Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1998 г.

Р. С. Сакс

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ОБОБЩЕННО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И МЕТОДЕ ГАУССА

В этой статье изучается класс операторов, допускающих эллиптическую факторизацию своей доминантной части в некоторой области $U \subset T'(X)$. Этот класс обозначается $EFL^0(U)$. Он возникает при микролокализации понятия обобщенной эллиптичности, которое рассмотрено в работе автора [2].

Приведем краткое содержание статьи.

В п. 1 приводится определение класса $EFL^0(U)$. Операторы из этого класса имеют представление (1), в котором их доминантная часть является композицией микролокально эллиптических операторов нулевого порядка и диагональных операторов. По представлению (1) определяется целое число c. Согласно Утверждениям 1.1 и 1.2 это число не зависит от выбора представления (1) и неположительно для любого оператора A из класса $EFL^0(U)$.

В п. 2 рассматривается подкласс в $EFL^0(U)$, который обозначается как $BEL^0(U)$. Мы показываем, что этот подкласс совпадает с классом операторов, рассмотренных в работе [1] Б. Р. Вайнберга и В. В. Грушина. Операторы из этого подкласса они называют приводимыми к блочно эллиптическому виду. Для операторов S из $BEL^0(U)$ доказывается, что $c(S|U) \leqslant 0$.

В п. 3 мы выделяем в $EFL^0(U)$ еще два подкласса операторов, имеющих представление (1), векторы a_j из которых удовлетворяют либо условию (11), либо условию (12).

Согласно п. 5 объединение этих подклассов совпадает с классом $EFL^0(U)$, т.к. любое представление (1), не удовлетворяющее условиям (11) и (12), можно трансформировать в представление, удовлетворяющее одному из этих условий (Лемма 5, доказатель-

Работа выполнена при поддержке программы РФФИ “Научные школы”, грант No. 96-15-96121.

ство которой приведено в работе автора [2]). Это делается с помощью преобразований (16), введенных в п. 4.

В п. 6 мы приводим пример оператора (21) и показываем, что при условиях (20) он имеет представление (22) и, значит, принадлежит классу $EFL^0(U)$, где $U = T'(V)$. Представление (22) замечательно тем, что его невозможно упростить на всей области U; для некоторых из ее подобластей это сделать можно. (Предложения 6.3 и 6.4). Кроме того, оно показывает, что оба подкласса, выделенные в п. 3 не пусты.

В п. 7 рассматривается подкласс операторов из $EFL^0(U)$, у которых полные символы каждого из операторов из композиционной части представления (1) не зависят от x в некоторой окрестности точки x_0. Согласно Лемме 7.1 для таких операторов число $c(A^0|U)$ является степенью старшей однородной (по ξ) части определителя *полного* символа оператора, которая не равна нулю. Откуда следует, что это число не положительно.

Кроме того, оператору A из $EFL^0(U)$ ставится в соответствие оператор A^z, из класса $EFL(U_0)$ полный символ которого не зависит от x в $V_0 \subset V$.

В п. 8 определяется оператор, который является аналогом матрицы элементарных преобразований числовых матриц. Он используется в дальнейшем при преобразованиях представления (1) оператора A из $EFL^0(U)$ в окрестности U_q заданной точки q из U к более простому виду.

Нас интересует вопрос о наиболее простом представлении (1) в окрестности U_q для оператора BAC, где операторы B и C варьируются в классе $EL^0(U_q)$. Для операторов A из класса $BEL^0(U)$ доминантная часть, согласно формуле (37), сводится к одному диагональному оператору.

Оказывается, что для операторов из полного класса $EFL^0(U)$ такого простого представления нет, но всегда есть представление вида (39) (Теорема 9.1).

Пример оператора (21) из пункта 6 показывает, что для некоторых операторов уменьшить число диагональных операторов в представлении (39) не возможно, а также, что возможность его упрощения зависит от выбора точки q из U.

Отметим, что Лемма 9.2 является аналогом известной теоремы из алгебры о разложении невырожденной числовой матрицы в произведением матриц трех видов: матрицы перестановки, нижнетреугольной матрицы с единицами на главной диагонали и верхнетреугольной (смотрите [5]).

В п. 10 рассматриваются матрицы B и N из $EL^0(U)$ для которых имеют место "перестановочные"соотношения (56), (57) и (59), (60) с диагональными операторами определенного вида.

В п. 11 и 12 приводится доказательство Теоремы 9.1.

В п. 13 указываются случаи, когда в представлении (39) можно уменьшить число диагональных операторов и когда этого сделать нельзя.

В п. 14 приводится определение обобщенной эллиптичности оператора.

И, наконец, в п. 15 приводится пример обобщенно эллиптического оператора на двумерной сфере. Доказывается, что он является фредгольмовым, так как его разрешимость эквивалентна разрешимости одного уравнения Фредгольма второго рода.

1. Мы начнем с операторов A^0 из класса $L^0(X; E, E)$ классических $(l \times l)$-матричных псевдодифференциальных операторов порядка не большего нуля. Здесь E — векторное пространство над X размерности l. Мы будем использовать обозначения из работы автора [2]. Определение ПДО и их свойства смотрите в книге Ф. Трева [4]. Сокращая обозначения будем писать $L^k(X)$ (и, соответственно, $L^k(U)$) вместо $L^k(X; E, E)$ (и $L^k(U; E, E)$). Пусть U — коническая область в $T'(X)$; в частности, U может совпадать со всем $T'(X)$.

Напомним, что оператор A^0 принадлежит классу $EL^0(U)$, если его главный символ $\sigma_0(A^0)$ представляет собой невырожденную в U матрицу. Ниже мы используем фиксированный оператор λ из класса $el_1(X)$ с главным символом $\sigma_1(\lambda) = |\xi|$, его параметрикс $\lambda^{-1} \in el_{-1}(X)$ и их степени, из которых строится диагональный оператор $J_s = (\lambda^{s_i}\delta_{ij})$, соответствующий вектору s с целочисленными компонентами s_i.

Определение. *Оператор A^0 из $L^0(X)$ допускает эллиптическую в области U факторизацию доминантной части, если существуют векторы a_j из $\mathbb{Z}^l$ и найдутся операторы A_j из $EL^0(U)$ и T из $L^{-\infty}(U)$ такие, что*

$$A^0 = J_{a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1 + T, \quad r < \infty, \tag{1}$$

где J_{a_j} – диагональные операторы, соответствующие векторам a_j,

$1 \leqslant j \leqslant r$.[1]

Множество таких операторов обозначим $EFL^0(U)$.

Очевидно, что $EL^0(U) \subset EFL^0(U)$.

Представлению (1) сопоставим целое число c, равное сумме всех компонент всех векторов a_j, т.е. $c = \sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle$, где $\langle a_j \rangle$ это сумма компонент вектора a_j. В частности, оператору A^0 из $EL^0(U)$ сопоставим число c равное нулю.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1.1. *Если A^0 принадлежит $EFL^0(U)$ и вместе с представлением (1) имеет другое представление, скажем,*

$$A^0 = B_p J_{b_p} \dots B_1 J_{b_1} + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U), \tag{2}$$

где $b_k \in \mathbb{Z}^l$, $B_k \in EL^0(U)$, то

$$\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle b_k \rangle. \tag{3}$$

Благодаря этому утверждению каждому оператору A^0 из класса $EFL^0(U)$ соответствует число c $(A^0|U)$ равное числу (3) в любом из его представлений,

$$c(A^0|U) = \sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle. \tag{4}$$

Утверждение 1.2. *Если оператор A из $EFL^0(U)$ имеет представление (1), то $\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle \leqslant 0$.*

В работе автора [2] доказано, что утверждение 1.1 вытекает из утверждения 1.2, и, что последнее утверждение имеет место для различных подклассов из $EFL^0(U)$.

2. Отметим, что операторы S^0 из $L^0(X)$, приводимые с помощью матриц B_1 и B_2 из $EL^0(U_1)$ к блочно эллиптическим в U_1 матрицам H (см. [1]),

$$B_1 S^0 B_2 = H, \tag{5}$$

---

[1] Число диагональных операторов J_{a_j} и эллиптических нулевого порядка A_i может различаться на единицу. Нам удобно зафиксировать представление (1), полагая $A_1 = I$, если композиция начинается с диагонального оператора, и $a_r = 0$, если она оканчивается на A_r.

принадлежат классу $EFL^0(U)$ в любой области $U \Subset U_1$, и могут быть представлены в виде

$$S^0 = A_2 J_{-a} A_1 + T, \quad A_j \in EL^0(U),\ j = 1, 2, \quad T \in L^{-\infty}(U), \tag{6}$$

где вектор a определяется порядками $(-k)$ и размерами t_k эллиптических в H блоков H_k и их числом $p+1$:

$$a = -(\bar{0}_{t_0}, (-\bar{1})_{t_1}, \ldots, (-\bar{p})_{t_p}) \in \mathbb{Z}^l_+.$$

Поэтому для S^0 число

$$c(S^0 \big| U) = -\langle a \rangle = -\sum_{k=0}^{p} k t_k \leqslant 0. \tag{7}$$

Представление (6) легко получить из (5), если воспользоваться параметриксами B_1^L и B_2^R из класса $EL^0(U)$ и представлением для H вида

$$H = H^0 J_{-a} + T_1, \quad H^0 \in EL^0(U_1), \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_1). \tag{8}$$

Обратно, любой оператор S^0 из $L^0(X)$, имеющий представление (6) приводим в $U' \Subset U$ к оператору вида $J_{-a} + T_2$,

$$A_1^L S^0 A_2^R = J_{-a} + T_2, \quad A_1^L \text{ и } A_2^R \in EL^0(U'), \quad T_2 \in L^{-\infty}(U'), \tag{9}$$

который является частным случаем блочно-эллиптического оператора. Так как $A_1^L S^0 A_2^R \in L^0(U')$, то вектор $(-a)$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$, т. е. его компоненты неположительны.

Подкласс операторов из $EFL^0(U)$, имеющих представление (6) обозначим $BEL^0(U)$. Матрицы S^0 из $EL^0(U)$ принадлежат этому подклассу ($A_2 = I$, $a = 0$, $T = 0$ в (6)). Если же $S^0 \in BEL^0(U) \backslash EL^0(U)$, то вектор $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}^l_+$, и, следовательно, число $c(S^0(U)) \equiv -\langle a \rangle$ меньше нуля.

В работе [2] доказано следующее

Предложение 2.1. *Если оператор S^0 из $BEL^0(U)$ имеет наряду с представлением (6) другое представление того же вида*

$$S^0 = B_2 J_{-b} B_1 + T_1, \quad B_j \in EL^0(U), \quad T \in L^{-\infty}(U) \tag{10}$$

и компоненты векторов a и b упорядочены по возрастанию, то векторы a и b совпадают ($a = b$).

Это утверждение эквивалентно Лемме 1 из работы Вайнберга и Грушина [1].

3. Пусть оператор A^0 принадлежит классу $EFL^0(U)$ и имеет представление (1). Выделим два важных случая

$$a) \text{ когда в (1) все векторы } a_j \text{ принадлежат } \mathbb{Z}^l_-, \tag{11}$$

$$\text{б) когда } a_r \in \mathbb{Z}^l_+, \text{ а остальные } a_j \in \mathbb{Z}^l_-,\ j = 1, \dots, r-1. \tag{12}$$

Если векторы a_j в (1) не удовлетворяют условиям а) или б), то мы трансформируем представление (1) к одному из этих случаев, используя некоторые "канонические" преобразования, которые мы сейчас опишем.

4. Положим

$$\widetilde{A}^n_j = J_{-\bar{n}} A_j J_{\bar{n}} = \lambda^{-n} A_j \lambda^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Из формул для главного символа композиции вытекает, что операторы A_j и $\widetilde{A}^n_j$ имеют одинаковые главные символы. Действительно, $\sigma_n(\lambda^n) = |\xi|^n$, поэтому

$$\sigma_0(\widetilde{A}^n_j) = \sigma_{-n}(\lambda^{-n})\sigma_0(A_j)\sigma_n(\lambda^n) = \\ = |\xi|^{-n}\sigma_0(A_j)|\xi|^n = \sigma_0(A_j). \tag{14}$$

Таким образом,

$$A_j \in EL^0(U) \Leftrightarrow \widetilde{A}^n_j \in EL^0(U) \tag{15}$$

и операторы A_j выражаются через $\widetilde{A}^n_j$ по формулам

$$A_j = J_{\bar{n}} \widetilde{A}^n_j J_{-\bar{n}} + T_n, \quad T_n \in L^{-\infty}(X). \tag{16}$$

Простейшее и самое общее из преобразований представления (1) оператора A^0 состоит в том, что в (1) мы заменяем один или несколько из операторов A_j правой частью равенства (16); а затем перегруппировываем полученное выражение. В итоге получаем выражение того же вида. Например, при $r > 2$ в (1) заменяя A_2, имеем

$$A^0 = J_{a_r} A_r \dots J_{a_2}(J_{\bar{n}} \widetilde{A}_2 J_{-\bar{n}} + T_n) J_{a_1} A_1 + T = \\ = J_{a_r} A_r \dots J_{a_2 + \bar{n}} \widetilde{A}_2 J_{a_1 - \bar{n}} A_1 + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U). \tag{17}$$

Мы получили представление, которое отличается от (1) тем, что при $n > 0$ компоненты вектора a_1 уменьшились на n единиц, а компоненты вектора a_2 на столько же единиц увеличились.

5. Имеет место следующая

Лемма 5.1. *Пусть векторы a_j в представлении* (1) *оператора A^0 не удовлетворяют включениям* (11) *или* (12). *Тогда преобразованиями* (16) *можно получить представление вида*

$$A^0 = J_{b_r} B_r \dots J_{b_1} B_1 + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U), \tag{18}$$

в котором векторы b_j удовлетворяют условиям (11) *или* (12), *а матрицы B_j принадлежат $EL^0(U)$; более того, $\sigma_0(B_j) = \sigma_0(A_j)$ и*

$$\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle = \sum_{j=1}^{r} \langle b_j \rangle. \tag{19}$$

Доказательство этой леммы смотрите в работе автора [2].

6. Мы скажем, что представление (1) оператора A из $EFL^0(U)$ можно упростить, если для него существует представление (2) с меньшим числом диагональных операторов, чем в (1).

Покажем на примере, что в классе $EFL^0(U)$ имеются операторы, у которых представление (1) нельзя упростить во всей области U. В тоже время в U можно выделить подобласти, где это сделать можно.

Пусть V — связная координатная окрестность, которая гладкой поверхностью (линией при $n = 2$) $\mathcal{P}$ разделена на две подобласти V_1 и V_2. Пусть заданы две функции $a_j(x) \in C^\infty(X)$ такие, что

$$a_j(x) \neq 0 \text{ в } V_j \text{ и } a_1(x) \cdot a_2(x) \equiv 0 \text{ в } V. \tag{20}$$

Рассмотрим матричный оператор A вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & a_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

где a_j — операторы умножения на функции $a_j(x)$, λ^{-1} — параметрикс оператора $\lambda \in el_1(X)$, т. е. такой оператор, что $\lambda^{-1}\lambda - 1 \equiv \tau_{-1,1}$ и $\lambda \cdot \lambda^{-1} - 1 \equiv \tau_{1,-1}$ принадлежат $l_{-\infty}(X)$. Имеет место следующее

Предложение 6.1. *При условии* (20) *в области $U = T'(V)$ оператор* (21) *принадлежит классу $EFL^0(U)$, так как он имеет представление*

$$A = J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + T, \tag{22}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} a_1\tau_{1,-1} & a_1\lambda a_2 \\ \lambda^{-1}\tau_{1,-1} & \tau_{-1,1}a_2 \end{pmatrix} \text{ и } T \in L^{-\infty}(U). \tag{23}$$

Доказательство. Соотношение (22) проверяется перемножением матриц. Все элементы матрицы T, кроме $a_1\lambda a_2$, принадлежат $l_{-\infty}(X)$; элемент $a_1\lambda a_2$ принадлежит $l_{-\infty}(U)$ потому, что носители функций a_1 и $a_2(x)$ не имеют внутренних точек пересечения.

Замечание 6.2. Из соотношений (21)–(23) видно, что Предложение 6.1 останется в силе и тогда, когда в матрице (21) a_j любые операторы из $l_0(X)$, удовлетворяющие условию

$$a_1\lambda a_2 \in l_{-\infty}(U), \quad U \subset T'(X), \tag{20$'$}$$

в некоторой конической области U из $T'(X)$.

Однако, для наглядности нам достаточно простой ситуации, когда a_j — это операторы умножения на функции, удовлетворяющие условию (20). Тогда $U = T'(V)$.

Имеет место

Предложение 6.3. *Пусть a_j удовлетворяют условиям* (20). *Тогда представление* (22) *оператора* (21) *нельзя упростить во всей области $U = T'(V)$. Это представление нельзя упростить также в любой (как угодно малой) окрестности U_q точки $q = (x_0, \xi_0)$, если x_0 принадлежит разделяющей поверхности $\mathcal{P}$, а $\xi_0 \neq 0$ любое.*

Доказательство. В представлении (22) оператора (21) можно выделить два окаймленных оператора

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \\ \widetilde{A}_2 &= J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Однако, ни один из них не принадлежит классу L^0 в $T'(V)$ или в U_q, если $x_0 \in \mathcal{P}$. Действительно, согласно (20) в любой окрестности точки $x_0 \in \mathcal{P}$ найдутся точки x' и x'', где $a_1(x') \neq 0$ и $a_2(x'') \neq 0$, соответственно. Следовательно, в любой окрестности U_q точки $q = (x_0, \xi_0)$ операторы $a_1\lambda$ и λa_2 имеют первый порядок.

Они являются элементами матриц $\widetilde{A}_j$ в (24), которые тем самым не принадлежит классу $L^0(U_q)$, а, значит, и классу $EL^0(U_q)$. Предложение доказано.

Замечание. Диагональные операторы в (22) заданы векторами $a_1 = (-1,0)$, $a_2 = (1,-1)$, $a_3 = (0,-1)$ (при нумерации справа налево), которые не удовлетворяют включениям (11) или (12). Согласно Лемме 5.1 заменой вида (13) представление (22) можно трансформировать в представление вида (18), в котором векторы $b_1 = (-1,0)$, $b_2 = (0,-2)$ и $b_3 = (1,0)$ удовлетворяют включениям (12), а именно,

$$A = J_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}\lambda^{-1}a_1\lambda & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1 & a_2\\ 0 & 1\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}} + T, \qquad (25)$$

где компоненты $t_{21} = t_{22} = 0$ в матрице T, а компоненты $t_{11} = a_1\tau_{1,-1} + \tau_{1,-1}a_1$, $t_{12} = \lambda\lambda^{-1}a_1\lambda a_2 + \tau_{1,-1}\lambda^{-1}$ принадлежат $l_{-\infty}(U)$, $U = T'(V)$.

Согласно Предложению 6.3 представления (22) и (25) оператора (21) нельзя упростить во всей области $U = T'(V)$, но в некоторых ее частях это сделать можно.

Предложение 6.4. *Если a_j удовлетворяют соотношениям (20), то в каждой из областей $T'(V_j)$, $j = 1, 2$, оператор (21) имеет представление (2) с двумя диагональными операторами. Так в области $U_1 = T'(V_1)$ оператор (21) имеет следующую факторизацию доминантной части*

$$A = J_{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}, \qquad (26)$$

в которой векторы $b_1 = b_2 = (0,-1)$ удовлетворяют условию (11).

Для любой области $W \Subset V_1$ оператор (21) принадлежит классу $BEL^0(U')$, где $U' = T'(W)$, так как он имеет представление

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda^{-1}a_1^L & \lambda^{-1}a_1^L\lambda\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}a_1 & \lambda^{-1}\\ 0 & -1\end{pmatrix} + T' \qquad (27)$$

с одним диагональным оператором, где $a_1^L = \psi(x)a_1^{-1}(x)$, а функция $\psi(x) \in C_0^\infty(V_1)$ такова, что $\psi \equiv 1$ на $W \subset V_1$. Матрица T' имеет *компоненты* $t'_{11} = t'_{12} = 0$, $t'_{21} = \lambda^{-1}(1-\psi)$ *и* $t'_{22} = a_2 + \lambda^{-1} a_1^L \tau_{-1,1} \lambda^{-1}$, *которые принадлежат* $l_{-\infty}(T'(W))$.

Доказательство. Соотношение (26) очевидно; функция $a_2(x)$ согласно (20) тождественно равна нулю на V_1, поэтому оператор $a_2 \in l_{-\infty}(T'(V_1))$. Соотношение (27) легко проверить, перемножив матрицы и прибавив T'. Оператор $\lambda^{-1} a_1^L \lambda$ принадлежит $el_0(T'(W))$ потому, что $\sigma_0(\lambda^{-1} a_1^L \lambda) = a_1^{-1}(x) \neq 0$ при $x \in W$ и любом $\xi \neq 0$. Принадлежность операторов t'_{21} и t'_{22} классу $l_{-\infty}(T'(W))$ очевидна. Предложение доказано.

Замечание. *Из доказательства предложения 6.4 видим, что, если* x_0 *— нуль функции* a_1 *(в любой окрестности которой найдутся точки* x *такие, что* $a_1(x) \neq 0$*), то представление* (26) *невозможно преобразовать в представление* (27).

7. Возвращаясь к представлению (1) оператора A из $EFL^0(U)$ и к определению числа $c(A|U)$, рассмотрим одну ситуацию, в которой проясняется смысл числа c и утверждения 1.2. Представление (1) запишем в виде

$$A = A^* + T, \qquad \text{где } A^* = J_{a_r} A_r \cdots J_{a_1} A_1 \tag{28}$$

и будем предполагать, что при $j < r$ векторы a_j имеют неположительные компоненты и их наибольшие компоненты $M(a_j) = 0$ (этого всегда можно добиться, согласно Лемме 5.1). Вектор a_r в (28) может иметь как положительные, так и отрицательные компоненты (как показывает пример оператора (21) и его представлений (22) и (25)). Кроме того, для определенности будем считать, что компоненты α_i^j векторов a_j упорядочены по убыванию. Этого всегда можно добиться, используя матрицы перестановки (смотрите ниже формулу (61)). Итак, без ограничения общности предполагаем, что

$$\alpha_1^j \geqslant \cdots \geqslant \alpha_l^j \qquad \forall j \in [1, r] \text{ и } \alpha_1^j = M(a_j) = 0 \text{ при } j < r. \tag{29}$$

Пусть $V_0 \subset V$ и $U_0 \subset V_0 \times \Gamma_0$ окрестности точек x_0 и (x_0, ξ_0) из V и U.

Лемма 7.1. *Предположим, что в области* V_0 *полные символы диагональных операторов и операторов* A_j *в представлении (28) оператора* A *не зависят от* x. *Тогда число* $c(A^0|U)$ *равняется степени старшей однородной (по* ξ*) части выражения* $\det \sigma(A)$, *—*

определителя полного символа оператора, которая не исчезает в U_0.

Если к тому же операторы a^*_{ij}, *составляющие матрицу* A^*, *коммутируют, то число* $c(A^0|U)$ *совпадает с порядком эллиптического в* U_0 *скалярного оператора* $\det A^*$.

Доказательство. В случае, когда полные символы операторов, составляющих композицию не зависят от x, согласно известным формулам для полного символа композиции операторов, перемножаются не только главные, но и полные символы скалярных, а, следовательно, и матричных операторов. Поэтому из условия леммы имеем

$$\sigma(A) = \sigma(A^*) = \sigma(J_{a_r})\sigma(A_r)\ldots\sigma(J_{a_1})\sigma(A_1) \text{ в } U_0. \tag{30}$$

Далее, определитель $\sigma(A)$ равен произведению определителей матриц, входящих в произведение (30). Старшие однородные по ξ части этих определителей обозначим знаком π. Так

$$\pi\det\sigma(J_{a_j}) = |\xi|^{\langle a_j\rangle}, \qquad \pi\det\sigma(A_j) = \det\sigma_0(A_j), \tag{31}$$

и все они отличны от нуля в G и в U_0. Поэтому

$$\pi\det\sigma(A) = |\xi|^c \bigcap_{j=1}^{r} \det\sigma_0(A_j) \neq 0 \text{ в } U_0, \tag{32}$$

где $c = \sum_{j=1}^{r}\langle a_j\rangle$.

Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение, очевидно, вытекает из первого. Лемма доказана.

Напомним, что каждый элемент матрицы A из $EFL^0(U)$ имеет порядок, не превосходящий нуля. Поэтому имеет место

Следствие 7.2. *Если оператор* A *из* $EFL^0(U)$ *удовлетворяет условиям леммы 7.1, то число* $c(A^0|U_0)$ *не превосходит нуля.*

Рассмотрим теперь операторы $\dot{A}_j$ и $\dot{J}_{a_i}$, полные символы которых образуются из полных символов операторов A_j и J_{a_j}, замораживанием их в точке $x_0 \in V_0$ и домножением на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $g(x)$, равную единице в окрестности точки x_0 и нулю в несколько большей ее окрестности.

Оператору A, имеющему представлению (28), сопоставим оператор

$$A^z = \dot{J}_{a_r}\dot{A}_r \dots \dot{J}_{a_1}\dot{A}_1. \tag{33}$$

По построению он удовлетворяет в U_0 условиям леммы 7.1 и его число $c(A^z|U_0)$ совпадает с числом $c(A|U)$,

$$c(A^z|U_0) = c(A|U_0).$$

Поэтому из леммы 7.1 вытекает

Следствие 7.3. *Число $c(A|U_0)$ совпадает со степенью по ξ старшей однородной части определителя полного символа оператора A^z, которая не исчезает в U_0.*

Замечание 7.4. *В классе $EFL(U)$ имеются операторы, у которых определитель полного символа самого оператора A (а не A^z) тождественно равен нулю в U.*

Приведем пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ba & b+1 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где a и b дифференциальные операторы порядков k и $m > 0$, соответственно, и оператор a эллиптичен в окрестности V точки x_0. Тогда определитель его полного символа равен

$$\det \sigma(A) = \sigma(a)\sigma(b) - \sigma(ba) + \sigma(a).$$

Пусть $a = \exp(x_1)\Delta$, $b = \partial_1$, где x_1 — первая координата точки x в локальной системе координат, b-дифференцирование вдоль этой координаты, а Δ-оператор Лапласа.

В этом случае, легко проверить, что $\det \sigma(A) \equiv 0$, а

$$\det \sigma(A^z) = \sigma(a) \neq 0 \quad \text{в} \quad T'(V).$$

8. Рассмотрим аналоги некоторых матриц, которые используются при преобразованиях числовых матриц (см., например, книгу С. Л. Соболева [3]).

Определение. Назовем *элементарной* квадратную матрицу, в которой на главной диагонали стоят единицы, а из остальных элементов отличны от нуля только те, что стоят на s-том столбце: его занимают операторы $p_i \in l_0(X)$, причем $p_s = 0$. Обозначим ее через Q_s.

Такую матрицу можно записать в виде:

$$Q_s = I_l + \mathbf{p}\mathbf{e}_s, \tag{35}$$

где $\mathbf{p}$ — вектор-столбец с компонентами p_i, $\mathbf{e}_s$ — s-тая строка единичной матрицы I_l. Причем $\mathbf{e}_s\mathbf{p} = 0$, так как $p_s = 0$.

Мы будем называть элементарными также транспонированные матрицы Q_s^T.

Всякая элементарная матрица Q_s имеет обратную Q_s^{-1}, которая имеет вид:

$$Q_s^{-1} = I_l - \mathbf{p}\mathbf{e}_s, \tag{35'}$$

что легко проверить непосредственно, перемножив матрицы и воспользовавшись соотношением $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p} = 0$. Следовательно, Q_s и Q_s^{-1} принадлежат классу $EL^0(X)$ и $\det \sigma_0(Q_s) = 1$ в $T'(X)$.

Если у вектора $\mathbf{p}$ компоненты $p_i = 0$ при $i \leqslant s$, то элементарная матрица Q_s имеет нижнетреугольный вид.

Пусть U — коническая область в $T'(X)$. Матрицу N с элементами $n_{ij} \in l_0(X)$ назовем нижнетреугольной в U, если все ее верхнедиагональные элементы n_{ij} (при $i < j$) принадлежат $l_{-\infty}(U)$. Легко убедиться, что всякая нижнетреугольная матрица N с элементами $n_{ii} = 1 + t_{ii}$, $t_{ii} \in l_{-\infty}(U)$, вдоль главной диагонали имеет представление:

$$N = Q_1 \dots Q_l + T, \quad T \in L^{-\infty}(U), \tag{36}$$

где Q_j — элементарные матрицы нижнетреугольного вида, $j = 1, \dots, l$ (их определяющие векторы $p^{(j)}$ имеют компоненты $p_i^{(j)}$, равные нулю при $i \leqslant j$, и $p_i^{(j)} = n_{ij}$ при $i > j$). Очевидно и обратное утверждение: композиция нижнетреугольных матриц Q_j вида (35) имеет в U нижнетреугольный вид, и ее диагональные элементы равны единице.

Умножение матричного оператора A на Q_s слева состоит в том, что к каждой строке матрицы A прибавляется произведение ее s-той строки на соответствующий "множитель" (для k-той строки "множителем" является оператор p_k, применяемый слева; поскольку $p_s = 0$, сама s-тая строка остается без изменения). Умножение A на Q_s^T справа сводится к аналогичной операции над столбцами матрицы A.

9. Для операторов из класса $BEL^0(U)$ имеет место представление (9), которое показывает, что любой оператор A из этого класса матрицами B и C из $EL^0(U_q)$ в окрестности U_q точки $q \in U$ можно привести к простейшему виду $J_{-a} + T$,

$$BAC = J_{-a} + T, \quad a \in \mathbb{Z}_+^l, \quad T \in L^{-\infty}(U_q). \tag{37}$$

Теперь мы рассмотрим вопрос об аналоге такого представления для операторов из класса $EFL^0(U)$, объемлющего $BEL^0(U)$, т. е. вопрос о простейшем из представлений вида (1) для оператора BAC, которое можно получить подбором матриц B и C в классе $EL^0(U_q)$ для некоторой окрестности точки q.

Пусть оператор A имеет представление (1).

Если разложение (1) содержит только один диагональный оператор (при $r = 1, 2$), то оно трансформируется в формулу (37). Поэтому мы предположим, что $r > 1$ и представление (1) преобразовано к виду:

$$A = J_a A_1 J_{-b_1} \cdots A_{r-1} J_{-b_{r-1}} A_r + T, \quad T \in L^{-\infty}(U), \tag{38}$$

причем компоненты векторов a и $-b_j$ упорядочены по убыванию, $-b_j \in \mathbb{Z}_-^l$, $j = 1, \ldots, r-1$ (подчеркнем, что вектор a может иметь компоненты разных знаков и нулевые, компоненты же векторов $-b_j$ — неположительны, их максимум равен нулю, а минимум меньше нуля).

Это возможно в силу леммы 5.1 (см. также формулу (28)).

Следующая теорема показывает, что преобразованиями B и C в разложении (38) можно упростить матрицы A_j, стоящие между диагональными операторами.

Теорема 9.1. *Пусть оператор A имеет в конической области U представление (38) и $q \in U$. Тогда существует окрестность U_q точки q и в классе $EL^0(U_q)$ можно найти матрицы B и C такие, что оператор BAC имеет вид*

$$BAC = J_a \Pi_1 N_1 J_{-b_1} \cdots \Pi_{r-1} N_{r-1} J_{-b_{r-1}} + T_1, \tag{39}$$

где Π_j — матрицы перестановки, а операторы N_j имеют нижнетреугольный вид с единицами на главной диагонали. Они являются *композициями (36) элементарных матриц Q_s нижнетреугольного вида (в частности, N_j также, как и Π_j, могут совпадать с единичной матрицей); $T_1 \in L^{-\infty}(U_q)$.*

Доказательство теоремы приводится в п. 12. Оно основано на следующей лемме и следствии из нее — предложении 11.1.

Лемма 9.2. *Любая матрица C из класса $EL^0(U)$ в окрестности точки $q \in U$ может быть представлена в виде композиции*

$$C = \Pi N B, \tag{40}$$

где Π — матрица перестановки, N — нижнетреугольная матрица с единицами вдоль главной диагонали, B — верхнетреугольная в U_q матрица с элементами из класса $el_0(U_q)$ вдоль главной диагонали; наконец, U_q — это окрестность точки q, которая определяется в процессе построения матрицы B.

Отметим, что метод построения матрицы B аналогичен методу Гаусса приведения числовой матрицы к верхнетреугольному виду, только у нас элементами матриц являются операторы из класса $l_0(U)$, роль ненулевых элементов (при заданной точке q) играют операторы из $el_0(U_q)$, главные символы которых не равны нулю в точке q, а деление на ненулевой элемент заменяется умножением (соблюдая порядок) на его параметрикс, который выбирается из такого же класса $el_0(U_q)$; при этом можно уменьшать окрестность U_q, так как она не фиксируется.

Каждая из матриц в (40) может совпадать с единичной. Так, если матрица C сама имеет в U_q верхнетреугольный вид (ее элементы, лежащие под главной диагональю, принадлежат классу $l_{-\infty}(U_q)$), то первые две матрицы в произведении (40), очевидно, равны I.

Мы будем рассматривать, естественно, ситуацию общего положения.

Доказательство леммы. По предположению символическая матрица $\sigma_0(C)$ невырождена в области U, а, значит, и в точке $q \in U$. Следовательно, в каждом столбце матрицы $\sigma_0(C)|_q$ найдется ненулевой элемент. Если таковым является элемент $\sigma_0(c_{i_1 1})$, то оператор $c_{i_1 1}$ из первого столбца матрицы C принадлежит классу $el_0(U_q)$ в некоторой окрестности точки q. Применим к матрице C слева матрицу перестановки $\Pi_{1 i_1}$ и переведем этот элемент в ячейку (1,1). Обозначим $C_1 = \Pi_{1i_1}C$. Если эллиптическим оператором является элемент c_{11} и $i_1 = 1$, то $C_1 = C$ и будем считать, что $\Pi_{11} = I$. Кроме того, для простоты сохраним обозначения c_{ij} для элементов матрицы C_1.

К матрице C_1 применим матрицу элементарных преобразований, — ее удобно обозначить здесь как

$$Q_1^{-1} = I - \mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_1, \tag{41а}$$

в которой элементы p_{i1} вектор-столбца $\mathbf{p}^{(1)}$ положим равными

$$p_{11} = 0 \quad \text{и} \quad p_{i1} = c_{i1}c_{11}^L \quad \text{при } i > 1, \tag{41б}$$

где c_{11}^L — параметрикс оператора c_{11}, принадлежащий классу $el_0(U_q)$. Тогда элементы матрицы $B = Q_1^{-1}C_1$ имеют вид

$$b_{1j} = c_{1j}, \quad b_{ij} = c_{ij} - c_{i1}c_{11}^L c_{1j} \quad (i > 1). \tag{42}$$

Они, очевидно, принадлежат классу $l_0(U_q)$, а элемент b_{11}–классу $el_0(U_q)$. Полагая $j = 1$ в (42), имеем

$$b_{i1} = c_{i1}(1 - c_{11}^L c_{11}) \quad \text{при} \quad i > 1. \tag{43}$$

Эти элементы принадлежат классу $l_{-\infty}(U_q)$.

Обозначим через $\hat{B}$ матрицу, которая получается из B после вычеркивания ее первого столбца и первой строки. Покажем, что эта матрица эллиптична в некоторой окрестности точки q. Для этого вычислим определитель матрицы $\sigma_0(B)$ двумя способами и сравним полученное. С одной стороны, из формул композиции и свойств матрицы перестановки и оператора (41), имеем

$$\det \sigma_0(B) = \det \sigma_0(Q_1^{-1}) \cdot \det \sigma_0(C_1) = \pm \det \sigma_0(C) \quad \text{в} \quad U_q \subset U. \tag{44}$$

С другой стороны, в силу формулы (43) в первом столбце матрицы $\sigma_0(B)|_q$ имеется только один ненулевой элемент. Поэтому ее определитель равен

$$\det \sigma_0(B)|_q = \sigma_0(b_{11})|_q \cdot \det \sigma_0(\hat{B})|_q. \tag{45}$$

Учитывая невырожденность матрицы $\sigma_0(C)$ в точке $q \in U$ из равенств (44) и (45), получаем, что матрица $\sigma_0(\hat{B})|_q$ не особенная.

Мы пришли к аналогу исходной ситуации с матрицей $\hat{B}$ порядка $l-1$ вместо матрицы S порядка l. Если $l = 2$, то операции закончены. Если же $l>2$, то, повторив преобразования еще $l-2$ раза, получим матрицу

$$B^l = Q_{l-1}^{-1}\Pi_{l-1,i_{l-1}}\cdots Q_1^{-1}\Pi_{1,i_1}C, \tag{46}$$

которая имеет в окрестности точки q верхнетреугольный вид, т.е. ее элементы b_{ij}^l принадлежат классу $l_{-\infty}(U_q)$, если $i>j$. Ее диагональные элементы b_{ii}^l при $i<l$ эллиптичны в окрестности $U_q\subset U$, которая лежит в пересечении областей эллиптичности каждого из них.

Докажем, что последний диагональный элемент b_{ll}^l также эллиптичен в U_q. Для этого вычислим определитель символической матрицы $\sigma_0(B^l)$ двумя способами, как мы это уже сделали в (44) и (45), учитывая ее структуру и формулу (46). Получим равенства

$$\det\sigma_0(B^l) = \prod_{i=1}^{l}\sigma_0(b_{ii}^l) = \pm\det\sigma_0(C)\neq 0 \quad \text{в} \quad U_q. \tag{47}$$

Из (47) следует, ввиду эллиптичности оператора C в U, что число $\sigma_0(b_{ll}^l)|_q\neq 0$, что и требовалось доказать.

Ввиду обратимости матриц перестановки и операторов Q_j, равенство (46) можно переписать в виде

$$C = \Pi_{1,i_1}Q_1\cdots\Pi_{l-1,i_{l-1}}Q_{l-1}B^l, \tag{48}$$

где операторы Q_j согласно формулам (41а) и (35) имеют вид

$$Q_j = I+\mathbf{p}^{(j)}\cdot\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{p}^{(j)} = (p_{1j},\ldots,p_{lj})^T, \tag{49}$$

причем по построению компоненты $p_{ij}=0$ при $i\leqslant j$. Они обладают свойством: при $k<m\leqslant i_m$ композиция

$$\Pi_{m,i_m}Q_k\Pi_{m,i_m} = \hat{Q}_k\equiv I+\hat{\mathbf{p}}^{(k)}\mathbf{e}_k, \tag{50}$$

где $\hat{\mathbf{p}}^{(k)}\equiv\Pi_{m,i_m}\mathbf{p}^{(k)}$.

То-есть при окаймлении Q_k указанными матрицами перестановки получается оператор того же типа, только компоненты вектор-столбца $\mathbf{p}^{(k)}$ с номерами m и i_m меняются местами.

Это свойство легко проверить непосредственно, если заметить, что матрица $\Pi_{m,s}$ совпадает со своей обратной, и что

$$\mathbf{e}_k\Pi_{m,i_m} = \mathbf{e}_k \text{ при } 1\leqslant k<m\leqslant i_m\leqslant l. \tag{51}$$

Из формулы (50) получаем следующее правило "перестановки" матрицы Π_{m,i_m} с оператором Q_k

$$Q_k \Pi_{m,i_m} = \Pi_{m,i_m} \hat{Q}_k \quad \text{при} \quad k < m \leqslant i_m, \tag{52}$$

которое назовем прогонкой матрицы Π_{m,i_m} через оператор Q_k влево. Если компоненты вектора $p^{(k)}$ с номерами m и i_m совпадают, то прогонка сохраняет оператор Q_k. В общем случае, она превращает Q_k в $\hat{Q}_k$.

Для завершения доказательства леммы остается формулу (48) преобразовать в формулу (40). Если $l = 2$, то она уже имеет вид (40). Если же $l > 2$, то в композиции (48) отыщем самую правую матрицу перестановки. В общем случае это $\Pi_{l-1,i_{l-1}}$. Используя правило (52) при $k = l-2$, $m = l-1$, прогоним эту матрицу через оператор Q_{l-2} на один шаг влево (видоизменяя последний). Повторяя, если необходимо, операцию (52) при $k = l-3$, $m = l-2$ и $m = l-1$, и так далее, при $k = 1$, $m = 2, \ldots, m = l-1$, мы получим композицию вида (48), в начале которой стоят матрицы перестановок, затем (видоизмененные) матрицы элементарных преобразований и в конце ее — оператор B^l. Композицию матриц перестановок обозначим через Π, т.е.

$$\Pi = \Pi_{1,i_1} \cdots \Pi_{l-1,i_{l-1}}. \tag{53}$$

Композицию (видоизмененных) матриц элементарных преобразований обозначим через N; каждая из них имеет нижнетреугольный вид с единицами на главной диагонали, поэтому матрица N имеет такой же вид (см. формулу (36)). Наконец, перемножив матрицы Π, N и B^l и опустив для простоты индекс l, получим представление (40). Лемма доказана.

Замечание 9.3. *Из формулы (42) легко убедиться, что, если главные миноры матрицы $\sigma_0(S)$ отличны от нуля в точке q, то в композиции (40) матрица Π совпадает с единичной матрицей.*

10. Нам понадобятся свойства композиций диагональных операторов с операторами, входящими в разложение (40). Мы говорим, что компоненты β_j вектора b из $\mathbb{Z}^l$ упорядочены по возрастанию, если $\beta_1 \leqslant \cdots \leqslant \beta_l$.

Предложение 10.1. *Пусть матрица B из $EL^0(U)$ имеет в $U_q \subset U$ верхнедиагональный вид и пусть компоненты вектора b упорядочены по возрастанию. Тогда композиция $\widetilde{B} \equiv J_b B J_{-b}$ принадлежит* *классу $EL^0(U_q)$, она тоже имеет в U_q верхнетреугольный вид и, кроме того,*

$$\det \sigma_0(\widetilde{B}) = \det \sigma_0(B) \quad \text{в} \quad U_q. \tag{54}$$

Доказательство. Элементы $\widetilde{b}_{ij}$ матрицы $\widetilde{B}$ имеют вид

$$\widetilde{b}_{ij} = \lambda^{\beta_i} b_{ij} \lambda^{-\beta_j}, \tag{55}$$

где операторы λ^k принадлежат классу $el_k(X)$ и $\sigma_k(\lambda^k) = |\xi|^k$.

Ее диагональные элементы принадлежат классу $el_0(U_q)$, так как согласно формулам композиции

$$\sigma_0(\widetilde{b}_{ii}) = \sigma_0(b_{ii}) \neq 0 \quad \text{в } U_q.$$

Элементы $\widetilde{b}_{ij}$, лежащие под диагональю, принадлежат $l_{-\infty}(U_q)$, так как этому же классу по условию принадлежат элементы b_{ij} при $i > j$. Наконец, если $i < j$, то b_{ij} принадлежат классу $l_0(U)$; поэтому $\widetilde{b}_{ij}$ принадлежат классам $l_{\beta_i - \beta_j}(U_q)$, которые содержатся в классе $l_0(U_q)$, потому что $\beta_i \leqslant \beta_j$ по условию.

Итак, матрица $\widetilde{B}$ принадлежит классу $L^0(U_q)$ и имеет в U_q верхнетреугольный вид. Следовательно, матрица $\sigma_0(\widetilde{B})$ (как и $\sigma_0(B)$) имеет в U_q верхнетреугольный вид, из которого, очевидно, вытекает формула (54). Эта формула показывает, что матрица $\widetilde{B}$ эллиптична в U_q. Предложение доказано.

Из предложения 10.1 вытекает

Следствие 10.2. *Если матрица B из $EL^0(U)$ имеет в $U_q \subset U$ верхнетреугольный вид, а компоненты вектора b упорядочены по возрастанию, то имеют место формулы :*

$$J_b B = \widetilde{B} J_b + T_1, \quad \widetilde{B} \in EL^0(U_q), \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_q); \tag{56}$$

$$B J_{-b} = J_{-b} \widetilde{B} + T_2, \quad \widetilde{B} \in EL^0(U_q), \quad T_2 \in L^{-\infty}(U_q). \tag{57}$$

Формулы (56) и (57) удобно трактовать как прогонку диагонального оператора J_b через матрицу B верхнетреугольного вида направо или прогонку оператора J_{-b} через B, налево, если компоненты вектора b упорядочены по возрастанию.

Утверждения симметричные Предложению 10.1 и Следствию 10.2 выглядят так.

Предложение 10.3. *Пусть матрица N из класса $EL^0(U)$ имеет в $U_q \subset U$ нижнетреугольный вид и пусть компоненты вектора b упорядочены по возрастанию. Тогда композиция $\widetilde{N} \equiv J_{-b}NJ_b$ принадлежит классу $EL^0(U_q)$, она тоже имеет в U_q нижнетреугольный вид и*

$$\det\sigma_0(\widetilde{N}) = \det\sigma_0(N) \quad \text{в} \quad U_q. \tag{58}$$

Кроме того, если диагональные элементы матрицы N равны единице в U_q, то диагональные элементы матрицы $\widetilde{N}$ равны $1+t_{ii}$, где $t_{ii} \in l_{-\infty}(U_q)$.

Следствие 10.4. *Если матрица N из $EL^0(U)$ имеет в $U_q \subset U$ нижнетреугольный вид, а компоненты вектора b упорядочены по возрастанию, то имеют место формулы :*

$$J_{-b}N = \widetilde{N}J_{-b} + T_1, \quad \widetilde{N} \in EL^0(U_q), \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_q); \tag{59}$$

$$NJ_b = J_b\widetilde{N} + T_2, \quad \widetilde{N} \in EL^0(U_q), \quad T_2 \in L^{-\infty}(U_q). \tag{60}$$

Доказательства этих утверждений аналогичны предыдущим.

Наконец, имеет место формула композиции диагонального оператора и матрицы перестановок,

$$\Pi_{s,k}J_a\Pi_{s,k} = J_{a''}, \quad a \in \mathbb{Z}^l, \tag{61}$$

где a'' — вектор, получаемый из a перестановкой его компонент с номерами s и k. Эту формулу также можно записать в виде

$$\Pi_{s,k}J_a = J_{a''}\Pi_{s,k}. \tag{62}$$

Формулу (62) можно представить себе как прогонку матрицы перестановки $\Pi_{s,k}$ через диагональный оператор J_a. При этом упорядоченность компонент вектора a, вообще говоря, теряется. Но если вектор a таков, что его компоненты с номерами s и k совпадают, т.е. $a'' = a$, то операторы коммутируют.

11. Из Леммы 9.2 и Предложения 10.1 получаем следующее.

Предложение 11.1. *Если оператор C принадлежит $EL^0(U)$ и компоненты вектора b из $\mathbb{Z}^l$ упорядочены по возрастанию, то в окрестности каждой точки q из U композицию CJ_{-b} можно представить в виде*

$$CJ_{-b} = \Pi NJ_{-b}\widetilde{B} + T, \quad \widetilde{B} = J_bBJ_{-b} \in EL^0(U_q), \quad T \in L^{-\infty}(U_q). \tag{63}$$

Действительно, используя представление (40) и формулу (57), имеем

$$CJ_{-b} = \Pi NBJ_{-b} = \Pi N(J_{-b}\widetilde{B} + T_2) = \Pi NJ_{-b}\widetilde{B} + T.$$

Мы пришли к формуле (63), что и требовалось доказать.

12. Перейдем к *доказательству теоремы 9.1.* В представлении (38) выделим композицию $A_1 J_{-b_1}$. Она удовлетворяет условию Предложения 11.1 и, значит, представима по формуле (63) в виде

$$A_1 J_{-b_1} = \Pi_1 N_1 J_{-b_1}\widetilde{A}_1 + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_q), \tag{64}$$

где матрица $\widetilde{A}_1 \equiv J_{b_1} B_1 J_{-b_1}$ принадлежит классу $EL^0(U_q)$.

Подставим это выражение в формулу (38) и преобразуем композиционную часть полученной формулы. Сгруппировав в ней члены порядка минус бесконечность в U_q и обозначив их снова через T, получим выражение

$$A = J_a \Pi_1 N_1 J_{-b_1}\widetilde{A}_1 A_2 J_{-b_2} \cdots A_r + T, \quad T \in L^{-\infty}(U_q). \tag{65}$$

Композиция $\widetilde{A}_1 A_2 \equiv C_2$, очевидно, принадлежит классу $EL^0(U_q)$ и компоненты вектора b_2 упорядочены по возрастанию. Поэтому оператор $C_2 J_{-b_2}$ также удовлетворяет условию Предложения 11.1 в области $U = U_q$. Следовательно, существует окрестность $U_q^1 \subset U_q$ такая, что

$$\widetilde{A}_1 A_2 J_{-b_2} = \Pi_2 N_2 J_{-b_2}\widetilde{B}_2 + T_2, \quad T_2 \in L^{-\infty}(U_q^1), \tag{66}$$

где оператор $\widetilde{B}_2 \in EL^0(U_q^1)$. Воспользуемся формулой (66), чтобы преобразовать формулу (65) аналогично предыдущему. Мы получим формулу такого же вида, в которой между операторами J_{-b_1} и J_{-b_2} стоит композиция $\Pi_2 N_2$, а между J_{-b_2} и J_{-b_3} стоит композиция $\widetilde{B}_2 A_3$, принадлежащая классу $EL^0(U_q^1)$. Повторяя при $r > 3$, этот процесс еще р-3 раза получим формулу, которая отличается от формулы (39) тем, что в ней правее оператора $J_{-b_{r-1}}$ стоит композиция $\widetilde{B}_{r-1} A_r \equiv \widetilde{B}_r$. Эта композиция принадлежит классу $EL^0(U_q^r)$ в некоторой окрестности U_q^r точки q. Применяя ее правый параметрикс, получим формулу (39), в которой $B = I$ и матрица C совпадает с $\widetilde{B}_r^R$. Теорема доказана.

13. Отметим случаи, когда представление (39) сводится к представлению (37). Это во-первых, когда матрицы A_j в (38) имеют верхнетреугольный вид в окрестности U_q. Тогда в (39) все Π_j и N_j равны единичной матрице и композиция сводится к одному диагональному оператору с вектором c равным $a - b_1 - \cdots - b_r$. Так как оператор $BAC \in L^0(U_q)$, то вектор $c \in \mathbb{Z}^l_-$. Получаем представление (37).

Второй случай, когда в (39) все матрицы перестановки отсутствуют, т.е. $\Pi_j = I$. Тогда, используя соотношение (59), прогоним диагональные операторы через матрицы N_j вправо. Получим представление вида

$$BAC = EJ_c + T, \quad c = a - \sum_{j=1}^{r} b_j, \tag{67}$$

где матрица E является композицией видоизмененных согласно (59) матриц N_j. Следовательно, она принадлежит классу $EL^0(U_q)$. Применив левый параметрикс оператора E получим представление (37) с вектором $-a = c$ из (67). Следовательно, $c \in \mathbb{Z}^l_-$.

Наконец, третий случай это когда в (39) все матрицы N_j совпадают с единичной. Тогда, используя формулы (61) или (62) и применив к равенству (39) соответствующие матрицы перестановки, также получим представление вида (37). Приэтом вектором d, определяющий диагональный оператор I_d принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$ и удовлетворяет соотношениям

$$\langle d\rangle = \langle a\rangle - \sum_{j=1}^{r}\langle b_j\rangle. \tag{68}$$

Следовательно, $\langle d\rangle \le 0$.

Если в представлении (39) лишь некоторые из матриц Π_j и N_j совпадают с единичной матрицей, то в таком представлении можно уменьшить число диагональных операторов.

Отметим еще, что в представлении (39) нельзя уменьшить число диагональных операторов, когда ни одна из матриц Π_j и N_j не совпадает с единичной матрицей и ни один из диагональных операторов нельзя прогнать направо через композицию $\Pi_j N_j$ с сохранением класса $EL^0(U_q)$.

Примером такого оператора является оператор (21), если точка $q = (x_0, \xi_0)$ такова, что x_0 лежит на разделяющей поверхности $\mathcal{P}$ (как это указано в Предложении 6.3).

Применив матрицу перестановки Π в представлении (25) справа получим представление вида (39):

$$A\Pi = J_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \Pi \begin{pmatrix}1 & 0\\ \widetilde{a}_1 & 1\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}} \Pi \begin{pmatrix}1 & 0\\ a_2 & 1\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}} + T\Pi, \qquad (69)$$

где $\widetilde{a}_1 = \lambda^{-1} a \lambda$.

В этом представлении нельзя уменьшить число диагональных операторов, как бы мы не уменьшали окрестность точки (x_0, ξ_0), где $x_0 \in P$.

Отметим, что матрицы N_j в (69) не совпадают с единичной матрицей в любой окрестности точки (x_0, ξ_0), но их полные символы $\sigma(N_j)$ в самой точке (x_0, ξ_0) совпадают с единичной матрицей.

14. Согласно следующему определению из [2] класс $EFL^0(U)$ составляет основу класса обобщенно эллиптических операторов.

Определение. Оператор A^0 из $L^0(X; E, E)$ называется *обобщенно эллиптическим на* X, если для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q такая, что A^0 принадлежит $EFL^0(U_q)$. Множество таких операторов обозначим через $GEL^0(X)$.

Очевидно, что $EL^0(X) \subset GEL^0(X)$. Через $WEL^0(X)$ обозначим множество $GEL^0(X) \backslash EL^0(X)$. Операторы из этого класса называются слабо эллиптическими на X. Классу $GEL^0(X)$ принадлежат также равномерно неэллиптические операторы из $L^0(X)$ (смотрите работу Б. Р. Вайнберга и В. В. Грушина [1]). Класс таких операторов обозначим $WG{\cdot}EL^0(X)$. В терминах п. 2 этот класс определяется так. Оператор S принадлежит классу $WG{\cdot}EL^0(X)$, если для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q такая, что S принадлежит классу $BEL^0(U_q)$. Так как $BEL^0(U_q) \subset EFL^0(U_q)$, то

$$WG \cdot EL^0(X) \subset GEL^0(X).$$

15. Приведем несложный пример оператора из класса $GEL^0(X)$, иллюстрирующий один из многих вариантов вырождения его главного символа.

Пусть $X = S^2$ — двумерная сфера, на которой заданы две функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ класса $C^\infty(S^2)$ и такие, что

$$a_1(x) \cdot a_2(x) = 0 \text{ всюду на } S^2. \qquad (70)$$

То есть их носители не имеют внутренних точек пересечения (например, параллелями и меридианами разобьем сферу на ряд клеток, в которых поочередно a_1 и a_2 отличны от нуля.)

И пусть $\lambda \in el_1(S^2)$ — эллиптический на S^2 оператор первого порядка, который для простоты мы будем считать обратимым, $\lambda^{-1} \in el_{-1}(S^2)$ — его обратный.

Рассмотрим оператор (21)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & a_2 \end{pmatrix} \qquad (71)$$

и (2×2)-матрицы

$$C_1 = J_{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda^{-1} a_1 \lambda \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -\lambda a_1 \lambda \end{pmatrix}, \qquad (72)$$

$$C_2 = J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (73)$$

Легко убедиться, что

$$D_2 A u \equiv C_2 C_1 A u = u + T u, \qquad (74)$$

где компоненты T_{ij} матрицы T равны нулю при $(i, j) \neq (1, 2)$ и (2,2), а компоненты $T_{12} = \lambda a_2 \lambda a_1 \lambda a_2$ и $T_{22} = -\lambda a_1 \lambda a_2$.

Они принадлежат $l_{-\infty}(S^2)$, так как из условия (70) следует, что оператор $a_1 \lambda a_2 \in l_{-\infty}(S^2)$. Следовательно, оператор (71) принадлежит классу $GEL^0(S^2)$.

Расписав соотношения (74), получим уравнения

$$u_1 + (\lambda a_2 \lambda a_1 \lambda a_2) u_2 = (D_2 f)_1,$$
$$(D_2 f)_1 \equiv \lambda(-a_2 \lambda f_1 + f_2 + a_2 \lambda a_1 \lambda f_2), \qquad (75)$$

$$u_2 - (\lambda a_1 \lambda a_2) u_2 = (D_2 f)_2, \qquad (D_2 f)_2 \equiv \lambda(f_1 - a_1 \lambda f_2). \qquad (76)$$

Мы скажем, что $f \in H^k_{[D]}(S^2)$, если компоненты векторов f и $D_2 f$ лежат в классе $H^k(S^2)$. В частности, все векторы f из $H^{\overline{k+2}}(S^2)$

принадлежат этому классу потому, что $\operatorname{ord} D_2 = 2$. Из (74) вытекает, что оператор (71) нерерывен в пространствах

$$A\colon H^{\overline{k}}(S^2) \mapsto H^k_{[D]}(S^2), \quad k \in \mathbb{R}, \quad \overline{k} = (k,k) \in \mathbb{R}^2. \qquad (77)$$

Из обратимости операторов (72) и (73) в соответствующих пространствах Соболева и (75), (76) видно, что разрешимость системы $Au = f$ в классе $H^{\overline{k}}(S^2)$ эквивалентна разрешимости одного уравнения Фредгольма второго рода (уравнения (76)).

Откуда следует

Теорема 15.1. *При условии (70) оператор (71) является фредгольмовым в пространствах (77) для любого $k \in \mathbb{R}$. Индекс оператора равен нулю. Его ядро состоит из бесконечно дифференцируемых вектор-функций, а область значений определяется условием ортогональности к некоторым бесконечно дифференцируемым вектор-функциям. Если $f \in H^k_{[D]}(S^2)$ и u — любое обобщенное решение системы $Au = f$, от $u \in H^{\overline{k}}(S^2)$.*

Таким образом, для оператора (77) имеют место аналоги всех теорем Фредгольма (с потерей гладкости на две единицы в обычных пространствах Соболева).

Обратимся к локальной структуре оператора (71). Согласно условию (70) его символическая матрица $\sigma_0(A)$ вырождена всюду на S^2, а, значит, и на $T'(S^2)$. Она имеет ранг 1 в точках $x \in S^2$, где $a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0$ (причем ее ненулевые миноры "плавают" вдоль главной диагонали) и ранг 0 в точках $y \in S^2$, где $a_1(y) = a_2(y) = 0$. Поэтому оператор (71) не принадлежит ни классу $DN \cdot EL(S^2)$, ни классу $WG \cdot EL^0(S^2)$, где требуется условие постоянства ранга матрицы $\sigma_0(A)$.

Обозначим через M_1 подмножество в S^2, где ранг матрицы $\sigma_0(A)$ равен единице и через M_0 подмножество, где ранг этой матрицы тождественно равен нулю, то есть где функции a_1 и a_2 обращаются в нуль не только в самой точке $y \in S^2$, но и в окрестности такой точки. Множества M_0 и M_1 открыты, а дополнение $N = S^2 \setminus (M_0 \cup M_1)$ — замкнутое множество. Повторяя рассуждения п. 6, видим, что оператор (71) принадлежит классу $BEL^0(U)$, где $U = T'(M_0) \cup T'(M_1)$, то есть имеет представление (1) с одним диагональным оператором, как, например, представление (27). Если же $x_0 \in N$, то, согласно предложениям 6.1, 6.3 и 6.4 в окрестности точки $q = (x_0, \xi_0)$ оператор (71) может иметь представление вида (22), (25), (26) только с двумя или с тремя диагональными операторами, удовлетворяющими условиям (11) или условиям (12).

Полученные результаты находят применение при исследовании разрешимости краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений.

Литература

1. Вайнберг Б. Р., Грушин В. В., *О равномерно неэллиптических задачах I.* — Математический сборник **72**, № № 4, (1967), с. 126–154.
2. Сакс Р. С., *О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутом многообразии.* — В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 28. (Записки научных семинаров ПОМИ, том 243). СПб: Санкт-Петербургское отделение МИ РАН, 1997, с. с. 215–269..
3. Соболев С. Л., *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974, с. 808.
4. Трев Ф., *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.* т. I. ПДО, М.: Мир, 1984, с. 360.
5. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., *Вычислительные методы линейной алгебры.* М.: Физматгиз, 1960.

Saks R. S. Local structure of generalized elliptic pseudodifferential operators and method of Gauss.

In this paper we study the class of operators dominant parts of which admits elliptic factorization in some conique domain U from $T'(x)$, i.e., they can be represented as compozition of diagonal operators and elliptic at U operators of order zero. We denote this class by $ETF^\circ(U)$. It arrises in microlocalization of notion "generalized ellipticity." We are interested in the problem of simplest factorization of dominant part of the operator BAC where $\mathcal{A} \in EFL^\circ(U)$ and operators B and C are choosen from class $EL^\circ(U_q)$ (elliptic operators in some neighborhood U_q of the point $q \in U$). For the operators $\mathcal{A}$ from subclass $BEL^\circ(U)$ the dominant part BAC can be reduced to one diagonal operator. It turns out that for operators from the whole class $EFL^\circ(U)$ there is no such a representation but the representation in which the dominant part BAC is composition of finite number of diagonal operators, permutation matrices and lower triangular matrices with identity in general diagonal exists olwais. We prove this theorem by analog of Gauss method which we introduce in algebra of pseudodifferential operators.

г. Уфа, Башкирский
государственный университет

Поступило 2 декабря 1998г.