.

Тогда

$$\big|(\Gamma, \|\cdot\|), (\mathrm{Con}_\infty \Gamma, \|\cdot\|_\infty)\big|_H \leqslant \mathrm{CONST}.$$

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Сергею Владимировичу Буяло за его постоянное внимание к ее работе.

Литература

1. D. Burago, *Periodic metrics.* — Advances Sov. Math., **9** (1992), 241–248.
2. С. В. Буяло, *Введение в метрическую геометрию.* СПб., Образование, 1997.
3. M. Gromov, *Carnot–Caratheodory spaces seen from within.* IHES/M/94/6.
4. M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups.* Geometric Group Theory, Vol. 2 (G. A.Noble, M. A. Roller, eds.), London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1993.
5. M. Gromov, *Structures metriques pour les varietes Riemanniennes redige par.* J. Lafontaine en P. Pansu Cedic/Fernand Nathan, 1981.
6. К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества.* Москва, Наука, 1985.
7. P. Pancy, *Croissance des boules et des geodesiques fermees dans les nilvarietes.* — Ergod. Th. & Dynam. Sys., **3** (1980), 415–445.
8. В. Н. Берестовский, *Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского.* — Сибирский Мат. журнал, январь-февраль, **35**, No. 1 (1994).

Krat S. A. Asymptotic properties of the Heisenberg group.

It is shown that Hausdorff–Gromov distance between the discrete Heisenberg group with word metric and its asymptotic cone is finite.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 июля 1999 г.