Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

А. В. Евдокимов, В. А. Залгаллер

О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ НЕСКОЛЬКИХ КОМПАКТОВ

1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ непустые компакты $K_0, K_1, \dots, K_m$. Положение K_0 считаем фиксированным, а компакты $K_1, K_2, \dots, K_m$ будем подвергать параллельным переносам на векторы $r_1, \dots, r_m$. Набор этих векторов можно рассматривать как единый вектор $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^{nm}$. Для удобства записи введем еще вектор $r_0 = 0$. Нас интересует, как зависит от ρ выпуклая оболочка

$$\Psi(\rho) = \operatorname{conv}\{\cup_{i=0}^m (K_i + r_i)\}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Зависящее от $\rho \in \mathbb{R}^{nm}$ семейство выпуклых множеств $\Psi(\rho) \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым семейством* (в смысле [3], п. 24), *то есть при любых ρ_1, ρ_2, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ справедливо включение*

$$\Psi((1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2) \subset (1-\lambda)\Psi(\rho_1) + \lambda\Psi(\rho_2). \tag{2}$$

Доказательство. Не нарушая общности, считаем далее компакты выпуклыми, заменяя их на их выпуклые оболочки, что не меняет $\Psi(\rho)$.

Пусть $z \in \Psi((1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2)$, $\rho_1 = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m})$, $\rho_2 = (r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2m})$. Тогда по теореме Каратеодори z допускает представление в виде

$$z = \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i y_i, \quad 0 \leqslant \theta_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 1,$$

где

$$y_i = x_{j(i)} + (1-\lambda) r_{1,j(i)} + \lambda r_{2,j(i)}, \quad x_{j(i)} \in K_{j(i)}.$$

Поэтому

$$z = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i (x_{j(i)} + r_{1,j(i)}) +$$

* Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–681.

$$+\lambda \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i (x_{j(i)} + r_{2,j(i)}) \in (1-\lambda)\Psi(\rho_1) + \lambda\Psi(\rho_2).$$

Последнее включение доказывает теорему 1.

2. В [4] было показано, что множество

$$\Phi(\rho) = \cap_{i=0}^{m} (K_i + r_i) \tag{3}$$

непусто при ρ из некоторого выпуклого множества $D \subset \mathbb{R}^{nm}$, и при изменении ρ в пределах D семейство $\Phi(\rho)$ вогнуто, то есть для $\Phi(\rho)$ имеет место включение, обратное (2). Вогнутость семейства, ввиду теоремы Брунна–Минковского (см. [3], п. 48) позволяла заключить, что объем $\operatorname{Vol}\Phi(\rho)$ является на D вогнутой функцией от ρ. Выпуклость семейства (1) не позволяет делать вывод о выпуклости $\operatorname{Vol}\Psi(\rho)$. Однако, и это является *основным результатом* настоящей работы, в случае всего двух компактов такое утверждение является верным.

Теорема 2. *Для двух непустых компактов $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^n$ объем*

$$\operatorname{Vol}\Psi(r) = \operatorname{Vol}\operatorname{conv}\{K_0 \cup (K_1 + r)\} \tag{4}$$

является выпуклой функцией от $r \in \mathbb{R}^n$.

Доказательству теоремы 2 мы предпошлем несколько замечаний, формулировку теоремы 3 (которая является следствием теоремы 2), а также три леммы, полезные при доказательстве теоремы 2.

3. Замечание 1. Уже при трех компактах аналогичное теореме 2 утверждение будет неверным. Вот простой пример. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ расположены три одноточечных компакта $K_0(0,0)$, $K_1(1,0)$, $K_2(0,1)$. Будем изменять вектор $\rho = (r_1, r_2)$ в $\mathbb{R}^4$ вдоль прямой $\rho(t) = (0,t,t,0)$. Тогда

$$\operatorname{Vol}\Psi(\rho(t)) = \left| \begin{pmatrix} 1+0 & 0+t \\ 0+t & 1+0 \end{pmatrix} \right| = |1-t^2|$$

– невыпуклая функция от t.

Замечание 2. Справедливость теоремы 2 при $n = 1$ очевидна. Поэтому ниже мы считаем, что $n \geqslant 2$.

Замечание 3. Ранее был известен (см. [5]) частный случай теоремы 2: когда K_0 – выпуклое тело, а k_1 – точка. В этом случае проходит совсем простое доказательство. Тело K_0 заменяется приближающим его выпуклым многогранником P. Тогда $\operatorname{Vol}\operatorname{conv}\{P \cup (k_1 + r)\}$ слагается из $\operatorname{Vol} P$ и суммы объемов пирамид с вершиной в $k_1 + r$ и с основаниями на видимых из точки $k_1 + r$ гранях многогранника P. Если точка k_1 равномерно движется по прямой, то объем каждой такой пирамиды либо постоянен (если прямая параллельна гиперграни), либо ноль, пока прямая "под" гиперплоскостью этой грани, а затем линейно возрастает. Значит, вдоль любой прямой $\operatorname{Vol}\operatorname{conv}\{P \cup (k_1 + r)\}$ есть сумма выпуклых функций. А при $P \to K_0$ предел выпуклых функций – снова выпуклая функция.

4. Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *каждая из интегральных поперечных мер* (см. [3], п. 38)

$$W_\nu(r) = W_\nu(\operatorname{conv}\{K_0 \cup (K_1 + r)\}) \tag{5}$$

является выпуклой функцией от $r \in \mathbb{R}^n$.

Это следует из того, что каждая интегральная поперечная мера выпуклого множества допускает представление через интеграл (по грассманову многообразию) от объемов (соответствующей размерности) проекций этого тела на подпространства. А проекция выпуклой оболочки объединения совпадает с выпуклой оболочкой объединения проекций. Кроме того, интеграл от выпуклой функции (выпукло зависящей от параметра) тоже выпукло зависит от параметра.

Аналогичный переход в [4] от вогнутости объема к вогнутости интегральных поперечных мер требовал более сложного обоснования – представлений W_ν через смешанные объемы и ссылки на обобщение теоремы Брунна–Минковского, данное Александровым [1, §4]. Заключение через проекции здесь не проходит, поскольку пересечение проекций отличается от проекции пересечения.

Перейдем к леммам.

5. Конфигурация из N точек в $\mathbb{R}^n$ называется *неособой*, или конфигурацией *общего положения*, если никакие $k + 1$ из них $(1 \leqslant k \leqslant n)$ не лежат в $(k - 1)$-мерной плоскости. В частности, все N точек различны.

Лемма 1. *Любую конфигурацию из N точек в $\mathbb{R}^n$ можно сделать неособой за счет произвольно малых сдвигов этих точек.*

Достаточно занумеровать эти точким и в порядке номеров подвергать их малым сдвигам так, чтобы очередная точка не попадала ни в одну из конечного числа плоскостей (размерности от 0 до $n-1$), определяемых уже сдвинутыми точками с меньшими номерами. $\square$

Лемма 2. *Для неособой конфигурации M из $N \geqslant n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ выпуклый многогранник $\operatorname{conv} M$ можно разбить на n-мерные симплексы, которые будут прилегать друг к другу по целым $(n-1)$-мерным граням, попарно не иметь общих внутренних точек, иметь вершины только в точках конфигурации M, причем множество всех их вершин будет совпадать с M.*

Для доказательства достаточно соответствующим образом разбить $\operatorname{conv} M$ на прилегающие по целым $(n-1)$-мерным граням n-мерные выпуклые многогранники. В силу неособенности конфигурации M каждый из этих многогранников будет иметь только симплициальные грани, и либо сам окажется симплексом, либо его можно будет разбить на несколько требуемых симплексов, каждый из которых имеет одной из своих вершин выбранную вершину многогранника. Возможность требуемого разбиения на многогранники можно обосновать "методом пустого шара", предложенным Делоне [2]. Но мы приведем другое (фольклорно известное) доказательство, сообщенное нам О. Я. Виро.

Отобразим стереографической проекцией σ множество $M \subset \mathbb{R}^n$ на n-мерную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, причем центр сферы расположим над внутренней точкой $\operatorname{conv} M$, а саму сферу S^n возьмем столь большого радиуса, что образ $\sigma(M)$ уместится в "южной полусфере". Затем, уже в $\mathbb{R}^{n+1}$, возьмем выпуклую оболочку $\sigma(M)$ и "северного полюса" A сферы S^n. Получим выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обратная стереографическая проекция σ^{-1} тех гиперграней многогранника $\operatorname{conv}\{\sigma(M) \cup A\}$, которые не содержат точку A, даст в $\mathbb{R}^n$ искомое разбиение на выпуклые многогранники. $\square$

Лемма 3. *Пусть неособенная конфигурация M, состоящая из N точек в $\mathbb{R}^n$, разбита на две непустые части M_0 и M_1, после чего часть M_0 оставлена неподвижной, а часть M_1 как твердое целое подвергается параллельному переносу в направлении первой из осей координат в $\mathbb{R}^n$. То есть M_1 заменяется на $M_1(t) =$*

$M_1 + (t, 0, \dots, 0)$. Тогда конфигурация $M(t) = M_0 \cup M_1(t)$ может перестать быть неособой лишь при конечном числе значений t.

Доказательство. Рассмотрим любые $k+1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ точек $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{k+1,1}, x_{k+1,2}, \dots, x_{k+1,n})$ конфигурации $M(t)$. Пусть первые l этих точек принадлежат $M_1(t)$, а остальные $k+1-l$ принадлежат M_0. Чтобы эти точки были *аффинно зависимыми*, то есть умещалось в $(k-1)$-мерной плоскости, необходимо и достаточно соблюдение условия

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_{11}+t & x_{12} & \dots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{l,1}+t & x_{l,2} & \dots & x_{l,n} & 1 \\ x_{l+1,1} & x_{l+1,2} & \dots & x_{l+1,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & \dots & x_{k+1,n} & 1 \end{pmatrix} < k+1. \qquad (6)$$

При $l = 0$ и $l = k+1$ условие (6) не выполняется ни при одном t ввиду неособенности исходной конфигурации M.

Допустим, что $l \neq 0$, $l \neq k+1$ и условие (6) выполнено. Тогда должны обращаться в ноль определители всех содержащих первый столбец миноров порядка $k+1$. Каждый такой определитель – либо тождественный ноль, либо линейный многочлен от t, имеющий лишь один вещественный корень. Но эти определители все одновременно не могут быть тождественно нулями, иначе условие (6) выполнялось бы и при $t = 0$, что противоречит неособенности конфигурации M.

Применяя эти соображения ко всем возможным наборам $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$, а их конечное число, получаем справедливость леммы 3. $\square$

6. Доказательство теоремы 2. 1) Нам достаточно доказать, что при фиксированных $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n$ функция $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} M(t)$, где $M(t) = M_0 \cup M_1(t)$, $M_1(t) = M_1 + r_1 + t(r_2 - r_1)$ есть выпуклая функция от t на участке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это позволит доказать теорему не для самих выпуклых компактов K_0, K_1, а для приближающих их невырожденных по размерности многогранников P_0, P_1. Множества вершин многогранников P_0, P_1 обозначим соответственно M_0, M_1. По лемме 1 можно считать многогранники P_0, P_1 выбранными так, что конфигурация $M = M_0 \cup M_1$ неособая.

2) Выберем в $\mathbb{R}^n$ систему декартовых координат так, чтобы вектор r_1 имел координаты $r_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, а вектор $r_2 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда, согласно лемме 3, конфигурация $M(t) = M_0 \cup M_1(t)$, где $M_1(t) = M_1 + r_1 + t(r_2 - r_1)$, будет оставаться неособой при всех $t \in [0, 1]$, за исключением конечного множества значений $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$.

3) Рассмотрим открытый интервал $t_i < t < t_{i+1}$. На нем конфигурация $M(t)$ неособая, и выпуклую оболочку $\operatorname{conv} M(t)$ можно, согласно лемме 2, при каком-либо $t \in (t_i, t_{i+1})$ разбить на прилегающие по целым $(n-1)$-мерным граням n-симплексы. При изменении t в пределах $t_i < t < t_{i+1}$ это разбиение сохраняет свое комбинаторное строение. Рассмотрим, как меняется с изменением t объем одного n-мерного симплекса Δ этого разбиения (при $t_i < t < t_{i+1}$). Если вершины симплекса Δ принадлежали M_0 или все они принадлежали $M_1(t)$, то объем его постоянен. Если у Δ есть вершины как из M_0, так и из $M_1(t)$, то при подсчете $\operatorname{Vol} \Delta$ можно перенести систему координат началом в одну из принадлежащих M_0 вершин симплекса Δ. Тогда $\operatorname{Vol} \Delta$ можно представить в виде

$$\operatorname{Vol} \Delta = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} x_{11} + t & x_{12} & \ldots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{l,1} + t & x_{l,2} & \ldots & x_{l,n} & 1 \\ x_{l+1,1} & x_{l+1,2} & \ldots & x_{l+1,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \ldots & x_{n,n} & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ – координаты остальных вершин симплекса Δ (из которых l вершин принадлежит M_1), упорядоченных так, чтобы стоящий в (7) определитель был положителен. Из (7) очевидно, что $\operatorname{Vol} \Delta$ *линейно* зависит от t. Значит, во всех случаях функция $\operatorname{Vol} M(t)$ на каждом из участков $t_i < t < t_{i+1}$ линейна. Кроме того, она непрерывна при всех $t \in [0, 1]$. Значит, ее график есть ломаная линия над отрезком $0 \leqslant t \leqslant 1$. Остается убедиться, что это – *выпуклая* ломаная (обращенная выпуклостью вниз).

4) Рассмотрим разбитый, как указано в лемме 3, на n-симплексы выпуклый многогранник $\operatorname{conv} M(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$ и *обжимающий* его цилиндр C с направляющей прямой, параллельной оси x_1. Этот цилиндр C представляет собой $(n-1)$-мерную

цилиндрическую поверхность в $\mathbb{R}^n$. (Она ограничивает "трубку", в которой многогранник conv $M(t)$ "сидит как пробка".)

Сам многогранник conv $M(t)$ является цепью Z из n-мерных симплексов, на которые он разбит, а его граница ∂conv $M(t)$ служит границей ∂Z этой цепи.

Цепь ∂Z состоит из $(n-1)$-мерных симплексов. Выделим среди этих $(n-1)$-симплексов те, которые целиком уместились на обжимающем цилиндре C. Эту часть цепи ∂Z обозначим ∂Z_0. Остальные $(n{-}1)$-симплексы цепи ∂Z разобьем на два класса следующим образом. Каждая направленная прямая, параллельная и сонаправленная оси x_1 и пересекающая int conv $M(t)$, пересекает граничную цепь ∂Z в двух точках: "входя" в int conv $M(t)$ и "выходя" из int conv $M(t)$. К классу ∂Z_- отнесем $(n-1)$-симплексы цепи ∂Z, пересекаемые такими прямыми "при входе", а к классу ∂Z_+ – пересекаемые "при выходе".

Ввиду выпуклости многогранника conv $M(t)$ ни один из $(n-1)$-симплексов классов ∂Z_- и ∂Z_+ не содержит в себе отрезка, параллельного оси x_1. Трубка, ограниченная цилиндром C, перегорожена двумя $(n-1)$-мерными пленками ∂Z_- и ∂Z_+.

5) Пусть теперь t возрастает. Точку p симплекса Δ^{n-1} цепи ∂Z будем характеризовать ее барицентрическими координатами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

где a_i – вершины симплекса Δ^{n-1}. С ростом t точки $a_i \in M_0$ неподвижны, а точки $a_j \in M_1$ сдвигаются в направлении оси x_1. Поэтому точка p может сдвигаться только в направлении оси x_1. При этом каждая точка пленок ∂Z_-, ∂Z_+ с ростом t сдвигается разве лишь вперед в направлении x_1.

6) Пока t остается в пределах $t_i < t < t_{i+1}$ сохраняется комбинаторное строение цепей Z и ∂Z, ни один симплекс не вырождается по размерности и не изменяет ориентацию. Сохраняется и выпуклость области, занимаемой в $\mathbb{R}^n$ цепью Z. Пусть t переходит за значение t_{i+1} (но не за t_{i+2}). При этом могут происходить вырождения по размерности и смена ориентации отдельных симплексов прежней цепи Z, а также утраты выпуклости множества, занимаемого деформирующейся цепью Z. Однако *объем со знаком* продолжает определяться формулами (7) для каждого "бывшего" n-мерного симплекса цепи Z и потому объем со знаком у

деформирующейся цепи Z линейно зависит от t и после перехода t за t_{i+1}. Чем же после перехода за t_{i+1} объем $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} M(t)$ отличается от объема со знаком цепи Z?

Это различие вызывается двумя причинами.

Во-первых, объем со знаком цепи Z, натянутой как пленка на цикл ∂Z в любой момент рассматриваемого изменения t равен интегралу по всему $\mathbb{R}^n$ от степени точки относительно цикла ∂Z. В исходном положении каждая точка $q \notin \partial Z$ имела относительно ∂Z степень 0, если лежала вне $\operatorname{conv} M(t)$, и степень 1, если лежала внутри $\operatorname{conv} M(t)$. Объем $\operatorname{Vol} M(t)$ и объем со знаком цепи Z в исходном положении совпадали. С ростом t пленка ∂Z_+, продвигавшаяся только вперед, расширяет множество точек со степенью 1 (за счет точек со степенью 0), а продвижение только вперед пленки ∂Z_- лишь понижает степень проходимых точек. Поэтому точек со степенью $\geqslant 2$ возникнуть не может. Поэтому объем (без знака) множества, занимаемого в $\mathbb{R}^n$ цепью Z, может быть разве лишь больше, чем объем со знаком цепи Z. Например, если часть n-мерной пленки выйдет за пределы ∂Z (как положенный на плоскость сачек для ловли бабочек выйдет за пределы его обода), то дважды покрытая вышедшая часть будет иметь нулевой объем со знаком, но занимать положительный объем в $\mathbb{R}^n$.

Во-вторых, если при небольшом переходе t за t_{i+1} множество, занятое в $\mathbb{R}^n$ цепью Z, утратило выпуклость, то при его замене на его выпуклую оболочку объем дополнительно увеличивается.

Итак, если в момент перехода t за t_{i+1} объем $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} M(t)$ меняется не линейно, то в следующем участке $t_{i+1} < t < t_{i+2}$ (где он снова изменяется линейно) он растет разве лишь быстрее, и график этого объема как функции от t имеет при $t = t_{i+1}$ перелом, обращенный выпуклостью вниз. Это доказывает теорему 2.

7. Следствие. *В $\mathbb{R}^n$ локальный минимум (за счет выбора $r \in \mathbb{R}^n$) объема (или другой интегральной поперечной меры W_ν) выпуклой оболочки двух непустых компактов K_0 и $K_1 + r$ является также глобальным минимумом и потому глобальный минимум можно искать градиентным методом. Множество тех r, при которых глобальный минимум достигается, может оказаться не одноточечным, но это множество всегда выпукло.*

Пример. Пусть K_0, K_1 – перпендикулярные отрезки на плоскости, рис. 1(a). Минимум при взаимных трансляциях периметра их выпуклой оболочки достигается при единственном их взаимном расположении рис. 1(с). А минимум площади их выпуклой оболочки достигается при расположениях, помещающих середину O отрезка K_1 в любую из точек прямоугольника, заштрихованного на рис. 1(в).

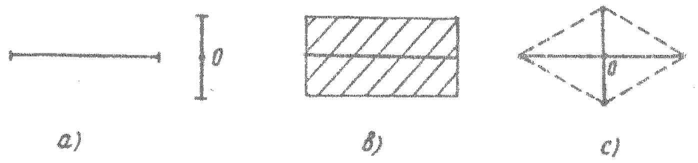

Рис. 1.

В этом примере положение минимума периметра содержится среди положений минимума площади. Но такие положения могут быть и совсем разными, см. рис. 2, где K_1 – равнобочная трапеция, а K_2 – ортогональный ее основаниям отрезок AB.

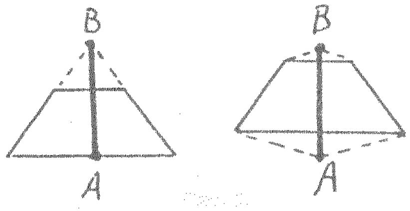

Рис. 2.

8. Задача о минимуме объема выпуклой оболочки трех и более компактов (за счет их параллельных переносов) несравненно сложнее. Конечно для минимизирующего объем расположения должен выполняться следующий необходимый признак. *Если любой один из компактов выделить, а все остальные заменить их совместной выпуклой оболочкой, то для новых, уже двух, компактов положение должно быть минимизирующим объем.* Удовлетворяется ли этот признак можно проверить по теореме 2 градиентным способом. Но указанный признак не является достаточным.

Пример. На плоскости для компактов 1, 2, 3, рис. 3(а) упомянутый признак выполняется в положениях 3(в) и 3(с). Но лишь положение 3(с) минимизирует площадь выпуклой оболочки.

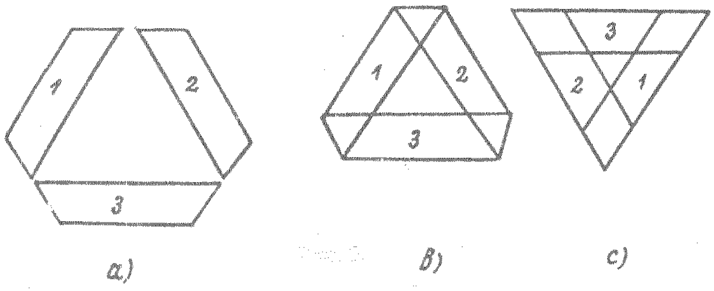

Рис. 3.

Литература

1. А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов. Часть II.* — Мат. сб. **2** (1937), 1205–1238.
2. B. N. Delaunay, *Sur la sphère vide.* Изв. АН (1933), 641–646.
3. Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел.* Berlin (1934); М. "Фазис", 1999.
4. В. А. Залгаллер, *О пересечениях выпуклых тел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 7–12.
5. A. Stoll, *Über den Kappenkörper eines konvexen Körpers.* — Comment. math. helv. **2** (1930), 35–68.

Evdokimov A. V., Zalgaller V. A. On the convex hull of several compacta.

Let $K_0, K_1, \dots, K_m$ be nonempty compact sets in $\mathbb{R}^n$. Then the family of convex hulls $\operatorname{conv}\{\bigcup_{i=0}^{m}(K_i + r_i)\}$, $r_0 = 0$, is a convex family of sets, parametrized by $\rho = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^{nm}$. In case $m = 1$, the volume $\operatorname{Vol}\operatorname{conv}(K_0 \cup (K_1 + r))$ is a convex function of $r \in \mathbb{R}^n$.

Сантк-Петербургский
Государственный университет
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 8 февраля 1999 г.