Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. Н. Фролов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ ВДОЛЬ СЕРИЙ УСПЕХОВ

1. Введение

Пусть $\{(X_n, Y_n)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с

$$P(Y_1 = 1) = p = 1 - P(Y_1 = 0) \in (0, 1].$$

Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0.$$

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение почти наверное максимумов

$$M_n(j) = \max_{0 \le k \le n-j} (S_{k+[j]} - S_k) I\{Y_{k+1} = \cdots = Y_{k+[j]} = 1\},$$

где $j = j_n$, $1 \le j \le n$, $I\{\,\cdot\,\}$ обозначает индикатор стоящего в скобках события, а $[\,\cdot\,]$ обозначает целую часть числа в скобках. Мы не исключаем в дальнейшем, что j может быть случайным. При исследовании $M_n(j)$ естественно ограничиться последовательностями j такими, что $j \le L_n$ п.н., где L_n – длина наидлиннейшей серии единиц среди $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

При различных дополнительных предположениях о случайных величинах X_n, Y_n и последовательности j возникают различные интересные частные случаи рассматриваемой схемы.

Если $X_n = 1$, а $j = L_n$, то $M_n(L_n) = L_n$ – это длина наидлиннейшей серии успехов (единиц) среди первых n испытаний в последовательности испытаний Бернулли. Асимптотическое поведение L_n исследовано в работах [1] (для $p = 1/2$) и [2]. В них, в частности, доказано, что $L_n \sim \log n / \log(1/p)$ п.н.

Работа поддержана Администрацией Санкт–Петербурга, Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации и Российской Академией Наук, грант М98-2.1П-173.

Если $Y_n = 1$ п.н. ($p = 1$), то $M_n(j)$ превращается в известную статистику Эрдёша–Реньи, описывающую поведение максимального выигрыша игрока на временных подынтервалах (на вероятностном языке – максимальных приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин). Асимптотическое поведение приращений сумм существенно зависит от их длины. Случай коротких ($j = O(\log n)$) приращений исследован в серии работ, вышедших после работы Эрдёша и Реньи [3], и вышедшей ранее, но долгое время остававшейся незамеченной, работы Шеппа [4]. Различные предельные теоремы для коротких приращений получены в [5–9]. Случай больших (длины более логарифма) приращений впервые рассматривали М. Чёргё и Ревес (см. [10]). Их исследования были продолжены в [5, 11, 12]. Результаты для коротких и больших приращений существенно отличаются. В случае коротких приращений асимптотика $M_n(j)$ и распределение X_1 однозначно определяют друг друга. Поэтому, здесь говорят о сильной неинвариантности. В случае больших приращений асимптотика $M_n(j)$ зависит не от самого распределения слагаемых, а лишь от его численных характеристик. Поэтому, в противоположность случаю коротких приращений, говорят о сильной инвариантности.

Отметим, что статистики типа Эрдёша–Реньи интересны не только с вероятностной и статистической точки зрения. Статистики такого типа представляют интерес в актуарных и финансовых моделях, требующих оценки возможных потерь (или выигрышей) на временных подынтервалах (см., например, [13]).

В этой статье мы рассматриваем случай $p \in (0, 1)$.

Подчеркнем, что мы не делаем никаких предположений о структуре зависимости между компонентами векторов (X_n, Y_n). В частности, допускается случай $Y_n = f(X_n)$, приводящий при соответствующем выборе функции f к естественным объектам. Так, если $Y_n = I\{X_n \geq 0\}$, а X_n – выигрыш игрока в n-ой партии некоторой игры, то $M_n(j)$ – это максимальный выигрыш игрока в беспроигрышных сериях длины j среди первых n партий.

Как и в случае $p = 1$, статистики типа $M_n(j)$ представляют интерес в актуарных и финансовых моделях, в которых естественным образом возникает процедура прореживания (см., например, [14]).

Исследование асимптотического поведения статистик типа

$M_n(j)$ было начато в [15, 16]. В первой работе был получен закон типа Эрдёша–Реньи и оценка скорости сходимости в нем для

$$M_N = \max_{0\le l<m\le N}(S_m - S_l)I\{Y_{l+1} = \dots = Y_m = 1\}.$$

Во второй статье установлено, что предельное поведение почти наверное максимума

$$M_n'(j) = \max_{0\le k\le n-j}(S_{k+[j]} - S_k)I\{Y_{k+1} \le \dots \le Y_{k+[j]}\}\ ,$$

где $j = j_n$, Y_n имеют непрерывное распределение, существенно зависит от скорости роста j и меняется от сильной неинвариантности (подобно законам больших чисел Эрдёша–Реньи) до сильной инвариантности (подобно теоремам Чёргё–Ревеса).

В этой работе мы покажем, что поведение $M_n(j)$ подчиняется той же общей закономерности, что и поведение $M_n'(j)$, т.е. зависит от скорости роста j и меняется от сильной неинвариантности до сильной инвариатности. При этом, разумеется, диапазоны последовательностей j, на которых реализуются неинвариантность и инвариантность в случаях $M_n(j)$ и $M_n'(j)$ различаются. Отметим также, что в то время как результаты для $M_n'(j)$ требуют условий на само распределение X_1, то подобные результаты для $M_n(j)$ требуют предположений об условном распределении X_1 при условии $Y_1 = 1$. Кроме того, мы исследуем асимптотическое поведение аналогов статистики Шеппа для приращений сумм вдоль серий успехов. Ранее поведение статистик такого типа не изучалось.

Всюду, где использованы символы $\sim, \to, \limsup, \liminf$ считаем, что $n \to \infty$, если не оговорено противное.

2. Основные результаты

Пусть $(X,Y), (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с

$$P(Y=1) = p = 1 - P(Y=0) \in (0,1). \tag{1}$$

Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

$$M_n(j) = \max_{0\le k\le n-j}(S_{k+[j]} - S_k)I\{Y_{k+1} = \dots = Y_{k+[j]} = 1\},$$

$$T_n(j) = (S_{n+[j]} - S_n)I\{Y_{n+1} = \cdots = Y_{n+[j]} = 1\},$$

где $j = j_n$, $1 \le j \le l_n = \log n / \log(1/p)$.

Предположим, что

$$P(X = x|Y = 1) < 1 \quad \forall\, x, \tag{2}$$

$$0 \le E\{X|Y = 1\} < \infty, \tag{3}$$

$$t_0 = \sup\{t : \varphi(t) = E\{e^{tX}|Y = 1\} < \infty\} > 0. \tag{4}$$

Пусть $\bar{X}$ – случайная величина с функцией распределения $F(x) = P(X < x|Y = 1)$. Обозначим

$$\omega = \text{ess sup}\, \bar{X}\ ,$$

$$\zeta(z) = \sup\{zt - \log\varphi(t) : t \ge 0,\ \varphi(t) < \infty\},$$

$$\gamma(x) = \sup\{z : \zeta(z) \le x\}.$$

Известно, что $\gamma(x)$ – непрерывная, неубывающая, выпуклая функция на $[0, \infty)$, и $\gamma(x) \to \omega$ при $x \to \infty$.

Положим

$$c_0 = 1/\Big(\int_0^{t_0} t m'(t) dt\Big)\ , \tag{5}$$

где $m(t) = \varphi'(t)/\varphi(t)$, $0 \le t < t_0$. В [7] показано, что $c_0 = 1/(At_0 - \log\varphi(t_0))$, если $t_0 < \infty$ и $A = \lim_{t\uparrow t_0} m(t) < \infty$. Кроме того, $c_0 = -1/\log P(\bar{X} = A)$, если $t_0 = \infty$, $A < \infty$ и $P(\bar{X} = A) > 0$ (в этом случае $A = \omega$). В остальных случаях $c_0 = 0$.

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность вещественных чисел, $a_n \in (0, 1)$.

В следующей теореме содержатся законы Эрдёша–Реньи и Шеппа для приращений сумм вдоль серий успехов.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(4), *и* $a_n \to B \in (0, 1)$. *Положим* $B' = (1 - B)\log(1/p)/B$, $B_0 = 1/c_0$, *где* c_0 *определено в* (5). *Тогда с вероятностью* 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n(a_n l_n)}{a_n l_n} = \begin{cases} \gamma(B'), & \textit{при} \quad B' < B_0, \\ A + \frac{1}{t_0}(B' - B_0), & \textit{при} \quad B' \ge B_0. \end{cases}$$

В последнем соотношении можно заменить $T_n(a_n l_n)$ *на* $M_n(a_n l_n)$ *и* $\limsup$ *на* $\lim$.

Рассмотрим теперь случай $a_n \to 0$. Положим

$$i(n) = [a_n l_n].$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2)–(4), $i(n) \geq 1$, $i(n)$ *не убывает,* $a_n \to 0$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.,} \tag{6}$$

где

$$b_n = i(n)\,\gamma\Big(\frac{1-a_n}{i(n)}\log n\Big).$$

Если дополнительно выполнено условие

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\gamma(-\log(1-F(z)))}{z} = 1\ , \tag{7}$$

или $\omega < \infty$, *то в* (6) *можно заменить* $\limsup$ *на* $\lim$.

Условие (7) выполнено для нормального, геометрического, пуассоновского распределений и распределения Вейбулла (см. [9]).

Отметим, что если $i(n) \to \infty$, то

$$b_n \sim \frac{a_n \log n}{\log(1/p)}\,\gamma\Big(\frac{1-a_n}{a_n}\log(1/p)\Big).$$

Перейдем к случаю $a_n \to 1$. Условия (2)–(4) более не предполагаются выполненными. Обозначим

$$r_n = (l_n - i(n))\log(1/p).$$

Следующие две теоремы представляют собой законы Чёргё–Ревеса для приращений сумм вдоль серий успехов.

Теорема 3. *Пусть* $E\bar{X} = 0$, $E\bar{X}^2 = 1$, *и*

$$\int_0^\infty \exp\{tx^\beta\}dF(x) < \infty \ \text{для некоторых}\ \beta \in (0,1]\ \text{и}\ t > 0.$$

Пусть $a_n \to 1$ *и* $(1-a_n)(\log n)^{2(1-\beta)/(2-\beta)} \to 0$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{d_n} \leq 1 \quad \text{п.н.,} \tag{8}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{c_n} \geq 1 \quad \text{п.н.,} \tag{9}$$

где $d_n = (2l_n(r_n + \log l_n))^{1/2}$, $c_n = (2l_n r_n)^{1/2}$.

В соотношениях (8) *и* (9) *можно заменить* $M_n(a_n l_n)$ *на* $T_n(a_n l_n)$.

Если дополнительно выполнено условие

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{r_n}{\log l_n} > 1 \ , \tag{10}$$

то

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{b_n} \geq 1 \quad \text{п.н.}, \tag{11}$$

где $b_n = (2l_n(r_n - \log l_n))^{1/2}$.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 3 *и* $r_n/\log l_n \to \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n(a_n l_n)}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

В следующей теореме мы накладываем на распределение $\bar{X}$ менее жесткие моментные ограничения.

Теорема 4. *Пусть* $E\bar{X} = 0$, $E\bar{X}^2 = 1$, *и*

$$\int\limits_0^\infty x^p dF(x) < \infty \quad \text{для некоторого} \quad p > 4,$$

$$(\log z) \int\limits_{-\infty}^{-z} x^2 dF(x) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Пусть $a_n \to 1$. *Если* $\limsup r_n/\log l_n < (p-2)/2$, *то выполнены соотношения* (8) *и* (9). *Если дополнительно выполнено условие* (10), *то справедливо* (11).

Замечание 1. Условия, связывающие l_n и $i(n)$ в теоремах 3 и 4, можно записать в терминах последовательности a_n, если заметить, что $r_n/\log l_n \sim (1-a_n)\log n/\log\log n$.

Замечание 2. Для доказательства теорем 1, 3 и 4 мы адаптируем технику из [16], приспособленную для исследования приращений вдоль монотонных блоков. Из наших доказательств ясно, что, комбинируя наши рассуждения для $T_n(a_n l_n)$ и технику из [16], можно получить закон Шеппа для приращений вдоль монотонных блоков и соответствующие аналоги теорем 2–4.

3. Доказательства

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $(X,Y),(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots,(X_n,Y_n)$ – *независимые одинаково распределенные случайные векторы, удовлетворяющие условию* (1). *Пусть* $\bar X_1,\bar X_2,\dots,\bar X_n$ – *независимые случайные величины с функцией распределения* $F(x)$, $\bar S_n=\bar X_1+\bar X_2+\dots+\bar X_n$. *Тогда для любого* $x>0$,

$$P(S_nI\{Y_1=\dots=Y_n=1\}\ge x)=p^nP(\bar S_n\ge x), \tag{12}$$

$$P(M_n(i)\ge x)\le np^iP(\bar S_i\ge x), \tag{13}$$

$$P(M_n(i)<x)\le \exp\{-\frac{np^i}{2i}P(\bar S_i\ge x)\} \text{ при } i\le n/4. \tag{14}$$

Доказательство леммы 1. Соотношение (12) нетрудно проверить. Поэтому его доказательство мы опускаем.

Далее,

$$P(M_n(i)\ge x)\le\sum_{k=1}^{n-i}P((S_{k+i}-S_k)I\{Y_{k+1}=\dots=Y_{k+i}=1\}\ge x)$$
$$\le np^iP(\bar S_i\ge x).$$

Осталось проверить (14). Учитывая, что $1-x\le e^{-x}$ при $x\ge 0$, имеем

$$\begin{aligned}
&P(M_n(i)<x)\\
&\le P\Big(\bigcap_{m=0}^{[n/i]-1}\Big\{(S_{(m+1)i}-S_{mi})I\{Y_{mi+1}=\dots=Y_{(m+1)i}=1\}<x\Big\}\Big)\\
&=(P(S_iI\{Y_1=\dots=Y_i=1\}<x))^{[n/i]-1}\\
&\le\exp\{-([n/i]-1)P(S_iI\{Y_1=\dots=Y_i=1\}\ge x)\}\\
&\le\exp\{-\frac{np^i}{2i}P(\bar S_i\ge x)\},
\end{aligned}$$

и лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующий результат Петрова [17] о больших уклонениях.

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* $\gamma = \gamma(B)$, *и пусть* $c = c(\gamma)$ – *решение уравнения* $m(c) = \gamma$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *выполняется соотношение*

$$P(\bar{S}_n \geq n\gamma) \sim \frac{\psi(c)}{\sqrt{n}} \exp\{-nB\}$$

равномерно по $\gamma \in [\varepsilon, \min\{A - \varepsilon, 1/\varepsilon\}]$, *где* $\psi(c)$ – *положительная постоянная. Если* $\bar{X}_1$ *имеет нерешетчатое распределение, то* $\psi(c) = 1/(c\sigma(c)\sqrt{2\pi})$. *Если* $\bar{X}_1$ *имеет решетчатое распределение с максимальным шагом* H, *то* $\psi(c) = H/(\{1 - e^{-Hc}\}\sigma(c)\sqrt{2\pi})$, *где* $\sigma(t) = m'(t)$.

Доказательство теоремы 1. Положим $i = i(n)$.

Рассмотрим сначала случай $B' < B_0$.

Применяя (13), теорему 5 и учитывая свойства функции $\gamma(x)$, имеем

$$R(n) = P(M_n(i) \geq (1+\varepsilon)\gamma(B')i) \leq np^i P(\bar{S}_i \geq (1+\varepsilon)\gamma(B')i)$$

$$\leq C \exp\{\log n - i\log(1/p) - i(1+\delta)B'\} \leq C\exp\{-\delta_1 i\}$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторых положительных δ, δ_1, и всех достаточно больших n.

Положим $n_j = \max\{n : i(n) = j\}$, $j \geq 1$. Тогда ряд $\sum_j R(n_j)$ сходится, и по лемме Бореля–Кантелли,

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{M_{n_j}(a_{n_j} l_{n_j})}{i(n_j)} \leq \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Принимая во внимание, что $M_n(i) \leq M_{n_j}(a_{n_j} l_{n_j})$ для всех n таких, что $i(n) = j$, получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(i)}{i} \leq \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Используя (14), теорему 5 и свойства функции $\gamma(x)$, имеем

$$Q(n) = P(M_n(i) < (1-\varepsilon)\gamma(B')i) \leq \exp\{-\frac{np^i}{2i} P(\bar{S}_i \geq (1-\varepsilon)\gamma(B')i)\}$$

$$\leq \exp\{-\frac{1}{2i}\exp\{\log n - i\log(1/p) - i(1-\delta)B'\}\} \leq \exp\{-C\exp\{\delta_1 i\}\}$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторых $\delta, \delta_1 > 0$, и всех достаточно больших n. Следовательно, ряд $\sum_n Q(n)$ сходится. Применение леммы Бореля–Кантелли дает

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n(i)}{i} \geq \gamma(B) \quad \text{п.н.}$$

Теорема для $M_n(i)$ в случае $B' < B_0$ доказана.

Рассмотрим теперь $T_n(i)$.

Выполняется неравенство

$$T_n(j) \leq M_n''(j) = \max_{0\leq k\leq n} (S_{k+[j]} - S_k) I\{Y_{k+1} = \dots = Y_{k+[j]} = 1\}. \quad (15)$$

В силу приведенного выше доказательства оценки сверху для $\limsup M_n''(i)/i$ и $\limsup M_n(i)/i$ с вероятностью 1 одинаковы. Поэтому нам осталось доказать оценку снизу для $\limsup T_n(i)/i$.

В силу (12) имеем

$$Q'(n) = P(T_n(i) \geq (1-\varepsilon)\gamma(B')i) = p^i P(\bar{S}_i \geq (1-\varepsilon)\gamma(B')i)$$
$$\geq \exp\{-i\log(1/p) - i(1-\delta)B'\} \geq n^{-1+\delta_1}$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторых $\delta, \delta_1 > 0$, и всех достаточно больших n.

Пусть $n_k = Ak\log k$, $k \geq 3$, где постоянная A выбрана так, что $n_{k+1} > n_k + i(n_k)$. Тогда ряд $\sum_k Q'(n_k)$ расходится, а события $\{T_{n_k}(i(n_k)) \geq (1-\varepsilon)\gamma(B')i(n_k)\}$ независимы. Применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство теоремы в случае $B' < B_0$.

Перейдем к случаю $B' > B_0$. Обозначим $L = A + (B' - B_0)/t_0$. Так как $B_0 = 1/c_0$ и $B_0 < \infty$, то $A < \infty$.

Пусть сначала $A < \infty$ и $t_0 = \infty$. Тогда $A = \omega$, $L = A$. В силу (14) имеем

$$Q(n) = P(M_n(i) < (L-\varepsilon)i) \leq \exp\{-\frac{np^i}{2i} P(\bar{S}_i \geq (L-\varepsilon)i)\}$$
$$\leq \exp\{-\frac{np^i}{2i}(P(\bar{X} \geq \omega - \varepsilon))^i\} \leq \exp\{-Cn^\delta\},$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторого $\delta > 0$, и всех достаточно больших n. Применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство для $M_n(i)$.

В силу (15) нам снова достаточно доказать оценку снизу для $\limsup T_n(i)/i$. Имеем

$$Q'(n) = P(T_n(i) < (L-\varepsilon)i) = p^i P(\bar{S}_i \geq (L-\varepsilon)i)$$

$$\geq p^i (P(\bar{X} \geq \omega - \varepsilon))^i \geq Cn^{-1+\delta},$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторого $\delta > 0$, и всех достаточно больших n. Требуемая оценка получается так же, как раньше.

Пусть, наконец, $A < \infty$, $t_0 < \infty$. Тогда $\omega = \infty$ и $c_0 = 1/(At_0 - \log\varphi(t_0))$. В силу (13) и неравенства Чебышева имеем

$$R(n) = P(M_n(i) \geq (L+\varepsilon)i) \leq np^i P(\bar{S}_i \geq (L+\varepsilon)i)$$

$$\leq np^i \exp\{i \log\varphi(t_0) - t_0(L+\varepsilon)i\} \leq C\exp\{-\delta i\}$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторого $\delta > 0$, и всех достаточно больших n. Аналогично случаю $B' < B_0$, полученная оценка дает

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(i)}{i} \leq L \quad \text{п.н.}$$

Положим $\lambda = L - \varepsilon$, $\mu = L + \varepsilon$.

Следующие два неравенства мы заимствуем из [8] (стр. 1377 и 1376 соответственно).

Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует малое $\delta > 0$ такое, что

$$B' - B_0 \frac{\mu}{A - \delta} > 0.$$

Для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует положительная постоянная C такая, что

$$P(\bar{S}_i \geq i\lambda) \geq Ci^{-1/2} \exp\{-\frac{\mu B_0 i}{A - \delta}\}$$

для всех больших i.

В силу (14) и этих неравенств имеем

$$Q(n) = P(M_n(i) < (1-\varepsilon)Li) \leq \exp\{-\frac{np^i}{2i} P(\bar{S}_i \geq (1-\varepsilon)Li)\}$$

$$\leq \exp\{-C\exp\{\delta_1 i(B' - B_0 \frac{\mu}{A-\delta})\}\} \leq \exp\{-n^{\delta_2}\},$$

для любого $\varepsilon > 0$, некоторого $\delta_2 > 0$, и всех больших n. Используя эту оценку так же, как в случае $B' < B_0$, мы завершаем доказательство теоремы 1 для $M_n(i)$. Оценку снизу для $\limsup T_n(i)/i$ получаем с помощью соотношений

$$Q'(n) = P(T_n(i) < (1-\varepsilon)Li) = p^i P(\bar{S}_i \ge (1-\varepsilon)Li) \ge n^{-1+\delta}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $c(n) = (1-a_n)\log n/i(n)$. Отметим, что $b_n = i(n)\gamma(c(n))$.

Пусть сначала $\omega = \infty$.

Положим $N_{ij} = \{n : 2^j \le n < 2^{j+1}, i(n) = i\}$, $n_{ij} = \min\{n : n \in N_{ij}\}$, $I_{ki} = I\{Y_{k+1} = \cdots = Y_{k+i} = 1\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Далее считаем, что $a_n \le \beta$, $\beta \in (0,1)$. Выбором β распорядимся позже. Учитывая (13), имеем

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P(\max_{n\in N_{ij}} M_n(i)/b_n \ge 1+\varepsilon) \\ &\le P(\max_{0\le k\le 2^{j+1}-i} (S_{k+i}-S_k)I_{ki} \ge (1+\varepsilon)i\gamma((1-\beta)\log n_{ij}/i)) \\ &\le 2^{j+1}p^i\, P(\bar{S}_i \ge (1+\varepsilon)\, i\,\gamma((1-\beta)\log n_{ij}/i)). \end{aligned}$$

По лемме 2.3 из [9]

$$P_{ij} \le 2^{j+1}p^i \exp\{-(1+\varepsilon)(1-\beta)\log n_{ij}\}$$

$$\le 2\exp\{\log 2^j\,(1-(1-\beta)(1+\varepsilon))\} \le 2^{1-\varepsilon j/2},$$

если β выбрано так, чтобы $\beta < \varepsilon/2(1+\varepsilon)$. Следовательно,

$$P_j = P(\max_{2^j\le n<2^{j+1}} M_n(i)/b_n \ge 1+\varepsilon) \le m_j 2^{1-\varepsilon j/2},$$

где m_j – число индексов i, для которых $N_{ij} \ne \emptyset$. Учитывая неравенство $m_j \le i(2^{j+1}) \le l_{2^{j+1}}$, заключаем, что ряд $\sum_j P_j$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(a_n l_n)}{b_n} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

Пусть $i = i(n)$. Так же, как в доказательстве теоремы 1 (случай $B' > B_0$, $t_0 = \infty$), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$Q(n) = P(M_n(i) < (1+\varepsilon)^{-3}b_n)$$

$$\leq \exp\{-\frac{np^i}{2i}(P(\bar{X} \geq (1+\varepsilon)^{-3}\gamma(\,c(n)\,)))^i\}\,.$$

С помощью метода, использованного в лемме 2.5 из [9], построим последовательность натуральных чисел $\{n_r\}$ такую, что

$$(P(\bar{X} \geq (1+\varepsilon)^{-3}\gamma(c(n_r))))^{\log n_r/c(n_r)} \geq \exp\{-(1+\varepsilon)^{-1}\log n_r\} \quad (16)$$

и $n_r \geq r$ при больших r.

Отсюда следует, что $Q(n_r) \leq \exp\{-Cn_r^{\delta}\}$ для некоторого $\delta > 0$ при всех достаточно больших r. Поэтому ряд $\sum_r Q(n_r)$ сходится. Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к (6).

Пусть выполнено (7). Заменяя $(1+\varepsilon)^{-3}$ на $(1+\varepsilon)^{-2}$ в определении $Q(n)$, и используя вместо (16) неравенство (см. [9], стр. 264)

$$P(\bar{X} \geq (1+\varepsilon)^{-2}\gamma(c(n))) \geq \exp\{-(1+\varepsilon)^{-1}\,c(n)\,\},$$

докажем, что ряд $\sum_n Q(n)$ сходится. Вместе с леммой Бореля–Кантелли это завершает доказательство теоремы 2 в случае $\omega = \infty$.

Пусть $\omega < \infty$. Возьмем $0 < \delta < 1$. Положим $i = i(n)$. Снова имеем

$$Q(n) = P(M_n(i) < \delta\omega i) \leq \exp\{-\frac{np^i}{2i}(P(\bar{X} \geq \delta_1\omega))^i\}.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что ряд $\sum_n Q(n)$ сходится, а использование леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство теоремы 2

Для доказательства теорем 3 и 4 мы докажем лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть d_n, c_n и b_n – последовательности вещественных чисел, определенные в теореме 3. Пусть $r > 1$. Если*

$$\log P(\bar{S}_i \geq Dd_n) \sim -\frac{D^2 d_n^2}{2l} \quad (17)$$

для любого $0 < D < r$, то выполнено заключение теоремы 3.

Доказательство леммы 2. Пусть $i = i(n)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $(1+2\varepsilon)^{1/2} < r$. В силу (13) и (17) для всех достаточно больших n имеем

$$R(n) = P(M_n(i) \geq (1+2\varepsilon)^{1/2}d_n) \leq np^i P(\bar{S}_i \geq (1+2\varepsilon)^{1/2}d_n)$$

$$\leq \exp\{\log n - i\log(1/p) - \frac{(1+\varepsilon)d_n^2}{2l_n}\} \leq C\exp\{-(1+\varepsilon\tau_n)\log l_n\}\ ,$$

где $\tau_n = 1 + r_n/\log l_n$.

Пусть $q > 1$, $N_{jk} = \{n : i(n) = j\ , q^k \leq \tau_n < q^{k+1}\}$, $n_{jk} = \max\{n : n \in N_{jk}\}$, $j \geq 2$, $k \geq 0$. Тогда ряд $\sum_j \sum_k R(n_{jk})$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{M_{n_{jk}}(a_{n_{jk}} l_{n_{jk}})}{d_{n_{jk}}} \leq 1 \quad \text{п.н.}$$

равномерно по k. Ясно, что $d_n \geq d_{n_{jk}}/q$ и $M_n(i) \leq M_{n_{jk}}(a_{n_{jk}} l_{n_{jk}})$ при $n \in N_{jk}$, всех больших j, всех k. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(i)}{d_n} \leq q \quad \text{п.н.}$$

В силу произвольности $q > 1$, последнее соотношение влечет (8). Принимая во внимание неравенство (15), получим (8) для T_n.

Положим

$$T_n' = (S_n - S_{n-i})I\{Y_{n-i+1} = \cdots = Y_n = 1\}.$$

Используя (12) и (17), имеем

$$P(n) = P(T_n' \geq (1-2\varepsilon)c_n) = p^i P(\bar S_i \geq (1-2\varepsilon)c_n)$$

$$\geq p^i \exp\{-\frac{(1-\varepsilon)c_n^2}{2l_n}\} \geq C\frac{1}{n},$$

при всех достаточно больших n.

Пусть $n_k = Ak\log k$, $k \geq 3$, где постоянная A выбрана так, что $n_{k+1} - i(n_{k+1}) > n_k$. Тогда ряд $\sum_k P(n_k)$ расходится, и события $\{T'_{n_k} \geq (1-2\varepsilon)c_{n_k}\}$ независимы. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n'}{c_n} \geq 1 \quad \text{п.н.} \tag{18}$$

Учитывая неравенство $M_n(i) \geq T_n'$, получим (9). Соотношение (9) для $T_n(i)$ доказывается так же, как (18). Нужно только при построении n_k выбрать постоянную A так, чтобы $n_{k+1} > n_k + i(n_k)$.

Используя (14) и (17), для всех больших n получим

$$Q(n) = P(M_n(i) < (1-\varepsilon)b_n) \leq \exp\{-\frac{np^i}{2i}P(\bar S_i \geq (1-\varepsilon)b_n)\}$$

$$\leq \exp\{-\frac{1}{2}\exp\{\log n - i\log(1/p) - \frac{(1-2\varepsilon)b_n^2}{2l_n}\}\} \leq \exp\{-i^{\varepsilon\tau_n}\}\ ,$$

где $\tau_n = l_n - i - 1$.

Положим $m_{jk} = \min\{n : n \in N_{jk}\}$, где N_{jk} определено так же, как при доказательстве (8). Тогда ряд $\sum_j \sum_k Q(m_{jk})$ сходится, а лемма Бореля–Кантелли дает

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{M_{n_{jk}}(a_{n_{jk}} l_{n_{jk}})}{b_{n_{jk}}} \geq 1 \quad \text{п.н.}$$

равномерно по k. Отсюда так же, как раньше, приходим к (10).

Лемма 2 доказана.

Доказательства теорем 3 и 4. Теоремы 3 и 4 следуют из теорем 5 и 6 работы автора [12] и леммы 2.

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. P. Erdős, P. Révész, *On the length of the longest head-run.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **16** (1975), 218–228.
2. P. Deheuvels, *On the Erdős–Rényi theorem for random fields and sequences and its relationships with the theory of runs and spacings.* Z. Wahrsch. Verw. Geb., **70** (1985), 91–115.
3. P. Erdős, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* J. Analyse Math., **23** (1970), 103–111.
4. L. A. Shepp, *A limit law concerning moving averages.* Ann. Math. Statist., **35** (1964), 424–428.
5. M. Csörgő, J. Steinebach, *Improved Erdős–Rényi and strong approximation laws for increments of partial sums.* Ann. Probab., **9** (1981), 988–996.
6. S. Csörgő, *Erdős–Rényi laws.* Ann. Statist., **7** (1979), 772–787.
7. P. Deheuvels, L. Devroye and J. Lynch, *Exact convergence rate in the limit theorems of Erdős–Rényi and Shepp.* Ann. Probab., **14** (1986), 209–223.
8. P. Deheuvels, L. Devroye, *Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type.* Ann. Probab., **15** (1987), 1363–1386.
9. D. M. Mason, *An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers.* Ann. Probab., **17** (1989), 257–265.
10. M. Csörgő, P. Révész, *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Academic Press, New York (1981).
11. P. Deheuvels, J. Steinebach, *Exact convergence rates in strong approximation laws for large increments of partial sums.* Probab. Th. Rel. Fields., **76** (1987), 369–393.
12. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for large increments of sums.* Statist. Probab. Letters, **37** (1998), 155–165.

13. K. Binswanger, P. Embrechts, *Longest runs in coin tossing.* Insur. Math. Econom., **15** (1994), 139–149.
14. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* Теория вероятн. и ее примен., **38**, No. 2 (1993), 374–416.
15. A. N. Frolov, A. Martikainen and J. Steinebach, *On the maximal gain over head runs.* Studia Sci. Math. Hung., **34** (1998), 165–181.
16. A. N. Frolov, A. Martikainen and J. Steinebach, *On the maximal gain over increasing runs.* Preprint No. 49 (1997), Fachbereich Mathematik, Philipps–Universität Marburg, 19 p.
17. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* Теория вероятн. и ее примен., **10**, No. 2 (1965), 310–322.

Frolov A. N. On asymptotic behaviour of increments of sums over head runs.

Let $\{(X_i, Y_i)\}$ be a sequence of i.i.d. random vectors with $P(Y_1 = 1) = p = 1 - P(Y_1 = 0) \in (0,1)$. Put $M_n(j) = \max_{0 \le k \le n-j}(X_{k+1} + \cdots + X_{k+j})I_{k,j}$, where $I_{k,j} = I\{Y_{k+1} = \cdots = Y_{k+j} = 1\}$, $I\{\,\cdot\,\}$ denotes the indicator function of the event in brackets. If, for example, $\{X_i\}$ are gains and $\{Y_i\}$ are indicators of successes in repetitions of a game of chance, then $M_n(j)$ is the maximal gain over head runs (sequences of successes without interruptions) of length j. We investigate the asymptotic behaviour of $M_n(j)$, $j = j_n \le L_n$, where L_n is the length of the longest head run in $Y_1, \ldots, Y_n$. We show that the asymptotics of $M_n(j)$ crucially depend on the growth rate of j, and they vary from strong non-invariance like in the Erdős–Rényi law of large numbers to strong invariance like in the Csörgő–Révész strong approximation laws. We also consider Shepp type statistics.

Санкт–Петербургский
государственный университет

Поступило 9 декабря 1998 г.