Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

М. И. Гордин

ДВОЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕМЕШИВЮЩИХ ФИЛЬТРАЦИЙ. II. КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ ТОРОВ

Пусть $T\colon X \to X$ – автоморфизм (обратимое измеримое сохраняющее меру преобразование) вероятностного пространства $(X, \mathcal{F}, \mu)$ и пусть, кроме того, в пространстве $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$ действует пара μ-симметрических марковских генераторов A_u и A_s, которые являются "собственными векторами" автоморфизма T с собственными значениями, соответственно, $\theta > 1$ и θ^{-1}. Если, кроме того, A_u и A_s коммутируют и спектр оператора $A_u + A_s$ отделен от 0 на функциях с нулевым интегралом, то, как было показано в первой части настоящей работы [4], построенное там с помощью A_u и A_s расширение первоначального вероятностного пространства оказывается снабженным возрастающей и убывающей фильтрациями, обладающими свойствами типа перемешивания. Это позволяет доказывать предельные теоремы для широких классов функций, определенных на пространстве исходной системы. В [4] были рассмотрены применения к гиперболическим автоморфизмам торов. В настоящей работе эти результаты распространяются, с соответствующими изменениями, на квазигиперболические автоморфизмы. Спектральное условие из [4], теперь, вообще говоря, не выполнено, и вместо него приходится использовать неравенства диофантова типа. Применяемый подход позволяет доказать функциональные формы центральной предельной теоремы и закона повторного логарифма при несколько более общих условиях, чем в работе [6], также посвященной предельным теоремам для автоморфизмов торов. Отметим, что первой такой работой была до сих пор во многих отношениях не превзойденная диссертация В. П. Леонова [5].

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант No. 99-01-00112) и INTAS-РФФИ (грант No. 95-099).

1. Трансверсальные марковские генераторы и предельные теоремы

Основная цель данного раздела – напомнить необходимые определения и результаты из первой части [4] настоящей работы, а также установить предложение 1.1, используемое в разделе 2.

Обозначим через U унитарный оператор, порожденный в $L_2 = L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$ автоморфизмом T ($Uf = f \circ T, f \in L_2$). Пусть $\theta \in \mathbb{R}^+$. Марковский генератор A (т.е. генератор марковской полугруппы в L_2) называется *θ-коммутирующим* с T, если имеет место соотношение

$$AU = \theta UA.$$

Пусть теперь $\theta > 1$. Мы будем предполагать, что в L_2 действуют две марковские полугруппы $(\mathbf{P}_u(t))_{t\geqslant 0}$ и $(\mathbf{P}_s(t))_{t\geqslant 0}$ с генераторами A_u и A_s, которые, соответственно, θ и θ^{-1} – коммутируют с T.

Условимся называть *динамической системой* совокупность вероятностного пространства и его сохраняющего меру преобразования (как правило, обратимого). Напомним рассматривавшуюся в [4] конструкцию расширения динамической системы $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ (как известно, расширением динамической системы $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ называется пара, состоящая из динамической системы $(\overline{X}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu}, \overline{T})$ и сохраняющего меру отображения $\pi\colon \overline{X} \to X$, связанных соотношением $\pi \circ \overline{T} = T \circ \pi$). Вероятностное пространство $\big(\overline{X}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu}\big)$ строилось при этом как пространство реализаций определенного на $(-\infty, \infty)$ неоднородного по времени марковского процесса ξ с генераторами A_u на $(-\infty, 0]$ и A_s на $[0, \infty)$ и стационарным распределением μ, преобразование $\overline{T}$ определялось соотношением

$$(\overline{T}\xi)(t) = \begin{cases} T\big(\xi(\theta^{-1}t)\big), & \text{для} \quad t \leqslant 0, \\ T\big(\xi(\theta t)\big), & \text{для} \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

(нетрудно проверить, что $\overline{T}$ является автоморфизмом пространства $\big(\overline{X}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu}\big)$), а отображение π сопоставляло реализации $\xi(\cdot)$ ее значение $\xi(0)$.

В пространстве $\big(\overline{X}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu}\big)$ имеется естественная возрастающая фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}_t^u\}_{t\leqslant 0}$, в которой $\overline{\mathcal{F}}_t^u$ – σ-алгебра, порожденная процессом $\xi(\cdot)$ на $(-\infty, t]$, и аналогичная убывающая фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}_t^s\}_{t\geqslant 0}$, в которой $\overline{\mathcal{F}}_t^s$ – σ-алгебра, порожденная процессом

$\xi(\cdot)$ на $[t,\infty)$. Из определения $\overline{T}$ следует, что

$$\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}^u_t) = \overline{\mathcal{F}}^u_{\theta^{-1}t}$$

и

$$\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}^s_t) = \overline{\mathcal{F}}^s_{\theta t}.$$

Положим

$$\mathcal{F}_n = \overline{\mathcal{F}}^u_{-\theta^{-n}}, \mathcal{F}^n = \overline{\mathcal{F}}^s_{\theta^n}.$$

Тогда мы имеем

$$\overline{T}^{\,-1}(\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_{n+1} \supseteq \mathcal{F}_n, \quad \overline{T}^{\,-1}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{F}^{n+1} \subseteq \mathcal{F}^n.$$

Обозначим через E_n и E^n операторы условного математического ожидания относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}^n$, соответственно, и через E оператор безусловного математического ожидания.

Обозначим через $\overline{L_2}$ пространство квадратично суммируемых на $(\overline{X},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ функций, а через $L_2^0 \subset L_2$ ($\overline{L_2^0} \subset \overline{L_2}$) – подпространства L_2 (соответственно, $\overline{L_2}$), ортогональные постоянным.

Для обоих пространств L_2 и $\overline{L_2}$ будут применяться одни и те же обозначения $|\cdot|_2$ для L_2-норм и $(\cdot,\cdot)$ для скалярных произведений. Из сильной непрерывности полугрупп $\{\mathbf{P}_s(t)\},\{\mathbf{P}_u(t)\}$ следует, что

$$\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n \supseteq \pi^{-1}(\mathcal{F}), \quad \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^n \supseteq \pi^{-1}(\mathcal{F}).$$

Условимся называть неотрицательный самосопряженный оператор A в L_2 *T-инвариантной минорантой для пары (A_u, A_s)*, если A удовлетворяет соотношениям

$$UA = AU, \quad A_u + A_s \geqslant A$$

(частичный порядок на множестве самосопряженных операторов определяется конусом положительно определенных операторов.) Заметим, что для T-инвариантной миноранты A при любом $k \in \mathbb{Z}$ выполнено неравенство

$$U^{-k}(A_u + A_s)U^k\big(= \theta^k A_u + \theta^{-k}\ A_s\ \big) \geqslant A.$$

Если A_u и A_s коммутируют, то T-инвариантная миноранта для пары (A_u, A_s) существует (более того, существует даже наибольшая такая миноранта). Разумеется, T-инвариантная миноранта не обязана быть марковским генератором. Тем не менее такая миноранта A определяет полугруппу $\mathbf{Q}(t) = \exp(-At), t \geqslant 0$, самосопряженных сжатий, сохраняющую константы (но уже, вообще говоря, не сохраняющую положительность).

Предложение 1.1. *Предположим, что A_s и A_u коммутируют и пусть A – некоторая T-инвариантная миноранта для пары (A_u, A_s), порождающая полугруппу $(\mathbf{Q}(t))_{t\geqslant 0}$. Пусть, далее, $f \in L_2^0$ такова, что*

$$\sum_{k\geqslant 0}\big((|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\big) < \infty \tag{1.1}$$

и

$$\sum_{k\geqslant 0}|\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2 < \infty. \tag{1.2}$$

Тогда

$$\sum_{k\geqslant 0}\big(|E_{-k}\overline{f}|_2 + |\overline{f} - E_k\overline{f}|_2\big) < \infty, \tag{1.3}$$

где $\overline{f} = f \circ \pi$.

Доказательство. Отметим сначала, что для всякой $f \in L_2^0$ в условиях предложения 1.1 имеет место соотношение

$$\sum_{k\geqslant 0}|\overline{f} - E_k\overline{f}|_2 < \infty. \tag{1.4}$$

Действительно, поскольку $E_k\overline{f} = (\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f)(\xi(-\theta^{-k}))$, то в силу (1.1)

$$\sum_{k\geqslant 0}|\overline{f} - E_k\overline{f}|_2 = \sum_{k\geqslant 0}\big(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2\big)^{1/2} < \infty.$$

Аналогичным образом из (1.1) следует, что

$$\sum_{k\geqslant 0}|\overline{f} - E^{-k}\overline{f}|_2 < \infty. \tag{1.5}$$

Чтобы завершить доказательство предложения, теперь достаточно установить, что из (1.2), (1.4) и (1.5) следует, что

$$\sum_{k\geqslant 0}|E_{-k}\overline{f}|_2 < \infty. \tag{1.6}$$

Поскольку в силу марковского свойства

$$
\begin{aligned}
&|E_{-3k}E^{-k}\overline{f}|_2 = |E_{-3k}(\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f)(\xi(\theta^{-k}))|_2 \\
&= |E_{-3k}(\mathbf{P}_s(2\theta^{-k})f)(\xi(0))|_2 = |(\mathbf{P}_u(\theta^{3k})\mathbf{P}_s(2\theta^{-k})f)(\xi(-\theta^{3k}))|_2 \\
&= |\mathbf{P}_u(\theta^{3k})\mathbf{P}_s(2\theta^{-k})f|_2 = |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})\mathbf{P}_u(\theta^{3k})\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2 \\
&\leqslant |\mathbf{P}_u(\theta^{3k})\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2 = |U^{-2k}\mathbf{P}_u(\theta^{k})\mathbf{P}_s(\theta^{k})U^{2k}f|_2 \\
&= |\exp\big(-\theta^k U^{-2k}(A_u+A_s)U^{2k}\big)f|_2 \leqslant |\exp(-\theta^k A)f|_2 = |\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2,
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\geqslant 0}|E_{-k}\overline{f}|_2 \leqslant 3\sum_{k\geqslant 0}|E_{-3k}\overline{f}|_2 \\
&\leqslant 3\sum_{k\geqslant 0}\big(|E_{-3k}E^{-k}\overline{f}|_2 + |\overline{f}-E^{-k}\overline{f}|_2\big) \\
&\leqslant 3\sum_{k\geqslant 0}\big(|\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2 + |\overline{f}-E^{-k}\overline{f}|_2\big) < \infty.
\end{aligned}
$$

Предложение доказано.

Замечание 1.2. Предложение 1.1 обобщает предложение 2.1 из ([4]), в котором $A = c(I-E)$, где I и E являются, соответственно, единичным оператором и ортогональным проектором на подпространство постоянных, а $c>0$ – некоторая постоянная.

Следствие 1.3. *Пусть $f \in L_2^0$ удовлетворяет условиям предложения* 1.1. *Тогда $\overline{f} = f\circ\pi$ представима в виде*

$$\overline{f} = h + g\circ\overline{T} - g,$$

где $h, g \in L_2\big(\overline{X},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu}\big)$, h измерима относительно $\mathcal{F}_0$ и $E_{-1}h = 0$.

Доказательство. Согласно предложению 1.1, в наших предположениях имеют место соотношения

$$\sum_{k\geqslant 0}\big(|E_{-k}\overline{f}|_2 + |\overline{f}-E_k\overline{f}|_2\big) < \infty,$$

а из сходимости указанных рядов следует возможность представить $\overline{f}$ в описанной выше форме ([2, 1]).

Будем говорить, что T-инвариантная миноранта A *эргодична,* если A обращается в 0 только на постоянных функциях.

Следствие 1.4. *Если в ситуации предложения* 1.1 T*-инвариантная миноранта* A *эргодична, то преобразование* T*, а также преобразования* $T^{(u)}=\overline{T}|\mathcal{F}^u$ *и* $T^{(s)}=\overline{T}|\mathcal{F}^s$*, являются* K*-автоморфизмами.*

Доказательство. В наших предположениях множество функций, удовлетворяющих условию (1.2), плотно в L_2^0. Плотно в L_2^0 также и множество функций, удовлетворяющих одновременнно условиям (1.1) и (1.2). Дальнейшая часть доказательства повторяет доказательство следствия 2.3 из [1] и потому опускается.

Предложение 1.5. *Пусть в ситуации Предложения* 1.1 T*-инвариантная миноранта* A *эргодична, а функция* $f \in L_2^0$ *удовлетворяет условиям* (1.1) *и* (1.2). *Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right|_2^2 = \sigma^2$$

и распределения определенных на $[0,1]$ *случайных функций, равных* 0 *в* 0 *и*

$$n^{-1/2} \sum_{k=0}^{m-1} f \circ T^k$$

на интервале $((m-1)/n, m/n]$, $m = 1, \dots, n$*, слабо сходятся (в пространстве* $D([0,1])$*) к мере Винера со средним значением* 0 *и дисперсией* σ^2 *в точке* 1.

Доказательство. Как и в [4], вместо последовательности $\{f \circ T^k, k \geqslant 0\}$ будет рассматриваться одинаково с ней распределенная последовательность $\{\overline{f} \circ \overline{T}^k, k \geqslant 0\}$. Из наших предположений следует, что к $\overline{f}$ приложимо следствие 1.3. Из представления для $\overline{f}$, наличие которого утверждает следствие 1.3, будет вытекать предложение 1.5 (см., например, доказательство теоремы 8.1 гл.4 из [1]), если только мы установим эргодичность последовательности $h \circ T^k, k \in \mathbb{Z}$. Но из следствия 1.4 следует более сильное, чем эргодичность K-свойство автоморфизма $T^{(s)} = \overline{T}|_{\mathcal{F}^s}$, где $\mathcal{F}^s = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^n$, что и завершает доказательство.

Замечание 1.6. В условиях предложения 1.5 справедлив также закон повторного логарифма (в обычной форме и в форме Ф. Штрассена).

2. Квазигиперболические автоморфизмы торов

В этом разделе для квазигиперболического автоморфизма T тора $\mathbb{T}^d$ приводится конструкция пары θ-коммутирующих с T марковских генераторов и их эргодической T-инвариантной мажоранты, а также для некоторого класса функций осуществляется проверка условий предложения 1.1 (и, следовательно, предложения 1.5). Пусть $X = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ – тор с нормированной мерой Хаара μ и пусть $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ – алгебраический автоморфизм $\mathbb{T}^d$ (тогда μ T-инвариантна). T накрывается обратимым линейным отображением $\widetilde{T} : \widetilde{\mathbb{R}^d} \to \widetilde{\mathbb{R}^d}$, переводящим решетку $\mathbb{Z}^d$ на себя. Тогда $\mathrm{pr}\,\widetilde{T} = T\,\mathrm{pr}$, где $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ – каноническое отображение на фактор-группу. Спектр $\mathrm{spec}\,(\widetilde{T})$ оператора $\widetilde{T}$ распадается на три части

$$\mathrm{spec}\,(\widetilde{T}) = \sigma_u \cup \sigma_s \cup \sigma_n ,$$

располагающиеся, соответственно, снаружи, внутри и на единичной окружности $\{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Мера μ инвариантна относительно T и, согласно классическим результатам Рохлина и Халмоша, T действует эргодично на $(\mathbb{T}^d, \mu)$ тогда и только тогда, когда в спектре $\widetilde{T}$ отсутствуют корни из 1. Автоморфизм T называется в этом случае квазигиперболическим. Для квазигиперболического автоморфизма каждое из множеств σ_u и σ_s непусто. T называется гиперболическим, если $\sigma_n = \emptyset$. Положим $r = \max_{\lambda\in\sigma_s} |\lambda|$, $R = \min_{\lambda\in\sigma_u} |\lambda|$, $\Lambda = \min(R, r^{-1}) > 1$. Разложению спектра $\mathrm{spec}\,(\widetilde{T}) = \sigma_u \cup \sigma_s \cup \sigma_n$ соответствует $\widetilde{T}$-инвариантное линейное разложение $\mathbb{R}^d = L_u \oplus L_s \oplus L_n$. Обозначим через p_u, p_s и p_n соответствующие проекторы.

Сейчас будет приведена конструкция (зависящая от некоторого $\theta > 1$, достаточно близкого к 1) пары (A_u, A_s) генераторов марковских процессов с пространством состояний $\mathbb{T}^d$, где A_u (соответственно, A_s) θ-коммутирует (соответственно, θ^{-1}-коммутирует) с автоморфизмом T. A_u и A_s порождают чисто разрывные процессы со стационарными независимыми приращениями, принимющие значения в $\mathbb{T}^d$. Пусть $e^l, l = 1, \ldots, d,$ – стандартный базис $\mathbb{Z}^d$. Положим $\gamma_u^l = \mathrm{pr}\,p_u e^l$, $\gamma_s^l = \mathrm{pr}\ p_s e^l$, $\gamma_n^l = \mathrm{pr}\,p_n e^l$ для $l = 1, \ldots, d$. Заметим, что $\gamma_u^l + \gamma_s^l + \gamma_n^l = 0$, откуда следует, что для $l = 1, \ldots, d$

$$\gamma_u^l \in \mathrm{pr}\,(L_u) \cap \mathrm{pr}\,(L_s \oplus L_n), \quad \gamma_s^l \in \mathrm{pr}\,(L_s) \cap \mathrm{pr}\,(L_u \oplus L_n).$$

В частности, $\gamma_u^l \in \mathrm{pr}(L_u)$, $\gamma_s^l \in \mathrm{pr}(L_s)$, и поэтому $T^n\gamma_s^l \to 0$, $T^{-n}\gamma_u^l \to 0$ экспоненциально быстро при $n \to \infty$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что автоморфизм T квазигиперболичен, т.е. что $\mathrm{spec}(\widetilde{T})$ не содержит корней из 1. Положим

$$(A_u f)(x) = \sum_{k\in Z}\sum_{l=1}^{d} \theta^{-k}(2f(x) - f(x - T^k\gamma_u^l) - f(x + T^k\gamma_u^l)),$$

$$(A_s f)(x) = \sum_{k\in Z}\sum_{l=1}^{d} \theta^{k}(2f(x) - f(x - T^k\gamma_s^l) - f(x + T^k\gamma_s^l)),$$

где $f \in L_2^0 \cap H^\alpha$, а параметры $\theta > 1$ и $\alpha < 1$ удовлетворяет условию $\Lambda^{-\alpha}\theta < 1$ (H^α обозначает здесь пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α). Нетрудно убедиться в том, что ряды, определяющие A_u и A_s, сходятся для таких f. Поскольку A_u и A_s являются разностными выражениями, перестановочными с любыми трансляциями на торе, они диагональны в общем базисе, составленном из характеров тора $\mathbb{T}^d$, что позволяет считать их самосопряженными коммутирующими операторами в L_2. Соотношения коммутации с автоморфизмом T легко проверяются непосредственно для функций из описанного класса. Далее, A_u и A_s являются генераторами марковских полугрупп, т.к. таковыми являются частные суммы представляющих A_u и A_s рядов. Теперь мы приведем условия, обеспечивающие в рассматриваемой в настоящем разделе ситуации применимость предложения 1.1. Наиболее важным является условие

$$\sum_{k\geqslant 0} |\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2 < \infty, \tag{1.2}$$

которое должно быть проверено для некоторой полугруппы $\mathbf{Q}$, генератор A которой является T-инвариантной минорантой для пары (A_u, A_s). Приступим к определению такого генератора. Пусть для $x \in \mathbb{T}^d$ $(H_x f)(\cdot) = f(x + \cdot)$. Введем обозначения $H_u^l = H_{\gamma_u^l}$, $H_s^l = H_{\gamma_s^l}$. Положим для $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, \ldots, d\}$

$$\begin{aligned} D_u^l = I - H_u^l, \quad & D_s^l = I - H_s^l, \\ D_{k,u}^l = U^{-k} D_u^l U^k, \quad & D_{k,s}^l = U^{-k} D_s^l U^k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где I – единичный оператор (ср. [7]). Условимся писать $D_u^l{}^*$, $D_s^l{}^*$, $D_{k,u}^l{}^*$ и $D_{k,s}^l{}^*$ вместо $(D_u^l)^*$, $(D_s^l)^*$, $(D_{k,u}^l)^*$ и $(D_{k,s}^l)^*$, соответственно. Пусть, далее, при $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} M_u^l &= D_u^l{}^* D_u^l, \quad & M_s^l &= D_s^l{}^* D_s^l, \\ M_{k,u}^l &= D_{k,u}^l{}^* D_{k,u}^l, \quad & M_{k,s}^l &= D_{k,s}^l{}^* D_{k,s}^l, \end{aligned} \tag{2.2}$$

причем $M_{k,u}^l = U^{-k} M_u^l U^k$, $M_{k,s}^l = U^{-k} M_s^l U^k$. Наконец, положим для $k \in \mathbb{Z}$

$$M_{k,u} = \sum_{l=1}^{d} M_{k,u}^l, \quad M_{k,s} = \sum_{l=1}^{d} M_{k,s}^l. \tag{2.3}$$

В этих обозначениях

$$A_u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta^{-k} M_{k,u}, \quad A_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta^{k} M_{k,s}. \tag{2.4}$$

Пусть теперь

$$A = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (M_{k,u})^{1/2} (M_{k,s})^{1/2}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Оператор A является T-инвариантной минорантой для пары (A_u, A_s).*

Доказательство. С помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического, примененного к перестановочным операторам A_u и A_s, мы получаем, что

$$A_u + A_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\theta^{-k} M_{k,u} + \theta^{k} M_{k,s} \right) \geqslant 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (M_{k,u})^{1/2} (M_{k,s})^{1/2}.$$

T-инвариантность оператора A следует из (2.1)–(2.5). Лемма доказана.

Замечание 2.2. В гиперболическом случае для всех $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, \dots, d\}$ $M_u^l = M_s^l$, $M_{k,u}^l = M_{k,s}^l$. Как отмечалось в первой части настоящей работы, в [1] было показано, что в этом случае спектр оператора M отделен от 0 на L_2^0. Поэтому, в силу леммы 2.1, в гиперболическом случае (1.2) выполнено для всех $f \in L_2^0$.

Обозначим через χ_m комплекснозначный характер группы $\mathbb{T}^d$, соответствующий $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, так что для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ $\chi_m(x) = \exp\big(2\pi(m_1 x_1 + \dots + m_d x_d)\big)$. Пусть теперь $f \in L_2^0$ функция с разложением Фурье $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} f_m \chi_m$, где $f_m \in \mathbb{C}$ – соответствующий коэффициент Фурье функции f. Наша цель сейчас – получить условие на коэффициенты Фурье $f_m, m \in \mathbb{Z}$, гарантирующее выполнение соотношения (1.2). Обозначим через $\mathbf{T}$ двойственный T автоморфизм группы $\mathbb{Z}^d$, так что для всех $m \in \mathbb{Z}^d$ и $x \in \mathbb{T}^d$ $\chi_{\mathbf{T}m}(x) = \chi_m(Tx)\big(= (U\chi_m)(x)\big)$. Будем считать (не меняя обозначений), что $\mathbf{T}$ действует в двойственном $\mathbb{R}^d$ пространстве $(\mathbb{R}^d)' \supset \mathbb{Z}^d$, а не только в $\mathbb{Z}^d$. Обозначим через $< \cdot, \cdot >$ форму двойственности между $\mathbb{R}^d$ и $(\mathbb{R}^d)'$. Спектр $\operatorname{spec}(\mathbf{T})$ оператора $\mathbf{T}$ совпадает со спектром оператора $\widetilde{T}$ и имеет то же разложение относительно единичной окружности $\operatorname{spec}(\mathbf{T}) = \sigma_u \cup \sigma_s \cup \sigma_n$. Это разложение спектра приводит к разложению в прямую сумму $\mathbf{T}$-инвариантных подпространств $(\mathbb{R}^d)' = \mathbf{L}_u \oplus \mathbf{L}_s \oplus \mathbf{L}_n$, двойственному разложению $\mathbb{R}^d = L_u \oplus L_s \oplus L_n$ оператора $\widetilde{T}$ (двойственность разложений означает, что осуществляемое формой $< \cdot, \cdot >$ спаривание подпространств L_i и $\mathbf{L}_j$ невырождено, если $i = j$, и тривиально, если $i \neq j$). Обозначим через $\mathbf{p}_u$, $\mathbf{p}_s$ и $\mathbf{p}_n$ проекторы на $\mathbf{L}_u$, $\mathbf{L}_s$ и $\mathbf{L}_n$, соответственно. Заметим, что для любого $m \in \mathbb{Z}^d$ выполняется $A\chi_m = \lambda_m \chi_m$, где

$$\begin{aligned}\lambda_m = 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} &\left(\sum_{l=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_u \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2} \\ &\times \left(\sum_{r=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_s \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2}. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

В самом деле, с учетом (2.1)–(2.5) получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda_m &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l=1}^{d} \Re(1-\chi_m(T^k\gamma_u^l))\right)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^{d} \Re(1-\chi_m(T^k\gamma_s^r))\right)^{1/2} \\ &= 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l=1}^{d} \sin^2(\pi < p_u e^l, \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^{d} \sin^2(\pi < p_s e^l, \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2} \\ &= 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_u \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_s \mathbf{T}^k m >)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ – евклидово расстояние в $(\mathbb{R}^d)'$, $|\cdot|$ – евклидова норма на $(\mathbb{R}^d)'$. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}^d \subset (\mathbb{R}^d)'$

$$\left(\sum_{l=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_u m >)\right)^{1/2} \geqslant (\pi/2)\operatorname{dist}(\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d), \qquad (2.7)$$

$$\left(\sum_{l=1}^{d} \sin^2(\pi < e^l, \mathbf{p}_s m >\right)^{1/2} \geqslant (\pi/2)\,\mathrm{dist}(\mathbf{p}_s m, \mathbb{Z}^d). \tag{2.8}$$

Лемма 2.3. *Существуют такие постоянные $\alpha > 0$, $K > 0$, что для всех $m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$*

$$\lambda_m \geqslant K|m|^{-\alpha}.$$

Доказательство. В силу соотношений (2.7) и (2.8), лемма будет установлена, если мы докажем, что при некоторых постоянных $\beta > 0$ и $C > 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d) \geqslant C|m|^{-\beta}, \quad \mathrm{dist}(\mathbf{p}_s m, \mathbb{Z}^d) \geqslant C|m|^{-\beta}. \tag{2.9}$$

Докажем первое из этих неравенств, поскольку второе доказывается аналогично. Обозначим через $\mathbf{T}_u$ ограничение оператора $\mathbf{T}$ на подпространство $\mathbf{L}_u$. Отметим, что $\mathrm{spec}\,(\mathbf{T}_u) = \sigma_u$, и поэтому при некоторой постоянной C_1 для всех целых $k \geqslant 0$

$$|\mathbf{T}_u^{-k}| \leqslant C_1 \Lambda^{-k}. \tag{2.10}$$

Далее, пусть $C_2 > 0$ и $B > 1$ таковы, что $|\mathbf{T}^{-k}|\,|\mathbf{T}^k| \leqslant C_2 B^k$ для всех целых $k > 0$. Определим $k(m)$ как наименьшее целое $k \geqslant 0$, для которого выполнено неравенство $|\mathbf{T}^{-k}\mathbf{p}_u m| < 1/2$. Ясно, что

$$\mathrm{dist}(\mathbf{T}^{-k(m)}\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d) = |\mathbf{T}_u^{-k(m)}\mathbf{p}_u m|.$$

В частности, если $|\mathbf{p}_u m| < 1/2$, то

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d) = |\mathbf{p}_u m|.$$

С другой стороны, диофантово неравенство

$$|\mathbf{p}_u m| \geqslant C|m|^{-\beta},$$

выполняющееся при некоторых $\beta > 0$ и $C > 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, давно известно в теории автоморфизмов торов: его вывел из классических результатов А. О. Гельфонда В. П. Леонов [5]; позже и независимо И. Кацнелсон [8] дал его непосредственное доказательство. Итак, чтобы получить первое из неравенств (2.9), теперь достаточно рассмотреть случай $|\mathbf{p}_u m| \geqslant 1/2$. В этом предположении из (2.10) следует,что

$$k(m) \leqslant \left[\frac{\log(2C_1|\mathbf{p}_u m|)}{\log \Lambda}\right] + 1$$

или

$$k(m) \leqslant C_3 + (\log |\mathbf{p}_u m|)^{\log B/\log\Lambda}.$$

Отсюда при $|\mathbf{p}_u m| \geqslant 1/2$

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d) &\geqslant |\mathbf{T}^{-k(m)}|^{-1} \operatorname{dist}(\mathbf{T}^{-k(m)}\mathbf{p}_u m, \mathbb{Z}^d)\\ &= |\mathbf{T}^{-k(m)}|^{-1}|\mathbf{T}^{-k(m)}\mathbf{p}_u m| \geqslant |\mathbf{T}^{-k(m)}|^{-1}|\mathbf{T}^{k(m)}|^{-1}|\mathbf{p}_u m|\\ &\geqslant C_3^{-1}B^{-k(m)}|\mathbf{p}_u m| \geqslant C_4|\mathbf{p}_u m|^{1-\log B/\log\Lambda}\\ &\geqslant C|m|^{1-\log B/\log\Lambda}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что при некоторой $K > 0$ $|\mathbf{p}_u m| \leqslant K|m|$ (заметим, что без потери общности можно принять, что $B > \Lambda$). Лемма 2.3 доказана.

Следствие 2.4. *T-инвариантная миноранта A эргодична.*

Укажем теперь условие, обеспечивающее выполнение соотношений (1.1) и (1.2).

Предложение 2.5. *Пусть функция $f \in L_2^0$ имеет разложение Фурье $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} f_m\chi_m$. Если при некоторых $\beta > 1$, $K' \geqslant 0$, для любого натурального N выполнено*

$$|f - \sum_{|m|\leqslant N} f_m\chi_m|_2 \leqslant K'(\log N)^{-\beta},$$

то для f имеют место (1.1) *и* (1.2).

Доказательство. Чтобы установить (1.1), мы покажем, что

$$\sum_{k\geqslant 0}(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} < \infty$$

и

$$\sum_{k\geqslant 0}(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} < \infty.$$

Приняв во внимание (2.1)–(2.4), заметим, что для любого $m \in \mathbb{Z}^d$ выполнены соотношения $A_u\chi_m = \lambda_{u,m}\chi_m$, $A_s\chi_m = \lambda_{s,m}\chi_m$, где

$$\lambda_{u,m} = 2\sum_{r\in\mathbb{Z}}\theta^{-r}\sum_{l=1}^{d}\Re(1 - \chi_m(T^r\gamma_u^l))$$

$$= 4\sum_{r\in\mathbb{Z}}\theta^{-r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_u e^l, m>)$$

и

$$\lambda_{s,m} = 2\sum_{r\in\mathbb{Z}}\theta^{r}\sum_{l=1}^{d}\Re(1-\chi_m(T^r\gamma_s^l))$$

$$= 4\sum_{r\in\mathbb{Z}}\theta^{r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_s e^l, m>).$$

Из выбора числа Λ следует, что при некоторой постоянной C_1, всех $l=1,\ldots,d$ и всех $r\geqslant 0$

$$|\widetilde{T}^{-r}p_u e^l|\leqslant C_1\Lambda^{-r},\quad |\widetilde{T}^{r}p_s e^l|\leqslant C_1\Lambda^{-r}.$$

Кроме того, в наших предположениях $\theta<\Lambda$. Поэтому

$$\lambda_{u,m} = 4\biggl(\sum_{r\geqslant 0}\theta^{-r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_u e^l, m>)$$

$$+\sum_{r<0}\theta^{-r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_u e^l, m>)\biggr)$$

$$\leqslant 4l\sum_{r\geqslant 0}\theta^{-r}+4\pi\sum_{r<0}\theta^{-r}\sum_{l=1}^{d}|\widetilde{T}^r p_u e^l|\,|m|\leqslant C_2+C_3|m|.$$

Точно так же

$$\lambda_{s,m} = 4\biggl(\sum_{r>0}\theta^{r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_s e^l, m>)$$

$$+\sum_{r\leqslant 0}\theta^{r}\sum_{l=1}^{d}\sin^2(\pi<\widetilde{T}^r p_s e^l, m>)\biggr)$$

$$\leqslant 4\pi\sum_{r>0}\theta^{r}\sum_{l=1}^{d}|\widetilde{T}^r p_u e^l|\,|m|+4l\sum_{r\geqslant 0}\theta^{r}\leqslant C_2+C_3|m|.$$

Тогда для каждого $k\geqslant 0$

$$|f|_2^2-|\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}|f_m|^2(1-\exp(-2\theta^{-k}\lambda_{u,m}))$$

$$\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |f_m|^2 \min(2\theta^{-k}\lambda_{u,m}, 1).$$

Отсюда, пользуясь имеющейся оценкой для $\lambda_{u,m}$, получаем, что

$$|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2 \leqslant C \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(2\theta^{-k0}(1+|m|),1)|f_m|^2. \quad (2.11)$$

Таким же образом из оценки для $\lambda_{s,m}$ выводим, что

$$|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2 \leqslant C \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(2\theta^{-k}(1+|m|),1)|f_m|^2. \quad (2.12)$$

Доказательство соотношений (1.1) и (1.2) будет завершено одновременно. Обратимся теперь к ряду из (1.2). Оценим $|\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2^2$ при некотором $k \geqslant 0$. Имеем, в силу леммы 2.3,

$$|\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |f_m|^2 \exp(-2\theta^k\lambda_m)$$

$$\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |f_m|^2 \exp(-2\theta^k K|m|^{-\alpha})$$

$$\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |f_m|^2 \exp(-2\theta^k K|m|^{-\alpha}).$$

Отсюда, применяя неравенство $\exp(-x) < 1\ x$, $x > 0$, получаем

$$|\mathbf{Q}(\theta^k)f|_2^2 \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(1/(2K)\theta^{-k}|m|^\alpha, 1)|f_m|^2. \quad (2.13)$$

Правые части неравенств (2.11)–(2.13) имеют однотипную структуру. Чтобы доказать (1.1) и (1.2), достаточно при произвольных $B > 0$ и $\alpha \in (0,1]$ установить сходимость ряда

$$\sum_{k\geqslant 0}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Зафиксируем некоторое $b \in (1, \theta^{1/\alpha})$. Имеем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2 =$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},|m|\leqslant b^k} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2$$

$$+\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},|m|>b^k} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2 = S_k^{(1)} + S_k^{(2)}.$$

Далее,

$$S_k^{(1)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},|m|\leqslant b^k} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2$$

$$\leqslant (\theta/b^\alpha)^k \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |f_m|^2 = (\theta/b^\alpha)^k |f|_2^2,$$

и, наконец,

$$S_k^{(2)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},|m|>b^k} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2 \leqslant B \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},|m|>b^k} |f_m|^2$$

$$\leqslant B(K')^2(k\log b)^{-2\beta} = B(K'/(\log b)^\beta)^2 k^{-2\beta}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\sum_{k\geqslant 0}\Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \min(\theta^{-k}|m|^\alpha, B)|f_m|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$\leqslant \sum_{k>0}\sqrt{S_k^{(1)}+S_k^{(2)}} \leqslant \sum_{k>0}\big((S_k^{(1)})^{1/2} + (S_k^{(2)})^{1/2}\big) < \infty.$$

Замечание 2.6. Условие предложения 2.5 выполнено, если $f \in L_2$ удовлетворяет при некотором $\epsilon > 0$ условию $|f(\cdot + r) - f(\cdot)|_2 \leqslant c|\log(1/r)|^{-(1+\epsilon)}$, для $r \in \mathbb{T}^d$ (где $|r|$ – расстояние до 0 в инвариантной относительно сдвигов римановой метрике на $\mathbb{T}^d$). Близкое, но несколько более слабое условие использовалось в [4].

Литература

1. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* — Труды МИАН **216** (1994), 10–19.
2. М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов.* — Докл. АН СССР **188**, № 1 (1969), 739–741.
3. М. И. Гордин, *Расширения динамических систем и метод мартингальной аппроксимации.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **216** (1994), 10–19.

4. М. И. Гордин, *Двойные расширения динамических сиистем и конструкции перемешивающих фильтраций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **244** (1997), 61–72.
5. В. П. Леонов, *Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов.* Наука, М. (1964).
6. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — Успехи матем. наук **22**, № 5 (1967), 1–56.
6. S. Le Borgne, *Thesis.* — University Rennes 1 (1997), 97–116.
7. M. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Contemporary Math. **149** (1993), 149–162.
8. Y. Katznelson, *Ergodic automorphisms of* $\mathbb{T}^n$ *are Bernoulli shifts.* — Israel J. Math. **10**, 186–195.

Gordin M. I. Double extensions of dynamical systems and a construction of mixing filtrations. II. Quasihyperbolic toral automorphisms.

Let T be an automorphism (an invertible measure preserving transformation) of a probability space $(X, \mathcal{F}, \mu)$ and let U be a unitary operator on $L_2(X) = L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$ defined by $Uf = f \circ T$. Let A_s and A_u be generators of symmetric Markov transition semigroups acting on L_2. A_s and A_u are supposed to satisfy the relations

$$U^{-1}A_sU = \theta^{-1}A_s, U^{-1}A_uU = \theta A_u$$

for some $\theta > 1$. A nonnegative selfadjoint operator A on L_2 with the properties $UA = AU$, $A_u + A_s \geqslant A$ is said to be a T-invariant minorant for (A_u, A_s). Supposing that A_u and A_s commute, certain assumptions on a function $f \in L_2$ in terms of such a minorant are proposed under which the sequence $(f \circ T^k, k \in \mathbb{Z})$ satisfies the functional form of the Central Limit Theorem and the Law of the Iterated Logarithm. A special case of these assumptions was considered in an earlier paper by the author. Quasihyperbolic toral automorphisms are considered as an application.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В.А.Стеклова РАН

Поступило 22 февраля 1999 г.