Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

В. А. Солонников

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ПО ГЕЛЬДЕРУ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

§1. Введение

Предметом настоящей работы является вторая начально-краевая задача ("задача Неймана") для системы Стокса

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_t - \nabla^2\vec{v} + \nabla p = \vec{f}(x,t), \quad \nabla\cdot\vec{v} = g(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,T),\\
&\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x),\\
&T(\vec{v},p)\vec{n}\big|_{\Gamma} = \vec{a}(x,t),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Γ, $\vec{v}(x,t)=(v_1,v_2,v_3)$ и $p(x,t)$ – неизвестные векторное поле скоростей и давление, $T(\vec{v},p)=-pI+S(\vec{v})$ – тензор напряжений, I – единичная матрица, $S(\vec{v})=\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)_{i,j=1,2,3}$ – удвоенный тензор скоростей деформации, $\vec{f}$, $\vec{v}_0$, g, $\vec{a}$ – заданные функции. Задача (1.1) рассматривалась в работах [1–3], где была доказана ее однозначная разрешимость в анизотропных пространствах С. Л. Соболева $W_p^{2,1}(\Omega\times(0,T))$, $1<p<\infty$, и Гельдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega\times(0,T))$, $\alpha\in(0,1)$. В настоящей работе эта задача изучается в пространствах $\widetilde{C}(0,T;C^{k+\alpha}(\Omega))$, $k=0,1,2$, которые определяются как множества скалярных или векторнозначных функций, непрерывных по $x\in\Omega$ и $t\in(0,T)$ и имеющих конечную норму

$$\sup_{\tau<T}\big|u(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{k+\alpha}(\Omega)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты No. 99-01-00108 и INTAS, грант No. 96-0835.

Аналогичным образом определяются пространства $\widetilde{C}(0,T,C^{k+\alpha}(\Gamma))$.

Напомним, что норма в пространстве Гельдера $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $k = 0,1,\ldots$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, задается формулой

$$\left|u\right|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \sum_{0\leqslant|j|\leqslant k} \sup_{\Omega} |D^j u(x)| + [\,u\,]_{\Omega}^{(k+\alpha)},$$

где

$$[\,u\,]_{\Omega}^{(k+\alpha)} = \sum_{|j|=k} \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|^{-\alpha} \left|D_x^j\, u(x) - D_y^j\, u(y)\right|,$$

$$j = (j_1,\ldots,j_n), \quad |j| = j_1 + \ldots + j_n.$$

Норма в пространстве $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\Omega\times(0,T))$ может быть определена формулой

$$\left|u\right|_{C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(\Omega\times(0,T))} = \sum_{0\leqslant|j|\leqslant k} \sup_{t\in(0,T)} \sup_{\Omega} \left|D_x^j\, u(x,t)\right| + [\,u\,]_{\Omega\times(0,T)}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})},$$

где

$$[\,u\,]_{\Omega\times(0,T)}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} = \sup_{\tau<T} [\,u(\,\cdot\,,\tau)\,]_{\Omega}^{(k+\alpha)} + \sup_{\Omega} [\,u(x,\,\cdot\,)\,]_{(0,T)}^{(\frac{k+\alpha}{2})}.$$

Возможны другие эквивалентные нормировки этого пространства (см., напр., [4]).

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\vec{v}_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, $\vec{f} \in \widetilde{C}(0,T;C^{\alpha}(\Omega))$, $g \in \widetilde{C}(0,T;C^{1+\alpha}(\Omega))$, $\vec{a} \in \widetilde{C}(0,T;C^{1+\alpha}(\Gamma))$. *Кроме того, предположим, что тангенциальная компонента векторного поля* $\vec{a}$, *т.е.* $\vec{a}_\tau = \vec{a} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a})$, *принадлежит* $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma\times(0,T))$, *а* $g(x,t)$ *удовлетворяет условию*

$$g(x,t) = \nabla\cdot\vec{h}(x,t) + h_0(x,t)$$

и

$$\sup_{\tau<T} \left|\vec{h}_t(\,\cdot\,,t)\right|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\Omega\times(0,T)} |h_{0t}(x,t)| < \infty.$$

Наконец, пусть выполнены условия согласования

$$\nabla\cdot\vec{v}_0(x) = g(x,0), \quad (S(\vec{v}_0)\vec{n})_\tau \big|_{\Gamma} = \vec{a}_\tau\big|_{t=0}. \tag{1.2}$$

Тогда задача (1.1) *имеет единственное решение со следующими свойствами:*

$$\vec{v} \in \widetilde{C}(0,T;C^{2+\alpha}(\Omega)), \quad \vec{v}_t \in \widetilde{C}(0,T;C^{\alpha}(\Omega)), \quad p \in \widetilde{C}(0,T;C^{1+\alpha}(\Omega)),$$

и при любом $t \leqslant T$ *справедлива оценка*

$$N_t(\vec{v},p) \leqslant c\mathcal{F}_t, \tag{1.3}$$

где

$$N_t(\vec{v},p) \equiv \sup_{\tau<t} \big|\vec{v}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} \big|\vec{v}(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \\ + \sup_{\tau<t} \big|p(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega)},$$

$$\mathcal{F}_t = \sup_{\tau<t} \big|\vec{f}(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{\alpha}(\Omega)} + |\vec{v}_0|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} \big|g(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega)} + \\ + \sup_{\tau<t} \big|\vec{h}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t}\sup_{x\in\Omega} |h_{0\tau}(x,\tau)| + \sup_{\tau<t} \big|\vec{a}\cdot\vec{n}\,\big|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)} + \\ + \big|\,\vec{a}_\tau\,\big|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma\times(0,t))}.$$

Аналогичные результаты для параболических начально-краевых задач получены в работах [5–8]. Один из таких результатов – оценка решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности в полупространстве – используется ниже при выводе неравенства (1.3). Для нее дается элементарное доказательство, основанное на представлении решения задачи Неймана в виде суммы потенциалов.

§2. Модельная задача для однородной системы Стокса в полупространстве

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_t - \nabla^2\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla\,\vec{v} = 0 \quad (x_3>0,\ t>0),\\
&\vec{v}\big|_{t=0} = 0,\\
&\frac{\partial v_j}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_j}\bigg|_{x_3=0} = a_j(x',t), \quad j=1,2,\\
&-p + 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = a_3(x',t),\\
&x'=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \quad t>0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

считая, что $a_k(x', t)$ ограничены и достаточно быстро убывают при $|x'| \to \infty$.

Преобразование Фурье по переменным $x' = (x_1, x_2)$ и Лапласа по t переводит (2.1) в краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнения на полуоси $x_3 > 0$:

$$
\begin{gathered}
-\frac{d^2\widetilde{v}_j}{dx_3^2} + r^2\widetilde{v}_j + i\xi_j\widetilde{p} = 0, \quad j = 1, 2, \\
-\frac{d^2\,\widetilde{v}_3}{dx_3^2} + r^2\widetilde{v}_3 + \frac{d\widetilde{p}}{dx_3} = 0, \quad i\xi_1\widetilde{v}_1 + i\xi_2\widetilde{v}_2 + \frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3} = 0 \ (x_3 > 0), \\
\widetilde{v}_1,\, \widetilde{v}_2,\, \widetilde{v}_3,\, \widetilde{p} \to 0 \ \ (x_3 \to +\infty), \\
\left.\frac{d\widetilde{v}_j}{dx_3} + i\xi_j\,\widetilde{v}_3\right|_{x_3=0} = \widetilde{a}_j, \quad j = 1, 2, \\
\left.-\widetilde{p} + 2\frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}\right|_{x_3=0} = \widetilde{a}_3.
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

Здесь ξ_1, ξ_2, s – двойственные переменные, $r = \sqrt{s + \xi^2}$, причем $\operatorname{Re} r > 0$ при $\operatorname{Re} s > 0$, а знаком “$\sim$” помечены преобразованные функции, т.е.

$$
\widetilde{f}(\xi, x_3, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\,dt \int\limits_{R^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x, x_3, t)\,dx' \equiv FLf.
$$

Формула для обратного преобразования имеет вид

$$
f \equiv F^{-1}L^{-1}f = \frac{1}{(2\pi)^2 2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \int\limits_{\operatorname{Re} s = a} \widetilde{f}(\xi, x_3, s)e^{st}\,ds.
$$

Как показано в [1], задача (2.2) решается в явном виде:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{v}_i(\xi, x_3, s) = -\frac{1-\delta_{i3}}{r}\widetilde{a}_i(\xi, s)e^{-rx_3} + \sum_{k=1}^3 \frac{R_{ik}(r,\xi)}{rQ(r,|\xi|)}\,\widetilde{a}_k\,e^{-rx_3} + \\
+ \sum_{k=1}^3 \frac{S_{ik}(r,\xi)}{Q(r,|\xi|)}\,\widetilde{a}_k\,\frac{e^{-rx_3} - e^{-|\xi|x_3}}{r - |\xi|},
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

$$
\widetilde{p}(\xi, x_3, s) = -\widetilde{a}_3\,e^{-|\xi|x_3} + \sum_{k=1}^3 P_k(r,\xi)\widetilde{a}_k\,e^{-|\xi|x_3}, \tag{2.4}
$$

здесь

$$P_j(r,\xi) = i\xi_j \frac{2r(r+|\xi|)}{Q}, \quad j=1,2,$$

$$P_3(r,\xi) = 2|\xi|^2 \frac{r-|\xi|}{Q},$$

R_{ik}, S_{ik} – элементы матриц

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \xi_1^2(3r-|\xi|) & \xi_1\xi_2(3r-|\xi|) & i\xi_1 r(r-|\xi|) \\ \xi_1\xi_2(3r-|\xi|) & \xi_2^2(3r-|\xi|) & i\xi_2 r(r-|\xi|) \\ -i\xi_1 r(r-|\xi|) & -i\xi_2 r(r-|\xi|) & -|\xi| r(r+|\xi|) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -2r\xi_1^2 & -2r\xi_1\xi_2 & -i\xi_1(r^2+|\xi|^2) \\ -2r\xi_1\xi_2 & -2r\xi_2^2 & -i\xi_2(r^2+|\xi|^2) \\ -2i\xi_1|\xi|r & -2i\xi_2|\xi|r & |\xi|(r^2+|\xi|^2) \end{pmatrix},$$

и, наконец,

$$Q(r,|\xi|) = r^3 + |\xi|r^2 + 3r|\xi|^2 - |\xi|^3 = (r+|\xi|)M(s,|\xi|), \tag{2.5}$$

$$M(s,|\xi|) = s + 4\xi^2 \frac{r}{r+|\xi|}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать $\vec{v}$ как решение параболической задачи

$$\begin{aligned} &\vec{v}_t - \nabla^2 \vec{v} = -\nabla p, \\ &\vec{v}\big|_{t=0} = 0, \\ &\frac{\partial v_j}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = a_j - \frac{\partial v_3}{\partial x_j}\bigg|_{x_3=0}, \quad j=1,2, \\ &\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = \frac{1}{2}\big(a_3 + p\big|_{x_3=0}\big) \equiv \frac{1}{2} p_0(x',t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

а p – как решение задачи Дирихле

$$\nabla^2 p = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^3_+), \quad p\big|_{x_3=0} = p_0(x',t) - a_3(x',t). \tag{2.8}$$

Функции $p_0(x',t)$ и $v_3(x',0,t)$ определяются из (2.3), (2.4):

$$p_0(x',t) = F^{-1}L^{-1}\sum_{k=1}^{3} P_k(r,\xi)\widetilde{a}_k(\xi,s) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j}, \tag{2.9}$$

$$\widetilde{\pi}_j = \frac{2r(r+|\xi|)}{Q}\,\widetilde{a}_j - \frac{2i\xi_j(r-|\xi|)}{Q}\,\widetilde{a}_3,$$

$$\widetilde{v}_3\big|_{x_3=0} = \sum_{k=1}^{3} \frac{R_{3k}(r,\xi)}{rQ(r,|\xi|)}\widetilde{a}_k =$$

$$= -\sum_{j=1}^{2} \frac{i\xi_j(r-|\xi|)}{Q}\,\widetilde{a}_j - \frac{|\xi|(r+|\xi|)}{Q}\,\widetilde{a}_3. \tag{2.10}$$

Таким образом, $\widetilde{\pi}_j$ и $\widetilde{v}_3\big|_{x_3=0}$ являются линейными комбинациями произведений $\widetilde{a}_k$ на функции вида

$$\widetilde{U} = \frac{q_2(r,\xi,|\xi|)}{Q(r,|\xi|)}, \tag{2.11}$$

где q_2 – однородный полином второй степени относительно r, $|\xi|$, ξ_j. Ниже будет показано, что ядра

$$U(x',t) = F^{-1}L^{-1}\widetilde{U}(\xi,s)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|D^k_{x'}U(x',t)| \leqslant \frac{c(k)}{t^{1/2}(|x'|^2+t)^{1+|k|/2}}, \quad t>0, \tag{2.12}$$

а при $t<0$ обращаются в ноль. Следовательно,

$$\pi_j(x',t) = \sum_{k=1}^{3}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} U_{jk}(x'-y',t-\tau)a_k(y',\tau)dy',$$

$$v_3(x',0,t) = \sum_{k=1}^{3}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} U_k(x'-y',t-\tau)a_k(y',\tau)dy. \tag{2.13}$$

Для сходимости интегралов в (2.13) достаточно потребовать, чтобы при больших $|x'|$ $a_k(x',\tau) = O(|x'|^{-\gamma})$, $\gamma > 0$. Очевидно, что значения функций (2.13) (а значит и решения задачи (2.1)) при $t\in(0,T)$ не зависят от значений $a_k(x',t)$, $t \geqslant T$.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_t-\nabla^2\vec{v}+\nabla p=\vec{f}(x,t),\quad \nabla\cdot\vec{v}=g(x,t)\quad (x\in\mathbb{R}^3_+,\ t\in(0,T)),\\
&\vec{v}\Big|_{t=0}=\vec{v}_0(x),\\
&\frac{\partial v_j}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\bigg|_{x_3=0}=a_j(x',t),\quad j=1,2,\\
&-p+2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=a_3(x',t)\quad (x'\in\mathbb{R}^2,\quad t>0)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

с гладкими финитными (или достаточно быстро убывающими при $|x'|\to\infty$) $\vec{f}$, g, $\vec{v}_0$, $\vec{a}$, удовлетворяющими условию $\nabla\cdot\vec{v}_0(x)=g(x,0)$. Эта задача сводится к задаче (2.1) введением вспомогательных функций

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}^{\,(1)}(x,t)=\\
&=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(x-y,t-\tau)\vec{f^*}(y,\tau)dy+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(x-y,t)\vec{v_0^*}(y)\,dy,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$
\vec{v}^{\,(2)}(x,t)=\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\big(E(x-y)-E(x-y^*)\big)\big(g(y,t)-\nabla\cdot\vec{v}^{\,(1)}(y,t)\big)\,dy,
\tag{2.16}
$$

$$
p^{(2)}=g-\nabla\cdot\vec{v}^{\,(1)}-\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\big(E(x-y)-E(x-y^*)\big)\big(g_t(y,t)-\nabla\cdot\vec{v}^{(1)}_t\big)\,dy.
\tag{2.17}
$$

Здесь

$$
\Gamma(x,t)=(4\pi t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),
$$

$$
E(x,t)=-\frac{1}{4\pi|x|}
$$

– фундаментальные решения уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа, $y^*=(y_1,y_2,-y_3)$, $\vec{f^*}$ и $\vec{v}_0{}^*$ – продолжения функций $\vec{f}$ и $\vec{v}_0$ из $\mathbb{R}^3_+$ на все $\mathbb{R}^3$. Мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}^{(1)}_t-\nabla^2\vec{v}^{\,(1)}=\vec{f}(x,t),\quad \vec{v}^{\,(1)}\Big|_{t=0}=\vec{v}_0(x)\quad (x\in\mathbb{R}^3_+),\\
&\vec{v}^{\,(2)}=\nabla\Phi,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

где Φ – решение задачи Дирихле

$$\nabla^2\Phi = g - \nabla\cdot\vec v^{\,(1)}(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}^3_+), \qquad \Phi\big|_{x_3=0} = 0; \tag{2.19}$$

следовательно,

$$\nabla\cdot\vec v^{\,(2)} = g - \nabla\cdot\vec v^{\,(1)}.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\vec v^{(2)}_t - \nabla^2\,\vec v^{\,(2)} + \nabla p^{(2)} = 0, \qquad \vec v^{\,(2)}\big|_{t=0} = 0,$$

так что для $\vec v^{\,(3)} = \vec v - \vec v^{\,(1)} - \vec v^{\,(2)}$, $p^{(3)} = p - p^{(2)}$ получаем задачу типа (2.1):

$$\begin{aligned}
&\vec v^{(3)}_t - \nabla^2\,\vec v^{\,(3)} + \nabla p^{(3)} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec v^{\,(3)} = 0,\\
&\vec v^{\,(3)}\big|_{t=0} = 0,\\
&\frac{\partial v^{(3)}_j}{\partial x_3} + \frac{\partial v^{(3)}_3}{\partial x_j}\bigg|_{x_3=0} =\\
&= a_j - \left(\frac{\partial v^{(1)}_j}{\partial x_3} + \frac{\partial v^{(1)}_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0} - \left(\frac{\partial v^{(2)}_j}{\partial x_3} + \frac{\partial v^{(2)}_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0} \equiv a'_j,\\
&-p^{(3)} + 2\frac{\partial v^{(3)}_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = a_3 + \left(p^{(2)} - 2\frac{\partial v^{(1)}_3}{\partial x_3} - 2\frac{\partial v^{(2)}_3}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0} \equiv a'_3.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Если $\vec f$, g, $\vec v_0$, $\vec a$ имеют компактные носители, то, как это видно из формул (2.15)–(2.17), $\vec a^{\,\prime}$ убывает при $|x'|\to\infty$ как степенная функция, так что решение задачи (2.20) выражается через $\vec a^{\,\prime}$ по формулам, приведенным выше.

Ниже будут получены оценки построенного решения задачи (2.14).

§3. Некоторые вспомогательные оценки

В этом параграфе приводится доказательство вспомогательного интерполяционного неравенства и оценка интегралов типа (2.13), а также решений параболической задачи Неймана.

Лемма 3.1. *Для всякой функции $\varphi(x)$, заданной во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ или в области $\mathcal{G} = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n > F(x')\}$, где $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ и $F(x')$ функция, удовлетворяющая условию Липшица*

$$|F(x') - F(z')| \leqslant M|x'-z'|, \quad \forall\, x', \quad z'\in\mathbb{R}^n,$$

и принадлежащей пространству $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ или, соответственно, $C^{2+\alpha}(\mathcal{G})$, справедливо неравенство

$$\sup_{\mathfrak{R}} |\nabla\varphi(x)| \leqslant c\left(\left[\,\varphi\,\right]^{(\alpha)}_{\mathfrak{R}}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}\left(\left[\,\varphi\,\right]^{(2+\alpha)}_{\mathfrak{R}}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}, \qquad (3.1)$$

где $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$ или $\mathfrak{R} = \mathcal{G}$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $\mathfrak{R} = \mathcal{G}$ (случай $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$ рассматривается аналогично). Так как область $\mathcal{G}$ – липшицева, то существует бесконечный конус

$$\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y'| \equiv \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2} \leqslant \gamma y_n\, , y_n > 0\}, \quad \gamma \in (0,1),$$

такой, что для любой точки $x \in \mathcal{G}$ множество $\mathcal{C}_x = \{x + z, z \in \mathcal{C}\}$ содержится в $\mathcal{G}$.

Выведем интегральное представление для функции $\varphi_{x_j}(x)$ из тождества

$$\varphi_{x_j}(x) = \Delta^2(z)\varphi_{x_j}(x) - \left(\varphi_{x_j}(x+2z) - 2\varphi_{x_j}(x+z)\right), \quad z \in \mathcal{C}, \qquad (3.2)$$

где

$$\Delta^2(z)\psi(x) = \psi(x+2z) - 2\psi(x+z) + \psi(x).$$

Пусть $\mathcal{S}$ – область, вырезаемая из единичной сферы $|y| = 1$ конусом $\mathcal{C}$, $\chi(\omega)$ – функция из $C_0^\infty(\mathcal{S})$ и $\zeta(t)$ – функция из $C^\infty(R_+)$ такие, что

$$\int_{\mathcal{S}} \chi(\omega)dS = 1, \quad \int_0^1 \zeta(t)\, t^{n-1}\, dt = 1, \quad \zeta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in (0, 1/4), \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant 1, \end{cases}$$

и пусть $\zeta_\rho(z) = \zeta(|z|/\rho)$, где ρ – произвольное положительное число. Умножим (3.2) на $\chi(z/|z|)\zeta_\rho(z)$ и проинтегрируем по $z \in \mathcal{C}_\rho \equiv \{y \in \mathcal{C} : |y| < \rho\}$. Это дает

$$\varphi_{x_j}(x) = \frac{1}{\rho^n}\int_{\mathcal{C}_\rho} K_\rho(z)\Delta^2(z)\varphi_{x_j}(x)dz -$$

$$-\frac{1}{\rho^n}\int_{\mathcal{C}_\rho} K_\rho \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\frac{1}{2}\varphi(x+2z) - 2\varphi(x+z)\right] dz. \qquad (3.3)$$

После интегрирования по частям во втором члене он может быть записан в виде

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_{\mathcal{C}_{2\rho}} L_{\rho j}(z)\big[\varphi(x+z)-\varphi(x)\big]\,dz, \tag{3.4}$$

где

$$L_{\rho j}(z)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\partial K_\rho(y)}{\partial y_j}\bigg|_{y=\frac{z}{2}}-2\frac{\partial K_\rho(z)}{\partial z_j}.$$

Так как

$$\mid L_{\rho j}(z)\mid\leqslant c|z|^{-1}$$

и

$$|\Delta^2(z)\psi(x)|=\left|2\int\limits_0^1 z\cdot(\nabla\psi(x+2z\lambda)-\nabla\psi(x+z\lambda))\,d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant c|z|^{1+\alpha}\big[\nabla\psi\big]_{\mathcal{G}}^{(\alpha)},$$

то из (3.3), (3.4) следует

$$|\varphi_{x_j}(x)|\leqslant c\left(\rho^{1+\alpha}\big[\,\varphi\big]_{\mathcal{G}}^{(2+\alpha)}+\rho^{\alpha-1}\big[\,\varphi\big]_{\mathcal{G}}^{(\alpha)}\right),\quad\forall\ \rho>0.$$

Положив здесь

$$\rho=\left(\big[\,\varphi\big]_{\mathcal{G}}^{(\alpha)}\right)^{1/2}\left(\big[\,\varphi\big]_{\mathcal{G}}^{(1+\alpha)}\right)^{-1/2},$$

получаем (3.1). Лемма доказана.

Следствие [7]. *Для всякой функции $u(x,t)$, $x\in\mathfrak{R}$, $t\in(0,T)$, такой, что $u(\,\cdot\,,t)\in C^{2+\alpha}(\mathfrak{R})$ и $u\in\mathcal{C}^{\alpha}(\mathfrak{R})$, справедливо неравенство*

$$\sup_{\mathfrak{R}}\big[u(x,\,\cdot\,)\big]_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\leqslant c\left(\sup_{t<T}\big[\,u(\,\cdot\,,t)\big]_{\mathfrak{R}}^{(2+\alpha)}+\sup_{t<T}\big[\,u_t(\,\cdot\,,t)\big]_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)}\right). \tag{3.5}$$

Действительно, полагая в (3.1)

$$\varphi=h^{-\frac{1+\alpha}{2}}(u(x,t+h)-u(x,t)),\qquad h<T-t,$$

и пользуясь элементарной оценкой

$$\big[\,u(\,\cdot\,,t+h)-u(\,\cdot\,,t)\big]_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)}\leqslant h\sup_{t<\tau<t+h}\big[\,u_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)},$$

а затем неравенством Юнга, получаем (3.5).

Точно так же, как в лемме 3.1, доказывается неравенство

$$\sup_{\mathfrak{R}} |D^2\varphi(x)| \leqslant c\left([\varphi]_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)}\right)^{\alpha/2}\left([\varphi]_{\mathfrak{R}}^{(2+\alpha)}\right)^{1-\alpha/2},$$

и из него следует

$$\sup_{\mathfrak{R}} \left[\, D^2u(x,\,\cdot\,)\right]_{(0,T)}^{(\alpha/2)} \leqslant c\left(\sup_{t<T}\left[\, u_t(\,\cdot\,,t)\right]_{\mathfrak{R}}^{(\alpha)} + \sup_{t<T}\left[\, u(\,\cdot\,,t)\right]_{\mathfrak{R}}^{(2+\alpha)}\right).$$

Обратимся к доказательству неравенств (2.12) для ядер (2.11) и к оценкам интегралов свертки с этими ядрами. Отметим, прежде всего, что при $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Re} s > 0$ функции $r(s,\xi) = \sqrt{s+\xi^2}$ и $\frac{r}{r+|\xi|}$ удовлетворяют очевидным неравенствам

$$c_1(|s|+|\xi|^2)^{1/2} \leqslant \operatorname{Re} r \leqslant |r| \leqslant c_2(|s|+|\xi|^2)^{1/2},$$

$$c_3 \leqslant \operatorname{Re}\frac{r}{r+|\xi|} \leqslant \left|\frac{r}{r+|\xi|}\right| \leqslant c_4,$$

которые влекут за собой оценки

$$\begin{gathered} c_5(|s|+|\xi|^2) \leqslant |M(s,\xi)| \leqslant c_6(|s|+|\xi|^2), \\ c_7(|s|+|\xi|^2)^{3/2} \leqslant |Q(s,\xi)| \leqslant c_8(|s|+|\xi|^2)^{3/2} \end{gathered} \tag{3.6}$$

для функций (2.5), (2.6). Эти оценки (может быть, с другими постоянными) сохраняются, если

$$\operatorname{Re} s \geqslant -\delta|\xi|^2 - \varkappa|\operatorname{Im} s| \tag{3.7}$$

и, более того, если переменные ξ_j считать комплексными, т.е. заменить их на

$$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j, \quad \eta_j,\ \xi_j \in \mathbb{R},$$

причем

$$|\eta| \leqslant \delta_1|\xi|, \tag{3.8}$$

где $\varkappa$, δ, δ_1 – достаточно малые положительные числа. При условиях (3.7), (3.8) функции r, M, Q являются аналитическими как по s, так и по ζ_j.

Докажем, например, оценку снизу (3.6) для $M(s,\xi)$ при условии (3.7). Она является очевидным следствием неравенства

$$\operatorname{Re} M(s,\xi) + \varkappa_1|\operatorname{Im} M(s,\xi)| \geqslant c(|s|+\xi^2), \quad \varkappa_1 > 0. \tag{3.9}$$

В качестве $\varkappa_1$ мы выберем малое число, большее, чем $\varkappa$. Тогда левая часть (3.9) оценится снизу через

$$\operatorname{Re} s + \varkappa_1 |\operatorname{Im} s| + 4\xi^2 \left(\operatorname{Re} \frac{r}{r + |\xi|} - \varkappa_1 \operatorname{Im} \frac{r}{r+|\xi|} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Re} s + \varkappa_1 |\operatorname{Im} s| + 4\xi^2 (c_3 - \varkappa_1 c_4) \geqslant c(|s| + |\xi|^2),$$

если δ и $\varkappa_1$ достаточно малы.

Оценка для функции

$$M(s,\zeta) = s + 4\langle \zeta \rangle^2 \frac{r(s,\zeta)}{r(s,\zeta) + \langle \zeta \rangle},$$

где $r(s,\zeta) = \sqrt{s + \langle \zeta \rangle^2}$, $\langle \zeta \rangle = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$, легко выводится при достаточно малом δ_1 из (3.6) и из неравенства

$$|M(s,\zeta) - M(s,\xi)| \leqslant c\delta_1 |\xi|^2.$$

Лемма 3.2. *Функция $U(x',t)$, преобразование Фурье–Лапласа которой имеет вид* (2.11)*, удовлетворяет неравенствам* (2.12)*, а если $t < 0$, то $U(x',t) = 0$.*

Доказательство. Для доказательства используется выход в комплексную плоскость по переменным s, ξ_1, ξ_2 в интегральном представлении для $U(x',t)$, идущий от ранней работы О. А. Ладыженской [9] и примененный многими авторами для оценок фундаментальных решений параболических уравнений и "ядер Пуассона", через которые выражаются решения параболических начально-краевых задач в полупространстве. Однако наличие сингулярности в точке $\zeta = 0$ у функции $\langle \zeta \rangle = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$ заставляет внести в этот прием некоторые изменения (см. также [10]), и в результате $D^k_{x'} U$ оцениваются через степенные функции $|x'|$, а не через экспоненциальные, как в параболической теории.

Воспользуемся леммой Жордана и запишем $U(x',t)$, $t > 0$, в виде

$$U(x',t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix'\cdot\xi}\, d\xi \int\limits_{l(a)} e^{st} \frac{q_2}{Q}\, ds$$

где $l(a) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = -\varkappa |\operatorname{Im} s| + a\}$, $a > 0$. Это возможно, т.к. функция q_2/Q убывает при $s \to \infty$, $\operatorname{Re} s \geqslant -\varkappa |\operatorname{Im} s|$. Введя новую переменную $s-\delta\xi^2$ вместо s, получим

$$U(x',t)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix'\cdot\xi-\delta|\xi|^2 t}\,d\xi\int\limits_{l(a)} e^{st}\frac{q_2(r',\xi,|\xi|)}{Q(r',|\xi|)}\,ds$$

где $r'=\sqrt{s+(1-\delta)\xi^2}$. Легко видеть, что функцию U можно дифференцировать по x' сколько угодно раз, причем

$$D^k_{x'}U(x',t)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix'\cdot\xi-\delta|\xi|^2 t}\,(i\xi)^k\,d\xi\int\limits_{l(a)} e^{st}\frac{q_2}{Q}\,ds=$$

$$=\frac{t^{-3/2-|k|/2}}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{iy'\cdot\xi-\delta|\xi|^2}\,(i\xi)^k\,d\xi\int\limits_{l(a)} e^{s}\frac{q_2}{Q}\,ds, \tag{3.10}$$

где $y'=\frac{x'}{\sqrt{t}}$, $(i\xi)^k=(i\xi_1)^{k_1}(i\xi_2)^{k_2}$.

В дальнейшем будем считать, что $y_1=y_2=|y_1|=|y_2|=\frac{|y|}{\sqrt{2}}$ (этому условию можно удовлетворить, сделав поворот координатных осей). Вследствие теоремы Коши и экспоненциального убывания подынтегрального выражения при $|\xi|\to\infty$, в (3.10) можно продеформировать контуры интегрирования по ξ_j, переведя $\mathbb{R}$ в контур $\zeta_j=\xi_j+i\delta_1|\xi_j|$, $\xi_j\in\mathbb{R}$, после чего эта формула приобретает вид

$$D^k_{x'}U(x',t)=t^{-\frac{3+|k|}{2}}\frac{1+\delta_1^2}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{iy'\cdot\xi-\frac{|y|}{\sqrt{2}}(|\xi_1|+|\xi_2|)-\delta\langle\zeta\rangle^2}(i\zeta)^k\,d\xi\times$$

$$\times\int\limits_{l(a)} e^{s}\frac{q_2(r'(\zeta,s),\zeta,\langle\zeta\rangle)}{Q(r'(\zeta,s),\langle\zeta\rangle)}\,ds,$$

где

$$r'(\zeta,s)=\sqrt{s+(1-\delta)\langle\zeta\rangle^2},\quad \zeta_j=\xi_j+i\delta_1|\xi_j|,\quad \langle\zeta\rangle=\Big(\sum_{j=1}^{2}\zeta_j^2\Big)^{1/2}.$$

Вследствие полученных выше оценок для Q, имеем

$$\left|\frac{q_2}{Q}\right|\leqslant\frac{c}{(|s|+|\zeta|^2)^{1/2}}\leqslant c(a),$$

а значит

$$|D^k_{x'}U(x',t)| \leqslant ct^{-\frac{3+|k|}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|y||\xi|}{\sqrt{2}}-\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}} |\xi|^k \, d\xi \int\limits_0^\infty e^{a-\varkappa r} \, dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{t^{\frac{3+|k|}{2}}(|y|+1)^{k+2}} \leqslant \frac{c}{t^{1/2}(|x|+\sqrt{t})^{k+2}},$$

что эквивалентно (2.12).

При $t<0$ можно заключить с помощью леммы Жордана, что

$$\int\limits_{\operatorname{Re} s=a} e^{st} \frac{q_2(r,\xi,|\xi|)}{Q} \, ds = 0,$$

а значит $U(x',t)=0$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $\varphi \in \widetilde{C}(0,T;C^l(\mathbb{R}^2))$, $l>0$ *и пусть* $\varphi = 0(|x'|)^{-\gamma}$, $\gamma>0$, *при больших* $|x'|$. *Тогда для потенциала*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} U(x'-y',t-\tau)\varphi(y',\tau) \, dy' \tag{3.11}$$

с ядром U, *определенным формулой* (2.11), *справедлива оценка*

$$\sup_{\tau<t} \big[\, u(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(l+1)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant c \sup_{\tau<t} \big[\,\varphi(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(l)}_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall\, t\in(0,T). \tag{3.12}$$

Доказательство. Оценка (2.12) влечет за собой

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} \big|\Delta^m_j(h)U(x',\tau)\big| \, dx' \leqslant ch, \quad \forall\, h>0, \quad m>1, \tag{3.13}$$

где

$$\Delta^m_j(h)U(x',\tau) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C^k_m U(x'+e_jh,\tau)$$

– конечная разность функции U по переменной x_j порядка m с шагом h, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. Как установлено К. К. Головкиным (см. [11, 12]), неравенство (3.12) вытекает из (3.13).

Рассмотрим, наконец, задачу Неймана для уравнения теплопроводности в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$:

$$
\begin{aligned}
&u_t - \nabla^2 u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t \in (0,T),\\
&u\big|_{t=0} = u_0(x),\\
&\frac{\partial u}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = d(x',t), \quad x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *При любых* $f \in \widetilde{C}(0,T;C^\alpha(\mathbb{R}^n_+))$, $\vec{u}_0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, $d \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T))$, *удовлетворяющих условию согласования*

$$
\frac{\partial u}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = d(x',0)
$$

задача (3.14) *имеет единственное решение* $u \in \widetilde{C}(0,T;C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n_+))$ *с* $u_t \in \widetilde{C}(0,T;C^\alpha(\mathbb{R}^n_+))$, *и*

$$
\sup_{\tau<t}\big[\,u_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+} + \sup_{\tau<t}\big[\,u(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+} \leqslant
$$

$$
\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\big[\,f(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+} + \big[\,u_0\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+} + \big[\,d\,\big]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}\right),
$$

$$
\forall\, t \in (0,T). \tag{3.15}
$$

Замечание. Оценка (3.15) является коэрцитивной в том смысле, что ее правая часть оценивается через левую с некоторым постоянным множителем. Подчеркнем еще раз, что задача Неймана была изучена в пространствах $\widetilde{C}(0,T;C^{2+\alpha}(\Omega))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в работе [7] А. Лунарди с помощью техники теории полугрупп.

Доказательство. Очевидно, что

$$
u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),
$$

где

$$
u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-\tau) f^*(y,\tau)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t) u_0^*(y)\,dy
$$

$$\Gamma(x,t)=(4\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

f^* и u_0^* – продолжения функций f и u_0 из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$, выполненные с сохранением класса, т.е. так, что

$$\left[\,f^*(\,\cdot\,,t)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}\leqslant c\left[\,f(\,\cdot\,,t)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+},\quad \left[\,u_0^*\right]^{(r+\alpha)}_{\mathbb{R}^n}\leqslant c\left[\,u_0\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+},\tag{3.16}$$

(см. по этому поводу [4]) и

$$u_2(x,t)=-2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x'-y',x_n,t-\tau)\left(d(y',\tau)-\frac{\partial u_1(y,\tau)}{\partial y_n}\bigg|_{y_n=0}\right)dy.$$

Вследствие оценок, полученных в §2 гл. IV книги [4],

$$\begin{aligned}&\sup_{\tau<t}\left[\,u_{1\tau}(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}+\sup_{\tau<t}\left[\,u_1(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n}\leqslant\\ &\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[\,f^*(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}+\left[\,u_0^*\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n}\right)\leqslant\\ &\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[\,f(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}+\left[\,u_0\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}\right),\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\tau<t}\left[\,u_{2\tau}(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}+\sup_{\tau<t}\left[\,u_2(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}\leqslant\left[\,u_2\right]^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^n_+\times(0,t)}\leqslant\\ &\leqslant c\left(\left[\,d\right]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}+\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}\right),\end{aligned}\tag{3.18}$$

и в силу следствия леммы 3.1

$$\begin{aligned}&\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0}\right]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,t)}\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left[\frac{\partial u_1(x,\,\cdot\,)}{\partial x_n}\right]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,t)}\leqslant\\ &\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[\,f(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}+\left[\,u_0\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+}\right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Сложив (3.17) и (3.18) и учтя (3.19), получим (3.15). Лемма доказана.

§4. Оценки решений задач (2.1) и (2.14)

Теперь мы можем получить оценки решений задач (2.1) и (2.14).

Теорема 4.1. *Пусть* $a_k(x', t)$ *– гладкие функции, убывающие степенным образом при* $|x'| \to \infty$ *и удовлетворяющие условиям*

$$a_j(x', 0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Решение задачи (2.1)*, построенное в* §2*, удовлетворяет при всех* $t > 0$ *неравенству*

$$\sup_{\tau<t} \left[\, \vec{v}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \left[\, \vec{v}(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \left[\, p(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{2} [a_j]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)} + \sup_{\tau<t} \left[\, a_3(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \right) \tag{4.1}$$

Доказательство. Оценим, прежде всего, функции π_j и $v_3(x', 0, t)$ (2.13). В силу леммы 3.3,

$$\sum_{j=1}^{2} \sup_{\tau<t} \left[\, \pi_j(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} + \sup_{\tau<t} \left[\, v_3(\,\cdot\,,0,\tau)\,\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=1}^{3} \sup_{\tau<t} \left[\, a_k(\,\cdot\,,\tau)\,\right]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}. \tag{4.2}$$

В дальнейшем нам понадобятся также оценки производных $\frac{\partial \pi_j}{\partial t}$, $\frac{\partial v_3(x',0,t)}{\partial t}$. После несложных вычислений нетрудно вывести из (2.10) соотношения

$$FL\frac{\partial \pi_j}{\partial t} = s\widetilde{\pi}_j = 2(r\widetilde{a}_j - i\xi_j\widetilde{a}_3) +$$

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{2} \frac{8r^2 i\xi_\gamma}{Q} i\xi_\gamma \widetilde{a}_j + 4i\xi_j \frac{r^2+\xi^2-2|\xi|r}{Q}|\xi|\widetilde{a}_3 \right),$$

$$FL\frac{\partial v_3(x',0,t)}{\partial t} = s\widetilde{v}_3\big|_{x_3=0} = -\sum_{j=1}^{2} i\xi_j\widetilde{a}_j - |\xi|\widetilde{a}_3 +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} i\xi_j\left(\frac{4|\xi|r+2(r^2-\xi^2)}{Q}|\xi|\widetilde{a}_j-\frac{4|\xi|r}{Q}i\xi_j\widetilde{a}_3\right),$$

откуда видно, что эти производные также выражаются через потенциалы типа (3.11), плотностями которых являются $\frac{\partial a_k}{\partial x_\gamma}$ или $A_k = F^{-1}L^{-1}|\xi|\widetilde{a}_k$. Но A_k являются граничными значениями производных гармонических функций:

$$A_k(x',t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x'-y',x_3)a_k(y',t)\,dy'\big|_{x_3=0}$$

и поэтому, вследствие влассической оценки теории потенциала,

$$\big[\,A_k(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant c\big[\,a_k(\,\cdot\,,t)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}. \tag{4.3}$$

Точно так же для функции

$$B_j(x',t) = F^{-1}L^{-1}r\widetilde{a}_j =$$

$$= 2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma(x'-y',x_3,t-\tau)a_j(y',\tau)dy\big|_{x_3=0}$$

справедливо неравенство

$$\sup_{\tau<t}\big[\,B_j(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant c\big[\,a_j\,\big]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)} \tag{4.4}$$

являющиеся следствием оценок теплового потенциала простого слоя (см. [4], гл. IV). Пользуясь оценками (4.3), (4.4) и привлекая опять лемму 3.3, получаем

$$\sup_{\tau<t}\left[\frac{\partial v_3(\,\cdot\,,0,\tau)}{\partial\tau}\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\tau<t}\left[\frac{\partial\pi_j(\,\cdot\,,\tau)}{\partial\tau}\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{2}\big[\,a_j\,\big]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}+\sup_{\tau<t}\big[\,a_3(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\right). \tag{4.5}$$

Теперь мы оценим функции $\vec{v}$ и p, рассмотрев их как решения задач (2.7) и (2.8). Вследствие теоремы 3.1 и классических оценок гармонических функций,

$$\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{v}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{v}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\big[\,p(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant c\biggl(\sum_{j=1}^{2}\bigl[a_j\bigr]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,a_3(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\biggr)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\biggl[\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\biggr|_{x_3=0}\biggr]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}+\bigl[\,p_0\bigr]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}\biggr),$$

а из (2.9) и из следствия леммы 3.1 вытекает, что последние два члена в правой части не превосходят

$$c\biggl(\sup_{\tau<t}\bigl[\,v_{3\tau}(\,\cdot\,,0,\tau)\bigr]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,v_3(\,\cdot\,,0,\tau)\bigr]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\biggl(\sup_{\tau<t}\bigl[\,\pi_{j\tau}(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,\pi_j(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\biggr)\biggr).$$

Учитывая оценки (4.2) и (4.5), приходим к (4.1). Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\vec f$, g, $\vec v_0$, $\vec a$ – гладкие функции с компактными носителями, заданные при $t\in(0,T)$ и удовлетворяющие условиям согласования*

$$\nabla\cdot\vec v_0(x)=g(x,0),\quad \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_3}+\frac{\partial v_{03}}{\partial x_j}\biggr|_{x_3=0}=a_j(x'0),\quad j=1,2,\tag{4.6}$$

и, кроме того, пусть

$$g(x,t)=\nabla\cdot\vec h(x,0)+h_0(x,t),\tag{4.7}$$

где $\vec h$, h_0 – также гладкие финитные функции. Тогда задача (2.14) однозначно разрешима в классе функций, обладающих свойствами:

$$\vec v\in\widetilde C(0,T;C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3_+)),\quad \vec v_t\in\widetilde C(0,T;C^{\alpha}(\mathbb{R}^3_+)),\quad p\in\widetilde C(0,T;C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3_+)),$$

причем решение удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\tau<t}\bigl[\,\vec v_\tau(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,\vec v(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,p(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\biggl(\sup_{\tau<t}\bigl[\,\vec f(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,g(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\bigl[\,\vec h_\tau(\,\cdot\,,\tau)\bigr]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\tag{4.8}$$

$$+D^{1-\alpha}\sup_{\tau<t}\sup_{\mathbb{R}^3_+}|h_{0\tau}(x,\tau)|+\sum_{j=1}^{r}\bigl[a_j\bigr]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}+$$

$$+\sup_{\tau<t}\big[\,a_3(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+[v_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\Big),$$

где t – произвольное число из промежутка $(0,T)$ и $D=\operatorname{diam}\operatorname{supp}h_0$.

Доказательство. Получим оценку (4.8) для решения, построенного в §2. Предположим, что функции $\vec{f}^*$ и $\vec{v}_0^*$ в (2.15) являются продолжениями $\vec{f}$ и $\vec{v}_0$ в R^3 с сохранением класса, т.е. что

$$\big[\,\vec{f}^*(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3}\leqslant c\big[\,\vec{f}(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+},$$

$$\big[\,\vec{v}_0^*(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}\leqslant c\big[\,\vec{v}_0(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}.$$

Тогда, как и в теореме 3.1, будем иметь

$$\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{v}_\tau^{(1)}(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{v}^{\,(1)}(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{f}(\,\cdot\,,\tau)\,\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\big[\,\vec{v}_0\,\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\Big). \tag{4.9}$$

Далее, вследствие соотношений (2.18) и (2.19), имеем при любом фиксированном t

$$\big[\,\vec{v}^{\,(2)}(\,\cdot\,,t)\,\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant c\Big(\big[\,g(\,\cdot\,,t)\,\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\big[\,\nabla\cdot\vec{v}^{\,(1)}(\,\cdot\,,t)\,\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\Big).$$

Дифференцируя (2.16) по t и пользуясь (4.7), получим

$$\vec{v}_t^{(2)}(x,t)=\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\big(E(x-y)-E(x-y^*)\big)\big(h_{jt}(y,t)-v_{jt}^{(1)}(y,t)\big)\,dy+$$

$$+\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial}{\partial x_3}\big(E(x-y)+E(x-y^*)\big)\big(h_{3t}(y,t)-v_{3t}^{(1)}(y,t)\big)\,dy+\vec{w}, \tag{4.10}$$

$$\vec{w}(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\nabla\big(E(x-y)-E(x-y^*)\big)h_{0_t}(y,t)\,dy.$$

Для функции $\vec{w}$ справедлива элементарная оценка

$$\big[\,\vec{w}\,(\,\cdot\,,t)\,\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant\sup_{\mathbb{R}^3_+}|h_{0_t}(y,t)|\sup_{x,z\in\mathbb{R}^3_+}|x-z|^{-\alpha}\times$$

$$\times \int\limits_{\operatorname{supp} h_0} \Big| \nabla_x \big(E(z-y) - E(z-y^*)\big) - \nabla_z \big(E(x-y) - E(x-y^*)\big) \Big| dy \leqslant$$

$$\leqslant c D^{1-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^3_+} |h_{0_t}(y,t)|.$$

Остальные члены в (4.10) являются линейыми комбинациями вторых производных решений задач Дирихле и Неймана для уравнений

$$\nabla^2 \psi_k = h_{kt} - \vec{v}^{(1)}_{kt} \quad x \in \mathbb{R}^3_+$$

с однородными краевыми условиями при $x_3 = 0$, и для них справедливы классические шаудеровские оценки. Таким образом,

$$\sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{(2)}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{\,(2)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, p^{(2)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant c \Big(\sup_{\tau<t} \big[\, g(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{h}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + D^{1-\alpha} \sup_{\tau<t} \sup_{\mathbb{R}^3_+} |h_{0t}(x,\tau)| +$$

$$+ \sup_{\tau<t} \big[\vec{v}^{(1)}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{(1)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \Big). \tag{4.11}$$

Наконец, в силу теоремы 4.1 и следствия леммы 3.1,

$$\sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{(3)}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{\,(3)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, p^{(3)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant c \Big(\sum_{j=1}^{2} \big[a_j\big]^{(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2 \times (0,t)} + \sup_{\tau<t} \big[\, a_3(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} +$$

$$+ \sup_{\tau<t} \big[\vec{v}^{(1)}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{(1)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \tag{4.12}$$

$$+ \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{(2)}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, \vec{v}^{\,(2)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \big[\, p^{(2)}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \Big).$$

Оценка (4.8) вытекает из неравенств (4.9), (4.11), (4.12).

Докажем единственность построенного решения.

Пусть $\vec{w} \in \widetilde{C}(0,T; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3_+))$, $s \in \widetilde{C}(0,T; C^{\alpha+1}(\mathbb{R}^3_+))$ – решение однородной задачи, причем $\vec{w}_\tau \in \widetilde{C}(0,T; C^{\alpha}(\mathbb{R}^3_+))$. Тогда $\vec{w}\zeta_R(x) \equiv \vec{W}_R$, $s\zeta_R(x) \equiv S_R$, где $\zeta_R(x)$ – та же функция, что в лемме 3.1, удовлетворяет соотношениям

$$\vec{W}_{Rt} - \nabla^2 \vec{W}_R + \nabla S_R = -2\nabla\zeta_R \nabla\vec{w} - \vec{w}\nabla^2\zeta_R + s\nabla\zeta_R = \vec{f}_R,$$

$$\nabla\cdot\vec{W}_R=\nabla\zeta_R\cdot\vec{w}=g_R,$$

$$\frac{\partial W_{R3}}{\partial x_j}+\frac{\partial W_{Rj}}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=w_3\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_j}+w_j\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=a_{jR},$$

$$-S_R+2\frac{\partial W_{R3}}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=2w_3\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=a_{3R}.$$

Так как $\vec{W}_R$, S_R, $\vec{f}_R$, g_R, a_{kR} финитны, то $\vec{W}_R$, S_R выражаются через $\vec{f}_R$, $\vec{g}_R$, $\vec{a}_R$ так, как в §2, и мы можем применить оценку (4.8). Принимая во внимание ограниченность $\vec{w}$, s, $\vec{w}_{x_k}$, получаем

$$\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{W}_{R\tau}(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\big[\,\vec{W}_R(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{\tau<t}\big[\,S_R(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant cR^{-\alpha}.$$

Устремив R к бесконечности, заключаем, что $\vec{w}=0$, $s=0$. Теорема доказана.

§5. Доказательство теоремы 1.1

Так как разрешимость задачи (1.1) при достаточно гладких $\vec{f}$, $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ установлена в [2], мы ограничимся доказательством оценки (1.3). Следуя методу Шаудера, мы оценим решение вблизи произвольной точки $x_0\in\Gamma$. Будем считать, что $x_0=0$, а ось x_3 направлена вдоль $-\vec{n}(x_0)$ (этого можно достигнуть сдвигом и поворотом координатных осей). Пусть

$$x_3=\Phi(x'),\qquad |x'|\leqslant d$$

– уравнение Γ вблизи точки $x_0=0$, так что

$$\vec{n}(x)=\left(\frac{\Phi_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}},\frac{\Phi_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\right).$$

Так как $\Gamma\in C^{2+\alpha}$, то $\Phi\in C^{2+\alpha}(K_d)$, $K_d=\{|x'|<d\}$. Введем новые независимые переменные

$$y_1,=x_2,\qquad y_2=x_2,\qquad y_3=x_3-\Phi(x'),\qquad x'\in K_d,$$

и новые функции

$$\vec{u}(y,t)=\zeta_r(y)\vec{v},\qquad q=\zeta_r p,$$

где $\zeta_r(y)$ – та же самая функция, что в лемме 3.1. Вследствие (1.1), имеем

$$\vec{u}_t-\nabla^2\vec{u}+\nabla q=\zeta_r\vec{f}+\vec{f}\,'+m_1(\vec{u},q),$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=g\zeta_r+g'+m_2(\vec{u}),\quad \vec{u}\big|_{t=0}=\zeta_r\vec{v}_0,$$
$$S_{j3}(\vec{u})\big|_{y_3=0}=-(\zeta_r a_{\tau j}+a'_j)+m_{3j}(\vec{u}),\quad j=1,2, \tag{5.1}$$
$$T_{33}(\vec{u};q)\big|_{y_3=0}=\zeta_r(\vec{a}\cdot\vec{n})+a'_3+m_4(\vec{u}),$$

где $\vec{a}_\tau=\vec{a}-\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})$,

$$\vec{f}'=-2\widehat{\nabla}\vec{v}\,\nabla\zeta_r-\vec{v}\,\widehat{\nabla}^2\zeta_r+p\widehat{\nabla}\zeta_r,$$
$$g'=\vec{v}\cdot\widehat{\nabla}\zeta_r,$$
$$a'_j=\left(\frac{\partial\zeta_r}{\partial y_j}-\Phi_{y_j}\frac{\partial\zeta_r}{\partial y_3}\right)(\vec{v}\cdot\vec{n})+(\widehat{\nabla}\zeta_r\cdot\vec{n})v_j-2n_j(\widehat{\nabla}\zeta_r\cdot\vec{n})(\vec{v}\cdot\vec{n})\big|_{y_3=0},$$
$$j=1,2,$$
$$a'_3=2(\widehat{\nabla}\zeta_r\cdot\vec{n})(\vec{v}\cdot\vec{n})\big|_{y_3=0},$$
$$m_1(\vec{u},q)=(\widehat{\nabla}^{\,2}-\nabla^2)\vec{u}+(\nabla-\widehat{\nabla})q,$$
$$m_2(\vec{u})=(\nabla-\widehat{\nabla})\cdot\vec{u},$$
$$m_{3j}(\vec{u})=\Big(S_{j3}(\vec{u})+(\widehat{S}(\vec{u})\vec{n})_j\Big)-n_j(\vec{n}\cdot\widehat{S}(\vec{u})\vec{n})\Big|_{y_3=0},$$
$$m_4(\vec{u})=S_{33}(\vec{u})-\vec{n}\cdot S(\vec{u})\vec{n}\Big|_{y_3=0},$$
$$\widehat{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\Phi_{y_1}\frac{\partial}{\partial y_3},\frac{\partial}{\partial y_2}-\Phi_{y_2}\frac{\partial}{\partial y_3},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)=\nabla-\nabla\Phi\frac{\partial}{\partial y_3},$$

и, наконец,

$$\widehat{S}(\vec{u})=(\widehat{\nabla}\vec{u})+(\widehat{\nabla}\vec{u})^T$$

– преобразованный тензор скоростей деформации. Рассмотрим (5.1) как краевую задачу типа (2.14) для $(\vec{u},q)$ в $\mathbb{R}^3_+$. Проверим условия теоремы 4.2, прежде всего, условие (4.7) для $\zeta_r g+g'+m_2(\vec{u})$. Имеем

$$m_2(\vec{u})=\frac{\partial M(\vec{u})}{\partial y_3},\quad g\zeta_r+g'=\nabla\cdot\zeta_r\vec{H}+H_0,$$

где

$$M(\vec{u})=\Phi_{y_1}u_1+\Phi_{y_2}u_2,$$

$$\vec{H}=(h_1,h_2,h_3-\Phi_{y_1}h_1-\Phi_{y_2}h_2),\quad H_0=-\widehat{\nabla}\zeta_r\cdot\vec{h}+\zeta_r h_0+\widehat{\nabla}\zeta_r\cdot\vec{v}.$$

Условия согласования (4.6) следуют из (1.2), т.к.

$$\nabla\zeta_r\cdot\vec{v}_0-(g\zeta_r+g')\big|_{t=0}-m_2(\vec{v}_0\zeta_r)=$$

$$= \nabla \cdot \zeta_r \vec{v}_0 - \zeta_r \widehat{\nabla} \cdot \vec{v}_0 - \vec{v}_0 \cdot \widehat{\nabla} \zeta_r - (\nabla - \widehat{\nabla}) \cdot \zeta_r \vec{v}_0 = 0,$$

$$S_{j3}(\vec{v}_0 \zeta_r)\big|_{y_3=0} + (\zeta_r\, a_{\tau j} + a'_j)\big|_{t=0} - m_{3j}(\zeta_r \vec{v}_0) =$$

$$= -\zeta_r (\widehat{S}(\vec{v}_0)\vec{n})_{\tau j} + \zeta_r\, a_{\tau j}\big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, можно воспользоваться оценкой (4.8) и получить

$$\mathfrak{N}_t[\,\vec{u}, q\,] \equiv \sup_{\tau<t} [\,\vec{u}_\tau(\,\cdot\,,\tau)\,]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} [\,\vec{u}(\,\cdot\,,\tau)\,]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} [\,q(\,\cdot\,,\tau)\,]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\mathfrak{M}_t[\,\vec{u}, q\,] + \sup_{\tau<t} [\,\zeta_r\, \vec{f} + \vec{f}'\,]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} [\,\zeta_r\, g + g'\,]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} +$$

$$+ \sup_{\tau<t} [\,\zeta_r\, \vec{H}_t\,]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} \sup_{\mathbb{R}^3_+} \big|H_{0t}(x',t)\big| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} [\,a_{\tau j}\zeta_r + a'_j\,]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)} + \sup_{\tau<t} [\,\zeta_r\, \vec{a}\cdot\vec{n} + a'_3\,]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\Big), \qquad (5.2)$$

где

$$\mathfrak{M}_t[\,\vec{u}, q\,] = \sup_{\tau<t} [\,m_1(\vec{u}, q)\,]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{\tau<t} [\,m_2(\vec{u})\,]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} +$$

$$+ \sup_{\tau<t} [\,M(\vec{u}_t)\,]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sum_{j=1}^{2} [\,m_{3j}(\vec{u})\,]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)} + \sup_{\tau<t} [\,m_4(\vec{u})\,]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \leqslant$$

$$\leqslant cr\mathfrak{N}_t(\vec{u}, q) + c\Big(\sup_{\tau<t}\sup_{\mathbb{R}^3_+} |\vec{u}_\tau(y,\tau)| + \sup_{\tau<t}\sup_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla q(y,\tau)| +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|j|\leqslant 2} \sup_{\tau<t}\sup_{\mathbb{R}^3_+} |D^j\, \vec{u}(y,t)|\Big),$$

поскольку старшие коэффициенты операторов $\vec{m}_1(\vec{u}, q)$, $m_2(\vec{u})$, $m_{3j}(\vec{u})$, $m_4(\vec{u})$, $M(\vec{u}_t)$ содержат в качестве множителя производные Φ_{y_j}, $j = 1, 2$, и не превосходят $c|y|$ вблизи начала координат.

Выражения $\vec{f}\,'$, g', a'_j, a'_3 не содержат старших производных $\vec{v}$ и p, поэтому (5.2) влечет за собой

$$\mathfrak{N}_t[\vec{u}, q] \leqslant c\mathcal{F}_t + c(r)\Big(\sup_{\tau<t}\sup_{\Omega} |\vec{v}_\tau(x,\tau)| + \sum_{0\leqslant|j|\leqslant 2} \sup_{\tau<t}\sup_{\Omega} |D^j\, \vec{v}(x,t)| +$$

$$+ \sup_{\tau<t}\sup_{\Omega} |\nabla p(x,\tau)| + \sup_{\tau<t}\sup_{\Omega} |p(x,\tau)|\Big), \qquad (5.3)$$

если r достаточно мало.

Точка $x_0 \in \Gamma$ была выбрана произвольно; оценка, аналогичная (5.3), справедлива и при условии $\operatorname{dist}(x_0, \Gamma) > r/2$. Комбинация этих двух случаев дает оценку $(\vec{v}, p)$ во всей области Ω:

$$\mathfrak{N}_t[\vec{v}, p] \leqslant c\mathcal{F}_t + c \sum_{0\leqslant|j|\leqslant 2} \Big(\sup_{\tau<t} \sup_{\Omega} |D_x^j\, \vec{v}(x,t)| +$$

$$+ \sup_{\tau<t} \sup_{\Omega} |\nabla\, p(x,\tau)| + \sup_{\tau<t} \sup_{\Omega} |p(x,\tau)|\Big).$$

Функция $p(x,t)$, будучи решением задачи

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \vec{f} + \nabla^2 g - \nabla \cdot \vec{h}_t - h_{0t}, \quad x \in \Omega,$$
$$p\big|_\Gamma = 2\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\bigg|_{\vec{a}} - \vec{a} \cdot \vec{n},$$

удовлетворяет неравенству

$$\sup_\Omega |p(x,\tau)| \leqslant c\Big(\sup_\Omega |\vec{f}(x,\tau)| + \sup_\Omega |g(x,\tau)| + \sup_\Omega |\vec{h}_\tau(x,\tau)| +$$

$$+ \sup_\Omega |h_{0\tau}(x,\tau)| + \sup_\Gamma \left|\frac{\partial \vec{v}(x,\tau)}{\partial n}\right| + \sup_\Gamma |\,\vec{a} \cdot \vec{n}\,|\Big)$$

(см., например, [1], лемма 5.1), а $\nabla p(x,\tau)$ и $D_x^j \vec{v}(x,\tau)$, $|j| \leqslant 2$, могут быть оценены с помощью интерполяционных неравенств:

$$\sup_\Omega |\nabla p(x,\tau)| \leqslant \varepsilon |p(\,\cdot\,,\tau)|_{C^{1+\alpha}(\Omega)} + c(\varepsilon) \sup_\Omega |p(x,\tau)|,$$

$$\sum_{0\leqslant|j|\leqslant 2} \sup_\Omega |D_x^j \vec{v}(x,\tau)| \leqslant \varepsilon |\vec{v}(\,\cdot\,,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + c(\varepsilon) \sup_\Omega |\vec{v}(x,\tau)|.$$

Объединяя все эти оценки, получаем

$$N_t[\,\vec{v}, p] \leqslant c\Big(\mathcal{F}_t + \sup_{\tau<t} \sup_\Omega |\vec{v}(x,\tau)|\Big) \leqslant c\Big(\mathcal{F}_t + \sup_\Omega |\vec{v}_0(x)| + \int_0^t \mathcal{N}_\tau[v,p]\, d\tau\Big)$$

и после применения леммы Гроуолла приходим к (1.3).

Литература

1. В. А. Солонников, *Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 178–254.
2. В. А. Солонников, *О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **69** (1977), 200–218.
3. G. Grubb, *Initial-value problems for the Navier–Stokes equations with Neumann conditions. The Navier–Stokes equations. II – Theory and numerical methods..* Proceedings, Oberwolfach 1991. J. Heywood, K. Masuda, R. Rautmann, V. Solonnikov (eds.) in: Lecture Notes in Mathematics, 1530, Springer (1992), pp. 263–283.
4. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, Москва (1967).
5. С. Н. Кружков, А. Кастро, М. Лопес, *Оценки шаудеровского типа и теоремы существования решений основных задач для линейных и нелинейных параболических уравнений.* — ДАН СССР **220** (1975), 277–280.
6. M. López Morales, *Primer problema de contorno para ecuaciones parabolicas lineales y no lineales.* — Revista Ciencias Matemáticas **13, No. 1** (1992), 3–20.
7. A. Lunardi, *Maximal space regularity in nonhomogeneous initial boundary value parabolic problem.* — Num. Funct. Anal. Optim. **10** (1989), 323–349.
8. D. Guidetti, *Optimal regularity for mixed parabolic problems in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables.* University of Bologna, Preprint No. 19 (1995).
9. О. А. Ладыженская, *О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения.* — Матем. сб. **27** (1950), 175–184.
10. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевых условиях.* — Алгебра и анализ **6**, No. 6 (1994), 30–50.
11. К. К. Головкин, *О некоторых условиях гладкости функции многих переменных и об оценках операторов свертки.* — ДАН СССР **139** (1961), 524–527.
12. К. К. Головкин, *Об эквивалентных нормировках дробных пространств.* — Труды МИАН **66** (1962), 364–383.

Solonnikov V. A. Estimates of solutions of the second initial-boundary problem for the Stokes system in the spaces of functions with Hölder continuous derivatives with respect to spatial variables.

It is known that the solutions of parabolic initial boundary-value problems can be estimates in the Hölder norms with respect to the spatial variables for any fixed positive value of time in terms of similar norms of the data. We obtain estimate of this type for the solutions on nonstationary Stokes equations with stresses prescribed on the boundary.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 декабря 1998 г.