Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. Е. Козлов

СТАЦИОНАРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ В ГРАССМАНИАНАХ БИВЕКТОРОВ

1.1. Вещественное грассманово многообразие $G^+_{p,n}$ ориентированных p-мерных подпространств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ отождествим с его плюккеровой моделью во внешней алгебре $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ с операцией "$\wedge$" внешнего умножения (см. [1]). Нас будут интересовать секционные кривизны этого многообразия. Так как грассманиан $G^+_{p,n}$ является римановым однородным пространством, то можно ограничиться изучением кривизн в раз и навсегда фиксированной точке $\omega \in G^+_{p,n}$.

Грассманово многообразие ориентированных 2-плоскостей в касательном пространстве $T_\omega G^+_{p,n}$ обозначим $\mathfrak{G}_{p,n}$ и отождествим его с многообразием простых единичных бивекторов во внешней алгебре $\Lambda(T_\omega\, G^+_{p,n})$. Далее, специально не оговаривая, мы будем рассматривать элемент $\sigma \in \mathfrak{G}_{p,n}$ или как двумерное подпространство касательного пространства $T_\omega\, G^+_{p,n}$, или как элемент внешней алгебры над $T_\omega\, G^+_{p,n}$. Выбор интерпретации будет ясен из контекста. Операцию внешнего умножения в этой алгебре обозначим символом "$\vee$". Секционную кривизну многообразия $G^+_{p,n}$ в точке ω можно рассматривать как функцию

$$K : \mathfrak{G}_{p,n} \to \mathbb{R}, \quad \sigma = X \vee Y \mapsto \langle\, R(X,Y)Y, X\,\rangle,$$

где $X,\, Y \in T_\omega\, G^+_{p,n}$, $|X \vee Y| = 1$.

Определение. 1) *Двумерное направление $\sigma_0 \in \mathfrak{G}_{2,n}$ называется* экстремальным, *если градиент функции $K(\sigma)$ в точке $\sigma_0 \in \mathfrak{G}_{2,n}$ равен нулю*

$$\nabla K\big|_{\sigma=\sigma_0} = 0.$$

2) *Число $\varkappa$ называется* стационарным значением функции K, *если в прообразе $K^{-1}(\varkappa)$ найдется экстремальная площадка σ.*

Множество стационарных значений функции K обозначим $\operatorname{ext} K$.

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

При $p = 1,\ n-1$ многообразие $G^+_{p,n}$ изометрично единичной сфере, поэтому множество $\operatorname{ext} K$ сводится к $\{1\}$. Так как при $p \neq 1,\ n-1$ секционная кривизна многообразия $G^+_{p,n}$ меняется от нуля до двух (см. [2]), то

$$\operatorname{ext} K \supset \{0, 2\} \quad \text{при} \quad p \neq 1,\ n-1.$$

В настоящей работе, в частности, найдены множества $\exp K$ при $p = 2$. Будет доказана

Теорема. *В грассманианах $G^+_{2,n}$ множества $\exp K$ имеют вид:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{ext} K = \{0, 1, 2\} && \textit{при} \quad n = 4, \\ &\operatorname{ext} K = \left\{0, \frac{1}{5}, 1, 2\right\} && \textit{при} \quad n = 5, \\ &\operatorname{ext} K = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\} && \textit{при} \quad n \geqslant 6. \end{aligned}$$

1.2. Грассманиан $G^+_{2,n}$ является подмножеством единичной сферы S в пространстве бивекторов Λ_2. Через B обозначим вторую основную форму включения $G^+_{2,n} \subset S$ в точке $\omega \in G^+_{2,n}$. Представим бивектор ω в виде

$$\omega = e_1 \wedge e_2, \quad \langle\, e_i, e_j \,\rangle = \delta_{ij}.$$

Тогда любые два вектора $X,\ Y \in T_\omega\, G^+_{2,n}$ однозначно разлагаются в суммы (см. [1])

$$X = N_1^X \wedge e_2 + e_1 \wedge N_2^X, \quad Y = N_1^Y \wedge e_2 + e_1 \wedge N_2^Y, \quad N_i^X,\ N_i^Y \in V_\omega^\perp. \tag{1}$$

Предложение. *Справедливо равенство*

$$B(X, Y) = N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Покажем, что правая часть равенства (2) не зависит от выбора пары $e_1,\ e_2\, (\omega = e_1 \wedge e_2)$. Пусть $\omega = \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{e}_2$. Тогда найдется такой угол φ, что $e_1 = \widetilde{e}_1 \cos\varphi + \widetilde{e}_2 \sin\varphi$, $e_2 = -\widetilde{e}_1 \sin\varphi + \widetilde{e}_2 \cos\varphi$. Подставим эти выражения в (1)

$$X = \widetilde{N}_1^X \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{N}_2^X =$$

$$= \left(N_1^X \cos\varphi - N_2^X \sin\varphi\right) \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \left(N_1^X \sin\varphi + N_2^X \cos\varphi\right),$$

$$Y = \widetilde{N}_1^Y \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{N}_2^Y =$$
$$= \left(N_1^Y \cos\varphi - N_2^Y \sin\varphi\right) \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \left(N_1^Y \sin\varphi + N_2^Y \cos\varphi\right).$$

Откуда следует

$$\widetilde{N}_1^X \wedge \widetilde{N}_2^Y + \widetilde{N}_1^Y \wedge \widetilde{N}_2^X = N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X .$$

Это равенство позволяет определить симметричную билинейную форму

$$M(X, Y) = N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X .$$

2) Пусть ∇ означает связность Леви–Чивита на сфере S. Рассмотрим каноническое разложение вектора X (см. [3])

$$X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2, \quad \langle\, n_i, n_j \,\rangle = \delta_{ij} .$$

Распространим вектор X вдоль геодезической $\gamma = \exp_\omega(tX)$, $X(t) = \dot\gamma(t)$. Тогда (см. [3])

$$\left.\frac{dX}{dt}\right|_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\omega + 2\lambda_1\lambda_2 n_1 \wedge n_2 .$$

Бивектор $n_1 \wedge n_2$ ортогонален к ω и касательному пространству $T_\omega\, G^+_{2,n}$. Поэтому

$$B(X, X) = 2\lambda_1\lambda_2 n_1 \wedge n_2 = 2N_1^X \wedge N_2^X = M(X, X).$$

В силу билинейности и симметричности форм M и B, из последнего раверства вытекает их совпадение. $\square$

1.3. В линейном пространстве $T_\omega\, G^+_{2,n} \times T_\omega\, G^+_{2,n}$ определим две функции

$$A : (X, Y) \mapsto \langle\, B(X, X), B(Y, Y) \,\rangle - B^2(X, Y),$$
$$C : (X, Y) \mapsto (X \vee Y)^2 .$$

В точках (X, Y), где $C(X, Y) \neq 0$ (X, Y не коллинеарны) определена функция

$$\overline{K} := \frac{A}{C} .$$

Если $X \vee Y = \widetilde{X} \vee \widetilde{Y} \neq 0$, то

$$\overline{K}(X, Y) = \overline{K}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}). \tag{3}$$

Рассмотрим площадку $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,n}$ и пару векторов X, $Y \in \sigma$, $X \vee X \neq 0$. Из (3) следует корректность определения функции

$$K_E : \mathfrak{G}_{2,n} \to \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto \overline{K}(X,Y), \quad \sigma = \frac{X \vee Y}{|X \vee Y|}.$$

Функция K_E сопоставляет каждому двумерному направлению σ внешнюю кривизну поверхности $\exp_\omega \sigma \subset S$ в точке ω.

По обобщенной теореме Гаусса для этой поверхности будет

$$K(\sigma) = K_E(\sigma) + 1. \tag{4}$$

Из этого равенства видно, что наборы стационарных значений для функций K и K_E совмещаются сдвигом на единицу.

1.4. Область

$$W := \left\{(X,Y) \in (T_\omega\, G^+_{2,n} \times T_\omega\, G^+_{2,n}) \mid X \vee Y \neq 0\right\}$$

является подмногообразием максимальной размерности линейного пространства. Как обычно принято, отождествим касательные пространства $T_{(X,Y)}W$ с самим линейным пространством $T_\omega\, G^+_{2,n} \times T_\omega\, G^+_{2,n}$.

Предложение. *Отображение*

$$\pi : W \to \mathfrak{G}_{2,n}, \quad (X,Y) \mapsto \frac{X \vee Y}{|X \vee Y|}$$

является субмерсией.

Доказательство. Пусть

$$\pi(X,Y) = \sigma = \frac{X \vee Y}{|X \vee Y|} \quad \text{и} \quad \xi \in T_\sigma \mathfrak{G}_{2,n}.$$

Рассмотрим кривую

$$\sigma : t \mapsto \sigma(t) \subset \mathfrak{G}_{2,n}, \quad \sigma(0) = \sigma, \quad \sigma'(0) = \xi.$$

Через $X(t)$, $Y(t)$ обозначим проекции векторов X, Y на двумерную площадку $\sigma(t)$. Для достаточно малых по модулю t кривая $\widetilde{\sigma}(t) = (X(t), Y(t)) \subset W$ и $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$. Откуда $\xi = (d_{(X,Y)}\pi)(\widetilde{\sigma}\,'(0))$. $\square$

Следствие. *Пусть* $\pi(X,Y)=\sigma$. *Тогда*

$$d_\sigma K_E = 0 \Longleftrightarrow d_{(X,Y)}\overline{K} = 0. \tag{5}$$

Доказательство. По определению функции K_E будет $\overline{K} = K_E \circ \pi$. Значит

$$d_{(X,Y)}\overline{K} = d_\sigma K_E \circ d_{(X,Y)}\pi. \tag{6}$$

Из (6) и предложения 1.4 следует эквивалентность (5). □

Из (5) вытекает

$$\operatorname{ext}\overline{K} = \operatorname{ext} K_E.$$

Перепишем формулу (5) в эквивалентной форме

$$\nabla_\sigma K_E = 0 \Longleftrightarrow \nabla_{(X,Y)}\overline{K} \Longleftrightarrow \nabla_{(X,Y)}A - \varkappa\nabla_{(X,Y)}C = 0, \tag{7}$$

где $\varkappa = \overline{K}(X,Y)$ есть стационарное значение функций $\overline{K}$ и K_E.

2.1. Приступим к вычислению градиента функции $\overline{K}$. Пусть

$$\xi = (\xi_1,\xi_2) \in T_{(X,Y)}W.$$

Построим такую кривую $\gamma : t \mapsto W$, что

$$\gamma(0) = (\gamma_1(0),\gamma_2(0)) = (X,Y) \quad \text{и} \quad \gamma'(0) = (\gamma_1'(0),\gamma_2'(0)) = \xi.$$

Тогда будет

$$\left\langle \nabla_{(X,Y)}C, \xi\right\rangle = \xi(C) = [C(\gamma(t))]_0' = \left[(\gamma_1(t)\vee\gamma_2(t))^2\right]_0' =$$

$$2\langle X\vee Y, \xi_1\vee Y + X\vee\xi_2\rangle = \left\langle \left(Y^2X - \langle X,Y\rangle Y, X^2Y - \langle X,Y\rangle X\right), \xi\right\rangle.$$

Откуда находим

$$\frac{1}{2}\nabla_{(X,Y)}C = \left(Y^2X - \langle X,Y\rangle Y, X^2Y - \langle X,Y\rangle X\right).$$

Если пара (X,Y) ортонормирована, то

$$\frac{1}{2}\nabla_{(X,Y)}C = (X,Y), \quad X^2 = Y^2 = 1, \quad \langle X,Y\rangle = 0. \tag{8}$$

2.2. Для вычисления градиента $\nabla_{(X,Y)}A$ используем кривую γ, построенную в 2.1

$$\langle \nabla_{(X,Y)}A, \xi \rangle = \xi(A) = [A(\gamma(t))]'_0 =$$
$$= \left[\langle B(\gamma_1,\gamma_1), B(\gamma_2,\gamma_2)\rangle - B^2(\gamma_1,\gamma_2)\right]'_0 =$$
$$= 2\big[\langle B(X,\xi_1), B(Y,Y)\rangle + \langle B(X,X), B(Y,\xi_2)\rangle -$$
$$-\langle B(X,Y), B(Y,\xi_1) + B(X,\xi_2)\rangle\big].$$

Обратимся к разложениям (1) для бивекторов X, Y. Пусть

$$\eta = (N_1^\eta \wedge e_2 + e_1 \wedge N_2^\eta) \in T_\omega\, C^+_{2,n}. \tag{9}$$

Внутренне умножая бивектор η на e_1 и e_2 (см. [1], 2.1), находим

$$N_1^\eta = -\eta \llcorner e_2, \quad N_2^\eta = -\eta \llcorner e_1. \tag{10}$$

Представим градиент $\nabla_{(X,Y)}A$ в виде

$$\nabla_{(X,Y)}A = 2(\zeta_1,\zeta_2) = 2(\overline{N}_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \overline{N}_2, \widetilde{N}_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \widetilde{N}_2). \tag{11}$$

Из (1), (2), (9), (10) следует

$$\langle B(Y,Y), B(X,\eta)\rangle - \langle B(X,Y), B(Y,\eta)\rangle =$$
$$= 2\langle N_1^Y \wedge N_2^Y, N_1^X \wedge N_2^\eta + N_1^\eta \wedge N_2^X \rangle -$$
$$-\langle N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X, N_1^Y \wedge N_2^\eta + N_1^\eta \wedge N_2^Y \rangle =$$
$$-2\begin{vmatrix} \langle N_1^X, N_1^Y\rangle & \langle N_1^Y, N_2^\eta\rangle \\ \langle N_1^X, N_2^Y\rangle & \langle N_2^Y, N_2^\eta\rangle \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \langle N_1^Y, N_1^\eta\rangle & \langle N_2^X, N_1^Y\rangle \\ \langle N_2^Y, N_1^\eta\rangle & \langle N_2^X, N_2^Y\rangle \end{vmatrix} -$$
$$-\begin{vmatrix} \langle N_1^X, N_1^Y\rangle & \langle N_1^X, N_2^\eta\rangle \\ \langle N_1^Y, N_1^\eta\rangle & \langle N_2^Y, N_2^\eta\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle N_1^X, N_1^\eta\rangle & \langle N_1^X, N_2^Y\rangle \\ \langle N_2^Y, N_1^\eta\rangle & (N_2^Y)^2 \end{vmatrix} -$$
$$-\begin{vmatrix} (N_1^Y)^2 & \langle N_1^Y, N_2^\eta\rangle \\ \langle N_2^X, N_1^Y\rangle & \langle N_2^X, N_2^\eta\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle N_1^Y, N_1^\eta\rangle & \langle N_1^Y, N_2^Y\rangle \\ \langle N_2^X, N_1^\eta\rangle & \langle N_2^X, N_2^Y\rangle \end{vmatrix} =$$
$$= \big\langle \eta, \big[\langle N_2^X, N_2^Y\rangle N_1^Y + \big(\langle N_1^X, N_2^Y\rangle - 2\langle N_2^X, N_1^Y\rangle\big) N_2^Y - \big(N_2^Y\big)^2 N_1^X +$$
$$+\langle N_1^Y, N_2^Y\rangle N_2^X\big] \wedge e_2 + e_1 \wedge \big[\langle N_1^X, N_1^Y\rangle N_2^Y + \big(\langle N_2^X, N_1^Y\rangle -$$
$$-2\langle N_1^X, N_2^Y\rangle\big) N_1^Y + \langle N_1^Y, N_2^Y\rangle N_1^X - \big(N_1^Y\big)^2 N_2^X\big]\big\rangle.$$

Так как в равенстве (11) бивектор ζ_2 получается из ζ_1 перестановкой X с Y, то из последнего равенства следует

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1 &= -(N_2^Y)^2 N_1^X + \langle N_1^Y, N_2^Y \rangle N_2^X + \langle N_2^X, N_2^Y \rangle N_1^Y + \\
&\quad + \big(\langle N_1^X, N_2^Y \rangle - 2\langle N_2^X, N_1^Y \rangle\big) N_2^Y, \\
\overline{N}_2 &= \langle N_1^Y, N_2^Y \rangle N_1^X - (N_1^Y)^2 N_2^X + \big(\langle N_2^X, N_1^Y \rangle - \\
&\quad - 2\langle N_1^X, N_2^Y \rangle\big) N_1^Y + \langle N_1^X, N_1^Y \rangle N_2^Y, \\
\widetilde{N}_1 &= \langle N_2^X, N_2^Y \rangle N_1^X + \big(\langle N_2^X, N_1^Y \rangle - \\
&\quad - 2\langle N_1^X, N_2^Y \rangle\big) N_2^X - (N_2^X)^2 N_1^Y + \langle N_1^X, N_2^X \rangle N_2^Y, \\
\widetilde{N}_2 &= \big(\langle N_1^X, N_2^Y \rangle - 2\langle N_2^X, N_1^Y \rangle\big) N_1^X + \\
&\quad + \langle N_1^X, N_1^Y \rangle N_2^X + \langle N_1^X, N_2^X \rangle N_1^Y - (N_1^X)^2 N_2^Y.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулы (11), (12) дают выражение для градиента функции A в точке (X, Y).

2.3. Пусть в точке $(X, Y) \in W$ кривизна $\overline{K}$ принимает стационарное значение $\varkappa$ и $\nabla_{(X,Y)} \overline{K} = 0$. Для ортонормированной пары (X, Y) из выражений для градиентов функций A, C и формул (4), (7) вытекают эквивалентности ($\sigma = X \vee Y$):

$$\begin{gathered}
\nabla_\sigma K = 0 \Longleftrightarrow \nabla_\sigma K_E = 0 \Longleftrightarrow \nabla_{(X,Y)} \overline{K} = 0 \Longleftrightarrow \overline{N}_1 - \varkappa N_1^X = \\
= \overline{N}_2 - \varkappa N_2^X = \widetilde{N}_1 - \varkappa N_1^Y = \widetilde{N}_2 - \varkappa N_2^Y = 0, \quad \varkappa = \overline{K}(X, Y), \\
\big(N_1^X\big)^2 + \big(N_2^X\big)^2 = \big(N_1^Y\big)^2 + \big(N_2^Y\big)^2 = 1, \\
\langle N_1^X, N_1^Y \rangle + \langle N_2^X, N_2^Y \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Предложение. *Пусть две ортонормированные пары* (e_1, e_2) *и* (X, Y), *определяющие строку* $N := (N_1^X, N_2^X, N_1^Y, N_2^Y)$ *удовлетворяют условиям*

$$e_1 \wedge e_2 = \omega, \quad X \vee Y = \pm\sigma \in \mathfrak{G}_{2,n}. \tag{14}$$

Для того, чтобы в направлении σ *кривизна* K *принимала стационарное значение* $\varkappa$ *необходимо и достаточно выполнения равенств* (13) *для строки* N.

Определение. *Ортонормированные пары (e_1, e_2), (X, Y), удовлетворяющие условиям* (14), *назовем* допустимыми.

3.1. Поиски множества $\operatorname{ext} K$ разобьем на этапы, зависящие от некоторого натурального параметра m. Для площадки $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,n}$ выберем допустимые пары (e_1, e_2) и (X, Y). Такой выбор однозначно определяет строку $N = (N_1^X, N_2^X, N_1^Y, N_2^Y)$.

Предложение. *Для любых двух допустимых пар (e_1, e_2), (X, Y) и $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2)$ и $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ существует такая ортогональная матрица $D \in O(4)$, что*

$$N = \widetilde{N} D. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточно сравнить пары (e_1, e_2), (X, Y) с $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2)$, (X, Y) и (e_1, e_2), (X, Y) с (e_1, e_2), $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$. Пусть имеет место первый вариант. Найдется такой угол φ, что

$$\widetilde{e}_1 = e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi, \quad \widetilde{e}_2 = -e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi.$$

Тогда

$$X = \widetilde{N}_1^X \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{N}_2^X =$$
$$= \widetilde{N}_1^X \wedge \big(- e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi \big) + \big(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi \big) \wedge \widetilde{N}_2^X =$$
$$= \big(\widetilde{N}_1^X \cos\varphi - \widetilde{N}_2^X \sin\varphi \big) \wedge e_2 + e_1 \wedge \big(\widetilde{N}_1^X \sin\varphi + \widetilde{N}_2^X \cos\varphi \big).$$

Откуда

$$N_1^X = \widetilde{N}_1^X \cos\varphi - \widetilde{N}_2^X \sin\varphi, \quad N_2^X = \widetilde{N}_1^X \sin\varphi + \widetilde{N}_2^X \cos\varphi.$$

Аналогично

$$N_1^Y = \widetilde{N}_1^Y \cos\varphi - \widetilde{N}_2^Y \sin\varphi, \quad N_2^Y = \widetilde{N}_1^Y \sin\varphi + \widetilde{N}_2^Y \cos\varphi.$$

Из этих формул следует равенство (15) для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Второй вариант для сравниваемых допустимых пар рассматривается точно так же. $\square$

Формула (15) позволяет корректно определить следующие объекты

$$\mathcal{N}(\sigma) := \operatorname{Lin} N = \operatorname{Lin}\big(N_1^X, N_2^X, N_1^Y, N_2^Y \big), \quad m(\sigma) = \dim \mathcal{N}(\sigma).$$

Очевидно $m(\sigma) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3.2. Рассмотрим экстремальное направление σ при $m(\sigma) = 4$. Выберем какие-либо допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y). Вектора строки N, построенной по этим парам, линейно независимы, поэтому из (12), (13) легко следует

$$N^T \cdot N = 2\, E_4, \tag{16}$$

где E_4 обозначает единичную 4×4 матрицу, а операция “$\cdot$” – скалярное умножение для элементов произведения векторнозначных матриц N^T и N. Из (16) следует

$$\overline{K}(X, Y) = \langle\, B(X, X), B(Y, Y)\,\rangle - B^2(X, Y) =$$

$$= 4\langle\, N_1^X \wedge N_2^X, N_1^Y \wedge N_2^Y\,\rangle - (N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X)^2 = -\frac{1}{2}. \tag{17}$$

Подстановка условий (16), (17) в формулы (13), показывает, что последние выполнены для $\varkappa = -1/2$. Таким образом справедливо

Предложение. *Площадка σ с параметром $m(\sigma) = 4$ экстремальна тогда и только тогда, когда для любых допустимых пар (e_1, e_2), (X, Y) выполнено условие* (16). *Другими словами, представление* (1) *для пары (X, Y) имеет вид*

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2),$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_3 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_4), \quad \langle\, n_i, n_j\,\rangle = \delta_{ij}. \tag{18}$$

Из (4) определяем стационарное значение $K(\sigma) = 1/2 \in \operatorname{ext} K$.

Заметим, что двумерные направления σ в касательном пространстве грассманиана $G^+_{2,n}$ с параметром $m(\sigma) = 4$ существуют только при $n \geqslant 6$.

3.3. Пусть для экстремальной площадки σ параметр $m(\sigma) = 3$. Выберем какие-либо допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y). Так как $m(\sigma) = 3$, то в наборе N найдутся три линейно независимых вектора. Не нарушая общности, будем считать, что это вектора N_1^X, N_2^X, N_1^Y. Разложим вектор N_2^Y по базису $\{N_1^X, N_2^X, N_1^Y\}$

$$N_2^Y = \alpha N_1^X + \beta N_2^X + \gamma N_1^Y. \tag{19}$$

Обозначим

$$p := \langle\, N_1^X, N_2^Y\,\rangle - 2\langle\, N_2^X, N_1^Y\,\rangle, \quad q := \langle\, N_2^X, N_1^Y\,\rangle - 2\langle\, N_1^X, N_2^Y\,\rangle.$$

Подставив (13), (19) в (12), мы получим четыре линейные комбинации векторов N_1^X, N_2^X, N_1^Y. В силу линейной независимости этой тройки векторов, справедливы равенства

$$\begin{gathered}
\varkappa + (N_2^Y)^2 - \alpha p = \langle N_1^Y, N_2^Y \rangle + \beta p = \langle N_2^X, N_2^Y \rangle + \gamma p = 0, \\
\varkappa + (N_1^Y)^2 - \beta \langle N_1^X, N_1^Y \rangle = \langle N_1^Y, N_2^Y \rangle + \alpha \langle N_1^X, N_1^Y \rangle = \\
= q + \gamma \langle N_1^X, N_1^Y \rangle = 0, \\
\varkappa + (N_2^X)^2 - \gamma \langle N_1^X, N_2^X \rangle = \langle N_2^X, N_2^Y \rangle + \alpha \langle N_1^X, N_2^X \rangle = \\
= q + \beta \langle N_1^X, N_2^X \rangle = 0, \\
\left[\varkappa + \left(N_1^X\right)^2\right]\left(\alpha N_1^X + \beta N_2^X + \gamma N_1^Y\right) = \\
p N_1^X + \langle N_1^X, N_1^Y \rangle N_2^X + \langle N_1^X, N_2^X \rangle N_1^Y.
\end{gathered} \tag{20}$$

3.3.1. Пусть $\varkappa + (N_1^X)^2 = \lambda \neq 0$. Тогда из (20) следует

$$\alpha = \frac{p}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\langle N_1^X, N_1^Y \rangle}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\langle N_1^X, N_2^X \rangle}{\lambda}. \tag{21}$$

Выберем пару (e_1, e_2) так, чтобы разложение (1) для вектора X стало каноническим, то есть

$$\langle N_1^X, N_2^X \rangle = 0. \tag{22}$$

Из (20), (21), (22), с учетом ортонормированности пары (X, Y), последовательно находим:

$$0 = \gamma = q = \langle N_2^X, N_2^Y \rangle = \langle N_1^X, N_1^Y \rangle = \langle N_1^Y, N_2^Y \rangle = \beta.$$

Значит, при ранее выбранной паре (e_1, e_2), разложение (1) для вектора Y также каноническое и

$$N_2^Y = \alpha N_1^X. \tag{23}$$

Вектора X, Y единичны, поэтому

$$\varkappa = -(N_2^X)^2 = -(N_1^Y)^2 = (N_1^X)^2 - 1 = (N_2^Y)^2 - 1. \tag{24}$$

Поэтому $\alpha^2 = 1$ и $N_2^Y = \pm N_1^X$. Так как параметр q обращается в ноль, то

$$p = \langle N_1^X, N_2^Y \rangle - 2 \langle N_2^X, N_1^Y \rangle = -3 \langle N_1^X, N_2^Y \rangle = -3\alpha (N_1^X)^2.$$

Подставим полученное выражение для p в первую строку (20):

$$0 = \varkappa + (N_2^Y)^2 - \alpha p = 2\varkappa + 1 + 3(\varkappa + 1) \Rightarrow \varkappa = -\frac{4}{5}. \qquad (25)$$

В силу (24) получим

$$(N_2^X)^2 = (N_1^Y)^2 = \frac{4}{5}, \quad (N_1^X)^2 = (N_2^Y)^2 = \frac{1}{5}.$$

Из найденных соотношений следует, что пару (X, Y) можно представить в виде

$$X = \frac{1}{\sqrt{5}} n_1 \wedge e_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} e_1 \wedge n_2,$$

$$Y = \pm\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}n_3\right) \wedge e_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} e_1 \wedge n_1\right], \qquad (26)$$

для некоторого ортонормированного базиса $\{n_1, n_2, n_3\}$ пространства $\mathcal{N}(\sigma)$.

Для пары (26) вычислим кривизну $\overline{K}(X, Y)$.

$$K(X,Y) = 4\langle N_1^X \wedge N_2^X, N_1^Y \wedge N_2^Y \rangle - (N_1^X \wedge N_2^Y + N_1^Y \wedge N_2^X)^2 =$$

$$\frac{16}{25}\left\langle n_1 \wedge n_2, \left(\frac{1}{2}n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}n_3\right) \wedge n_1 \right\rangle -$$

$$-\frac{16}{25}\left[\left(\frac{1}{2}n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}n_3\right) \wedge n_2\right]^2 = -\frac{4}{5}.$$

Тем самым значение $\varkappa$ из равенства (25) совпадает с кривизной $\overline{K}(\sigma)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что пара (X, Y) из (26) со значением $\varkappa = \overline{K}(X, Y) = -4/5$ удовлетворяет всем условиям экстремальности площадки σ (13).

3.3.3. Резюмируя результаты пп. 3.3.1 и 3.3.2, сформулируем

Предложение. *Площадка σ с параметром $m(\sigma) = 3$ экстремальна тогда и только тогда, когда для любой допустимой пары (X, Y) существует такая допустимая пара (e_1, e_2), что представление (1) для пары (X, Y) имеет вид (2.6).*

Из (4) находим стационарное значение $K(\sigma) = 1/5 \in \operatorname{ext} K$.

Заметим, что двумерные направления $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,n}$ с параметром $m(\sigma) = 3$ существуют только при $n \geqslant 5$.

4.1. В работе ([4], с. 18) приведена конструкция, сопоставляющая каждой паре $\omega \in G^+_{p,p+q}$, $\Omega \subset T_\omega\, G^+_{p,p+q}$ некоторое вполне геодезическое подмногообразие, касающееся Ω в точке ω и конгруэнтное некоторому грассманиану $G^+_{\widetilde{p},\widetilde{p}+\widetilde{q}}$, $\widetilde{p} \leqslant p$, $\widetilde{q} \leqslant q$. В обозначениях настоящей работы паре (ω,σ) сопоставлено многообразие $G^+_2(V_\omega \oplus \mathcal{N}(\sigma))$. При этом

$$\nabla_\sigma K = \nabla_\sigma \overline{K} \in T_\omega\, G^+_2(V_\omega \oplus \mathcal{N}(\sigma)). \tag{28}$$

В силу (28), задача о нахождении множества $\operatorname{ext} K$ в грассманианах $G^+_{2,n}$ сводится к рассмотрению случаев $n = 6,5,4,3$. Последний вариант тривиален, так как грассманиан $G^+_{2,3}$ конгруэнтен единичной сфере. Метод, изложенный при исследовании вариантов $n = 6,5$, при $n = 4$ приводит к весьма громоздким условиям экстремальности направления σ. С другой стороны, геометрия многообразия $G^+_{2,4}$ достаточно хорошо изучена. Кроме того, это многообразие является гиперповерхностью в пятимерной сфере. Выше сказанное позволило нам провести исследование случая $m(\sigma) = 2$ другим способом.

4.2. Рассмотрим четырехмерный грассманиан

$$G^+_{2,4} \subset S^5 \subset \Lambda_2(\mathbb{R}^4).$$

Ориентируем пространство $\mathbb{R}^4$. Любой вектор $X \in T_\omega\, G^+_{2,4}$ имеет каноническое разложение

$$X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2, \quad \omega = e_1 \wedge e_2, \quad n_1,\, n_2 \in V_\omega^\perp, \tag{29}$$

а ортонормированный базис $\{e_1, e_2, n_1, n_2\}$ положительно ориентирован. Оператор Ходжа $* : \Lambda_2 \to \Lambda_2$ переводит вектор X в вектор

$$*X = -\lambda_2 n_1 \wedge e_2 - \lambda_1 e_1 \wedge n_2. \tag{30}$$

Из (29), (30) следует

$$\langle X, *X \rangle = -2\lambda_1\lambda_2.$$

Вторая форма вложения $G^+_{2,4} \subset S^5$ в точке ω имеет вид (см. [5])

$$B(X,Y) = -\langle X, *Y \rangle * \omega.$$

Предложение. *Для любой площадки $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,4}$ существует такая допустимая пара (X, Y), что*

$$B(X, Y) = 0.$$

Доказательство. Для произвольной допустимой пары (X, Y) рассмотрим уравнение с неизвестным углом φ

$$B(\varphi) := B(X \cos\varphi + Y \sin\varphi, -X \sin\varphi + Y \cos\varphi) = 0.$$

$$B(\varphi) = \big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big) B(X, Y) + \cos\varphi \sin\varphi \big[B(Y, Y) - B(X, X)\big] =$$

$$= \Big[-\cos 2\varphi \langle X, *Y \rangle + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \big(\langle X, *X \rangle - \langle Y, *Y \rangle \big) \Big] (n_1 \wedge n_2) = 0.$$

Ясно, что это уравнение имеет решение, откуда следует наше утверждение. $\square$

4.3. Грассманиан $G^+_{2,4}$ можно представить в виде суммы Минковского (см. [6])

$$G^+_{2,4} = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{31}$$

двух двумерных сфер, лежащих в собственных трехмерных подпространствах Λ^+, Λ^- оператора Ходжа, отвечающих собственным числам ± 1. Касательное пространство $T_\omega G^+_{2,4}$ разлагается в сумму Минковского (см. [5]) двух двумерных плоскостей

$$T_\omega G^+_{2,4} = \sigma^+ + \sigma^-, \quad \sigma^+ = \Lambda^+ \cap T_\omega G^+_{2,4}, \quad \sigma^- = \Lambda^- \cap T_\omega G^+_{2,4}. \tag{32}$$

Из (31), (32) следует, что если $X \in \sigma^-$, $Y \in \sigma^+$, то

$$K(X \vee Y) = 0. \tag{33}$$

4.4. Пусть для некоторой площадки $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,4}$ параметр $m(\sigma) = 2$ и $K(\sigma) = 0$. В силу неотрицательности кривизны грассманианов, площадка σ экстремальна. Из теоремы 24.5 [4], следует, что для площадки σ существуют такие допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y), при которых

$$X = n_1 \wedge e_2, \quad Y = e_1 \wedge n_2, \quad \langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{34}$$

4.5. Лемма. *Для любой двумерной площаки $\sigma \subset T_\omega G^+_{2,4}$ с отличной от нуля кривизной существует такая ортонормированная пара X, $Y \in \sigma$, которую можно представить в виде*

$$X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2, \quad Y = \mu_1 n_1 \wedge e_1 + \mu_2 e_2 \wedge n_2, \tag{35}$$

где $e_1 \wedge e_2 = \omega$, $\langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$.

Доказательство. Из предложения 4.2 следует, что для площадки σ найдется такая допустимая пара (X, Y), при которой $B(X,Y) = -\langle Y, *X \rangle * \omega = 0$. Выберем такую допустимую пару (e_1, e_2), при которой вектор X имеет каноническое разложение (29).

Пусть хотя бы один из векторов X, Y, например, X, не принадлежит $\sigma^+ \cup \sigma^-$. Значит вектора X и $*X$ не коллинеарны. Из (29), (30) вытекает, что $\Delta := (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \neq 0$ и

$$-\Delta n_1 \wedge e_2 = \lambda_1 X + \lambda_2 * X, \quad -\Delta e_1 \wedge n_2 = \lambda_2 X + \lambda_1 * X. \tag{36}$$

Набор $\{n_1 \wedge e_2, e_1 \wedge n_2, n_1 \wedge e_1, e_2 \wedge n_2\}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_\omega G^+_{2,4}$. Вектор Y ортогонален к X, $*X$, поэтому из равенств (36) следует (35).

Пусть X, $Y \in \sigma^+ \cup \sigma^-$. Из (33) следует, что вектора X, Y не могут принадлежать различным элементам объединения. Не нарушая общности, рассмотрим вариант X, $Y \in \sigma^+$. Вектор $n_1 \wedge e_1 + e_2 \wedge n_2$ лежит в площадке σ^+, ортогонален к X, следовательно коллинеарен вектору Y. □

4.6. Пусть для некоторой экстремальной площадки $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,4}$ с параметром $m(\sigma) = 2$ кривизна $K(\sigma) \neq 0$. Из леммы 4.5 следует, что для площадки σ найдутся такие допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y), при которых

$$X = \cos u n_1 \wedge e_2 + \sin u e_1 \wedge n_2, \quad Y = \cos v n_2 \wedge e_2 + \sin v e_1 \wedge n_1, \tag{37}$$

где $\langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$.

Можно считать, что площадка σ включена в семейство $\Sigma(u,v) := X(u,v) \vee Y(u,v)$, где $X(u,v)$, $Y(u,v)$ определены в (37) и $\sigma = \sigma(u_0, v_0)$. Из (37) следует, что $B(X,Y) = 0$, поэтому

$$\overline{K}(u,v) := K(X,Y)(u,v) =$$

$$= \langle X, *X \rangle \langle Y, *Y \rangle (u,v) = -\sin 2u \sin 2v. \tag{38}$$

Так как в точке (u_0, v_0) кривизна $\overline{K}$ экстремальна, то

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \overline{K}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} &= -2\cos 2u_0 \sin 2v_0 = 0, \\ \left.\frac{\partial \overline{K}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} &= -2\sin 2u_0 \cos 2v_0 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Равенства (39) выполнены в двух случаях.

1) $\cos 2v_0 = \cos 2v_0 = 0$.

При этом $\overline{K}(u_0, v_0) = \pm 1$. Так как $K(u_0, v_0) = \overline{K}(u_0, v_0) + 1$, то вариант $\overline{K} = -1$ исключен. Если $\overline{K} = 1$, то пару (X, Y) можно представить в виде

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2), \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_2 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_1), \quad \langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{40}$$

При положительной ориентации базиса (e_1, e_2, n_1, n_2) в (40) эти разложения канонические и X, $Y \in \sigma^-$, при отрицательной ориентации X, $Y \in \sigma^+$. Так как при этом кривизна $K(\sigma)$ принимает максимальное значение, равное двум, то представления (40) гарантируют экстремальность площадки $\sigma = X \vee Y$.

2) $\sin 2u_0 = \sin 2v_0 = 0$.

В этом случае $\overline{K}(u_0, v_0) = 0$, $K(u_0, v_0) = 1$. Пару (X, Y) можно представить в виде

$$X = e_1 \wedge n_2, \quad Y = e_1 \wedge n_1, \quad \langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{41}$$

Из (41) следует, что условия (13) экстремальности площадки $\sigma = X \vee Y$ тривиальным образом выполнены. Значит $1 \in \operatorname{ext} K$.

4.7. Теорема. *Площадка $\sigma \in \mathfrak{G}_{2,n}$ с параметром $m(\sigma) = 2$ экстремальна тогда и только тогда, когда существуют такие допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y), при которых представление (1) для векторов X, Y имеет вид:*

1) $X = n_1 \wedge e_2$, $Y = e_1 \wedge n_1$, $\langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$.

При этом множество $\exp_\omega \sigma$ есть плоский, вполне геодезический в $G^+_{2,n}$ тор. Кривизна $K(\sigma) = 0$.

2) $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_2 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_1)$, $\langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$.

При этом множество $\exp_\omega \sigma$ *есть вполне геодезическая двумерная сфера радиуса* $1/\sqrt{2}$*, стандартно вложенная в* $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$*. Кривизна* $K(\sigma) = 2$*.*

3) $X = e_1 \wedge n_2$, $Y = e_1 \wedge n_1$, $\langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$.

При этом множество $\exp_\omega \sigma$ *есть единичная вполне геодезическая двумерная сфера, стандартно вложенная в* $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$*. Кривизна* $K(\sigma) = 1$*.*

Доказательство. Существование предъявленных разложений для пар (X, Y) доказано в пп. 4.4 и 4.6. Утверждение про вид множества $\exp_\omega \sigma$ в 1), 2) следует из теорем 15.1 и 24.4 [4]. В случае 3) множество $\exp_\omega \sigma$ в обозначениях работы [7] (см. §18) совпадает с $\widetilde{G}_1^+(\mathrm{Lin}\,(e_1, n_1, n_2))$, которое вполне геодезично в $G_{2,n}^+$ и представляет из себя единичную сферу, стандартно вложенную в $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. □

Утверждение теоремы 1.1 следует из предложений 3.2, 3.3.3 и теоремы 4.7.

5.1. Ортогональная группа $O(\mathbb{R}^n)$ действует ортогональными изометриями в $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. Грассманиан $G_{2,n}^+$ является инвариантным подмножеством этого действия. Подгруппа $H_\omega \subset O(\mathbb{R}^n)$ изотропии элемента $\omega \in G_{2,n}^+$ естественно действует линейными изометриями в $T_\omega G_{2,n}^+$. Значит ее действие распространяется и на многообразие $\mathfrak{G}_{2,n}$. Оказывается, что две любые экстремальные площадки с равными значениями кривизны "одинаковы". Точнее говоря, имеет место

Теорема. *Две экстремальные площадки* $\sigma, \widetilde{\sigma} \in \mathfrak{G}_{2,n}$ *с одинаковыми стационарными значениями кривизны* $K(\sigma) = K(\widetilde{\sigma}) \in \operatorname{ext} K$ *конгруэнтны, то есть могут быть совмещены движением группы* H_ω*.*

Доказательство. Пусть $K(\sigma) = K(\widetilde{\sigma}) = 1/5$. Из предложения 3.3.2 для площадки σ следует, что найдутся такие допустимые пары (e_1, e_2), (X, Y), при которых выполнены равенства (26) со знаком плюс. При этом возникает ортонормированная пятерка $(e_1, e_2, n_1, n_2, n_3)$. Для площадки $\widetilde{\sigma}$ появляется соответствующая пятерка $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2, \widetilde{n}_3)$. Дополним эти пятерки до ортонормированных базисов $\mathbb{R}^n$ векторами $\{n_i\}_{i=4}^{n-2}$, соответственно – $\{\widetilde{n}_i\}_{i=4}^{n-2}$. Тогда движение $D \in O(n)$, определяемое равенствами

$$De_i = \widetilde{e}_i, \quad Dn_j = \widetilde{n}_j, \quad i \in [1, 2], \quad j \in [1, n-2]$$

совмещает пары (X, Y) с $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, а значит и площадки σ с $\widetilde{\sigma}$.

Так как $e_1 \wedge e_2 = \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{e}_2 = \omega$, то $D \in H_\omega$.

Случаи $K(\sigma) = 0, 1/2, 1, 2$ рассматриваются точно так же. $\square$

Преобразования группы $O(\mathbb{R}^n) \supset H_\omega$ являются движениями всего пространства $\Lambda_2 \supset G^+_{2,n}$, поэтому они сохраняют секционную кривизну и условия экстремальности площадки σ. Это замечание и формула (38) показывают, что требование экстремальности площадок σ и $\widetilde{\sigma}$ в доказанной теореме существенно.

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. I, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
2. Y.-C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **60**, No. 1 (1968), 75–79.
3. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. III.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.
4. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. V.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 104–120.
5. А. Н. Глушаков, *Два вопроса внешней геометрии плюккеровых вложений многообразий Грассмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 5–12.
6. С. Е. Козлов, *Ортогональные совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. вып. **27** (1984), 68–75.
7. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. IV.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 78–103.

Kozlov S. E. Stationary values of sectional curvature in Grassmanian manifolds of bivectors.

In the Grassmanian manifold $G^+_{2,n}$ of bivectors ($n \geqslant 4$) the curvature $K(\sigma)$ of the section on direction of a flat area σ takes values on the range from 0 to 2. All stationary values a of the function $K(\sigma)$ such that the gradient $\nabla K\big|_{\sigma=\sigma_0} = 0$ for at least one $\sigma_0 \in K^{-1}(a)$ are found. Those values are $\{0, 1, 2\}$ for $n = 4$, $\{0, 1/5, 1, 2\}$ for $n = 5$, $\{0, 1/5, 1/2, 1, 2\}$ for $n \geqslant 6$.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 3 июня 1999 г.