Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

М. А. Лифшиц

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТИПА "ПОЧТИ НАВЕРНОЕ" ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Предельная теорема типа "почти наверное" (ПТПН) – это утверждение о слабой сходимости с вероятностью единица последовательности эмпирических мер, порожденных некоторой последовательностью случайных величин. Этот тип предельных теорем был одновременно обнаружен П. Шатте и Г. Брозамлером, чьи работы опубликованы в 1988 г., и вызвал большой интерес в течение последнего десятилетия. Многие интересные результаты в этом направлении получили М. Атлаг и М. Вебер, И. Беркеш и Г. Делинг, И. А. Ибрагимов, М. Лейси и В. Филлип, П. Майор, П. Марч и Т. Сеппелайнен, П. Мертерс, Т. Мори, М. Пелиград и П. Ревес, Б. Родзик и З. Рыхлик, М. Хек, Л. Хорват, Г. Хюрелбаатар, Е. Чаки, А. Н. Чупрунов, К-М. Шао и другие. Подробную библиографию о ПТПН можно найти в [3, 4] и особенно в обзоре И. Беркеша [2].

В первом разделе статьи дано достаточное условие для ПТПН для сумм независимых (вообще говоря, не одинаково распределенных) векторов при минимальных моментных условиях и нормирующих последовательностях (о предельных законах не предполагается ничего). Многочисленные ссылки о работах, относящихся к случаю одинаково распределенных слагаемых, можно найти в [2–4]. Случай не одинаково распределенных слагаемых в постановке, близкой к нашей, изучался в [3], а для величин, удовлетворяющих моментным условиям типа Линдеберга – в работах [1, 5].

Первый раздел является естественным развитием методов и результатов совместной работы И. А. Ибрагимова и автора [4].

Во втором разделе статьи построен контрпример, показывающий, что наше достаточное моментное условие весьма близко к оптимальному, также как и родственное (но несколько более

Работа поддержана РФФИ, грант Но. 99-01-00112.

оганичительное) достаточное условие И. Беркеша и Г. Делинга (таким образом, получен ответ на вопрос этих авторов из [3], с. 1644).

1. Достаточное условие для предельной теоремы типа "почти наверное".

Пусть $\{\xi_j\}$ – последовательность независимых векторов, принимающих значения в сепарабельном нормированном пространстве $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Рассмотрим нормированные суммы

$$\zeta_k := \frac{1}{B_k}\sum_{j=1}^{k}\xi_j - A_k \ , \qquad B_k > 0,\ A_k \in \mathcal{X},$$

и предположим, что их распределения удовлетворяют предельной теореме

$$\mathcal{L}(\zeta_k) \Rightarrow G, \tag{1.1}$$

где G – некоторая вероятностная мера на $\mathcal{X}$. Определим эмпирические меры

$$Q_n = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=2}^{n} b_k\ \delta_{\zeta_k},$$

где $\{b_k\}$ – положительная ограниченная последовательность, удовлетворяющая условию

$$b_k \leqslant \log(B_k/B_{k-1}),$$

и $\gamma_n := \sum_{k=2}^{n} b_k$. Для $u \geqslant 1$ и функции $H : [1,\infty) \to (0,\infty]$ положим

$$S_H(u) := \sup_{\ell: u<\gamma_\ell<H(u)} \mathbf{P}\{\log\|\zeta_\ell\| > u\}.$$

Наш основной позитивный результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Предположим, что* $B_n \nearrow \infty$ *и выполнено соотношение* (1.1). *Если существует такая функция* H, *что*

$$\int_1^\infty \frac{du}{H(u)} < \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{S_H(u)du}{u} < \infty, \tag{1.2}$$

то

$$\mathbf{P}\{Q_n \Rightarrow G\} = 1. \tag{1.3}$$

Приведем несколько пояснений к этому утверждению:

1. Следующее более прозрачное условие Беркеша–Делинга (см. [3]) также является достаточным для ПТПН: при некотором $h > 0$ верно

$$\sup_l \mathbf{E} \left(\log_+ \log_+ ||\zeta_\ell||\right)^{1+h} < \infty. \tag{1.4}$$

Это условие показывает замечательную роль логарифмических моментов в ПТПН. В предположении (1.4) мы можем взять $H(u) := +\infty$ и, используя неравенство Чебышева, получим для каждого $u \geqslant 1$

$$S_H(u) \leqslant \min\left\{1\ ; (\log u)^{-1-h}\right\},$$

так что теорема 1 может быть применена.

На самом деле в [3] имеется еще более слабое, чем (1.4), достаточное условие, которое в наших обозначениях выглядит так: существуют такие $C, h, \varepsilon > 0$, что для каждого целого $l > 0$

$$\mathbf{E} \left(\log_+ \log_+ ||\zeta_\ell||\right)^{1+h} \leqslant C\ (\log \gamma_\ell)^{h-\varepsilon}.$$

В этом случае мы можем положить $H(u) := u^2$ и, снова используя неравенство Чебышева, найдем для всех $u \geqslant 1$,

$$S_H(u) \leqslant \min\left\{1\ ; \frac{C\ 2^{h-\varepsilon}}{(\log u)^{1+\varepsilon}}\right\},$$

и теорема 1 снова работает.

Между теоремой 1 и результатами работы [3] имеется и некоторая разница. И. Беркеш и Г. Делинг делают дополнительные предположения о росте нормировок $\{B_n\}$ и используют стандартные логарифмические веса $b_k := k^{-1}$, $\gamma_n \sim \log n$. Мы не делаем этих дополнительных предположений, но зато адаптируем веса b_k к поведению $\{B_n\}$.

2. Как будет видно из второй части статьи, ПТПН может и не иметь места, если мы положим $h = 0$ в условии (1.4), – даже в простейшем случае вещественных случайных величин.

3. Результат, близкий к Теореме 1, можно найти в нашей предыдущей работе ([4], Теорема 3.3), где ПТПН доказана при более сильном моментном ограничении

$$\exists a > 0: \quad \sup_\ell \mathbf{E}||\zeta_\ell||^a < \infty. \tag{1.5}$$

4. Такой же результат верен не только для нормированных сумм ζ_k, но также и для некоторых других последовательностей случайных векторов, включая, например, выборочные траектории нормированных процессов частных сумм, возникающие в классическом принципе инвариантности. Именно, теорема 1 верна для каждой последоватльности случайных векторов ζ_k, допускающей представление

$$\zeta_k = \frac{B_\ell}{B_k}\pi_{k,\ell}(\zeta_\ell) + \eta_{k,\ell}$$

при всех $\ell \leqslant k$, причем ζ_ℓ и $\eta_{k,\ell}$ независимы, а семейство линейных операторов $\{\pi_{k,\ell} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\}$ равномерно ограничено по норме. Действительно, достаточно воспользоваться этим представлением вместо появляющейся в доказательстве формулы (1.12).

Доказательство теоремы 1. Одной из многих эквивалентных формулировок слабой сходимости (1.3) служит соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\liminf_{n\to\infty} Q_n(B) \geqslant G(B) \quad \text{для всех открытых} \quad B \subset \mathcal{X}\right\} = 1. \qquad (1.6)$$

Как было показано в [4], в сепарабельном $\mathcal{X}$ соотношение (1.6) выполнено, если

$$\mathbf{P}\left\{F_n := \int f dQ_n = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=2}^{n} b_k f(\zeta_k) \ \to \ \int f dG\right\} = 1 \qquad (1.7)$$

верно для любого ограниченного липшицева функционала $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^1$.

Подчеркнем, что в (1.7) каждый функционал f рассматривается отдельно. Поэтому зафиксируем f и будем проверять (1.7). Обозначим

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)|; \quad \|f\|_L := \sup_{x\neq y\in\mathcal{X}} |f(x) - f(y)|/\|x - y\|.$$

Пусть $\alpha > 1$. Последовательность целых положительных чисел $\{n_j\}$ зададим формулами

$$n_0 := 0, \quad n_1 := \inf\,\{n : \gamma_n \geqslant 1\};$$

$$n_{j+1} := \inf\,\{n : \gamma_n \geqslant \alpha\,\gamma_{n_j}\}.$$

При таком выборе всегда будем иметь

$$\gamma_{n_{j+1}} \geqslant \alpha\,\gamma_{n_j}$$

и, таким образом, при всех $j > 0$,

$$\sum_{i \geqslant j} \gamma_{n_i}^{-2} \leqslant C_\alpha \gamma_{n_j}^{-2}, \tag{1.8}$$

где $C_\alpha = \alpha^2(\alpha^2-1)^{-1}$. Далее, для всех $n \in [n_j, n_{j+1})$ имеем

$$\sum_{k=n_j+1}^{n} b_k = \gamma_n - \gamma_{n_j} \leqslant \alpha\gamma_{n_j} - \gamma_{n_j} \leqslant (\alpha-1)\gamma_{n_j} \leqslant (\alpha-1)\gamma_n.$$

Следовательно,

$$\left|F_n - F_{n_j}\right| = \left|\frac{\gamma_{n_j}}{\gamma_n} F_{n_j} + \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n_j+1}^{n} b_k f(\zeta_k) - F_{n_j}\right| \leqslant$$

$$\frac{|\gamma_{n_j} - \gamma_n|}{\gamma_n}\left|F_{n_j}\right| + (\alpha-1)\|f\|_\infty \leqslant (\alpha-1)\left(\left|F_{n_j}\right| + \|f\|_\infty\right).$$

Заметим, что для (1.7) достаточно доказать

$$\mathbf{P}\left\{F_{n_j} \;\to\; \int f dG\right\} = 1 \tag{1.9}$$

при каждом $\alpha > 1$, и перейти к пределу при $\alpha \searrow 1$. Далее, (1.9) следует из соотношений

$$\lim_n \; \mathbf{E}F_n = \int f dG \tag{1.10}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Var} F_{n_j} < \infty. \tag{1.11}$$

Сходимость в (1.10) следует из гипотезы о слабой сходимости (1.1). В самом деле,

$$\lim_k \mathbf{E} f(\zeta_k) = \int f dG, \quad \gamma_n = \sum_{k=2}^{n} b_k \to \infty,$$

откуда

$$\mathbf{E}F_n = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=2}^{n} b_k \ \mathbf{E}f(\zeta_k) \ \to \ \int f dG.$$

Для доказательства (1.11) запишем

$$\mathbf{Var}F_n \leqslant \frac{1}{\gamma_n^2}\sum_{k=2}^{n} b_k^2 \ \mathbf{Var}f(\zeta_k) + \frac{2}{\gamma_n^2}\sum_{2\leqslant \ell<k\leqslant n}^{n} b_\ell \ b_k \ \mathbf{Cov}(f(\zeta_\ell), f(\zeta_k)).$$

Диагональные члены с дисперсиями проблем не создают, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{n_j}^2}\sum_{k=2}^{n_j} b_k^2 \ \mathbf{Var}f(\zeta_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{n_j}}\max_{2\leqslant k\leqslant n_j} b_k \ \|f\|_\infty^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{n_j}} \ \|f\|_\infty^2 < \infty.$$

Теперь займемся поиском верхних оценок для ковариаций. Зафиксируем пару натуральных чисел $\ell < k$ и запишем тождество

$$\zeta_k = \frac{B_\ell}{B_k}\zeta_\ell + \left(\frac{A_\ell B_\ell}{B_k} - A_k + \frac{1}{B_k}\sum_{j=\ell+1}^{k}\xi_j\right) := \frac{B_\ell}{B_k}\zeta_\ell + \eta_{k,\ell}\ , \qquad (1.12)$$

причем $\eta_{k,\ell}$ и ζ_ℓ независимы. Поэтому

$$\mathbf{E}f(\zeta_k)f(\zeta_\ell) \leqslant \mathbf{E}f(\eta_{k,\ell})f(\zeta_\ell) + |\mathbf{E}\left(f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right)f(\zeta_\ell)| \leqslant$$

$$\mathbf{E}f(\eta_{k,\ell})\mathbf{E}f(\zeta_\ell) + \|f\|_\infty \mathbf{E}\left|f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right| \leqslant$$

$$\mathbf{E}f(\zeta_k)\mathbf{E}f(\zeta_\ell) + 2\|f\|_\infty \mathbf{E}\left|f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right|.$$

Заметим также, что

$$|f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)| \leqslant$$

$$\min\left\{\|f\|_L\|\eta_{k,\ell} - \zeta_k\|; 2\|f\|_\infty\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\right\}\min\left\{\|\eta_{k,\ell} - \zeta_k\|; 1\right\} =$$

$$= \max\left\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\right\}\min\left\{\frac{B_\ell}{B_k}\|\zeta_\ell\|; 1\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{Cov}(f(\zeta_\ell), f(\zeta_k)) \leqslant C_f \mathcal{E}_\ell(B_k),$$

где

$$C_f = 2\|f\|_\infty \max\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\}$$

и

$$\mathcal{E}_\ell(B) := \mathbf{E}\min\left\{\frac{B_\ell}{B}\|\zeta_\ell\|; 1\right\} = \mathbf{P}\left\{\|\zeta_\ell\| \geqslant \frac{B}{B_\ell}\right\} + \\ + \frac{B_\ell}{B}\ \mathbf{E}\ \|\zeta_\ell\| \mathbf{1}_{\{\|\zeta_\ell\| < B/B_\ell\}}. \tag{1.13}$$

Суммируя по переменным j, k и ℓ, а затем меняя порядок суммирования, придем к необходимости оценить выражение

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \sum_{k=\ell+1}^{\infty} b_k \mathcal{E}_\ell(B_k) \sum_{j: n_j \geqslant k} \gamma_{n_j}^{-2}. \tag{1.14}$$

Теперь представим эту сумму в интегральной форме и сделаем логарифмическую замену переменной. Для этого введем дополнительные обозначения. Рассмотрим непересекающиеся интервалы

$$I_k := [\log B_k - b_k; \log B_k).$$

Заметим что I_k имеет длину b_k и положим

$$I = \bigcup_{k \geqslant 2} I_k.$$

Определим "естественную логарифмическую шкалу" как функцию

$$g(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{1}_I(s) ds.$$

В частности, $g(\log B_k) = \sum_{\ell=2}^k b_\ell = \gamma_k$.

Поскольку все функции $\mathcal{E}_\ell(\cdot)$ не убывают, получим интегральную оценку для наших слагаемых: для каждого $k > \ell$ верно

$$b_k \mathcal{E}_\ell(B_k) = \int_{I_k} \mathcal{E}_\ell(B_k) d\tau \leqslant \int_{I_k} \mathcal{E}_\ell(e^\tau) d\tau.$$

Далее, применяя (1.8), получим оценку для другой части (1.14). Для каждого натурального i, каждого $k \in (n_{i-1}, n_i]$, и каждого $\tau \in I_k$, имеем

$$\sum_{j:n_j \geqslant k} \gamma_{n_j}^{-2} = \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_{n_j}^{-2} \leqslant C_\alpha \ \gamma_{n_i}^{-2} \leqslant C_\alpha \ \min\{g(\tau)^{-2}; 1\}.$$

Таким образом, для (1.14) получается верхняя оценка

$$C_\alpha \quad \sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \int_{I_k} \mathcal{E}_\ell(e^\tau) \min\{g(\tau)^{-2}; 1\} d\tau. \tag{1.15}$$

Рассмотрим вклад, который вносит в (1.15) первое слагаемое из (1.13). Именно, нужно оценить

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \int_{I\cap[\log B_\ell, \infty)} \mathbf{P}\left\{\log \|\zeta_\ell\| \geqslant \tau - \log B_\ell\right\} \min\{g(\tau)^{-2}; 1\} \ d\tau.$$

Используя элементарную оценку

$$\tau - \log B_\ell \ \geqslant \ g(\tau) - \gamma_\ell$$

и замену переменной $u = g(\tau) - \gamma_\ell$, получим

$$\int_{I\cap[\log B_\ell, \infty)} \mathbf{P}\left\{\log \|\zeta_\ell\| \geqslant \tau - \log B_\ell\right\} \min\{g(\tau)^{-2}; 1\} \ d\tau \leqslant$$

$$\int_0^{\infty} \mathbf{P}\left\{\log \|\zeta_\ell\| \geqslant u\right\} \min\{(u+\gamma_\ell)^{-2}; 1\} du :=$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbf{P}_\ell(u) \min\{(u+\gamma_\ell)^{-2}; 1\} du.$$

Теперь первая часть выражения (1.15) имеет вид

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \int_0^{\infty} \mathbf{P}_\ell(u) \min\{(u+\gamma_\ell)^{-2}; 1\} du. \tag{1.16}$$

Поскольку для каждого фиксированного l интеграл, очевидно, конечен, и $\gamma_\ell > 1$ для всех ℓ, за исключением конечного числа значений, мы можем рассматривать только $l:\ \gamma_\ell > 1$. Более того, поскольку каждая из функций $\mathbf{P}_\ell(\cdot)$ не убывает, для таких l имеем

$$\int\limits_{\gamma_\ell}^{\infty} \mathbf{P}_\ell(u)(u+\gamma_\ell)^{-2}du \leqslant \mathbf{P}_\ell(\gamma_\ell) \int\limits_{\gamma_\ell}^{\infty}(u+\gamma_\ell)^{-2}du = \mathbf{P}_\ell(\gamma_\ell)\ (2\gamma_\ell)^{-1} \leqslant$$

$$(2\gamma_\ell)^{-2}\int\limits_0^{\gamma_\ell} \mathbf{P}_\ell(u)du \leqslant \int\limits_0^{\gamma_\ell} \mathbf{P}_\ell(u)\ \min\{(u+\gamma_\ell)^{-2};1\}du.$$

Поэтому можно ограничиться оцениванием интегралов по областям $\{u,l : u\leqslant \gamma_\ell\}$. Для этого воспользуемся следующей оценкой общего вида: для каждого положительного целого L верно

$$\sum_{\ell=L}^{\infty} b_\ell\, {\gamma_\ell}^{-2} \leqslant b_L\, \gamma_L^{-2} + \sum_{\ell=L+1}^{\infty}\ \int\limits_{I_\ell} g(\tau)^{-2}d\tau \leqslant \gamma_L^{-1} + \int\limits_0^{\infty}(\gamma_L+r)^{-2}dr = 2\gamma_L^{-1}.$$

В частности, для каждого $\Gamma>0$ имеем

$$\sum_{\ell:\gamma_\ell\geqslant\Gamma} b_\ell\, {\gamma_\ell}^{-2} \leqslant 2\ \Gamma^{-1}.$$

Отсюда следует

$$\sum_{\ell:\gamma_\ell\geqslant H(u)} b_\ell\, {\gamma_\ell}^{-2} \leqslant 2\ H(u)^{-1}$$

а также, для $u\geqslant 1$,

$$\sum_{\ell:\gamma_\ell\in[u,H(u)]} b_\ell\, {\gamma_\ell}^{-2} \leqslant S_H(u) \sum_{\ell:\gamma_\ell\geqslant u} b_\ell\, {\gamma_\ell}^{-2} \leqslant 2S_H(u)\ u^{-1}.$$

Наконец, для $u\leqslant 1$,

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell\ \min\{{\gamma_\ell}^{-2};1\} \leqslant \int\limits_I \min\{g(\tau)^{-2};1\}d\tau = \int\limits_0^{\infty}\min\{v^{-2};1\}dv = 2. \tag{1.17}$$

Поскольку области $\{l,u : u\leqslant 1\}$, $\{l,u :\ \gamma_\ell \geqslant H(u)\}$ и $\{l,u:\gamma_\ell\in[u,H(u)], u\geqslant 1\}$ покрывают интересующую нас область

$\{l, u : \gamma_\ell \geqslant u\}$, для (1.16) получаем верхнюю оценку, которая конечна в силу (1.2). Мы убедились, что вклад первого слагаемого из (1.13) оценивается достаточно хорошо, чтобы обеспечить сходимость интересующих нас рядов. Теперь рассмотрим вклад, вносимый в (1.15) вторым слагаемым из (1.13), то есть

$$B_\ell \int\limits_{I\cap[\log B_\ell,\infty)} e^{-\tau}\mathbf{E}\|\zeta_\ell\|\mathbf{1}_{\{\log\|\zeta_\ell\|\leqslant\tau-\log B_\ell\}}\min\{g(\tau)^{-2};1\}d\tau \leqslant$$

$$B_\ell\ \mathbf{E}\ \|\zeta_\ell\|\min\{g(T_\ell)^{-2};1\}\int\limits_{I\cap[T_\ell,\infty)} e^{-(T_\ell+g(\tau)-g(T_\ell))}d\tau =$$

$$B_\ell\ \mathbf{E}\ \|\zeta_\ell\|\min\{g(T_\ell)^{-2};1\}e^{-T_\ell},$$

где $T_\ell = \max\{\log B_\ell, \log(B_\ell\|\zeta_\ell\|)\}$.

Если $\|\zeta_\ell\| \leqslant 1$, то $T_\ell = \log B_\ell$, $g(T_\ell) = \gamma_\ell$, и получаем вклад порядка $\min\{{\gamma_\ell}^{-2};1\}$.

Если $\|\zeta_\ell\| \geqslant 1$, имеем $T_\ell = \log(B_\ell\|\zeta_\ell\|)$, $g(T_\ell)^{-2} \leqslant {\gamma_\ell}^{-2}$ и получается вклад такого же порядка. Подставляя все эти оценки в (1.15), приходим к ряду $\sum b_\ell\ \min\{{\gamma_\ell}^{-2};1\}$, который уже рассматривался в (1.17).

Таким образом, сходимость в (1.11) проверена и доказательство теоремы 1 завершено. □

2. О разнице между обычной предельной теоремой и ПТПН.

В этом разделе мы построим пример последовательности независимых (неодинаково распределенных) вещественных случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, которая удовлетворяет обычной центральной предельной теореме (ЦПТ), но не удовлетворяет центральной предельной теореме типа "почти наверное" (ЦПТПН). Этот пример показывает, что наше условие интегрируемости (1.2), а также логарифмическое моментное условие Беркеша–Делинга (1.4) практически оптимальны.

Пусть $a > 1, \alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{a}{2})$ и

$$\xi_j := Y_j + X_j,$$

где $\{Y_j, X_j\}$ независимы, $\mathcal{L}(Y_j) = \mathcal{N}(0,1)$, и $X_j = 0$ для всех j за исключением последовательности $n_m := [\exp\{a^m\}]$. Пусть $X_{n_m} :=$

$\pm U_m$ с равными вероятностями $\frac{1}{2m}$ и амплитудой $U_m := n_m^\alpha$; положим $X_{n_m} := 0$ с остающейся вероятностью $1 - \frac{1}{m}$.

Расмотрим нормированные частичные суммы

$$\zeta_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j .$$

Теорема 2. *Последовательность $\{\xi_j\}$ удовлетворяет условию*

$$\sup_n \mathbf{E} \ln_+ \ln_+ |\zeta_n| < \infty$$

и центральной предельной теореме, т.е.

$$\mathcal{L}(\zeta_n) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

но она не удовлетворяет центральной предельной теореме типа "почти наверное".

Замечание. Напомним еще раз, что И. Беркеш и Г. Делинг [3] показали эквивалентность ЦПТ и ЦПТПН при условии

$$\sup_n \mathbf{E} \left(\ln_+ \ln_+ |\zeta_n|\right)^{1+h} < \infty$$

со сколь угодно малым $h > 0$. Теорема 2 показывает точность этого результата: параметр h исключить нельзя.

Доказательство теоремы 2.

1. Центральная предельная теорема. *Пусть*

$$\zeta_n^Y := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Y_j , \qquad \zeta_n^X := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j .$$

Зафиксируем целое m и рассмотрим $n \in [n_m, n_{m+1})$. Тогда

$$\zeta_n = \zeta_n^Y + \zeta_n^X = \zeta_n^Y + \frac{\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j}}{\sqrt{n}} + \frac{X_{n_m}}{\sqrt{n}}. \tag{2.1}$$

Для первого слагаемого имеем $\mathcal{L}(\zeta_n^Y) = \mathcal{N}(0,1)$. Третье слагаемое из (2.1) стремится к нулю по вероятности (когда $m \to \infty$), поскольку $\mathbf{P}\{X_{n_m} \neq 0\} \to 0$. Для второго слагаемого из (2.1) имеем оценку

$$\left| \sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j} \right| \leqslant \sum_{j \leqslant m-1} U_j \leqslant m\, U_{m-1} = m\, n_{m-1}^\alpha \leqslant m\, (2n_m)^{\alpha/a}, \tag{2.2}$$

в то время как $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{n_m}$. *Поскольку* $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$, *отсюда следует*

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j}\right|}{\sqrt{n}} \leqslant m\ 2^{\alpha/a}\ n_m^{\alpha/a-1/2} \to 0 \qquad (m\to\infty). \tag{2.3}$$

Теперь ЦПТ следует из представления (2.1).

2. *Отсутствие* **ЦПТПН**. Обозначим

$$Q_n := \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{\zeta_k}$$

эмпирические меры, ассоциированные с последовательностью $\{\zeta_k\}$. Выберем $\beta \in (1, 2\alpha)$. Мы покажем, что для каждого $R > 0$ почти наверное выполнено

$$\limsup_{n\to\infty}\ Q_n\left\{x : |x| \geqslant R\right\} \geqslant \frac{\beta-1}{\beta},$$

т.е. семейство мер $\{Q_n\}$ не является плотным, и уж тем более не имеет предела. Больше того, полагая $R = R_m/2$, где $R_m := n_m^{\alpha-\beta/2}\to\infty$, мы будем следить только за последовательностью индексов $n_m^* := [n_m^\beta] > n_m$ и покажем, что

$$\limsup_{m\to\infty}\ Q_{n_m^*}\left\{x : |x| \geqslant R_m/2\right\} \geqslant \frac{\beta-1}{\beta}. \tag{2.4}$$

Идея рассуждения – показать как редкие, но большие скачки X_j инициируют долгие блуждания процесса частных сумм вдали от нуля. Поскольку эти блуждания являются долгими даже в логарифмической шкале времени, они препятствуют выполнению ЦПТПН.

Рассмотрим независимые события $\Omega_m^{(1)} = \{\omega : X_{n_m} \neq 0\}$. Пусть

$$\Omega_\infty^{(1)} = \limsup_{m\to\infty}\Omega_m^{(1)}.$$

Так как $\mathbf{P}\{\Omega_m^{(1)}\} = \frac{1}{m}$, то по лемме Бореля–Кантелли $\mathbf{P}\{\Omega_\infty^{(1)}\} = 1$. Нам также потребуются некоторые события, связанные с законом повторного логарифма для гауссовских величин, а именно, $\Omega_m^{(2)} = \left\{\omega : \forall n \geqslant n_m\ |\zeta_n^Y| \leqslant 2\sqrt{\ln_2 n}\right\}$. О них известно, что $\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\{\Omega_m^{(2)}\}\to 1$.

Зафиксируем целое m и $n \in [n_m, n_m^*]$. В силу представления (2.1),

$$|\zeta_n| \geqslant \frac{|X_{n_m}|}{\sqrt{n}} - |\zeta_n^Y| - \frac{\left|\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j}\right|}{\sqrt{n}}. \tag{2.5}$$

Если $\omega \in \Omega_m^{(1)}$, то для первого слагаемого имеем

$$\frac{|X_{n_m}|}{\sqrt{n}} = \frac{U_m}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{U_m}{\sqrt{n_m^*}} \geqslant n_m^{\alpha-\beta/2} = R_m.$$

Если $\omega \in \Omega_m^{(2)}$ и m достаточно велико, для второго слагаемого в (2.5) имеем следующую оценку,

$$|\zeta_n^Y| \leqslant 2\sqrt{\ln_2 n_m^*} \leqslant 2\sqrt{\ln_2 n_m + \ln\beta} < R_m/4.$$

Наконец, неравенство (2.2) обеспечивает оценку третьего слагаемого в (2.5),

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j}\right|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{m\ (2n_m)^{\alpha/a}}{\sqrt{n}} =$$

$$= m\ 2^{\alpha/a}\ n_m^{\alpha/a-\alpha}\ \frac{U_m}{\sqrt{n}} = o(1)\ \frac{U_m}{\sqrt{n}} \quad (m\to\infty).$$

Заметим, что для $\omega \in \Omega_m^{(1)}$ третье слагаемое мало в сравнении с первым.

Комбинируя все эти неравенства, видим, что для достаточно больших m, всех $\omega \in \Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}$, и всех $n \in [n_m, n_m^*]$ верно $|\zeta_n| \geqslant R_m/2$. Соответствующая масса эмпирической меры $Q_{n_m^*}$ будет не меньше, чем

$$\frac{1}{\ln(n_m^*)} \sum_{k=n_m}^{n_m^*} \frac{1}{k} \sim \frac{\ln(n_m^*) - \ln(n_m)}{\ln(n_m^*)} \to \frac{\beta-1}{\beta}.$$

Мы, таким образом, доказали справедливость (2.4) для

$$\omega \in \bigcap_M \bigcup_{m=M}^{\infty} \left(\Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}\right).$$

С другой стороны, для каждого натурального M верно

$$\mathbf{P}\left\{ \bigcup_{m=M}^{\infty} \left(\Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}\right) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left\{\Omega_\infty^{(1)} \cap \Omega_M^{(2)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\Omega_\infty^{(1)}\right\}\mathbf{P}\left\{\Omega_M^{(2)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\Omega_M^{(2)}\right\}.$$

Далее,

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}\right)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{M_1\to\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{m=M_1}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}\right)\right\} \geqslant \lim_{M_1\to\infty} \mathbf{P}\left\{\Omega_{M_1}^{(2)}\right\} = 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_M \bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}\right)\right\} = 1.$$

Таким образом, соотношение (2.4) доказано с вероятностью 1, и возможность выполнения ЦПТПН исключена.

3. *Равномерная оценка логарифмических моментов.* По определению X_j и в силу оценки (2.2), для каждого m и всех $n \in [n_m, n_{m+1})$

$$|\zeta_n^X| \leqslant \frac{|\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j}|}{\sqrt{n}} + \frac{|X_{n_m}|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{m\ (2n_m)^{\alpha/a}}{\sqrt{n_m}} + n_m^\alpha \mathbf{1}_{\{X_{n_m}\neq 0\}}.$$

Поскольку $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$, первое слагаемое етой оценки, которое не является случайным, стремится к нулю. Для второго слагаемого имеем

$$\mathbf{E}\ln_+\ln_+\left(n_m^\alpha \mathbf{1}_{\{X_{n_m}\neq 0\}}\right) = \frac{\ln\ln(n_m^\alpha)}{m} \leqslant \frac{\ln\alpha + m\ \ln a}{m} \leqslant \ln(\alpha a).$$

Получается

$$\sup_n \mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n^X| < \infty.$$

Поскольку значение $\mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n^Y|$ не зависит от n, то и для суммы $\zeta_n = \zeta_n^X + \zeta_n^Y$ имеем

$$\sup_n \mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n| < \infty.$$

Теперь мы покажем, что наше интегральное условие (1.2) также является почти оптимальным. Следуя обозначениям раздела 1, положим,

$$S_\infty(u) := \sup_{n:\,\log n\geqslant u} \mathbf{P}\{\log|\zeta_n| > u\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi : \ [1,\infty) \to [0,1]$ *такая убывающая функция, что*

$$\int \frac{\varphi(u)du}{u} = \infty. \tag{2.6}$$

Тогда существует последовательность независимых величин с нулевым средним $\{\xi_j\}$, *удовлетворяющая условию*

$$S_\infty(u) \leqslant \varphi(u) + \exp\{-e^{2u}/8\}$$

и подчиняющаяся ЦПТ, но не удовлетворяющая ЦПТПН.

Доказательство теоремы 3. Без потери общности мы можем и будем предполагать, что

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 0.$$

Воспользуемся прежней конструкцией ξ_j, но положим

$$m_0 := \sup\left\{ m : \sum_{j=1}^{m-1} U_{n_j} > n_m^{1/2}/2 \right\}.$$

и

$$\mathbf{P}\{X_{n_m} \neq 0\} := \begin{cases} \varphi\left(\log n_{m+1}\right), & \text{если} \quad m > m_0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.7}$$

В силу (2.3) величина m_0 конечна.

Такая модификация обеспечивает выполнение неравенства

$$\sum_{j=1}^{m-1} X_{n_j} \leqslant n_m^{1/2}/2 \tag{2.8}$$

для каждого m.

Поскольку $\log n_{m+1} \sim a^{m+1}$, гипотеза (2.6) влечет

$$\sum_m \mathbf{P}\{X_{n_m} \neq 0\} = \infty.$$

Имеем также

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\{X_{n_m} \neq 0\} = 0.$$

Таким образом, мы опять заключаем, что ЦПТ имеет место, а ЦПТПН – нет. Для оценки функции

$$S_\infty(u) = \sup_{n>e^u} \mathbf{P}\{|\zeta_n| > e^u\},$$

возьмем произвольные m, $u \in [\log n_m, \log n_{m+1})$, $M \geqslant m$ и $n \in [n_M, n_{M+1})$. Имеем

$$\mathbf{P}\{|\zeta_n| > e^u\} \leqslant \mathbf{P}\left\{|\zeta_n^Y| > e^u/2\right\} +$$
$$+\mathbf{P}\left\{n^{-1/2}\left|\sum_{j=1}^{M-1} X_{n_j}\right| > 1/2\right\} + \mathbf{P}\left\{X_{n_M} \neq 0\right\}.$$

В силу свойств нормального распределения первое слагаемое здесь ограничено величиной $\exp\{-e^{2u}/8\}$. Ввиду (2.8), второе слагаемое исчезает. По определению (2.7), для третьего слагаемого имеем оценку $\varphi(\log n_{M+1}) \leqslant \varphi(u)$. $\square$

Автор искренне благодарен И. Беркешу и И. А. Ибрагимову за обсуждение результатов, связанных с этой работой.

Литература

1. M. Atlagh, *Théorème central limite presque sûr et la loi du logaritme itéré pour des sommes de variables aléatoires indépendantes.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I, **316** (1993), 929–932.
2. I. Berkes, *Results and problems related to the pointwise central limit theorem.* in: Asymptotic Methods in Probability and Statistics, Elsevier Sci., Amsterdam, (1998), 59–96.
3. I. Berkes, H. Dehling, *Some limit theorems in log density.* Ann. Probab., **21** (1993), 1640–1670.
4. И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц, *О предельных теоремах типа "почти наверное".* Теория вероятностей и ее применения (в печати).
5. B. Rodzik, Z. Rychlik, *An almost sure central limit theorem for independent random variables.* Ann. Inst. H. Poincaré, **30** (1994), 1–11.

Lifshits M. A. Almost sure limit theorem for sums of random vectors.

We prove a sufficient condition for almost sure limit theorem for sums of independent random vectors under minimal moment assumptions and extremely mild assumptions about normalizing sequences. We also provide an example which shows that our sufficient condition is nearly optimal, as well as another sufficient condition due to I. Berkes and H. Dehling.

"ЦПО Менкомтех",
Университет Lille-I и СПбГУ

Поступило 1 декабря 1998 г.