Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

С. А. Назаров

ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

§1. Введение

Обычное математическое изображение тонкой упругой пластины Ω_h – цилиндр $\omega \times (-h/2, h/2)$, где ω – двумерная область (срединная плоскость). Внутри Ω_h задается система уравнений теории упругости, на основаниях $\Sigma^{\pm} = \omega \times \{\pm h/2\}$ выставляются условия Неймана, а на боковой поверхности $\Gamma_h = \partial\omega \times (-h/2, h/2)$ – какие-либо натуральные условия. Такое геометрическое упрощение формулировки задачи вступает в противоречие с применяемыми на практике способами крепления плит – заделка в паз, опирание на подложку (нахлест) и пр. Математический анализ соответствующих инженерных задач до сих пор не проводился. Это упущение, по мнению автора, вызвано следующей причиной: многие разработанные подходы к исследованию задач теории пластин или требуют строго цилиндрическую структуру данных задачи (например, проекционные методы), или оказываются неспособными отразить малые возмущения данных (так называемые теоремы о сходимости).

В данной статье развивается метод пограничного слоя (см. [1–6] и др.), что позволило дать строгое истолкование двум принципиально важным эффектам. Во-первых, удалось описать взаимодействие основных состояний пластины ("чистые" изгиб и продольная деформация), которое гарантированно исчезает лишь при наличии плоскости упругой симметрии, но всегда отсутствует в двумерных моделях (в том числе и в технической теории однородных пластин; см. [7, 8] и др.). Во-вторых, представлены вывод и обоснование условий шарнирного опирания пластины при узкой, шириной $O(h^{\delta+1/2})$, зоны защемления ее края, в которых анализ явления пограничного слоя приобретает главенствующее значение. Названные условия относятся к одному из трех наиболее часто употребляемых типов, однако их традиционная механическая интерпретация – равенство нулю смещений на ребре пластины – неудовлетворительна с математической точки зрения (для системы второго порядка задача Соболева с данными на одномерном подмногообразии некорректна). В [9] для моделирования шарнирного опирания предлагались различные комбинации устойчивых и естественных краевых условий на *боковой поверхности* Γ_h (hard support и soft support), которые трудно вообразимы в реальной конструкции и связаны с известным парадоксом (см. [9–13] и др.) для многоугольных контуров. Отметим, что схема обоснования из §6 пригодна лишь при гладкой границе $\partial\omega$ срединного сечения пластины.

Обрисуем структуру статьи. В §2 приводится постановка задачи и собраны вспомогательные неравенства, обеспечивающие обоснование асимптотик. Сами асимптотические конструкции находятся в §3. Там же при минимальных требованиях к гладкости правых частей дана квалифицированая (в некотором смысле коэрцитивная) оценка точности построенного приближения (теорема 3.6 и следствие 3.7). Ранее в [14–18] и др. рассматривались однородные изотропные или строго периодические пластины, но здесь допускается произвольные анизотропия и неоднородность в продольных и поперечном направлениях (хотя и не охватываются результаты [16]). В §4 изучается пограничный слой, образующий следующий по порядку член асимптотики (см. теорему 4.9, устанавливающую, в частности, асимптотическую точность оценок из §3). Младшие члены асимптотики обсуждаются в §5, где к тому же поясняется, как конструируется полный асимптотический ряд для решения u трехмерной задачи в ω (ранее в [19, §6], [20; теорема 16.4.7] и [21] полные разложения формулировались только для однородных пластин). Однако основным результатом §5 является теорема 5.10, в которой реализуется намеченный в [6, 22–24] подход к формированию *объединенной задачи*, доставляющей двучленную асимптотику решения u вне малой окрестности боковой поверхности Γ_h. Объединенная задача снабжается условиями упругой заделки, содержащими интегральные характеристики задачи о пограничном слое, и ставится в уменьшенной области $\omega_h \subset \omega$ (плоское изображение пластины, защемленной в пазе). Условия шарнирного опирания разбираются в §6, для чего привлекаются дополнительные соображения, поскольку задача о пограничном слое становится сингулярно возмущенной (см. [25–

28] и [29, 30,20]).

§2. Постановка задачи и вспомогательные неравенства

1. Тонкая пластина. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\partial\omega$, и

$$\Omega_h = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (y_1, y_2) \in \omega,\ |z| < h/2\}, \tag{2.1}$$

где h – малый параметр. Масштабированием характерный размер области ω сведем к единичному, так что координаты и толщина h пластины (2.1) станут безразмерными.

В окрестности контура $\partial\omega$ определим естественные криволинейные координаты s и n, где s – длина дуги вдоль $\partial\omega$ и $|n|$ – расстояние до $\partial\omega$, причем $n > 0$ внутри ω. Пусть $\mathcal{O}_h$ – трубчатая ch-окрестность боковой поверхности $\Gamma_h = \{x : y \in \partial\omega,\ |z| < h/2\}$ пластины. Ясно, что

$$\Omega_h \cap \mathcal{O}_h = \{x \in \mathcal{O}_h : \eta \equiv (h^{-1}n, h^{-1}z) \in \Pi\}, \tag{2.2}$$

$$\Pi = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_1 > 0,\ |\eta_2| < 1/2\}. \tag{2.3}$$

На границе $\partial\Pi$ полуполосы (2.3) выделим дугу $\gamma(s)$, гладко зависящую от $s \in \partial\omega$. Иными словами, $\gamma(s) = \varkappa\gamma(s^0)$, где s^0 – фиксированная точка на $\partial\omega$, а сюрьекция $\varkappa : \partial\omega \times \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}$ – гладкая вектор-функция переменных s и η. Положим

$$\gamma_h = \{x \in \partial\Omega_h \cap \mathcal{O}_h\ :\ \eta \in \gamma(s),\ s \in \partial\omega\}. \tag{2.4}$$

Считаем, что по множеству (2.4) пластина Ω_h жестко защемлена (на γ_h назначаются однородные условия Дирихле). К остальной части $\Sigma_h = \partial\Omega_h \setminus \bar{\gamma}_h$ приложены внешние усилия, т.е. на Σ_h ставятся краевые условия Неймана. Далее различаем два случая. В первом предполагаем, что длина дуги $\operatorname{mes}_1\gamma(s)$ отделена от нуля постоянной $\gamma_0 > 0$, не зависящей от h. Обычной в практике является ситуация, в которой пластина заделана в паз глубиной $O(h)$. Именно ее далее и рассматриваем, считая, что

$$\gamma(s) \supset \{\eta : \eta_1 = 0,\ |\eta_2| < 1/2\} \equiv \Upsilon_0. \tag{2.5}$$

Во втором случае длина дуги $\gamma(s)$ предполагается малой, сравнимой порядку со степенью малого параметра h. Ограничимся рассмотрением наиболее интересной геометрической картины: узкая окрестность нижнего ребра $\partial\omega_h^- = \{x : y \in \partial\omega,\ z =$

$-1/2\}$ приклеена к абсолютно жесткому выступу (подложке). Таким обарзом,

$$\gamma(s) = \{\eta : \eta_2 = -1/2,\ 0 < \eta_1 < Hh^{\delta+1/2}\}, \tag{2.6}$$

причем параметры $H > 0$ и $\delta > 0$ не зависят от h. Далее проверяется, что требования (2.5) и (2.6) приводят к условиям жесткого защемления и шарнирного опирания соответственно.

2. Краевая задача. Вектор смещений u интерпретируем как столбец $(u_1, u_2, u_3)^t$; t – знак транспонирования. Введем столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \alpha^{-1}\varepsilon_{12}, \varepsilon_{33}, \alpha^{-1}\varepsilon_{23}, \alpha^{-1}\varepsilon_{31})^t, \tag{2.7}$$

составленный из декартовых компонент $\varepsilon_{jk} = 2^{-1}(\partial u_j/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_j)$ тензора деформаций. Множитель $\alpha^{-1} = 2^{1/2}$ введен в (2.7) для того, чтобы совпали естественные нормы столбца и тензора деформаций. Справедливо равенство

$$\varepsilon(u) = D(\nabla_x)^t u, \tag{2.8}$$

где $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $D(\nabla_x)$ – 3×6-матрица дифференциальных операторов, $\alpha = 2^{-1/2}$,

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 \\ 0 & \xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Закон Гука записывается в форме

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u), \tag{2.10}$$

где $\sigma(u)$ – аналогичный (2.7) столбец напряжений, а 6×6-матрица A, содержащая упругие модули материала пластины, является симметрической и положительно определенной. Считаем, что элементы матрицы A гладко зависят от медленных продольных переменных $y \in \omega$ и быстрой поперечной $\zeta = h^{-1}z \in \Upsilon = (-1/2, 1/2)$.

Уравнения равновесия и краевые условия, составляющие задачу теории упругости в Ω_h, в используемых обозначениях выглядят так:

$$D(-\nabla_x)A(y, h^{-1}z)D(\nabla_x)^t u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{2.11}$$

$$D(\nu(x))A(y,h^{-1}z)D(\nabla_x)^t u(x)=g(x), \quad x\in\Sigma_h, \tag{2.12}$$

$$u(x)=0, \quad x\in\gamma_h. \tag{2.13}$$

Здесь $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)^t$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а f и g – столбцы объемных сил и внешних усилий. В последующих параграфах вид f и g конкретизируется по необходимости. Дифференциальные операторы из левых частей (2.11) и (2.12) обозначаются L и B соответственно.

3. Разрешимость задачи. Для достаточно гладких векторов u и v справедлива формула Грина

$$(Lu,v)_{\Omega_h}+(Bu,v)_{\partial\Omega_h}=E(u,v;\Omega_h), \tag{2.14}$$

в которой $(\ ,\ )_\Xi$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Xi)$ (скалярном или векторном), $2^{-1}E(u,u;\Omega_h)$ – упругая энергия, запасенная пластиной Ω_h,

$$E(u,v;\Xi)=(AD(\nabla_x)^t u,D(\nabla_x)^t v)_\Xi, \tag{2.15}$$

$$E(u,u;\Xi)\geqslant c_A\|\varepsilon(u);L_2(\Xi)\|^2. \tag{2.16}$$

При этом c_A – положительная постоянная, зависящая от матрицы Гука A.

Через $H^m(\Xi)^k$ обозначается пространство Соболева k-мерных вектор-функций. Обобщенная постановка задачи (2.11)–(2.13) осуществляется в соответствии с формулой (2.14). Пусть $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3=\{u\in H^1(\Omega_h)^3\ :\ u=0 \text{ на } \gamma_h\}$; особо отметим, что знак "$\circ$" относится лишь к части γ_h границы $\partial\Omega_h$. Под обобщенным решением u задачи (2.11)–(2.13) подразумевается элемент подпространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$E(u,v;\Omega_h)=(f,v)_{\Omega_h}+(g,v)_{\Sigma_h} \quad \forall v\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3. \tag{2.17}$$

Разумеется, достаточно потребовать от f и g, чтобы правая часть (2.17) определяла непрерывный функционал на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3\ni v$. Норму такого функционала обозначаем $|||f,g|||$.

Известно (см. [31–33] и др.), что благодаря условиям Дирихле (2.13) для любого $u\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$ выполняется неравенство Корна

$$\|\nabla_x u;L_2(\Omega_h)\|^2+\|u;L_2(\Omega_h)\|^2\equiv\|u;H^1(\Omega_h)\|^2\leqslant c_h E(u,u:\Omega_h), \tag{2.18}$$

причем постоянная c_h не зависит от u. Поэтому справедлива

Лемма 2.1. *Существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ *задачи* (2.17) *(или* (2.11)–(2.13)*) и верна оценка*

$$\|u; H^1(\Omega_h)\| \leqslant c_h^{1/2} |||f, g|||. \tag{2.19}$$

4. Весовые неравенства Корна. Постоянная c_h в (2.18) зависит от области Ω_h, а значит, и от параметра h. Имеющиеся оценки $c_h \leqslant ch^{-2}$ существенно загрубляют неравенство (2.19) и делают его бесполезным для обоснования асимптотики решения задачи о деформации пластины Ω_h. Как показано в [14, 33, 34], асимптотическая точность неравенства Корна достигается распределением весовых множителей в L_2-нормах смещений и их производных, причем требуется различать поперечное и продольные направления в пластине. Сформулируем одно из таких неравенств, установленное в [34] и приспособленное к краевым условиям Дирихле на Γ_h, т.е. к случаю (2.5).

Предложение 2.2. *Пусть* $u \in H^1(\Omega_h)^3$ *и* $u = 0$ *на боковой поверхности* Γ_h. *Тогда справедливо весовое неравенство Корна*

$$\| u \|^2 \leqslant CE(u, u; \Omega_h), \tag{2.20}$$

в котором постоянная C *не зависит от* u *и* $h \in (0, 1)$,

$$\| u \|^2 = \int\limits_{\Omega_h} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(|\nabla_y u_i|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |u_i|^2 \right) + \right.$$
$$\left. + |\partial_z u_3|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |u_3|^2 \right\} dx, \tag{2.21}$$

$\rho_h(x) = h + \operatorname{dist}\{y, \partial\omega\}$ – *весовая функция, имеющая порядки* $O(1)$ *на удалении от* Γ_h *и* $O(h)$ *вблизи* Γ_h.

Дальнейший асимптотический анализ подтверждает правильность распределения множителей h и ρ_h^{-1} в норме $\| \cdot \|$.

Получим теперь весовое неравенство Корна для случая (2.6). Следуя [14], сделаем замены

$$x \mapsto (y, \zeta), \quad u \mapsto U = (u_1, u_2, hu_3)^t. \tag{2.22}$$

В результате область Ω_h трансформируется в цилиндр Ω_1 единичной высоты. Кроме того, при $h \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$\|D(\nabla_x)^t u;\ L_2(\Omega_h)\|^2 \geqslant h \|D(\nabla_y, \partial_\zeta)^t U;\ L_2(\Omega_1)\|^2. \tag{2.23}$$

Представим поле U как сумму $U^\perp + U^0$, где U^0 – жесткое смещение,

$$U^0(y,\zeta) = d(y,\zeta)a, \quad a = d_\Omega^{-1} \int\limits_{\Omega_1} d(y,\zeta)^t U(y,\zeta) d\zeta \in \mathbb{R}^6,$$

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha x_3 & -\alpha x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha x_3 & 0 & \alpha x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha x_2 & -\alpha x_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$d_\Omega = \int\limits_{\Omega_1} d(y,\zeta)^t d(y,\zeta) dy\, d\zeta.$$

Матрица d_Ω размером 6×6 является матрицей Грама, симметрической и положительно определенной (столбцы матрицы d линейно независимы в $L_2(\Omega_1)^3$). Так как $D(\nabla_x)^t d(x) = \mathbb{O}$, имеем $D(\nabla_y, \partial_\zeta)^t U^\perp = D(\nabla_y, \partial_\zeta)^t U$. В силу (2.24)

$$\int\limits_{\Omega_1} d(y,\zeta)^t U^\perp(y,\zeta) dy\, d\zeta = \int\limits_{\Omega_1} d(y,\zeta)^t U(y,\zeta) dy\, d\zeta -$$
$$- \int\limits_{\Omega_1} d(y,\zeta)^t d(y,\zeta) dy\, d\zeta a = d_\Omega a - d_\Omega a = \mathbb{O} \in \mathbb{R}^6.$$

Следовательно, $U^\perp$ лежит в подпространстве векторов, ортогональных линеалу жестких смещений $\mathcal{R} = \{u : u = da, a \in \mathbb{R}^6\}$ и справедливо следующее неравенство Корна:

$$\|D(\nabla_y, \partial_\zeta)^t U; L_2(\Omega_1)\|^2 = \|D(\nabla_y, \partial_\zeta)^t U^\perp; L_2(\Omega_1)\|^2 \geqslant c_\omega \|U; H^1(\Omega_1)\|^2 \tag{2.25}$$

(см., например, теоремы 3.3.3 [32] и 2.2 [35]). Вариант неравенства Харди (см. лемму 2.4.1 [36]) доставляет оценку

$$\|U^\perp; H^1(\Omega_1)\| \geqslant c\|r^{-1}(1 + |\log r|)^{-1} U^\perp; L_2(\Omega_1)\|, \tag{2.26}$$

где r – расстояние до нижнего ребра $\partial\omega_1^- = \{x : y \in \partial\omega, \zeta = -1/2\}$ цилиндра Ω_1. Наконец, повторив доказательство теоремы 1.6.3 [37] с очевидными изменениями, связанными с наличием малого геометрического параметра $h^{\delta+3/2}$, получаем, что

$$\|U^\perp; L_2(\gamma_h)\|^2 \leqslant c\, h^{\delta+3/2} |\log h|^2 \|U^\perp; H^1(\Omega_1)\|^2 \tag{2.27}$$

($Hh^{\delta+3/2}$ – ширина защемленной плоски γ_h на нижнем основании цилиндра; см. (2.4) и (2.6)).

Найдем мажоранту для $|a^0|$. В силу (2.13) имеем

$$Ma \equiv \int\limits_{\gamma_h} d\left(y,-\frac{1}{2}\right)^t d\left(y,\frac{1}{2}\right)dy\,a =$$
$$= -\int\limits_{\gamma_h} d\left(y,-\frac{1}{2}\right)^t U^{\perp}\left(y,-\frac{1}{2}\right)dy \equiv b. \tag{2.28}$$

Используя неравенство (2.27), приходим к оценке

$$|b| \leqslant c\,\mathrm{mes}_2(\gamma_h)^{1/2}\|U^{\perp}; L_2(\gamma_h)\| \leqslant$$
$$\leqslant C|\log h|h^{\delta+3/2}\|D(\nabla_y,\partial_\zeta)^t U; L_2(\Omega_1)\|.$$

Так как столбцы матрицы $d(\cdot,-1/2)$ линейно независимы в $L_2(\partial\omega)^3$ (см. (2.24)), норма матрицы M из (2.28) оценивается снизу величиной $ch^{\delta+3/2}>0$, а значит,

$$|a| \leqslant ch^{-\delta-3/2}|b| \leqslant C|\log h|\cdot\|D(\nabla_y,\partial_\zeta)^t U; L_2(\Omega_1)\|.$$

В итоге получаем соотношение

$$\|U^0; H^1(\Omega_1)\| + \|r^{-1}(1+|\log r|)^{-1}U^0; L_2(\Omega_1)\| \leqslant$$
$$\leqslant c|\log h|\cdot\|D(\nabla_y,\partial_\zeta)^t U; L_2(\Omega_1)\|.$$

Теперь, используя это соотношение вместе с (2.25), (2.26) и (2.28), выполним в (2.23) замены, обратные для (2.22). Наконец, применяем один из вариантов одномерного неравенства Харди (по переменной n – "зарабатываем" множитель ρ_h) и формулируем результат.

Предложение 2.3. *При условии* (2.6) *для* $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ *выполнено неравенство*

$$E(u,u;\Omega_h) \geqslant c|\log h|^{-1}\int\limits_{\Omega_h}\sum_{i=1}^{2}\{|\nabla_y u_i|^2 + h^2\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\right|\right) +$$
$$+|\partial_z u_3|^2 + \rho_h^{-1}(1+|\log\rho_h|)^{-2}(|u_1|^2+|u_2|^2+h^2|u_3|^2)\}dx, \tag{2.29}$$

где обозначения аналогичны использованным в (2.21).

Установим еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.4. *Для* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$ *положим*

$$\bar{u}_j(y) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} u_j(y,z)dz. \tag{2.30}$$

Справедливо неравенство

$$\|D(\nabla_y, 0)^t(u - \bar{u}_3 e^3); L_2(\Omega_h)\| \leqslant cE(u, u; \Omega_h)^{1/2} \tag{2.31}$$

с постоянной c*, не зависящей от* u *и* $h > 0$.

Доказательство. В согласии с (2.13) и (2.5) продолжим u нулем на слой $\{x : |z| < h/2\}$ с сохранением класса H^1. Разобьем слой на кубы с ребрами длиной h. Достаточно проверить неравенство (2.31) на каждом таком кубе Q_h (т.е. в (2.31) заменить Ω_h на Q_h). Пусть

$$u = u^\perp + u^0, \quad u^0(x) = d(x)a, \quad a \in \mathbb{R}^6, \quad \int\limits_{Q_h} d(x)^t u^\perp(x)dx = 0,$$

а центр куба для определенности помещен в начало координат. Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что $D(\nabla_y, 0)^t(u - u_3^0 e^3)$. Для $u^\perp$ выполняется подобное (2.25) соотношение

$$\|\nabla_x u^\perp; L_2(Q_h)\|^2 + h^{-2}\|u^\perp; L_2(Q_h)\|^2 \leqslant cE(u^\perp, u^\perp; Q_h) = cE(u, u; Q_h) \tag{2.32}$$

(появление множителя h^{-2} вызвано растяжением координат, переводящим Q_h в Q_1). Остается упомянуть очевидную оценку

$$\|D(\nabla_y, 0)^t(u^\perp - \bar{u}_3^\perp e^3); L_2(Q_h)\| \leqslant c\|\nabla_y u^\perp); L_2(Q_h)\|. \bullet$$

Замечание 2.5. 1) В доказательстве леммы 2.4 условия (2.13) были употреблены лишь для продолжения поля u (и последующего разбиения слоя на кубы). Разумеется, неравенство (2.31) сохраняет силу без каких-либо ограничений на $u \in H^1(\Omega_h)^3$. Для проверки этого сначала нужно разбить узкое множество $\Omega_h \cap \mathcal{O}_h$ на подмножества диаметром $O(h)$ и повторить процедуру (независимость постоянной c в (2.32) от элемента разбиения гарантируется результатами [33] и гладкостью контура $\partial\omega$). Остаток области $\Omega_h \setminus \mathcal{O}_h$ покрывается прежними кубами.

2) Если защемленная полоска γ_h достаточно широка, то для поля $u \in \overset{\circ}{H}(\Omega_h)^3$ вместо (2.29) оказывается верным более сильное неравенство (2.20). Пусть, например,

$$\gamma(s) = \{\eta : \eta_2 = -1/2,\ 0 < \eta_1 < H\}, \tag{2.33}$$

т.е. $\delta = -1/2$ в (2.6). Тогда справедлива формула (2.32), в которой $u^\perp$ и Q_h заменены на u и $\Omega_h \cap \mathcal{O}_h$ (применили упомянутое разбиение и результаты [33]). При подходящей срезке X, равной единице на $Q_h \cap \mathcal{O}_h$ и нулю на Γ_h, имеем

$$|\!|(1-X)u|\!|^2 + E((1-X)u,(1-X)u;\Omega_h) + E(Xu, Xu;\Omega_h) \leqslant$$
$$\leqslant c(E(u,u;\Omega_h) + \|\nabla_x u; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|^2 + h^{-2}\|u; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|^2).$$

Поскольку поле Xu удовлетворяет условиям предложения 2.2, закончить рассуждения не составляет труда.

Завершаем параграф формулировкой утверждений о следах, которые выводятся из предложений 2.2 и 2.3 по известной схеме (см. §1.6 [37]).

Предложение 2.6. *Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$. Выражение*

$$h^{1/2}\sum_{i=1}^{2}\|\rho_h^{-1}u_i(\cdot,\pm h/2); L_2(\omega)\| + h^{3/2}\|\rho_h^{-2}u_3(\cdot,\pm h/2); L_2(\omega)\|$$

в случае (2.5) *и выражение*

$$|\log h| h^{1/2}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\|\rho_h^{-1/2}(1+|\log\rho_h|)^{-1}u_i(\cdot,\pm h/2); L_2(\omega)\| +$$
$$+ h\|\rho_h^{-1/2}(1+|\log\rho_h|)^{-1}u_3(\cdot,\pm h/2); L_2(\omega)\|\Big\}$$

в случае (2.6) *не превосходят величины* $cE(u.u;\Omega_h)^{1/2}$.

§3. Главный член асимптотики

1. Асимптотические конструкции. В этом параграфе исследуется асимптотика решения задачи (2.11)–(2.13) вне окрестности $\mathcal{O}_h$ боковой поверхности Γ_h пластины. Оказывается, что предполагаемые конструкции пригодны для определения главного асимптотического члена в случае (2.5).

Примем обычный для тонких упругих тел асимптотический анзац

$$u(x) \sim h^{-2}\mathcal{U}^{-2}(y,\zeta) + h^{-1}\mathcal{U}^{-1}(y,\zeta) + h^0\mathcal{U}^0(y,\zeta) + \dots, \qquad (3.1)$$

где $\zeta = h^{-1}z$ – быстрая переменная, а коэффициенты $\mathcal{U}^q$ находятся из рекуррентной последовательности предельных задач на отрезке Υ. Благодаря полиномиальному свойству системы теории упругости (см. [36, 38] и [39; §3, §5]) уточняем структуру начальных членов ряда (3.1):

$$\mathcal{U}^{-2}(y) = w_3(y)e^3, \quad \mathcal{U}^{-1}(y,\zeta) = \sum_{i=1}^{2}\{w_i(y) - \zeta\partial_i w_3(y)\}e^i. \qquad (3.2)$$

Здесь $\partial_i = \partial/\partial y_i$, e^j – орт оси x_j, а $w = (w_1, w_2, w_3)^t$ – неизвестный вектор, подлежащий дальнейшему определению. Компонента w_3 имеет смысл осредненного по толщине прогиба пластины, а w_1 и w_2 – средние продольных смещений. Отметим, что в следующих параграфах к формулам (3.1) и (3.2) присоединяются младшие члены.

В силу [39] согласованное с (3.1), (3.2) представление правых частей f и g выглядит так:

$$f(x) = h^{-1}f^0(y,\zeta) + h^0\bar{f}^0(y) + \tilde{f}^0(x), \quad g^{\pm}(x) = h^0 g^{0\pm}(y) + \tilde{g}^{0\pm}(x). \qquad (3.3)$$

При этом $g^{\pm}$ – сужения g на основания $\Sigma^{\pm} = \{x : y \in \omega, z = \pm h/2\}$ пластины (точнее, на их части $\Sigma^{\pm}_{\gamma} = \{x \in \Sigma^{\pm} : (h^{-1}n, \pm 1/2) \notin \gamma(s)\}$). Выделенные в (3.3) слагаемые подчиним условиям

$$\int_{-1/2}^{1/2} f_3^0(y,\zeta)d\zeta + g_3^{0+}(y) + g_3^{0-}(y) = 0, \qquad (3.4)$$
$$\bar{f}_i^0(y) = 0, \quad i = 1,2, \quad y \in \omega.$$

Уточнение разложений (3.3) или оценки для остатков $\tilde{f}^0$ и $\tilde{g}^{0\pm}$ приводятся далее. Подчеркнем, что формулы (3.3) и (3.4) отвечают физической природе задачи (см. п. 4 этого параграфа).

2. Предельные задачи. Замена $z \mapsto \zeta$ приводит к расщеплению оператора системы (2.1.1)

$$L(h,x,\nabla_x) = h^{-2}L^0(y,\zeta,\partial_\zeta) + h^{-1}L^1(y,\zeta,\nabla_y,\partial_\zeta) + h^0L^2(y,\zeta,\nabla_y). \qquad (3.5)$$

В укороченных обозначениях $\partial_\zeta = \partial/\partial\zeta$ и

$$\mathbb{D}_y = D(\nabla_y, 0), \quad \mathbb{D}_1 = D(e^3), \quad \mathbb{D}_\zeta = D(0,0,\partial_\zeta) = \mathbb{D}_1 \partial_\zeta \tag{3.6}$$

коэффициенты L^j имеют вид

$$L^0 = -\mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_\zeta^t, \quad L^1 = -\mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t - \mathbb{D}_y A \mathbb{D}_\zeta^t, \quad L^2 = -\mathbb{D}_y A \mathbb{D}_y^t. \tag{3.7}$$

Поскольку $\nu = \pm e^3$ – нормаль к основанию $\Sigma^\pm$, для граничных операторов $B^\pm$ справедливы формулы

$$B^\pm(h, y, \nabla_x) = h^{-1} B^{0\pm}(y, \partial_\zeta) + h^0 B^{1\pm}(y, \nabla_y), \tag{3.8}$$

$$B^{0\pm} = \pm \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_\zeta^t, \quad B^{1\pm} = \pm \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t. \tag{3.9}$$

Подставим разложения (3.1), (3.3) и (3.5), (3.8) в соотношения (2.11), (2.12) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях h. В результате возникают следующие задачи для определения слагаемых $\mathcal{U}^{-2}, \dots, \mathcal{U}^1$ из (4.1):

$$\begin{gathered} L^0 \mathcal{U}^k = \mathcal{F}^k \equiv -L^1 \mathcal{U}^{k-1} - L^2 \mathcal{U}^{k-2} + \delta_{k,1} f^0 \text{ на } \Upsilon = (-1/2, +1/2), \\ B^{0\pm} \mathcal{U}^k = \mathcal{G}^{k\pm} \equiv -B^{1\pm} \mathcal{U}^{k-1} + \delta_{k,1} g^{0\pm} \text{ при } \zeta = \pm 1/2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь $k = -2, -1, 0, 1$ и $\mathcal{U}^p = 0$ в случае $p < -2$. Очередное утверждение известно и очевидно.

Лемма 3.1. *Задача Неймана для системы обыкновенных дифференциальных (по ζ) уравнений с параметром $y \in \omega$*

$$\begin{gathered} -\mathbb{D}_\zeta A(y,\zeta) \mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}(y,\zeta) = \mathcal{F}(y,\zeta), \quad \zeta \in \Upsilon, \\ \pm \mathbb{D}_1 A(y, \pm 1/2) \mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}(y, \pm 1/2) = \mathcal{G}^\pm(y) \end{gathered} \tag{3.11}$$

имеет решение в том и только в том случае, если выполнены условия разрешимости

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}_j(y,\zeta) d\zeta + \mathcal{G}_j^+(y) + \mathcal{G}_j^-(y) = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{3.12}$$

Решение $\mathcal{U}$ определено с точностью до постоянного слагаемого, но будучи нормировано условием

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{U}(y,\zeta) d\zeta = 0, \tag{3.13}$$

становится единственным, наследует от правых частей $\mathcal{F}, \mathcal{G}^{\pm}$ гладкую зависимость от параметра $y \in \omega$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{U}; H^{l+1}(\Upsilon)\| \leqslant c(\|\mathcal{F}; H^{l-1}(\Upsilon)\| + \sum_{\pm} |\mathcal{G}^{\pm}|),$$

где $l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ и постоянная c не зависит от $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}^{\pm}$.

3. Вычисление коэффициентов $\mathcal{U}^k$. Поскольку

$$\mathcal{F}^{-2} = 0, \quad \mathcal{G}^{-2\pm} = 0, \quad \mathcal{F}^{-1} = \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-2},$$
$$\mathcal{G}^{-1\pm} = \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-2},$$

непосредственной проверкой убеждаемся в том, что векторы $\mathcal{U}^{-2}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ из (3.2) удовлетворяют задачам (3.10) с $k = -2$ и $k = -1$. При этом удобно использовать “ключевое” равенство, вытекающее из определений (2.9) и (3.6),

$$\mathbb{D}_y e^3 = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{D}_1 e^i \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.14}$$

При $k = 0$ получаем

$$\mathcal{F}^0 = \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-1} + \mathbb{D}_y A \{\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^{-1} + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}_t^{-2}\} = \mathbb{D}_\zeta A \mathcal{Y} \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w,$$
$$\mathcal{G}^{0\pm} = \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}^t \mathcal{U}^{-1} = \mp \mathbb{D}_1 A \mathcal{Y} \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w. \tag{3.15}$$

Матрицы $\mathfrak{D}$ и $\mathcal{Y}$ размерами 3×6 и 6×6 находятся при помощи прямых преобразований; они имеют вид

$$\mathfrak{D}(\nabla_y) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1^2 & \partial_2^2 & \alpha^{-1}\partial_1\partial_2 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$
$$\mathcal{Y}(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & -\zeta\,\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{I}_q$ и $\mathbb{O}_q$ – единичная и нулевая матрицы размером $q \times q$. Обращаем внимание на то, что благодаря (3.14) и (3.2) выражение из фигурных скобок в (3.15) равно нулю.

Интегрируя по частям, обнаруживаем, что правые части (3.15) удовлетворяют условиям разрешимости (3.12). Таким образом,

$$\mathcal{U}^0(y, \zeta) = \mathcal{V}(y, \zeta) \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(y), \tag{3.17}$$

где $\mathcal{V}(y,\zeta)$ – 3×6-матрица, для которой верны равенства

$$\begin{aligned} &-\mathbb{D}_\zeta A\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} = \mathbb{D}_\zeta A\mathcal{Y} \quad \text{на} \quad \Upsilon, \\ &\pm \mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} = \mp\mathbb{D}_1 A\mathcal{Y} \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Иными словами, столбцы $\mathcal{V}^1,\dots,\mathcal{V}^6$ матрицы $\mathcal{V}$ являются решениями задачи (3.11) со специальными правыми частями. Подчиним эти столбцы условиям ортогональности (3.13) – по лемме 3.1 матрица-функция $\mathcal{V}$ гладкая на $\bar\omega\times\overline{\Upsilon}$.

Обратимся к задаче (3.10) при $k=1$. Имеем

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^1 = \mathbb{D}_\zeta A\mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-1}) + f^0, \\ &\mathcal{G}^{1\pm} = \mp\mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0 + g^{0\pm}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Покажем, что в силу (3.4) для $\mathcal{F}_3^1$ и $\mathcal{G}_3^{1\pm}$ выполнено условие (3.12) с $j=3$. Интегрируя по частям при учете равенств (3.4), (3.14) и (3.15), (3.18), находим, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}_3^1 d\zeta + \sum_\pm \mathcal{G}_3^{1\pm} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{3t}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-1}) d\zeta = \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int\limits_{-1/2}^{1/2} (\mathbb{D}_\zeta^t \zeta e^i)^t A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y}) d\zeta \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w = \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big\{ -\int\limits_{-1/2}^{1/2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_\zeta A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y}) d\zeta + \\ &+ \sum_\pm \pm\zeta e^{it}\mathbb{D}_1 A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y})\Big|_{\zeta=\pm 1/2} \Big\} \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Первые два условия разрешимости (3.12) запишем так:

$$-\int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{it}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y}) d\zeta \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w = \mathfrak{F}_i. \tag{3.21}$$

Здесь $i = 1, 2$ и

$$\mathfrak{F}_i(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f_i^0(y,\zeta)d\zeta + \sum_{\pm} g_i^{0\pm}(y). \qquad (3.22)$$

Заметим, что в согласии с (3.16) строка $-e^{it}\mathbb{D}_y$ совпадает с i-той строкой матрицы $\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathcal{Y}(\zeta)^t$. Поэтому соотношения (3.21) являются двумя верхними строками системы дифференциальных (по y) уравнений

$$\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathfrak{M}(y)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(y) = \mathfrak{F}(y), \quad y \in \omega, \qquad (3.23)$$

где $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)^t$, а $\mathfrak{M}$ – матрица размером 6×6,

$$\mathfrak{M}(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \mathcal{Y}(\zeta)^t A(y,\zeta)(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V}(y,\zeta) + \mathcal{Y}(\zeta))d\zeta. \qquad (3.24)$$

Для того чтобы получить третью строку *результирующей* системы (3.23), рассмотрим невязку суммы $h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + \ldots + h^1\mathcal{U}^1$ в уравнениях (2.11), (2.12), считая, что $\tilde{f}^0 = 0$ и $\tilde{f}^{0\pm}$ в (3.3). Имеем

$$\begin{gathered} L(h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + \ldots + h^1\mathcal{U}^1) - f = h^{-4}L^0\mathcal{U}^{-2} + h^{-3}(L^0\mathcal{U}^{-1} + L^1\mathcal{U}^{-2}) + \\ + h^{-2}(L^0\mathcal{U}^0 + L^1\mathcal{U}^{-1} + L^2\mathcal{U}^{-2}) + h^{-1}(L^0\mathcal{U}^1 + L^1\mathcal{U}^0 + L^2\mathcal{U}^{-1} - f^0) + \\ + h^0(L^1\mathcal{U}^1 + L^2\mathcal{U}^0 - \bar{f}^0) + h^1 L^2\mathcal{U}^1. \end{gathered} \qquad (3.25)$$

Согласно (3.10) множители при $h^{-4}, \ldots, h^{-1}$ аннулируются. Аналогично

$$B^{\pm}(h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + \ldots + h^1\mathcal{U}^1) - g^{\pm} = h^1 B^{1\pm}\mathcal{U}^1. \qquad (3.26)$$

Оставшиеся в (3.25) слагаемые $h^0 \ldots + h^1 \ldots$ и правая часть (3.16) образуют те же структуры, что и в (3.3), но имеют дополнительный множитель h. Это наблюдение позволяет, в принципе, найти следующие члены асимптотики, однако при этом нужно подобное (3.4) условие ортогональности (само условие (3.4) использовано в (3.20) для обеспечения разрешимости задачи (3.10), $k = 1$). Таким образом, потребуем, чтобы

$$0 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{3t}(L^1\mathcal{U}^1 + L^2\mathcal{U}^0 - \bar{f}^0)d\zeta + \sum_{\pm} \pm e^{3t}B^{1\pm}\mathcal{U}^1\big|_{\zeta=\pm 1/2}.$$

Преобразуем это равенство, интегрируя по частям, учитывая уравнения (3.10) с правыми частями (3.19) и обращаясь еще раз к формуле (3.14). В соответствии с (3.7) и (3.9) получаем

$$0 = -\int_{-1/2}^{1/2} e^{3t}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0)d\zeta - \bar{f}_3^0 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-1/2}^{1/2} (\mathbb{D}_\zeta^t \zeta e^i)^t A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0)d\zeta - \bar{f}_3^0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big\{ \int_{-1/2}^{1/2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_\zeta A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0)d\zeta -$$

$$- \sum_{\pm} \pm\zeta e^{it}\mathbb{D}_1 A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0)\Big|_{\zeta=\pm 1/2}\Big\} - \bar{f}_3^0 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-1/2}^{1/2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-1})d\zeta - \mathfrak{F}_3,$$

где

$$\mathfrak{F}_3(y) = \bar{f}_3^0(y) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big\{ \int_{-1/2}^{1/2} \zeta f_i^0(y,\zeta)d\zeta + \sum_{\pm} \pm\frac{1}{2} g_i^{0\pm}(y) \Big\}. \quad (3.28)$$

В силу (3.16) и (2.9), (3.6) строка $-\sum\limits_{i=1}^{2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_y \frac{\partial}{\partial y_i}$, фигурирующая в последнем интеграле из (3.27), совпадает с третьей строкой оператор-матрицы $\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathcal{Y}(\zeta)^t$. Напомним, что $\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^{-1} = (\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y})\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w$ (см. (3.15) и (3.17)). Следовательно, равенство (3.27) есть ничто иное, как нижняя строка результирующей системы. Итак, система (3.23) установлена полностью.

Лемма 3.2. *Матрица $\mathfrak{M}$ из (3.24) симметрическая и положительно определенная.*

Доказательство. Интегрируя по частям при учете равенств (3.18), проверяем, что

$$\mathfrak{M} = \int_{-1/2}^{1/2} (\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y})^t A (\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y}) d\zeta.$$

Поэтому $\mathfrak{M}$ – (симметрическая) матрица Грама, построенная по столбцам матрицы $\mathcal{Z} = \mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{V} + \mathcal{Y}$ при помощи скалярного произведения $(A\bullet, \bullet)_\Upsilon$ в $L_2(\Upsilon)^6$. Заметим, что левый 3×3-блок у $\mathbb{D}_\zeta$ и нижние блоки у $\mathcal{Y}$ нулевые. Линейная независимость столбцов матрицы $\mathcal{Y}$ в $L_2(\Upsilon)^6$ наделяет этим же свойством матрицу $\mathcal{Z}$, что и требуется для положительной определенности $\mathfrak{M}$. $\bullet$

4. Обоснование асимптотики в случае заделки пластины в паз. Снабдим систему (3.23) условиями Дирихле

$$w_1(y) = w_2(y) = 0, \quad w_3(y) = \partial_n w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega; \tag{3.29}$$

здесь $\partial_n = \partial/\partial n$ – дифференцирование вдоль нормали. Ближайшая цель – оценить разность между решением u задачи (2.11)–(2.13) и асимптотическим приближением (3.1), построенным по решению w двумерной модели (3.23), (3.29).

Придадим точный смысл разложениям (3.3). Предположим, что

$$f^0 \in L_2(\omega \to L_2(\Upsilon)^3), g^0 \in L_2(\omega)^3, \bar{f}_3^0 \in H^{-1}(\omega), \tag{3.30}$$

$$h^{-1}\|\rho_h^2 \tilde{f}_3^0; L_2(\Omega_h)\| + h^{-1/2} \sum_{\pm} \|\rho_h^2 \tilde{g}_3^{0\pm}; L_2(\Sigma_\gamma^\pm)\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (\|\rho_h \tilde{f}_i^0; L_2(\Omega_h)\| + h^{1/2} \sum_{\pm} \|\rho_h \tilde{g}_i^{0\pm}; L_2(\Sigma_\gamma^\pm)\|) = \tilde{\mathcal{N}}_0. \tag{3.31}$$

При этом $H^s(\omega \to \mathcal{B})$ – пространство абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{B}$, т.е.

$$\|Z; H^s(\omega \to \mathcal{B})\| = \left(\sum_{k=0}^{s} \int_\omega \|\nabla_y^k Z; \mathcal{B}\|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Последнее включение в (3.30) означает, что

$$\bar{f}_3^0(y) = \bar{f}_3^{00}(y) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \bar{f}_3^{0i}(y),$$

$$\|\bar{f}_3^0; H^{-1}(\omega)\| = \inf \sum_{p=0}^{2} \|\bar{f}_3^{0p}; L_2(\omega)\|$$

(infimum вычисляются по всем представлениям). Соотношение (3.31) выражает малость остатков и согласовано с неравенством (2.20) – считается, что $\tilde{\mathcal{N}}_0$ – величина "порядка единицы". Наконец, под $\mathcal{N}_0$ подразумевается сумма норм функций (3.30).

Замечание 3.3. В согласии с (3.30) и (3.31) правая часть интегрального тождества (2.17) понимается так:

$$(h^{-1}f^0 + e^3\bar{f}_3^{00} + \tilde{f}^0, v)_{\Omega_h} + \sum_{i=1}^{2} (\bar{f}_3^{0i}, \partial_i v_3)_{\Omega_h} + (g, v_3)_{\Sigma_h}.$$

Аналогичный смысл требуется придать и равенству (3.27): для любой пробной функции $\bar{v}_3 \in H^1(\omega)$, обращающейся в нуль на $\partial\omega$, выполняется интегральное тождество

$$(A\{\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathcal{U}^0\}, \mathbb{D}_y^t e^3 \bar{v}_3)_{\Omega_h} = (\bar{f}_3^{00}, \bar{v}_3)_\omega + \sum_{i=1}^{2} (\bar{f}_3^{0i}, \partial_i \bar{v}_3)_\omega. \quad (3.32)$$

В силу (3.22) и (3.28) справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{F}; L_2(\omega)^2 \times H^{-1}(\omega)\| \leqslant c\mathcal{N}_0. \quad (3.33)$$

Система (3.23) наследует полиномиальное свойство от системы теории упругости. В самом деле, по лемме 3.2

$$\mathfrak{E}(w, w) = (\mathfrak{M}\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w, \mathfrak{D}(\nabla_y)^t w)_\omega \geqslant c_{\mathfrak{M}} \|\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w; L_2(\omega)\|^2, \quad (3.34)$$

а значит, равенство $\mathfrak{E}(w, w) = 0$ влечет соотношения $\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w = 0$ и $w \in \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}$ – линеал векторных полиномов

$$(c_1 - C_3 y_2, c_2 + C_3 y_1, c_3 + C_1 y_1 + C_2 y_2), \quad c, C \in \mathbb{R}^3. \quad (3.35)$$

Кроме того, матрица $\mathfrak{D}$ алгебраически комплектна, т.е. оператор $\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathfrak{M}\mathfrak{D}(\nabla_y)^t$ формально положителен. Итак, результаты [31, 38] доставляют следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{F} \in H^{l-1}(\omega)^2 \times H^{l-2}(\omega)$. Тогда существует единственное решение $w \in H^{l+1}(\omega)^2 \times H^{l+2}(\omega)$ задачи (3.23), (3.29) и верна оценка*

$$\|w; H^{l+1}(\omega)^2 \times H^{l+2}(\omega)\| \leqslant c_l \|\mathfrak{F}; H^{l-1}(\omega)^2 \times H^{l-2}(\omega)\| \qquad (3.36)$$

с постоянной c_l, не зависящей от $\mathfrak{F}$.

Так как $\mathcal{U}^{-2}$, $\mathcal{U}^{-1}$, $\mathcal{U}^{0}$ определены формулами (3.2), (3.17), а $\mathcal{U}^{1}$ – решение задачи (3.11) с правыми частями (3.19), то справедливы включения

$$\mathcal{U}^k \in H^{1-k}(\omega \to H^2(\Upsilon)^3), \quad k = -2, -1, 0, 1, \qquad (3.37)$$

причем благодаря (3.33) и (3.36) нормы векторов (3.37) мажорируются величиной $c\mathcal{N}_0$.

По причине недостаточной гладкости (по переменным y) слагаемое $\mathcal{U}^1$ не может быть включено в асимптотическое приближение. В связи со сказанным ограничимся тремя членами

$$U_X^0 = h^{-2} X\mathcal{U}^{-2} + h^{-1} X\mathcal{U}^{-1} + h^0 X\mathcal{U}^0. \qquad (3.38)$$

Срезающая функция $X \in C_0^\infty(\omega)$ введена в (3.38) для соблюдения условий Дирихле (2.13), т.е. $X = 0$ на γ_h. Можно считать, что $X = 1$ на $\Omega_h \setminus \mathcal{O}_h$ и внутри $\mathcal{O}_h$ функция X зависит от быстрой переменной $h^{-1}n$. Иными словами,

$$|\nabla_y^k X(y)| \leqslant ch^{-k}, \ \mathrm{supp}|\nabla_y^k X| \subset \mathcal{O}_h, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.39)$$

Итак, вектор U_X^0 принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)$. Вычислим невязки, оставляемые им в уравнении (2.11) и краевом условии (2.12). Поступая аналогично (3.25) и (3.26), получаем

$$LU_X^0 - f = L(1-X)(h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + h^{-1}\mathcal{U}^{-1} + h^0\mathcal{U}^0) +$$
$$+ h^{-1}(L^1\mathcal{U}^0 + L^2\mathcal{U}^1 - f^0) + h^0(L^2\mathcal{U}^0 - \bar{f}^0) - \tilde{f}^0, \qquad (3.40)$$
$$B^\pm U_X^0 - g^\pm = B^\pm(1-X)(h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + h^{-1}\mathcal{U}^{-1} + h^0\mathcal{U}^0) +$$
$$+ h^0(B^{1\pm}\mathcal{U}^0 - g^{0\pm}) - \tilde{g}^{0\pm}. \qquad (3.41)$$

Отметим, что в силу (3.19) и (3.7), (3.9) множители при h^{-1} в (3.40) и h^0 в (3.41) равны соответственно $-L^0\mathcal{U}^1$ и $B^{0\pm}\mathcal{U}^1$. Умножим (3.40) на $R^0 = U_X^0 - u$ и проинтегрируем по частям при учете равенств $f = Lu$, $g^{\pm} = B^{\pm}u$ и краевого условия (3.41). В результате приходим к формуле

$$E(R^0, R^0; \Omega_h) = \langle AD^t(1-X)(h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + h^{-1}\mathcal{U}^{-1} + h^0\mathcal{U}^0), D^t R^0\rangle -$$
$$-\langle A\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1, \mathbb{D}^t_z R^0\rangle + \tag{3.42}$$
$$+\left\{\langle A\mathbb{D}^t_y\, \mathcal{U}^0, \mathbb{D}^t_y R^0\rangle - \langle \bar{f}^{00}_3, R^0_3\rangle - \sum_{i=1}^{2}\langle \bar{f}^{0i}_3, \partial_i R^0_3\rangle\right\} -$$
$$-\{\langle \tilde{f}^0, R^0\rangle + \sum_{\pm}(\tilde{g}^{0\pm}, R^0)_{\Sigma^{\pm}_\gamma}\} \equiv I_X - I_0 + I_3 - \tilde{I}_0.$$

Здесь $D = D(\nabla_x)$, $\mathbb{D}_z = h^{-1}\mathbb{D}_\zeta$ и для краткости скалярное произведение в $L_2(\Omega_h)$ обозначено $\langle , \rangle$. Подчеркнем, что каждый из сомножителей справа в (3.42) принадлежит нужному пространству $L_2(\Omega_h)$ или $L_2(\Sigma^{\pm}_\gamma)$.

Замечание 3.5. Для придания законности промежуточным выкладкам (3.40) и (3.41) можно воспользоваться стандартным приемом: приблизить f^0, $g^{0\pm}$ и $\bar{f}^0_3$ гладкими функциями, вывести равенство (3.42) и затем перейти к пределу (при этом нет необходимости отслеживать зависимости от параметра h – он фиксирован). Доступен и иной путь: подставить $v = R^0$ в тождество (2.17) и вычесть из него схожее интегральное тождество для R^0.

Оценим выражения $I_{\dots}$ из (3.42). Благодаря формуле (3.31) и предложению 2.2 обработка $\tilde{I}_0$ очевидна:

$$|\tilde{I}_0| \leqslant c\mathcal{N}_0 \| R^0 \| \leqslant c\mathcal{N}_0 E(R^0, R^0; \Omega_h)^{1/2}. \tag{3.43}$$

Займемся I_0. Имеем

$$|I_0 + \langle A\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1, \mathbb{D}^t_y R^0\rangle| = |\langle A\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1, D^t R^0\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant c\langle |D^t R^0|\rangle\, \langle |D^t_\zeta\, \mathcal{U}^1|\rangle, \tag{3.44}$$

где $\langle | \bullet |\rangle$ – укороченное обозначение для $\|\bullet; L_2(\Omega_h)\|$. Так как $\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1 \in L_2(\omega \to L_2(\Upsilon)^3)$ в силу (3.37), справедливо соотношение

$$\langle |\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1|\rangle = h^{1/2}\|\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1; L_2(\omega \to L_2(\Upsilon))\| \leqslant ch^{1/2}\mathcal{N}_0$$

(учтена замена $z \mapsto \zeta$). Теперь закончить оценку (3.44) нетрудно.

Обратимся к I_3. В согласии с (2.30) положим

$$\bar{R}^0_3(y) = h^{-1} \int\limits_{-h/2}^{h/2} R^0_3(y,z)dz$$

и поставим $\bar{R}^0_3$ на место $\bar{v}_3$ в (3.32). После несложных преобразований, использующих помимо (3.32) формулы $\langle \bar{f}^{00}_3, R^0_3\rangle = (\bar{f}^{00}_3, \bar{R}^0_3)_\omega$ и т.п. (функции $\bar{f}^{0p}_3$ не зависят от ζ), приходим к равенству

$$I_3 + \langle A\mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1, \mathbb{D}^t_y R^0\rangle = \langle A(\mathbb{D}^t_y\, \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1), \mathbb{D}^t_y (R^0 - e^3 \bar{R}^0_3)\rangle \equiv \bar{I}_3.$$

Аппелируя к лемме 2.4, выводим оценку

$$|\bar{I}_3| \leqslant c\langle|\mathbb{D}^t_y (R^0 - e^3 \bar{R}^0_3)|\rangle\, \langle|\mathbb{D}^t_y\, \mathcal{U}^0 + \mathbb{D}^t_\zeta\, \mathcal{U}^1|\rangle \leqslant$$
$$\leqslant cE(R^0, R^0; \Omega_h)^{1/2} h^{1/2}(\|\mathcal{U}^0; H^1(\omega \to L_2(\Upsilon))\|+$$
$$+\|\mathcal{U}^1; L_2(\omega \to H^1(\Upsilon))\|) \leqslant c\, h^{1/2}\mathcal{N}_0 E(R^0, R^0; \Omega_h)^{1/2}.$$

Подытоживая выкладки, заключаем, что

$$|I_3 - I_0| \leqslant c\, h^{1/2}\mathcal{N}_0 E(R^0, R^0; \Omega_h)^{1/2}. \tag{3.45}$$

Осталось разобраться с I_X. Для этого потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть $p = 0, 1, 2$ и $W_p \in H^{p+1}(\omega \to L_2(\Upsilon))$, причем $W_1 = 0$ и $W_2 = \partial_n W_2 = 0$ на $\partial\omega$. Тогда*

$$\|W_p; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| \leqslant c\, h^{p+1}\|W_p; H^{p+1}(\omega \to L_2(\Upsilon)\|. \tag{3.46}$$

Доказательство. Для двумерной ch-окрестности контура $\partial\omega$ сохраним обозначение $\mathcal{O}_h$. В силу неравенства Фридрихса–Пуанкаре, использующего краевое условие Дирихле на $\partial\omega$, находим, что при $i = 1, 2$

$$\|W_i; L_2(\omega \cap \mathcal{O}_h \to L_2(\Upsilon))\| \leqslant c\, h^i\|\nabla^i_y W_i; L_2(\omega \cap \mathcal{O}_h \to L_2(\Upsilon))\|.$$

Таким образом, три оценки (3.46) сведены к случаю $p = 0$. Сама же оценка

$$\|W_0; L_2(\omega \cap \mathcal{O}_h \to L_2(\Upsilon))\| \leqslant c\, h^{1/2}\|W_0; H^1(\omega \to L_2(\Upsilon))\|$$

по существу установлена при проверке леммы 4.3 в [35], опирающейся на известный вариант одномерного неравенства Харди. Наконец, дополнительный множитель $h^{1/2}$ возникает из-за замены $\zeta \mapsto z$. $\bullet$

Для обработки I_X воспользуемся леммой 3.6 – ее посылки обеспечиваются условиями Дирихле (3.29) и включениями (3.37). Вспоминая свойства (3.39) срезки X, приводим цепочку соотношений

$$|I_X| \leqslant c\langle|D^t R^0|\rangle \sum_{p=0}^{2} h^{-p}\{h^{-1}\|\mathcal{U}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|+$$

$$+h^{-1}\|\mathbb{D}_\zeta^t\, \mathcal{U}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| + \|\mathbb{D}_y^t\, \mathcal{U}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|\} \leqslant$$

$$\leqslant c\langle|D^t R^0|\rangle \sum_{p=0}^{2} h^{-p}(h^p\|\mathcal{U}^{-p}; H^{p+1}(\omega \to L_2(\Upsilon))\|+ \tag{3.47}$$

$$+h^p\|\mathcal{U}^{-p}; H^{p+1}(\omega \to H^1(\Upsilon))\| + h^{p+\delta_{0,p}/2}\|\mathcal{U}^{-p}; H^{p+1}(\omega \to L_2(\Upsilon))\|) \leqslant$$

$$\leqslant cE(R^0, R^0; \Omega_h)^{1/2}\mathcal{N}_0.$$

Пояснение: при рассмотрении первых двух членов в фигурных скобках неравенство (3.46) применялось для $\mathcal{U}^{-p} = W_p$, а при рассмотрении третьего – для $\mathcal{U}^{-i} = W_{i-1}$, $i = 1, 2$. Оставшийся член $\|\mathbb{D}_y\, \mathcal{U}^0; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|$ мажорируется величиной с $h^{1/2}\|\mathcal{U}^0; H^1(\omega \to L_2(\Upsilon))\|$.

Итак, формула (3.42), оценки (3.43), (3.45), (3.47) и весовое неравенство Корна (2.20) позволяют обосновать асимптотику (3.1).

Теорема 3.7. *Пусть выполнены соотношения* (3.3), (3.4) *и* (3.30), (3.31), *определяющие, в частности, величины* $\mathcal{N}_0$ *и* $\tilde{\mathcal{N}}_0$. *Тогда решение* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)$ *задачи* (2.11)–(2.13) *и асимптотическое приближение* (3.38), *построенное по решению* w *результирующей задачи* (3.23), (3.29) *при помощи формул* (3.2), (3.17), *связаны неравенством*

$$|\!|\!| U_X^0 - u |\!|\!| + \|\varepsilon(U_X^0) - \varepsilon(u); L_2(\Omega_h)\| \leqslant ch^0(\mathcal{N}_0 + \tilde{\mathcal{N}}_0), \tag{3.48}$$

в котором $\| \cdot \|$ *– весовая норма из* (2.21), *а постоянная* c *не зависит ни от* $h \in (0,1)$, *ни от* f *и* $g^{\pm}$.

Применяя лемму 3.6 так же, как и в выкладке (3.47), выводим, что при $p = 0, 1, 2$ верны соотношения

$$\|(1 - X)\mathcal{U}^{-p}\| + \|\varepsilon((1 - X)\mathcal{U}^{-p}); L_2(\Omega_h)\| \leqslant c\mathcal{N}_0. \qquad (3.49)$$

Таким образом, справедливо

Следствие 3.8. *Неравенство* (3.48) *сохраняется и при удалении срезки* X *из определения* (3.38), *т.е. замене* U^0_X *суммой*

$$U^0(x) = h^{-2}\mathcal{U}^{-2}(y) + h^{-1}\mathcal{U}^{-1}(y, h^{-1}z) + h^0\mathcal{U}^0(y, h^{-1}z). \qquad (3.50)$$

5. Обсуждение. Представления (3.1)–(3.4) имеют механическую подоплеку. Как уже упоминалось, $h^{-2}w_3(y)$ – прогиб, а $h^{-1}w_i(y)$ – продольные смещения пластины, осредненные по толщине; кроме того, $h^{-1}\partial_i w_3(y)$ – углы поворотов, фигурирующие во втором члене асимптотического анзаца (3.2). Соответственно $h^0\bar{f}_3(y)$ – поперечная и $h^{-1}\mathfrak{F}_i(y)$ – продольные силы (см. (3.22)), а выражения из фигурных скобок в (3.28) пропорциональны изгибающим моментам. Различие показателей степеней h в этих механических характеристиках отражает очевидный факт: пластину легче изогнуть, чем растянуть. В частности, первое условие из (3.4) означает, что поперечная сила меньше по порядку, чем продольные. В согласии с (3.28) изгиб пластины может осуществляться и моментами, порожденными разнонаправленными и переменными нагрузками вдоль срединной поверхности пластины. Вообще же, требования (3.4) всегда можно соблюсти за счет переобозначений.

Пример 3.9. Пусть $g = 0$ и $f(x) = \mu\mathbf{g}$ – сила тяжести ($\mathbf{g}$ – вектор ускорения свободного поведения и μ – плотность материала, постоянные для простоты). Тогда $f^0 = 0$, $g^{0\pm} = 0$ и $\bar{f}^0_3(y) = \mu\mathbf{g}_3$. Компоненты $\tilde{f}^0_i = \mu\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2$, отправляются в остаток; при этом в (3.31) $\tilde{\mathcal{N}}_0 \leqslant \mu|\mathbf{g}|(h\mathrm{mes}_2\omega)^{1/2}$.

Пример 3.10. Пусть усилия приложены к верхнему основанию пластины, т.е. $f = 0$, $g^- = 0$ и $g^+(y) = h\mathbf{p}(y)$. В этом случае положим $f^0 = 0$, $g^{0\pm} = 0$, $\bar{f}^3(y) = \mathbf{p}_3(y)e^3$; $f^1(y,\zeta) = -\mathbf{p}_3(y)e^3$, $g^{1-} = 0$, $g^{1+}(y) = \mathbf{p}(y)$. Векторы с индексом “1” относятся к остатку, причем выполнено условие ортогональности, подобное (3.4).

В §5 последнее позволит построить очередной асимптотический член. Здесь же укажем, что величина $\tilde{\mathcal{N}}_0$ из (3.31) имеет порядок $h^{-1/2}$, однако оценка (3.48) с мажорантой $O(h^0)$ по-прежнему может быть получена, если учесть условие ортогональности для $f^1, g^{1\pm}$ и неравенство $\|u_3 - \bar{u}_3; L_2(\Omega_h)\| \leqslant c\, E(u, u; \Omega_h)^{1/2}$, очевидное в силу (2.20) и (2.30).

Для применимости линейной теории упругости, разумеется, деформации и углы поворотов обязаны быть малыми. Иными словами, нужно накладывать ограничения на величины $\mathcal{N}_0$ и $\tilde{\mathcal{N}}_0$ или производить перенормировку данных (подходящий сомножитель h^m уже использовался в примере 3.10 при $m = 1$).

Каждый из интегралов, входящих в сумму $|\!|\!|U^0|\!|\!|^2 + \|\varepsilon(U^0); L_2(\Omega_h)\|$ является величиной $O(h^{-1/2})$ и согласно (3.29) весовые множители в (2.21) оказывают одинаковое влияние на сходимость интегралов. Эти факты демонстрируют правильность распределения весовых множителей в норме $|\!|\!|\bullet|\!|\!|$ и оправдывают отделение асимптотики U^0 в решении u.

В следующем параграфе асимптотическое решение U^0 уточняется пограничным слоем и проверяется аналогичное (3.48) неравенство с множителем $h^{1/2}$ в мажоранте (теорема 4.9). Поскольку энергетическая норма пограничного слоя составляет $O(h^0)$, оценки из теоремы 3.7 и следствия 3.8 асимптотически точные. В некотором смысле они предельны и по дифференциальным свойствам правых частей. Так, если $f^0 \notin L_2(\omega \to L_2(\Upsilon)^3)$, но $f^0 \in H^{-1}(\omega \to L_2(\Upsilon)^3)$, то решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ задачи (2.11)–(2.13) существует по-прежнему, однако неравенство (3.48) нарушается из-за явления внутренних пограничных слоев (см., например, [40]).

§4. Пограничный слой при заделке пластины в паз

1. Невязка в условиях Дирихле. Просматривая в п. 3 §3 еще раз, обнаруживаем, что "узким местом", приведшим к понижению показателя степени h в мажоранте (3.48), оказывается оценка выражения I_X, возникшего из-за наличия срезки X в (3.38). Несмотря на то, что мы избавились от X в следствие 3.8, роль этой срезки существенна, поскольку приближение U^0 обязано удовлетворять условию Дирихле (2.11). Однако имеется иной способ учета краевых условий около боковой поверхности пластины – построение пограничного слоя, как раз и являющегося предметом данного параграфа.

Усилим требования гладкости (3.30):

$$f^0 \in H^1(\omega \to L_2(\Upsilon)^3), g^{0\pm} \in H^1(\omega)^3, \bar{f}_3^0 \in L_2(\omega). \tag{4.1}$$

Согласно (3.22), (3.28) и (3.36)

$$\mathfrak{F} \in H^1(\omega)^2 \times L_2(\omega), \quad w \in H^3(\omega)^2 \times H^4(\omega), \tag{4.2}$$

причем соответствующие нормы $\mathfrak{F}$ и w не превосходят величины $c\mathcal{N}_1$, где $\mathcal{N}_1$ – сумма норм функций (4.1). Теперь включения (3.37) превращаются в такие:

$$\mathcal{U}^k \in H^{2-k}(\omega \to H^2(\Upsilon)^3), \quad k = -2, -1, 0, 1. \tag{4.3}$$

Поэтому производные $\partial_n^2 \mathcal{U}^{-2}$, $\partial_n \mathcal{U}^{-1}$ и $\mathcal{U}^0$ обладают следами на Γ_1 и по теоремам вложения

$$\partial_n^2 \mathcal{U}_\Gamma^{-2},\ \partial_n \mathcal{U}_\Gamma^{-1},\ \mathcal{U}_\Gamma^0 \in H^{3/2}(\partial\omega \to H^2(\Upsilon)^3) \subset H^1(\partial\omega \to H^2(\Upsilon)^3). \tag{4.4}$$

Очередная лемма, в частности, демонстрирует, как улучшается оценка (3.47), если следы (4.4) вдруг оказались нулевыми.

Лемма 4.1. *Справедливы неравенства*

$$h^{-1}\|\mathring{\mathcal{U}}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| + h^{-1/2}\|\nabla_y \mathring{\mathcal{U}}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| \leqslant c\, h^{p+1}\mathcal{N}_1, \tag{4.5}$$

где $p = 0, 1, 2$ *и* $\mathring{\mathcal{U}}^{-p} = \mathcal{U}^{-p} - (p!)^{-1} n^p \partial_n^p \mathcal{U}_\Gamma^{-p}$.

Доказательство. Благодаря краевым условиям (3.29) имеем

$$\mathring{\mathcal{U}}^0 = 0, \quad \mathring{\mathcal{U}}^{-1} = \partial_n \mathring{\mathcal{U}}^{-1} = 0,$$

$$\mathring{\mathcal{U}}^{-2} = \partial_n \mathring{\mathcal{U}}^{-2} = \partial_n^2 \mathring{\mathcal{U}}^{-2} = 0 \text{ при } y \in \partial\omega.$$

Поскольку $\partial_n^p \mathcal{U}_\Gamma^{-p}$ не зависит от переменной n, одномерное неравенство Фридрихса–Пуанкаре, примененное $p+1$ раз и проинтегрированное вдоль Γ_h, дает соотношение

$$\|\mathring{\mathcal{U}}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| \leqslant c\, h^{p+1}\|\partial_n^{p+1}\mathring{\mathcal{U}}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| =$$
$$= c\, h^{p+1}\|\partial_n^{p+1}\mathcal{U}^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\|.$$

Теперь достаточно сослаться на неравенство (3.46) с $W_p = \nabla_y^{p+1} \mathcal{U}^{-p}$ и включения (4.3). Так как $\nabla_y \partial_n^{p+1} \mathcal{U}^{-p} \in L_2(\Omega_h)$, множитель $h^{-1/2}$ при второй норме слева в (4.5) приобретается путем замены $z \mapsto \zeta$. •

Итак, главная часть невязки суммы (3.50) в краевом условии (2.13) имеет вид $h^0 g(s, \eta)$, где $\eta_1 = h^{-1} n$, $\eta_2 = \zeta$ – быстрые переменные (см. (2.2)) и

$$g(s, \eta) = -\frac{1}{2} \eta_1^2 \partial_n^2 \mathcal{U}_\Gamma^{-2}(s) - \eta_1 \partial_n \mathcal{U}_\Gamma^{-1}(s, \eta_2) - \mathcal{U}_\Gamma^0(s, \eta_2). \tag{4.6}$$

2. Предельная задача в полуполосе. Перейдем к криволинейным координатам (s, η_1, η_2) (правая тройка), сохраняя масштаб для длины дуги, но производя растяжение в нормальном к $\partial\omega$ и поперечном направлениях. Перезапись операторов L и $B^{\pm}$ в этих координатах и выделение главных (по h) частей порождает двумерную задачу, так как в пределе исчезает дифференцирование $\partial_s = \partial / \partial s$ по медленной переменной. В соответствии с (2.2) такая предельная задача ставится в полуполосе Π (см. (2.3)). Невязка (4.6) компенсируется решением $v^0(s, \eta)$ типа пограничного слоя. Фиксируем точку $s^0 \in \partial\omega$ и найдем задачу для определения $v^0(s^0, \cdot)$.

Предположим, что s^0 совпадает с началом координат $y = 0$, а оси y_1 и y_2 направлены вдоль касательной и внутренней нормали к $\partial\omega$.

Замечание 4.2. Для того чтобы сделать рассматриваемую ситуацию общей, достаточно научиться записывать задачу (2.11)–(2.13) в координатах $(\tilde{y}, z)$, повернутых относительно (y, z) на угол φ в плоскости пластины. С этой целью введем унитарные 3×3-матрицы

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -\alpha \sin 2\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \alpha \sin 2\varphi \\ \alpha \sin 2\varphi & -\alpha \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Верхний левый 2×2-блок матрицы θ обозначаем $\tilde{\theta}$. Преобразованные векторы определяются по формулам

$$\tilde{y} = \tilde{\theta} y, \quad \nabla_{\tilde{y}} = \tilde{\theta} \nabla_y, \quad \tilde{u} = \theta u, \quad \tilde{f} = \theta f, \quad \tilde{g}^{\pm} = \theta g^{\pm}, \quad \tilde{w} = \theta w.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$D(\nabla_y, \partial_z)^t = SD(\nabla_{\tilde{y}}, \partial_z)^t \theta, \quad \mathfrak{D}(\nabla_y)^t = \mathfrak{S}\mathfrak{D}(\nabla_{\tilde{y}})^t \theta,$$

где S и $\mathfrak{S}$ – 6×6-матрицы, также унитарные,

$$S = \begin{pmatrix} \Theta & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \theta' \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S} \begin{pmatrix} \Theta & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \Theta \end{pmatrix}.$$

причем θ' – матрица θ, транспонированная относительно неглавной диагонали (проходящей справа налево). Следовательно,

$$-\tilde{f} = \theta D(\nabla_y, \partial_z) A D(\nabla_y, \partial_z) u = \theta\theta^t D(\nabla_{\tilde{y}}, \partial_z) S^t A S D(\nabla_{\tilde{y}}, \partial_z)^t \theta u =$$

$$= D(\nabla_{\tilde{y}}, \partial_z) S^t A S D(\nabla_{\tilde{y}}, \partial_z) \tilde{u},$$

т.е. преобразованная матрица Гука $\tilde{A}$ вычисляется по формуле $\tilde{A} = S^{-1} A S$. Аналогичное равенство $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{M} \mathfrak{S}$ верно и для матрицы, фигурирующей в результирующей системе (2.23).

Так как $\eta_1 = h^{-1} y_2$, $\eta_2 = h^{-1} z$ при $s = s_0$, справедливо соотношение $D(\nabla_x) = h^{-1} \mathbb{D}_\eta + \ldots$, где $\mathbb{D}_\eta = D(0, \nabla_\eta)$, а многоточие заменяет дифференциальный оператор с коэффициентами порядка h^0. Выделяя главные части в операторах из (2.11), (2.12) формулируем краевую задачу для вектора v:

$$-\mathbb{D}_\eta A(s^0, \eta_2) \mathbb{D}_\eta^t v^0(s^0, \eta) = F(s^0, \eta), \quad \eta \in \Pi, \tag{4.7}$$

$$\pm \mathbb{D}_1 A(s^0, \pm 1/2) \mathbb{D}_\eta^t v^0(s^0, \eta) = G^\pm(s^0, \eta_1), \quad \eta \in \Sigma^\pm(s^0), \tag{4.8}$$

$$v^0(s^0, \eta) = g(s^0, \eta), \quad \eta \in \gamma(s^0), \tag{4.9}$$

где $A(s^0, \zeta)$ – матрица Гука в точке $y = s^0 \in \partial\omega$, а $\Sigma^\pm(s^0)$ – лучи, составляющие часть $\partial\Pi \setminus \overline{\gamma(s^0)}$ границы полуполосы. Происхождение правых частей F и $G^\pm$ объясняется далее в п. 3.

Упростим выражение (4.6) для g. Благодаря краевым условиям (3.29) на $\partial\omega$ аннулируются производные по s функций w_j и $\partial_n w_3$ – удалим их из правой части (4.6). В силу (3.2) (3.17) $\mathcal{U}_\Gamma^{-p}$ – линейная комбинация производных $\partial_n^{2-p} w_3$ и $\partial_n^{1-p} w_i$; $p = 0, 1, 2$. Вводя соответствующие оператор-матрицы запишем g следующим образом:

$$g(s^0, \eta) = -V^{3-}(s^0, \eta) \partial_n^2 w_3(s^0) - \sum_{i=1}^{2} V^{i-}(s^0, \eta) \partial_n w_i(s^0). \tag{4.10}$$

Здесь $\partial_n^q w_j(s)$ – след на $\partial\omega$ производной $\partial_n^q w_j$;

$$V^{p-}(s^0,\eta) = \left\{ \mathfrak{Y}\left(\eta_2, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) + \mathcal{V}(s^0,\eta_2)\mathfrak{D}\left(0, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^t \right\} W^{p-}(\eta_1), \tag{4.11}$$

$$W^{3-}(\eta_1) = \frac{1}{2}\eta_1^2 e^3, \quad W^{i-}(\eta_1) = \eta_1 e^i, \quad i = 1,2; \tag{4.12}$$

оператор $\mathfrak{D}$ определен в (3.16), $\mathcal{V}(s^0,\zeta)$ – значение в точке $y = s^0$ матрицы-функции $\mathcal{V}$ из (3.17),

$$\mathfrak{Y}\left(\eta_2, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\eta_2\partial/\partial\eta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Обращаем внимание на то, что e^2 и e^3 – орты осей η_1 и η_2.

Лемма 4.3. *Векторы* (4.11) *удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered} -\mathbb{D}_\eta A(s^0,\eta_2)\mathbb{D}_\eta^t V(s^0,\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}\times(-1/2,1/2), \\ \pm\mathbb{D}_1 A(s^0,\eta_2)\mathbb{D}_\eta^t V(s^0,\eta_1,\pm 1/2) = 0, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу определений (3.16) и (4.13)

$$D\left(0, \frac{\partial}{\partial\eta_1}, \frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^t \mathfrak{Y}\left(\eta_2, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) = \mathcal{Y}(\eta_2)\mathfrak{D}\left(0, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^t$$

(слева выполняется дифференцирование по η_2). Таким образом, вычисляя двумерные напряжения, имеем

$$\begin{gathered} A(s^0,\eta_2)\mathbb{D}_\eta^t V^{p-}(s^0,\eta) = T(s^0,\eta_2)\mathfrak{D}(0,\partial/\partial\eta_1)^t W^{p-}(\eta_1) + \\ + D(0,\partial/\partial\eta_1)^t \mathcal{V}(s^0,\eta_2)\mathfrak{D}(0,\partial/\partial\eta_1)^t W^{p-}(\eta_1), \end{gathered} \tag{4.15}$$

$$T(s^0,\eta_2) = A(s^0,\eta_2)\left(\mathcal{Y}(\eta_2) + \frac{\partial}{\partial\eta_2}\mathbb{D}_1^t \mathcal{V}(s^0,\eta_2)\right). \tag{4.16}$$

Поскольку $\mathfrak{D}^t W^{p-}$ – постоянный вектор (см. (3.16) и (4.12)), последнее слагаемое в (4.15) исчезает, а первое не зависит от η_1. Итак,

$$\mathbb{D}_\eta A\mathbb{D}_\eta^t V^{p-} = \frac{\partial}{\partial\eta_2}\mathbb{D}_1 T\mathfrak{D}^t W^{p-}, \quad \mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_\eta^t V^{p-} = \mathbb{D}_1 T\mathfrak{D}^t W^{p-}.$$

Обращаясь к равенствам (3.18), видим, что вектор-функция $\mathbb{D}_1 T$ является решением задачи Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathbb{D}_1 T(s^0,\zeta)=0,\quad \zeta\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\quad \pm\mathbb{D}_1 T\left(s^0,\pm\frac{1}{2}\right)=0,$$

т.е. $\mathbb{D}_1 T=0$. Теперь соотношения (4.14) для V^{p-} сомнений не вызывают. •

Векторы (4.12) удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathfrak{D}(0,-\partial/\partial\eta_1)\mathfrak{M}(s^0)\mathfrak{D}(0,\partial/\partial\eta_1)^t W(\eta_1)=0,\quad \eta_1\in\mathbb{R},\tag{4.17}$$

связанной с результирующей системой (3.23). Еще четырем ее решениям

$$W^{3+}(\eta_1)=\eta_1 e^3,\quad W^{1+}=e^1,\quad W^{2+}=e^2,\quad W^{4+}=e^3\tag{4.18}$$

формула (4.11) сопоставляет жесткие смещения

$$V^{3+}(\eta)=\eta_1 e^3-\eta_2 e^2,\quad V^{1+}=e^1,\quad V^{2+}=e^2,\quad V^{4+}=e^3.\tag{4.19}$$

Такая необычная нумерация будет удобна в дальнейшем.

Замечание 4.4. Помимо (4.12) и (4.18) система (4.17) обладает еще одним решением $W^{4-}(\eta_1)=(a_1\eta_1^2,a_2\eta_1^2,a_3\eta_1^3)^t$. Соответствующий вектор V^{4-}, удовлетворяющий (4.14), строится при учете дополнительного слагаемого в (4.11), порожденного членом $\mathcal{U}^1$ асимптотики (3.1). Сам V^{4-} далее понадобится, однако следует упомянуть, что V^{4-} дополняет векторы (4.11), (4.19) до базиса в линеале решений однородной задачи (4.14) с полиномиальным ростом на бесконечности.

Вернемся к рассмотрению задачи (4.7)–(4.9). Обозначим через $\mathcal{H}$ замыкание $C_0^\infty(\bar\Pi)^3$ по энергетической норме $\mathcal{E}(v,v;\Pi)^{1/2}$,

$$\mathcal{E}(v,u;\Pi)=(A\mathbb{D}_\eta^t v,\mathbb{D}_\eta^t u)_\Pi.$$

Замечание 4.5. Известно (см. например, [41]), что жесткие смещения (4.19) попадают в $\mathcal{H}$. В силу (4.15) деформации $\mathbb{D}_\eta^t V^{p-}$ не являются квадратично суммируемыми в Π и поэтому векторы (4.11) не принадлежат $\mathcal{H}$.

Под $\overset{\circ}{H}(s)$ подразумеваем подпространство $\{v \in \mathcal{H} : v = 0$ на $\gamma(s)\}$. Как обычно, обобщенным решением задачи (4.7)–(4.9) с правыми частями $g = 0$ и

$$F = F^0 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F^i}{\partial \eta_i}, \quad G^{\pm} = G^{0\pm} \pm F^2 \tag{4.20}$$

называется элемент v пространства $\overset{\circ}{H}(s^0)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathcal{E}(v, u; \Pi) = (F^0, u)_\Pi + \sum_{i=1}^{2} \left(F^i, \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \right)_\Pi + \sum_{\pm} (G^{0\pm}, u)_{\Sigma^{\pm}(s^0)} \qquad \forall u \in \overset{\circ}{H}(s^0). \tag{4.21}$$

Поскольку правая часть (4.10) представляет собой гладкое продолжение g с $\gamma(s^0)$ на Π, условие Дирихле (4.9) нетрудно сделать однородным, изменив при этом правые части F и $G^{\pm}$. Поэтому далее говорим об обобщенном решении $v^0 \in \mathcal{H}$ самой задачи (4.7)–(4.9).

Пусть $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $W^l_\delta(\Pi)$ – пространство функций с нормой $\|\mathcal{Z}; W^l_\delta(\Pi)\| = \|e^{\delta\eta_2}\mathcal{Z}; H^l(\Pi)\|$. Показатель δ считаем малым положительным. Таким образом, включение $\tilde{v} \in W^1_\delta(\Pi)^3$ обеспечивает экспоненциальное затухание функции $\tilde{v}$ при $\eta_2 \to +\infty$. Если в (4.20)

$$F^p \in W^0_\delta(\Pi),\ \ p = 0, 1, 2;\ \ G^{0\pm} \in W^0_\delta(\Sigma^{\pm}(s^0)), \tag{4.22}$$

то пишем $(F, G^{\pm}) \in W^{-1}_\delta(\Pi, \Sigma^{\pm}(s^0))$.

Лемма 4.6. *Пусть $(F, G^{\pm}) \in W^{-1}_\delta(\Pi, \Sigma^{\pm}(s^0))$ и $\delta > 0$ – малое число. Существует единственное решение $v^0 \in \overset{\circ}{H}(s^0)$ задачи (4.21) (или (4.7)–(4.9) при $g = 0$). Это решение допускает представление*

$$v^0(s^0, \eta) = \tilde{v}(s^0, \eta) + \sum_{q=1}^{4} b_q(s^0) V^{q+}(s^0, \eta), \tag{4.23}$$

где $b = (b_1, \dots, b_4)^t \in \mathbb{R}^4$ и $\tilde{v} \in W^1_\delta(\Pi)^3$. Справедливо неравенство

$$\mathcal{E}(v^0, v^0; \Pi)^{1/2} \leqslant c(\|\tilde{v}; W^1_\delta(\Pi)\| + |b|) \leqslant C\|(F, G^{\pm});\tag{4.24}$$

$$W_\delta^{-1}(\Pi;\Sigma^\pm(s^0)\| \leqslant C\left(\sum_{p=0}^{2}\|F^p;W_\delta^0(\Pi)\|+\sum_\pm\|G^{0\pm};W_\delta^0(\Sigma^\pm(s^0))\|\right).$$

Решение v^0 и коэффициенты b_q наследуют от правых частей F, $G^\pm$ и g гладкую зависимость от параметра $s^0\in\partial\omega$.

Доказательство. Разрешимость задачи вытекает, например, из теоремы Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве и следующего весового неравенства Корна для $v\in \overset{\circ}{H}(s^0)$, установленного в [34]:

$$\int\limits_\Pi\left\{\left|\frac{\partial v_1}{\partial\eta_1}\right|^2+\left|\frac{\partial v_1}{\partial\eta_2}\right|^2+\left|\frac{\partial v_2}{\partial\eta_1}\right|^2+\left|\frac{\partial v_3}{\partial\eta_2}\right|^2+(1+\eta_1)^{-2}\left(\left|\frac{\partial v_3}{\partial\eta_1}\right|^2+\left|\frac{\partial v_2}{\partial\eta_2}\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+|v_1|^2+|v_2|^2\right)+(1+\eta_1)^{-4}|v_3|^2\right\}d\eta\leqslant c\mathcal{E}(v,v;\Pi).$$

Подчеркнем, что включения (4.22) обеспечивают непрерывность правой части (4.21) как функционала на $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(s^0)\ni u$.

Представление (4.23) и оценка (4.24) получаются при помощи тех же рассуждений, что и в §5.7 [36]. Имеются и другие способы проверки утверждений (см. [42]). •

3. Обоснование асимптотической конструкции, включающей пограничный слой. Всюду в этом разделе предполагаем, что справедливы формулы (3.3), (3.4), (4.1) и

$$\begin{aligned}\tilde f^0(x)&=h^{-2}\chi(n)F(s,h^{-1}n,h^{-1}z)+\tilde f^{1/2}(x),\\ \tilde g^{0\pm}(x)&=h^{-1}\chi(n)G^\pm(s,h^{-1}n,h^{-1}z)+\tilde g^{1/2\pm}(x).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Здесь $\chi\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ – срезающая функция, $\chi(n)=1$ при $n<d/2$ и $\chi(n)=0$ при $n>d$, причем длина d мала настолько, что носитель функции $y\mapsto\chi(n)$ расположен в той окрестности контура $\partial\omega$, где введены координаты (n,s). Кроме того, считаем, что при $\varkappa=1/2$ выполнены соотношения

$$(F,G^\pm)\in H^{1+\varkappa}(\partial\omega\ni s\mapsto W_\delta^{-1}(\Pi,\Sigma^\pm(s))),\tag{4.26}$$

$$h^{-1}\|\rho_h^2\tilde{f}_3^\varkappa; L_2(\Omega_h)\| + h^{-1/2}\sum_{\pm}\|\rho_h^2\tilde{g}_3^{\varkappa\pm}; L_2(\Sigma_h^\pm)\| +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left(\|\rho_h\tilde{f}_i^\varkappa; L_2(\Omega_h)\| + h^{1/2}\sum_{\pm}\|\rho_h\tilde{g}_i^{\varkappa\pm}; L_2(\Sigma_h^\pm)\|\right) = h^\varkappa\tilde{\mathcal{N}}_\varkappa. \tag{4.27}$$

Норму вектор-функции (4.26) обозначим $\mathcal{N}_{1/2}$.

Замечание 4.7. Если в представлении (4.20) $F^1 = F^2 = 0$, то норма (3.31) функций (4.25) не превосходит $c(\mathcal{N}_{1/2} + h^{1/2}\tilde{\mathcal{N}}_{1/2})$.

Неотъемлемое свойство пограничного слоя – затухание при удалении от боковой поверхности Γ_h пластины. Для построенного решения v задачи (4.7)–(4.9) оно нарушено из-за присутствия в его разложении (4.23) жестких смещений $b_q V^{q+}$. Последние порождают поля смещений

$$\begin{aligned} b(y) &= b_1(s)e^s + b_2(s)e^n + b_4(s)e^z, \\ h^{-1}\omega(y) &= h^{-1}b_3(s)(ne^z - ze^n), \end{aligned} \tag{4.28}$$

проникающие вовнутрь пластины. (В (4.28) e^s и e^n – орты осей s и n; $e^z = e^3$.) Для растущей компоненты $h^{-1}\omega$ ситуация осложняется еще и тем, что координаты (n,s) определены только в окрестности контура $\partial\omega$ и требуется продолжение функции b вовнутрь ω. Все это делает строение асимптотического приближения на данном этапе весьма громоздким. Впрочем, в §5 при построении младших членов асимптотики прослеживаются упрощения, связанные с удалением компонент (4.28) из пограничного слоя путем постановки неоднородных краевых условий (3.29) на $\partial\omega$ для вектор-функции $w^1, w^2, \ldots$, формирующих названные члены (см. п. 2 §5).

Для соблюдения условий Дирихле (2.13) вводим в промежуточное асимптотическое приближение срезку X (см. (3.39)):

$$U_X^{1/2}(x) = X(y)U^0(x) + (1 - X(y))\sum_{p=0}^{2} h^{-p}\frac{n^p}{p!}\,\partial_n^p\,\mathcal{U}_\Gamma^{-p}(s, h^{-1}z) +$$
$$+\chi(n)\tilde{v}(s, h^{-1}n, h^{-1}z) + \chi(n)b(y) + h^{-1}\omega_X(x); \tag{4.29}$$

здесь b и ω взяты из (4.28), (4.23) и, кроме того,

$$\omega_X(x) = \omega(x)(1 - X(y)) + X(y)\left\{e^3 - z\sum_{i=1}^{2} e^i\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}\mathbf{b}_3(y)n, \tag{4.30}$$

причем $\mathbf{b}_3$ – подходящее продолжение функции b_3 (с носителем в d-окрестности контура $\partial\omega$). Согласно формулам (4.10), (4.2), (4.26) и леммам 4.6, 3.6 (см. также лемму 4.1) справедливы неравенства

$$\|\mathbf{b}_3; H^2(\omega)\| \leqslant c\|b_3; H^{3/2}(\partial\omega)\| \leqslant C(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2}), \tag{4.31}$$

$$h^{-2}\|\mathbf{b}_3 - b_3; L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| + h^{-1/2}\|\nabla_y(\mathbf{b}_3 - b_3); L_2(\Omega_h \cap \mathcal{O}_h)\| \leqslant$$
$$\leqslant c(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2}).$$

Подчеркнем, что структура дифференциального оператора из фигурных скобок в (4.30) согласуется с асимптотическим анзацем (3.2). Вектор $U_X^{1/2}$ принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$, так как в силу (4.6), (4.9) и (4.28), (4.30) обращается в нуль на γ_h. Если в (4.28) положить $X = 1$, то получится асимптотическое приближение $U^{1/2}$ – точно также (3.38) превращалось в (3.50)

Лемма 4.8. *Асимптотические приближения* $U_X^{1/2}$ *из* (4.29) *и*

$$U^{1/2}(x) =$$
$$= U^0(x) + \chi(n)\tilde{v}\left(s, \frac{n}{h}, \frac{z}{h}\right) + \chi(n)b(y) + \left\{e^3 - z\sum_{i=1}^{2} e^i \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}\mathbf{b}_3(y)n \tag{4.32}$$

удовлетворяют соотношению

$$|\!|\!| U^{1/2} - U_X^{1/2} |\!|\!| + \|\varepsilon(U^{1/2}) - \varepsilon(U_X^{1/2}); L_2(\Omega_h)\| \leqslant ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2}). \tag{4.33}$$

Доказательство. После несложных преобразований имеем

$$U^{1/2} - U_X^{1/2} = (1 - X)\sum_{p=0}^{2} h^{-p}\overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_{\Gamma}^{-p} +$$
$$+(1 - X)\left\{\frac{n}{h}(b_3 - \mathbf{b}_3)e^3 + \frac{z}{h}\left[e^n b_3 - \sum_{i=1}^{2} e^i \frac{\partial}{\partial y_i}\mathbf{b}_3 n\right]\right\}.$$

Оценка (4.33) для первого слагаемого справа вытекает из леммы 4.1. Рассмотрим второе слагаемое $\mathcal{X}$. Пусть $e^n = n_1 e^1 + n_2 e^2$; тогда $e^s = -n_2 e^1 + n_1 e^2$ и

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = n_1\frac{\partial}{\partial n} - n_2\frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = n_2\frac{\partial}{\partial n} + n_1\frac{\partial}{\partial s}. \tag{4.34}$$

Следовательно, $\mathcal{X} = h^{-1}(1-X)\{(ne^z - ze^n)(b_3 - \mathbf{b}_3) - e^s nz\partial_s \mathbf{b}_3\}$. Непосредственное вычисление норм $\|\mathcal{X}\|$ и $\|\varepsilon(\mathcal{X}); L_2(\Omega_h)\|$ при использовании неравенств (4.31) приводит к (4.33). •

Для разности $R^{1/2} = U_X^{1/2} - u$, удовлетворяющей условию (2.13), выполняется равенство (3.43), в котором R^0 и $\tilde{I}_0$ заменены на $R^{1/2}$ и $\tilde{I}_{1/2}$, а вместо I_X фигурирует сумма $I_\Gamma + I_v + I_b$, где

$$I_\Gamma = \langle AD^t(1-X)\sum_{p=0}^{2} h^{-p}\mathring{\mathcal{U}}_\Gamma^{-p}, D^t R^{1/2}\rangle,$$

$$I_v = \langle AD^t\chi\tilde{v}, D^t R^{1/2}\rangle - h^{-1}\{h^{-1}\langle F^0, \chi R^{1/2}\rangle +$$

$$+\langle F^1, \partial_n \chi R^{1/2}\rangle + \langle F^2, \partial_z \chi R^{1/2}\rangle + \sum_{\pm}(G^{0\pm}, \chi R^{1/2})_{\Sigma_h^\pm}\},$$

$$I_b = \langle AD^t(\chi b + h^{-1}\omega_X), D^t R^{1/2}\rangle.$$

Неравенства (3.45) и (3.43), записанные вместе, приобретают вид

$$|I_3 - I_0| + |\tilde{I}_{1/2}| \leqslant ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \tilde{\mathcal{N}}_{1/2})E(R^{1/2}, R^{1/2}; \Omega_h)^{1/2}.$$

Для оценивания I_Γ повторим выкладку (3.47), ссылаясь на лемму 4.1 вместо леммы 3.6. В результате оказывается, что

$$|I_\Gamma| \leqslant ch^{1/2}\mathcal{N}_1 E(R^{1/2}, R^{1/2}; \Omega_h)^{1/2}.$$

При обработке I_b воспользуемся тем, что

$$\|D^t\chi b; L_2(\Omega_h)\| \leqslant ch^{1/2}\|b; H^1(\partial\omega)\| \leqslant ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2}), \qquad (4.35)$$

$$h^{-1}D^t\omega_X = h^{-1}D^t(1-X)\left(\omega - \left\{e^3 - z\sum_{i=1}^{2} e^i \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}\mathbf{b}_3 n\right) +$$

$$+h^{-1}D^t\left\{e^3 - z\sum_{i=1}^{2} e^i \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}\mathbf{b}_3 n. \qquad (4.36)$$

Мажоранта $ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2})$ для $L_2(\Omega_h)$-нормы первого слагаемого из правой части уже была найдена при доказательстве леммы 4.8. Усложнение в (4.29) и (4.33) конструкций, связанных с поворотом $b_3 V^{0+}$ (см. (4.23)) объясняются следующим ключевым свойством столбца $h^{-1}D^t\{e^3 - \ldots\}\mathbf{b}_3 n$ в (4.36): его три нижние компоненты равны нулю, а верхние три – суть произведения $h^{-1}z$ на вторые производные функции $\mathbf{b}_3$. Только поэтому $L_2(\Omega_h)$-норма названного столбца не превосходит $ch^{1/2}(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_{1/2})$. В итоге

$$|I_b| \leqslant ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2})E(R^{1/2}, R^{1/2}; \Omega_h)^{1/2}.$$

Осталось рассмотреть I_v. Упомянем несколько фактов, называя "хорошими" те слагаемые, которые мажорируются правой частью (4.35). Во-первых, скалярное произведение $\langle AD^t\chi\tilde{v}, D^tR^{1/2}\rangle$ безболезненно заменяется на $\langle AD^t\tilde{v}, D^t\chi R^{1/2}\rangle$: благодаря экспоненциальному затуханию $\tilde{v}$ коммутаторы $[D^t,\chi]$, удаленные от $\partial\omega$ на расстояние $d/2 > 0$, порождают хорошие члены (мажоранты содержат множители $\exp\{(2h)^{-1}\delta d\}$). Во-вторых, оператор $\mathbb{D}_\eta$ аннулирует сумму по q в (4.23) (жесткое смещение) и потому в интегральном тождестве (4.21) вместо v может стоять $\tilde{v}$. Если в таком тождестве взять пробную функцию $\eta \mapsto u(\eta) = \chi(h\eta_1)R^{1/2}(s, h\eta)$, принадлежащую $\overset{\circ}{H}(s)$, и проинтегрировать вдоль $\partial\omega$, то возникает соотношение

$$h^{-2}\langle A\mathbb{D}_\eta^t\tilde{v}, \mathbb{D}_\eta^t\chi R^{1/2}\rangle = h^{-2}\langle F^0, \chi R^{1/2}\rangle + h^{-2}\langle F^1, \frac{\partial}{\partial\eta_1}\chi R^{1/2}\rangle +$$

$$+\langle F^2, \frac{\partial}{\partial\eta_2}\chi R^{1/2}\rangle + \sum_\pm (G^{0\pm}, \chi R^{1/2})_{\Sigma_h^\pm} + \ldots,$$

где многоточием обозначен хороший член (его появление вызвано игнорированием вычитаемого в якобиане $1-nk(s)$, однако множитель n при кривизне $k(s)$ и экспоненциальное затухание $\tilde{v}$ доставляют нужную оценку). Итак, снова манипулируя со срезкой χ, приходим к формуле

$$I_v = \langle AD^t\tilde{v}, \chi D^tR^{1/2}\rangle - h^{-2}\langle A\mathbb{D}_\eta^t\tilde{v}, \chi\mathbb{D}_\eta^t R^{1/2}\rangle + \ldots =$$

$$= \langle A(D^t - h^{-1}\mathbb{D}_\eta^t)\tilde{v}, \chi D^tR^{1/2}\rangle +$$

$$+h^{-1}\langle A\mathbb{D}_\eta^t\tilde{v}, (D^t - h^{-1}\mathbb{D}_\eta^t)\chi R^{1/2}\rangle + \ldots = I_v^1 + I_v^2 + \ldots .$$

Третье полезное наблюдение состоит в том, что матричный дифференциальный оператор первого порядка $\mathcal{D}(s, n, \partial_s) = D(\nabla_x)^t - h^{-1}\mathbb{D}_\eta$ не содержит дифференцирования по n и z. Следовательно,

$$|I_v^1| \leqslant c\|\chi\mathcal{D}\tilde{v}; L_2(\Omega_h)\| \times \|D^tR^{1/2}; L_2(\Omega_h)\| \leqslant$$

$$\leqslant ch\|\tilde v; H^1(\partial\omega \mapsto L_2(\Pi))\| E(R^{1/2}, R^{1/2}; \Omega_h)^{1/2} = \dots$$

Кроме того, вспоминая весовое неравентсов Корна (2.20), находим, что

$$|I_v^2| = h^{-1}\langle \mathcal{D}^* A\mathbb{D}_\eta^t \tilde v, \chi R^{1/2}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant c\|\tilde v; H^1(\partial\omega \to W_\delta^1(\Pi))\| \left(\int\limits_{\{x\in\Omega_h : n<d\}} e^{-2\delta n/h} |R^{1/2}|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2}) \| R^{1/2} \| \max\{ e^{-\delta n/h} h^{1-i}(h+n)^i \big| n \in [0,d], i = 1,2\} = \dots ;$$

здесь $\mathcal{D}^*$ – сопряженный оператор, а $\rho_h = h + n$ – весовой множитель в норме (2.21).

Все слагаемые в правой части равенства (3.42) для $R^{1/2}$ оценены. Таким образом, при учете леммы 4.8 доказана

Теорема 4.9. *При выполнении указанных выше предположений решение и задачи* (2.11)–(2.13) *и его асимптотическое приближение* (4.32) *подчинены неравенству*

$$\| U^{1/2} - u \| + \|\varepsilon(U^{1/2}) - \varepsilon(u); L_2(\Omega_h)\| \leqslant ch^{1/2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{1/2} + \tilde{\mathcal{N}}_{1/2}), \quad (4.37)$$

в котором обозначения аналогичны использованным в теореме 3.7.

Замечание 4.10. 1) Появление ортов e^s и e^n в (4.32) связано с поворотом осей, упомянутым в замечании 4.2.

2) Изменение продолжения $\mathbf{b}_3$ или срезки χ не сказывается на точности приближения. Так, если $\mu \in C_0^\infty(\bar\omega)$ (разность двух срезок), то $\| \mu b \| = O(h^{1/2})$. Аналогичные формулы верны и для остальных слагаемых в (4.32).

§5. Младшие члены асимптотики. Объединенная задача

1. Второй член асимптотики. Как уже отмечалось в комментариях к формулам (3.25), (3.26), алгорифм построения асимптотики можно продолжить. Сделаем это, предположив, что в дополнение к (3.3) и (4.25) выполняются представления

$$\tilde f^{1/2}(x) = h^0 f^1(y,\zeta) + h^1 \bar f^1(y) + \tilde f^1(x), \tilde g^{1/2\pm}(x) = h^1 g^{1\pm}(y) + \tilde g^{1\pm}(x), \quad (5.1)$$

причем аналогично (3.4)

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} f_3^1(y,\zeta)d\zeta + g_3^{1+}(y) + g_3^{1-}(y) = 0, \quad \bar f_1^1(y) = \bar f_2^1(y) = 0, \ y \in \omega. \tag{5.2}$$

Пусть еще справедливы включения (4.1), (4.26) и

$$f^1 \in L_2(\omega \to L_2(\Upsilon)^3), \ g^{1\pm} \in L_2(\omega)^3, \ \bar f_3^1 \in H^{-1}(\omega) \tag{5.3}$$

(сравни с (3.30)). Сумму норм функций (4.1), (4.26) и (5.3) обозначаем $\mathcal{N}_1$ (не путать с $\mathcal{N}_1$ в теореме 4.9) и считаем выполненной формулу (4.27) с $\varkappa = 1$, определяющую величину $\tilde{\mathcal{N}}_1$.

В качестве асимптотического решения гладкого типа попрежнему берем ряд (3.1), но, имея в виду дублирование асимптотической структуры (3.50) с новым вектором $w^1 = (w_1^1, w_2^1, w_3^1)^t$, применяем уточненные формулы для коэффициентов

$$\mathcal{U}^{-2}(y) = w_3(y)e^3, \ \ \mathcal{U}^{-1}(y,\zeta) = \sum_{i=1}^{2}\{w_i(y) - \zeta\partial_i w_3(y)\}e^i + w_3^1(y)e^3,$$

$$\mathcal{U}^0(y,\zeta) = \mathcal{V}(y,\zeta)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(y) + \sum_{i=1}^{2}\{w_i^1(y) - \zeta\partial_i w_3^1(y)\}e^i, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{U}^1(y,\zeta) = \mathcal{U}^{1,0}(y,\zeta) + \mathcal{V}(y,\zeta)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w^1(y),$$

где $\mathcal{U}^{1,0}$ – решение задачи (3.10) с правыми частями (3.19), уже вычисленными в §3. Еще раз обратим внимание на двукратное появление выражений (3.2), (3.17) в (5.4): $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^{-1,0} + \mathcal{U}^{-2,1}$, $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}^{0,0} + \mathcal{U}^{-1,1}$ и т.п. (обозначения не вызывают разночтений). Учитывая разложения (5.1) и формулы (3.25), (3.26), где $\mathcal{U}^j$ заменены на $\mathcal{U}^{j,0}$, заключаем, что правые части задачи (3.11) для $\mathcal{U}^2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 &= -L^1\mathcal{U}^{1,0} - L^2\mathcal{U}^{0,0} + \bar f^0 + \{f^1 - L^1\mathcal{U}^{0,1} - L^2\mathcal{U}^{-1,1}\}, \\ \mathcal{G}^{2\pm} &= -B^{1\pm}\mathcal{U}^{1,0} + \{g^{1\pm} - B^{1\pm}\mathcal{U}^{0,1}\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Суммы, взятые в фигурные скобки, обрабатываются по схеме из п. 3 §3, а оставшиеся слагаемые (известные величины) переправляются в правую часть результирующей системы

$$\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathfrak{M}(y)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w^1(y) = \mathfrak{F}^1(y), \quad y \in \omega. \tag{5.6}$$

Благодаря первому равенству (5.2) и формулам (3.4), (3.20), (3.27) условие (3.12), $j = 3$, для (5.5) выполнено. Согласно (3.21), (3.22) и (3.7), (3.9) другие два условия превращаются в две верхние ($i = 1, 2$) строки системы (5.6), в которой

$$\mathfrak{F}_i^1 = \int_{-1/2}^{1/2} f_i^1 d\zeta + \sum_{\pm} g_i^{1\pm} + \int_{-1/2}^{1/2} e^{it}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t\, \mathcal{U}^{1,0} + \mathbb{D}_y^t\, \mathcal{U}^{0,0}) d\zeta. \quad (5.7)$$

Итак, решение $\mathcal{U}^2$ указанной задачи существует. Теперь, вычисляя правые части $\mathcal{F}^3$, $\mathcal{G}^{3\pm}$ и повторяя с очевидными изменениями выкладки (3.27), выводим третью строку системы (5.6) и формулу

$$\mathfrak{F}_3^1 = \bar{f}_3^1 + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \zeta f_i^1 d\zeta + \sum_{\pm} \pm\frac{1}{2}\, g_i^1 \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-1/2}^{1/2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t\, \mathcal{U}^{1,0} + \mathbb{D}_y^t\, \mathcal{U}^{0,0}) d\zeta. \quad (5.8)$$

Остается найти краевые условия для w^1. Для того чтобы вектор $\mathcal{U}^{-1}$ из (5.4) удовлетворял условиям Дирихле хотя бы на Γ_h, в дополнение к (3.29) нужно положить

$$w_3^1(y) = 0 \quad y \in \partial\omega. \quad (5.9)$$

Из-за появления новых членов в (5.4) к невязке (4.10) прибавляются слагаемые

$$-V^{1+} w_s^1(s) - V^{2+} w_n^1(s) - V^{3+}(\eta)\partial_n w_3^1(s), \quad (5.10)$$

где $w_s^1 = e^{st} w^1$ и $w_n^1 = e^{nt} w^1$ – касательная и нормальная компоненты двумерного вектора $(w_1^1, w_2^1)^t$, а V^{q+} – жесткие смещения (4.19). Таким образом, $v^0 = v^{00} + v^{01}$, причем v^{00} – прежнее решение задачи (4.7)–(4.9), и $v^{01} \in \mathcal{H}$ – сумма (5.10). Следовательно, за счет выбора краевых условий

$$w_s^1(y) = b_1(s), \;\; w_n^1(y) = b_2(s), \;\; \partial_n w_3^1(y) = b_3(s), \;\; y \in \partial\omega, \quad (5.11)$$

удается добиться “лучшего” поведения (при $\eta_2 \to +\infty$) построенного решения типа пограничного слоя. Именно, в силу (5.11) и (4.23) оно на данном этапе становится ограниченным:

$$v^0(s,\eta) = \tilde{v}(s,\eta) + b_4(s)e^3. \tag{5.12}$$

Предложение 3.4 обеспечивает существование решения w^1 задачи (5.6), (5.9), (5.11) (при желании условия (5.11) можно свести к однородным). Приступим к формированию асимптотического приближения U^1. Заметим, что благодаря предположениям (4.1), (5.3) и (4.26), $\varkappa = 1/2$, включения (4.3) остаются верными для векторов (5.4). Помимо этих векторов включаем в U^1 затухающее решение $\tilde{v}$ типа пограничного слоя и подобную использованной в (4.32) структуру, содержащую продолжение $\mathbf{b}_4 \in H^2(\omega)$ неучтенного в (5.11) коэффициента b_4 из (4.23). В итоге

$$U^1(x) =$$

$$= h^{-2}\mathcal{U}^{-2}(y) + h^{-1}\mathcal{U}^{-1}(y,h^{-1}z) + h^0\mathcal{U}^0(y,h^{-1}z) + h^1\mathcal{U}^1(y,h^{-1}z) +$$

$$+\chi(n)\tilde{v}\left(s,\frac{n}{h},\frac{z}{h}\right) + \left\{e^3 - z\sum_{i=1}^{2} e^i \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}\mathbf{b}_4(y). \tag{5.13}$$

Так же, как и в п. 3 §3 и п. 3 §4, вводя промежуточное асимптотическое приближение U^1_X, удовлетворяющее краевым условиям (2.13) полностью, и оценивая по прежней схеме слагаемые из правой части равенства (3.42) для $R^1 = U^1_X - u$, проводим обоснование асимптотики.

Теорема 5.1. *Пусть правые части задачи* (2.11)–(2.13) *удовлетворяют требованиям, сформулированным в начале раздела. Тогда решение и этой задачи и асимптотическое приближение* (5.13) *связаны неравенством*

$$|\!|\!| U^1 - u |\!|\!| + \|\varepsilon(U^1) - \varepsilon(u); L_2(\Omega_h)\| \leqslant ch^1(\mathcal{N}_1 + \tilde{\mathcal{N}}_1), \tag{5.14}$$

в котором постоянная с не зависит от параметра $h \in (0,1)$ *и составляющих* $f^q, g^{q\pm}, \bar{f}^q, F, G^\pm$ *и* $\tilde{f}^1, \tilde{g}^{1\pm}$ *правых частей.*

2. Полное асимптотическое разложение. Для определения младших асимптотических членов помимо уточнений (4.25) и

(5.1) строения правых частей f и $g^{\pm}$ задачи (2.11)–(2.13) оказалось необходимым улучшение дифференциальных свойств составляющих $f^0, g^{0\pm}$ и $\bar{f}^0$ (сравни (3.30) с (4.1)). Иными словами, используемый алгорифм подразумевает "потерю гладкости". Тем не менее, при бесконечно гладких f и $g^{\pm}$ можно указать полный асимптотический ряд для решения u и оценить разность $R^N = U^N - u$, где U^N – отрезок ряда и N – произвольное натуральное число. Это – рутинное занятие, не требующее каких-либо новых соображений. Поэтому ограничимся словесным описанием.

На шаге алгорифма с номером N обрабатываются слагаемые

$$h^N \left\{ h^{-1} f^N \left(y, \frac{z}{h} \right) + \bar{f}^N(y) + \chi(n) F^N \left(s, \frac{n}{h}, \frac{z}{h} \right) \right\},$$

$$h^{N-1} \left\{ g^{N\pm}(y) + \chi(n) G^{N\pm} \left(s, \frac{n}{h} \right) \right\}$$

в разложениях правых частей. Функции $f^N, g^{N\pm}$ и $\bar{f}^N$ подчинены условиям вида (3.4), (5.2) и компенсируются при помощи конгломерата

$$h^{N-2} \mathcal{U}^{-2,N} + h^{N-1} \mathcal{U}^{-1,N} + h^N \mathcal{U}^{0,N} + h^{N+1} \mathcal{U}^{1,N},$$

определяемого формулами (5.4) по вектору $w^N = (w_1^N, w_2^N, w_3^N)^t$, который удовлетворяет результирующей системе (5.6) с правой частью $\mathfrak{F}^N$, зависящей от $f^N, g^{N\pm}, \bar{f}^N$ и w^{N-1}, w^{N-2} (см. (3.25), (3.26) и (5.7), (5.8)). Группа (5.11) краевых условий для w^N и четвертое условие $w_3^N = \dots$ на $\partial\omega$ выводятся из требований затухания на бесконечности компонент v^{N-1} и v^N соответственно и моделируют влияние пограничного слоя на напряженное состояние внутри пластины (так, в частности, не востребованный в п. 1 коэффициент $b_4(s)$ из (5.12) формирует краевое условие $w_3^2 = b_4$ на $\partial\omega$). Сама задача (4.7)–(4.9) для v^N в полуполосе Π возникает в результате перезаписи операторов L и $B^{\pm}$ в координатах (s, n, z) разложения коэффициентов в ряды Маклорена по переменной n и замены $(n, z) \mapsto \eta$. Поэтому появляются расщепления

$$L(h, x, \nabla_x) \sim h^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} h^j \mathcal{L}^j(s, \eta, \partial_s, \nabla_\eta),$$

$$B^{\pm}(h, y, \nabla_x) \sim h^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} h^j \mathcal{B}^{j\pm}(s, \eta_1, \partial_s, \nabla_\eta)$$

с коэффициентами, зависящими полиномиально от η_1, а правые части задачи для v^N приобретают вид

$$F^N - \sum_{j=1}^{N} \mathcal{L}^j v^{N-j}, \quad G^{N\pm} - \sum_{j=1}^{N} \mathcal{B}^{j\pm} v^{N-j},$$
$$g^N(s,\eta) = - \sum_{p=-2}^{1} \sum_{m=0}^{N-p} \frac{1}{m!} \eta_1^m \partial_n^m \mathcal{U}_\Gamma^{-p,N-p-m}(s,\eta_2). \tag{5.15}$$

Подчеркнем еще раз, что добиться экспоненциального затухания члена пограничного слоя v^N удается за счет входящих в сумму из (5.15) выражений

$$\mathcal{U}_\Gamma^{-2,N+2}(s,\eta_2) = w_3^{N+2}(s)e^3, \ \mathcal{U}_\Gamma^{-1,N+1}(s,\eta_2) + \eta_1 \partial_n \mathcal{U}_\Gamma^{-2,N+1}(s,\eta_2) =$$
$$= w_s^{N+1}(s)e^s + w_n^{N+1}(s)e^n - \partial_n w_3^{N+1}(s)(\eta_2 e^n - \eta_1 e^3) - \eta_2 w_3^{N+1}(s)e^s \tag{5.16}$$

(последнее слагаемое вычислено на предыдущем шаге алгорифма). Если по каким-либо причинам построение w^{N+1} и w^{N+2} затруднено, то выражения (5.16) удаляются из правой части (5.15), а в асимптотическое приближение привлекаются конструкции из (4.32) и (5.13).

Формулировка теоремы об оценке разности $U^N - u$ не приводится, поскольку она была бы заведомым пересказом теорем 3.7, 4.9 и 5.1.

3. Конкретные формулы. Предположим, что упругие свойства материала пластины неизменны в поперечном направлении, т.е. матрица Гука A зависит лишь от переменных $y \in \omega$. В этом случае все вспомогательные задачи решаются явно.

Разобьем матрицу A на блоки $\mathbf{A}_{ij}$ размером 3×3; здесь $i, j = 1, 2$. Пусть еще в соответствии с (3.6) и (3.16)

$$\mathbb{D}_\zeta = (\mathbb{O}_3, \mathbf{T}^t \partial_\zeta), \ \mathbb{D}_y = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2), \ \mathfrak{D}(\nabla_y) = (\mathbf{D}_1, \mathfrak{D}_2),$$
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \alpha\partial_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$
$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\partial_2 & \alpha\partial_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь 3×6-матрица $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{(1)}, \mathcal{V}_{(2)})$, решающая задачу (3.18), записывается следующим образом:

$$\mathcal{V}(y,\zeta) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{22}(y)^{-1}\mathbf{A}_{21}(y)\left(-\zeta\mathbb{I}_3, \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24}\right]\mathbb{I}_3\right). \tag{5.18}$$

Кроме того, в силу (3.24)

$$\mathfrak{M}(y) = \operatorname{diag}\left\{\mathfrak{m}(y), \frac{1}{12}\mathfrak{m}(y)\right\}, \quad \mathfrak{m} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}. \tag{5.19}$$

Итак, в рассматриваемом случае матрица $\mathfrak{M}$ блочнодиагональная, т.е. результирующая задача (3.23), (3.29) распадается на две задачи, решаемые по-отдельности: описывающие плосконапряженное состояние (продольные смещения $w' = (w_1, w_2)^t$) и изгиб пластины (поперечное смещение w_3). Такие состояния называются основными. В прикладной теории тонких пластин (однородных) эффект невзаимодействия основных состояний известен (см. [7, 8] и др.). Изучим более подробно второй член асимптотики.

Примем разумные с точки зрения физики предположения о составляющих в (5.2) и (4.25) (сравни с п. 4 §3):

$$f^1 = f_3^1 e^3,\ \ g^{1\pm} = 0,\ \ \bar{f}^1 = 0,\ \ F = 0,\ \ G^{\pm} = 0,\ \ \tilde{f}^1 = 0,\ \ \tilde{g}^{1\pm} = 0. \tag{5.20}$$

Обозначим $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{U}^2$ решения задачи (3.11) с правыми частями

$$\mathcal{F} = f^0 - \mathfrak{F}_1 e^1 - \mathfrak{F}_2 e^2,\ \ \mathcal{G}^{\pm} = g^{0\pm}\ \ \text{и}\ \mathcal{F} = f^1,\ \ \mathcal{G}^{\pm} = 0. \tag{5.21}$$

Подчеркнем, что благодаря (3.4), (3.22) и (5.2), (5.20) условия разрешимости (3.12) выполнены. Решая теперь задачу (3.10) с $k = 1$ при условии (3.23), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^1 = \mathfrak{U}^1 + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{22}^{-1}\Big\{(\mathbf{T}^t)^{-1}\mathbf{D}_1\mathfrak{m}\left(\mathbb{O}_3, \left[\frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta}{8}\right]\mathbb{I}_3\right) + \\ +[\mathbf{A}_{21}\mathbf{D}_1^t + \mathbf{A}_{22}\mathbf{D}_2^t]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\times \\ \times\left(\left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24}\right]\mathbb{I}_3, \left[\frac{\zeta}{24} - \frac{\zeta^3}{6}\right]\mathbb{I}_3\right)\Big\}\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Итак, согласно (5.7) и (5.20) правая часть системы (5.6) представима следующим образом:

$$\mathfrak{F}^1(y) = \mathfrak{F}^{10}(y) - \mathfrak{M}^1(y, \nabla_y)w(y). \tag{5.23}$$

Здесь при $i, r = 1, 2$

$$\mathfrak{F}_i^{10} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{it}\mathbb{D}_y A\mathbb{D}_\zeta^t \mathfrak{U}^1 d\zeta,$$

$$\mathfrak{F}_3^{10} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-1/2}^{1/2} \zeta e^{it}\mathbb{D}_y A\mathbb{D}_\zeta^t \mathfrak{U}^1 d\zeta, \tag{5.24}$$

а элементы $\mathfrak{M}_{jk}^1$ матричного оператора $\mathfrak{M}^1$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_{ir}^1 = 0, \quad \mathfrak{M}_{33}^1 = 0, \quad \mathfrak{M}_{3i}^1(y, \nabla_y) = \mathfrak{M}_{i3}^1(y, \nabla_y)^*, \\ &\mathfrak{M}_{i3}^1 w_3 = e^{it}(\mathbf{D}_1\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{D}_2)(\mathbf{T}^t)^{-1}\mathbf{D}_1 \mathfrak{m}\mathfrak{D}_2(\nabla_y)^t e^3 w_3 \end{aligned} \tag{5.25}$$

(приняли во внимание, что по теореме 2.6 из [39] оператор $\mathfrak{M}^1$ формально самосопряженный, т.е. $\mathfrak{M}^{1*} = \mathfrak{M}^1$).

Замечание 5.2. 1) Если в последней строке (5.25) положить $i = 1$, то, конечно же, получится элемент $\mathfrak{M}_{33}$ оператор-матрицы (3.24). В согласии с (5.19) это следует из равенств $e^{3t}\mathbf{D}_1 = 0$ и $e^{3t}\mathbf{D}_2(\mathbf{T}^t)^{-1}\mathbf{D}_1 = \mathfrak{D}_2$, проверяемых напрямую.

2) В формулах (3.22) и (3.28) фигурируют средние нагрузок (по толщине пластины) и их моменты. Выражения (5.24) устроены более сложно и, в частности, зависят от упругих модулей пластины.

Предложение 5.3. *Пусть*

$$A_{ps}(y) = 0, \quad p = 1, \ldots, 4, \quad s = 5, 6, \tag{5.26}$$

т.е. пластина обладает плоскостью упругой симметрии $\{x : z = 0\}$. *Тогда оператор* $\mathfrak{M}^1$ *аннулируется.*

Доказательство. Прежде всего, $e^{it}\mathbf{D}_2 = 0$ при $i = 1, 2$ (см. (5.17)). Еще одна формула $e^{it}\mathbf{D}_1\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{T}^t)^{-1}\mathbf{D}_1 = 0$, приводящая к равенству $\mathfrak{M}_{i3} = 0$, а значит, и к нужному утверждению, обеспечивается структурой матриц $\mathbf{D}_1$ и

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 \\ \bullet & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(жирной точкой обозначаются ненулевые элементы). $\bullet$

Для несимметричных пластин (нарушены условия (5.26)) взаимодействие основных состояний проявляется в асимптотической поправке w^1, поскольку оператор $\mathfrak{M}^1$ в правой части (5.23) системы (5.6) содержит перекрестные члены. Разумеется, это взаимодействие реализуется и через краевые эффекты (граничное условие (5.11)). В следующем разделе подробно анализируется пограничный слой – единственно возможная причина взаимодействия основных состояний в симметричной пластине.

4. Специальные решения задачи в полуполосе. Обозначим через $\mathfrak{v}^p$ решение задачи (4.7)–(4.9) с правыми частями

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G}^{\pm} = 0, \quad g(s^0, \eta) = -V^{p-}(s^0, \eta). \tag{5.27}$$

Лемма 4.5 гарантирует существование энергетического решения $\mathfrak{v}^p \in \mathcal{H}$ и подобное (4.23) представление

$$\mathfrak{v}^p(s^0, \eta) = \tilde{\mathfrak{v}}^p(s^0, \eta) + \sum_{q=1}^{4} \mathfrak{Q}_{qp}(s^0) V^{q+}(\eta). \tag{5.28}$$

Из коэффициентов $\mathfrak{Q}_{qp}(s^0)$, где $p, q = 1, 2, 3$, составим 3×3-матрицу $\mathfrak{Q}(s^0)$ (значение $q = 4$ игнорируется в согласии с замечанием 4.4). Изучим свойства матрицы $\mathfrak{Q}$, опуская в промежуточных выкладках аргумент $s = s^0$. Напоминаем про соглашение, принятое в п. 2 §4, – при окончательной формулировке избавимся от него, воспользовавшись замечанием 4.2.

Очевидно, что сумма $\mathfrak{V}^q = V^{q-} + \mathfrak{v}^q$ удовлетворяет однородной задаче (4.7)–(4.9). Подставим $\mathfrak{v}^p$ и $\mathfrak{V}^q$ в формулу Грина в прямоугольнике $\Pi_T = (0, T) \times (-1/2, 1/2)$ с боковыми сторонами Υ_0 и Υ_T. Так как многие интегралы исчезают благодаря уравнениям и краевым условиям для $\mathfrak{v}^p$ и $\mathfrak{V}^q$, получаем

$$\int\limits_{\gamma} \mathfrak{v}^{pt} \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_\eta^t \mathfrak{V}^q \, dl_\eta =$$

$$= \int\limits_{\Upsilon_T} \{\mathfrak{V}^{qt} D(e^2) A \mathbb{D}_\eta^t \mathfrak{v}^p - \mathfrak{v}^{pt} D(e^2) A \mathbb{D}_\eta^t \mathfrak{V}^q\} d\eta_2, \tag{5.29}$$

где l_η – элемент длины дуги, $\mathbb{D}_\nu = \mathbb{D}(0, \nu_1, \nu_2)$, ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Pi$ (в частности, $\mathbb{D}_\nu = -D(e^2)$ на Υ_0). В силу леммы 4.3, равенств (5.27) и формулы Грина в полуполосе Π (см. (4.21)) левый интеграл I^-_{qp} (5.29) совпадает с суммой

$$\mathcal{E}(\mathfrak{v}^q, \mathfrak{v}^p; \Pi) + \int\limits_{\Upsilon_0} (V^{p-})^t D(e^2) A \mathbb{D}^t_\eta V^{q-} d\eta_2. \tag{5.30}$$

В правом интеграле I^+_{qp} заменим $\mathfrak{v}^p$ и $\mathfrak{V}^q$ их асимптотическими представлениями (см. (5.28)). Освобождаясь от членов, исчезающих при $T \to +\infty$, и учитывая соотношения (4.15) и (4.16), имеем

$$I^+_{qp} = -\sum_{k=1}^{4} \mathfrak{Q}_{kp} \int\limits_{\Upsilon_T} (V^{k+})^t D(e^2) A \mathbb{D}^t_\eta V^{q-} d\eta_2 + o(1) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{4} \mathfrak{Q}_{kp} \int\limits_{\Upsilon_T} (V^{k+})^t D(e^2) A \left(\mathcal{Y} + \mathbb{D}_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} \mathcal{V}\right) d\eta_2 \mathfrak{D}\left(0, \frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^t W^{q-} + o(1). \tag{5.31}$$

Последние интегралы выражаются через элементы матрицы $\mathfrak{M}$. В самом деле, заметим, что

$$D(e^2)^t V^{3+}(\eta) = \mathcal{Y}^5(\eta_2) + \alpha\eta_1 \mathbf{e}^5, \quad D(e^2)^t V^{1+} = \alpha \mathcal{Y}^3,$$

$$D(e^2)^t V^{2+}(\eta) = \mathcal{Y}^2, \quad D(e^2)^t V^{4+} \alpha = \mathbf{e}^5,$$

где $\mathcal{Y}^j$ – столбцы матрицы $\mathcal{Y}$ из (3.16), а $\mathbf{e}^5 = (0,0,0,0,1,0)^t$. При интегрировании $\mathbf{e}^5$ пропадает, поскольку $\mathbb{D}_1 A(\mathcal{Y} + \mathbb{D}^t_1 \partial\mathcal{V}/\partial\eta_2) = 0$ (см. текст после формулы (4.16)). Поэтому интегралы по Υ_T превращаются в интегралы из правой части формулы (3.24) для $\mathfrak{M}$. Еще одно полезное наблюдение: $\mathfrak{D}(0, \partial/\partial\eta_1)^t W^{q-}(\eta_1)$ – столбцы матрицы $\mathfrak{D}(e^2)^t$; $q = 1, 2, 3$ (см. (4.18) и (3.16)).

Предложение 5.4. *Предположим, что матрица Гука A не зависит от переменной ζ. Пусть $(n_1, n_2, 0)^t$ – вектор e^n внутренней нормали к $\partial\omega$ в точке s. Тогда 3×3-матрица*

$$\mathfrak{N}(s) = -\mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(s)\mathfrak{D}(n_1, n_2)^t \mathfrak{Q}(s)$$

оказывается симметрической и положительно определенной.

Доказательство. При учете преобразований, упомянутых в замечании 4.2, обнаруживаем, что $\lim I^+_{qp} = \mathfrak{N}_{qp}$. Итак, после предельного перехода $T \to +\infty$ в (5.29) остается разобраться с суммой (5.30). В силу (4.11)–(4.13)

$$V^{p-}(0,\eta_2) = \mathcal{V}(\eta_2)\mathfrak{D}(0,\partial/\partial\eta_1)^t W^{p-}(\eta_1).$$

Кроме того, согласно (5.18)

$$\mathcal{V}(\eta_2)^t \mathbb{D}(e^2) A\{\mathcal{Y}(\eta_2) + \mathbb{D}^t_1 \frac{\partial}{\partial\eta_2}\mathcal{V}(\eta_2)\} =$$

$$= \left(-\eta_2 \mathbb{I}_3, \left[\frac{\eta_2^2}{2} - \frac{1}{24}\right]\mathbb{I}_3\right)^t Q(\mathbb{I}_3, -\eta_2\mathbb{I}_3),$$

где Q – некоторая числовая 3×3-матрица. Таким образом, повторяя преобразования (5.31) подынтегрального выражения в последнем интеграле J_{qp} из (5.30), видим, что оно – нечетная функция переменной η_2, т.е. $J_{qp} = 0$. Первые слагаемые в (5.30) образуют матрицу Грама относительно скалярного произведения $\mathcal{E}(\bullet,\bullet;\Pi)$ в $\mathcal{H}$ (см. п. 2 §4), что и наделяет $\mathfrak{N}$ провозглашенными свойствами. •

Замечание 5.5. Неизменность упругих свойств пластины в поперечном направлении использовалась для уничтожения второго слагаемого в (5.30). В общем случае оно нулю не равно и дополнительно требуется применить процедуру ортогонализации степенных решений задачи (4.14), описанную в §5.2, 5.7 [36]. Это же касается и решения V^{4-}, упомянутого в замечании 4.4.

5. Объединенная задача и двумерное изображение пластины. В этом разделе принимаем упрощение (5.20) и (5.26). Сравнивая (4.10) и (5.27), обнаруживаем, что решение $v^0(s^0,\eta)$ задачи (4.7)–(4.9) оказывается линейной комбинацией специальных решений

$$\mathfrak{v}^1(s^0\eta)\partial_n w(s^0) + \mathfrak{v}^2(s^0,\eta)\partial_n w_n(s^0) + \mathfrak{v}^3(s^0,\eta)\partial_n^2 w_3(s^0).$$

Значит, коэффициенты разложения (4.23) вычисляются по формуле

$$(b_1(s^0), b_2(s^0), b_3(s^0))^t = \mathfrak{Q}(s^0)\mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s^0),$$

где $\mathfrak{Q}$ – матрица, введенная в предыдущем разделе, и

$$\mathfrak{T}^k(\partial_n)w(s) = (\partial_n^k w_s(s), \partial_n^k w_n(s), \partial_n^{1+k} w_3(s))^t.$$

Теперь краевые условия (5.11) записываются так:

$$\mathfrak{T}^0(\partial_n)w^1(s) = \mathfrak{Q}(s)\mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s), \quad s \in \partial\omega. \tag{5.32}$$

Если матрица $\mathfrak{Q}$ не является блочнодиагональной, то краевые условия (5.32) "перемешивают" основные состояния пластины даже в случае (5.26). Разумеется, подобные (5.26) равенства $\mathfrak{Q}_{i3}(s) = \mathfrak{Q}_{3i}(s) = 0$ при $i = 1, 2$, $s \in \partial\omega$, обеспечивающие невзаимодействие названных состояний, гарантированы лишь при симметрии зоны защемления γ_h относительно плоскости $\{x : z = 0\}$.

Этот параграф заканчиваем реализацией идеи [6, 23] о постановке задачи, объединяющей члены w и hw^1 гладкого типа. Такая задача формулируется в суженной двумерной области ω^h: ее граница $\partial\omega^h = \{y : n = hH(s)\}$ расположена внутри ω, поскольку функция H положительная. Выбор глубины усечения $hH(s)$, зависящей от множества $\gamma(s)$ в (2.5), осуществляется так, чтобы решение $\mathbf{w}^h$ задачи обладало асимптотикой $w + h^1 w^1 + O(h^2)$. Данный подход позволяет обоснованно говорить о двумерном изображении ω^h тонкой пластины Ω_h, защемленной по поверхности γ_h.

Прямыми вычислениями, опирающимися на формулы дифференцирования (4.34), убеждаемся в справедливости очередных утверждений.

Лемма 5.6. 1) *Если w удовлетворяет условиям* (3.29), *то*

$$\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s) = \mathfrak{D}(n_1, n_2)^t \mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s), \quad s \in \partial\omega.$$

2) *Пусть $w_3 = 0$ и $W_3 = 0$ на $\partial\omega$. Тогда верна формула Грина*

$$(\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathfrak{M}\mathfrak{D}(n_y)^t w, W)_\omega = (\mathfrak{M}\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w, \mathfrak{D}(\nabla_y)^t W)_\omega +$$

$$+ \int\limits_{\partial\omega} (\mathfrak{T}^0(\partial_n)W(s))^t \mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(s)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s)ds.$$

Заметим, что ранг 3×6-матрицы $\mathfrak{D}(n_1, n_2)$ равен трем и поэтому 3×3-матрица $\mathfrak{B}(s)^{-1} = \mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(s)\mathfrak{D}(n_1, n_2)^t$ положительно определена и симметрична (см. лемму 3.2). При помощи леммы 5.6 (1) переписываем соотношение (5.32) в виде

$$\mathfrak{T}^0(\partial_n)w^1(s) + \mathfrak{H}(s)\mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(s)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s) = 0, \tag{5.34}$$

причем благодаря предложению 5.4 матрица $\mathfrak{H}(s) = -\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{B}(s)$ также оказывается положительно определенной и симметрической. Через $H(s) > 0$ обозначаем наибольшее из собственных значений пучка $\Lambda \mapsto \mathfrak{H}(s) - \Lambda\mathfrak{B}(s)$ (все они положительные). Пусть еще $\mathbf{P}(s)$ – ортогональный проектор на собственное подпространство матрицы $\mathfrak{H}(s) - H(s)\mathfrak{B}(s)$; кроме того, $\mathbf{Q} = \mathbb{I}_3 - \mathbf{P}$ и $(H\mathfrak{B} - \mathfrak{H})^{-1}$ – обратное отображение для биекции $H\mathfrak{B} - \mathfrak{H} : \mathbf{Q}\mathbb{R}^3 \to \mathbf{Q}\mathbb{R}^3$.

В указанной ранее области ω_h рассмотрим краевую задачу

$$\mathfrak{D}(-\nabla_y)\mathfrak{M}(y)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t\mathbf{w}^h(y) = \mathbf{F}(y) \equiv \mathfrak{F}(y) + h\mathfrak{F}^{01}(y), \quad y \in \omega^h;$$

$$\mathfrak{T}^0(\partial_n)\mathbf{w}^h(y) + h(\mathfrak{H}(s) - H(s)\mathfrak{B}(s))\mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(y)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t\mathbf{w}^h(y) = 0,$$

$$\mathbf{w}_3^h(y) = 0, \quad y \in \partial\omega^h. \qquad (5.35)$$

Здесь $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^{01}$ определены формулами (3.22), (3.28) и (5.24). Задача (5.35) ставится в регулярно возмущенной области, а ее краевые условия содержат малый параметр h при старших производных. Для того чтобы избежать излишних нагромождений, вызванных введением норм, зависящих от h (см. [43–45] и др.), предположим, что правые части – бесконечно гладкие функции, и будем пользоваться некоэрцитивными оценками. Разумеется, при этом утрачивается возможность отследить в финальном неравенстве зависимость мажоранты от правых частей исходной задачи.

Положим

$$\mathfrak{W} = \{\mathbf{w} \in H^1(\omega^h)^2 \times H^2(\omega^h) : \mathbf{w}_3 = 0, \mathbf{P}\mathfrak{T}^0\mathbf{w} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^h\}.$$

Под обобщенным решением задачи (5.35) подразумеваем элемент подпространства $\mathfrak{W}$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathfrak{E}(w, W; \omega^h) + h^{-1}([H\mathfrak{B} - \mathfrak{H}]^{-1}\mathbf{Q}\mathfrak{T}^0 w, \mathbf{Q}\mathfrak{T}^0 W)_{\partial\omega^h} =$$

$$= (\mathbf{F}, W)_{\omega^h} \qquad \forall W \in \mathfrak{W} \qquad (5.36)$$

(сравни с (5.33) и (3.34)). По построению скалярное произведение в $L_2(\partial\omega^h)^3$порождает неотрицательно определенную квадратичную форму, т.е. очередное утверждение становится очевидным.

Предложение 5.7. *Если, например,* $\mathbf{F} \in L_2(\omega^h)^2 \times H^{-1}(\omega^h)$, *то существует единственное обобщенное решение* $\mathbf{w}^h \in H^1(\omega^h)^2 \times H^2(\omega^h)$ *задачи* (5.36) *и верна соответствующая оценка.*

Временно считаем краевые условия в (5.35) неоднородными (с правыми частями $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3)^t$ и $\mathbf{G}_4$ соответственно). Воспользуемся приемами из §7.6.5 [46] и [43–45], позволяющими перевести задачу в область ω и учесть вхождение малого параметра в дифференциальный оператор. Упрощая применяемые в [43–45] нормы устранением членов, содержащих малый параметр, получаем следующую загрубленную оценку решения $\mathbf{w}^h$ (сравни с оценкой (3.36) в предположении 3.4).

Лемма 5.8. *При* $l \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{w}^h; H^{l+1}(\omega^h)^2 \times H^{l+2}(\omega^h)\| \leqslant c_l(\|\mathbf{F}; H^l(\omega^h)^2 \times H^{l-1}(\omega^h)\| +$$
$$+\|\mathbf{G}; H^{l+1/2}(\partial\omega^h)^3\| + \|\mathbf{G}_4; H^{l+5/2}(\partial\omega^h)\|),$$

в котором постоянная c_l *не зависит от* $h \in (0,1)$ *и* $\mathbf{w}^h$.

Обсудим асимптотику решения задачи (5.35). Устремляя h к нулю, выводим предельную задачу (3.23), (3.29). Ясно, что поправка $h\mathbf{w}^1$ к ее решению w должна быть подчинена системе (5.6) с правой частью $\mathfrak{F}^{01}$. Невязка функции w в краевых условиях из (5.36) складывается из двух выражений: порожденного возмущением дифференциального оператора

$$h(\mathfrak{H}(s) - H(s)\mathfrak{B}(s))\mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(s)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s) =$$
$$= -(\mathfrak{Q}(s) + H(s)\mathbb{1}_3)\mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s) \qquad (5.37)$$

и вызванного свдвигом границы

$$\mathfrak{T}^0(\partial_n)w(y)\big|_{n=hH(s)} = \mathfrak{T}^0(\partial_n)w(s) + n\mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s)\big|_{n=hH(s)} + O(h^2) =$$
$$= hH(s)\mathfrak{T}^1(\partial_n)w(s) + O(h^2), \quad w_3(y)\big|_{n=hH(s)} = O(h^2). \qquad (5.38)$$

В (5.37) применялись лемма 5.6 (1) и преобразование, обратное для (5.34), а в (5.38) – формула Тейлора по переменной n и краевое условие (3.29). Таким образом, функция $\mathbf{w}^1$, компенсирующая главный член невязки, удовлетворяет краевым условиям (5.32), (5.9), а значит, совпадает со вторым асимптотическим слагаемым w^1 гладкого типа. Вместе с леммой 5.8 этот факт доставляет следующее утверждение.

Предложение 5.9. *Выполняется оценка*

$$\|\mathbf{w}^h - w - hw^1; H^3(\omega)^2 \times H^4(\omega)\| \leqslant ch^4,$$

причем постоянная c не зависит от параметра $h \in (0,1)$.

Все готово для того, чтобы построить приближение $\mathbf{U}^h$, порожденное решением $\mathbf{w}^h$ объединенной задачи (5.35), и оценить разность $\mathbf{U}^h - u$. В области $\Omega^h = \omega^h \times (-h/2, h/2)$ (урезанная пластина) положим

$$\mathbf{U}^h(h,x) = h^{-2}\mathbf{w}_3^h(y)e^3 + h^{-1}\sum_{i=1}^{2}\{\mathbf{w}_i^h(y) - \frac{z}{h}\frac{\partial \mathbf{w}_3^h}{\partial y_i}(y)\}e^i +$$

$$+\mathcal{V}\left(y, \frac{z}{h}\right)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t\mathbf{w}^h(y) + h\mathbf{U}^1\left(y, \frac{z}{h}\right), \qquad (5.39)$$

где $\mathbf{U}^1$ – вектор-функция, определенная формулой (5.22), в которой w заменена на $\mathbf{w}^h$. Подставляя в (5.39) вместо $\mathbf{w}^h$ сумму $w + hw^1$, обнаруживаем все слагаемые, указанные в (5.4); одновременно предложение 5.9 дает оценки погрешностей такой подстановки. По сравнению с (5.13) в (5.39) отсутствует пограничный слой. Его влияние подавляем введением в нормы дополнительных весовых множителей ρ_h (см. также замечание 4.10 (2)). Такие действия помогают обработать разность $\mathbf{U}^h - \mathcal{U}^1$ двух асимптотических приближений. Наконец, неравенство (5.14) в теореме 5.1 позволяет соотнести $\mathbf{U}^h$ и u.

Теорема 5.10. *Пусть выполнены требования* (5.26) *и* (5.20). *Решение u задачи* (2.11)–(2.13), *суженное на уменьшенную пластину* $\Omega^h = \omega^h \times (-h/2, h/2)$, *и асимптотическое приближение* (5.39), *построенное по решению* $\mathbf{w}^h$ *объединенной задачи* (5.35), *подчинены соотношению*

$$|\!|\!|\mathbf{U}^h - u|\!|\!|_h + \|\rho_h(\varepsilon(\mathbf{U}^h) - \varepsilon(u)); L_2(\Omega^h)\| \leqslant ch, \qquad (5.40)$$

в котором постоянная c не зависит от $h \in (0,1)$, $\rho_h(y) = h + \operatorname{dist}\{y, \partial\omega\}$, *а норма* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_h$ *получается сужением в* (2.21) *области интегрирования до* Ω^h *и добавлением сомножителя* ρ_h^2 *в каждое из слагаемых подынтегрального выражения.*

Согласно оценке (5.40) решение объединенной задачи дает повышенную точность $O(h)$ приближения на удалении от боковой поверхности Γ^h пластины Ω^h, но вблизи $\Gamma^h = \{x : y \in \partial\omega^h, |z| < h/2\}$ погрешность сохраняет тот же порядок h^0, что и для основного приближения (3.50) (см. следствие 3.8). На большее рассчитывать не приходится из-за игнорирования краевых эффектов, т.е. отсутствия в (5.39) составляющей типа пограничного слоя, дающей по теореме 4.9 вклад $O(h^{1/2})$ в энергетическую норму решения. Впрочем, в (5.39) все-таки фигурируют интегральные характеристики задачи (4.7)–(4.9) о пограничном слое (матрица $\mathfrak{Q}(s)$) и краевые эффекты моделируются *условиями упругой заделки*. Именно, матрица $H\mathfrak{B} - \mathfrak{H}$ описывает связь между продольными силами/изгибающим моментом и продольными смещениями/углом поворота. Такая матрица обязана быть по крайней мере неотрицательно определенной, что удалось достичь путем сдвига границы *плоского изображения пластины*. Более глубокое продвижение контура $\partial\omega^h = \{y : n = hH(s)\}$ делает матрицу $H(s)\mathfrak{B}(s) - \mathfrak{H}(s)$ положительно определенной, однако мы взяли величину $H(s)$, *минимальную* среди удовлетворяющих физичеким требованиям.

§6. Условия шарнирного опирания

1. Обсуждение. В согласии с замечанием 2.5 (2) результаты предыдущих трех параграфов сохраняются в случае, если защемленная полоска на нижнем основании пластины имеет ширину $O(h)$, т.е. величина H в (2.33) зафиксирована. При этом условия Дирихле (2.13) наследуются предельной задачей (4.7)–(4.9) о пограничном слое и по прежней схеме формируется объединенная задача (5.35) с матрицей $\mathfrak{H} - H\mathfrak{B}$ общего вида (основные состояния пластины взаимодействуют). Если же ширина полоски есть $o(h)$, то в пределе множество $\gamma(s)$ истощается и приходится ставить условия Неймана всюду на $\partial\Pi$. Впрочем, можно сохранить условия Дирихле на исчезающе малом множестве $\gamma(s) \subset \partial\Pi$ и перейти к рассмотрению сингулярно возмущенной задачи. Математический аппарат исследования подобных задач досконально разработан в [29, 30, 20]. В частности, ввиду исчезновения условий Дирихле предсказуем рост элементов матрицы $\mathfrak{Q}(s)$, а значит, и матрицы $\mathfrak{H}(s)$, при $h^{\delta+1/2} \to 0$ (геометрический параметр, фигурирующий в (2.6)). Если гипотетически скорость роста превосходит по порядку h^{-1}, то в условиях упругой заделки из (5.35) асимптотически главным становится фрагмент оператора, содержащего $\mathfrak{D}(\nabla_y)^t$. Этот факт приводит к неожиданным последствиям: указанный фрагмент обязан присутствовать в краевых условиях для основного члена w гладкого типа и результирующая задача перестает быть задачей Дирихле.

В следующих разделах демонстрируется, что обрисованная ситуация возникает при положительном показателе δ в (2.6), когда краевые условия для системы (3.23) приобретают вид

$$w_3(y) = 0, \quad w_s(y) = 0, \quad w_n(y) + \tau\partial_n w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \qquad (6.1)$$

$$(\tau n_1, \tau n_2, -1)\mathfrak{D}(n_1, n_2)\mathfrak{M}(y)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \qquad (6.2)$$

где $\tau = 1/2$ – относительное отклонение зоны защемления от срединной плоскости пластины. Обращаясь к формуле Грина из леммы 5.6 (2), заключаем, что условия (6.1) устойчивые, а (6.2) естественные (терминология из [47]). Вместе с тем, справедливо утверждение, аналогичное предложению 3.4.

Предложение 6.1. *Пусть $|\tau| \leqslant 1/2$, $l \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{F} \in H^{l-1}(\omega)^2 \times H^{l-2}(\omega)$. Существует единственное решение $w \in H^{l+1}(\omega)^2 \times H^{l+2}(\omega)$ задачи* (3.23), (6.1), (6.2) *и верна оценка* (3.36).

Соотношение (6.2) означает, что на $\partial\omega$ аннулируется изгибающий момент, вычисленный относительно нижней кромки пластины, т.е. реализуется шарнирное опирание пластины. Далее разрабатывается именно означенный в (2.6) случай $\tau = 1/2$, однако предлагаемые методы исследования пригодны при любом расположении узкой зоны защемления γ_h, в частности, и при симметричном ее расположении, когда $\tau = 0$. Если к тому же результирующая система распадается (см. (5.19)), то в (6.2) содержатся лишь вторые производные прогиба w_3 и равенства (6.1), (6.2) принимают вид классических условий шарнирного опирания. Физические причины замещения условий (3.29) условиями (6.1), (6.2) поясняются в [48].

В следующих разделах считаем, что, как и в п. 3, 4 §5, матрица Гука A не зависит от переменной ζ. Кроме того, боковая поверхность пластины свободна от напряжений, т.е. в (2.12) $g = 0$ на Γ_h. Наконец, правые части f и $g^{\pm}$ подчинены требованиям (3.3), (3.4) и (4.1), а остатки $\tilde{f}$ и $\tilde{g}^{\pm}$ удовлетворяют соотношению, согласованному с предложениями 2.3 и 2.6,

$$\sum_{i=1}^{2}\{\|\tilde{f}_i; L_2(\Omega_h)\| + h^{-1/2}\sum_{\pm}\|\tilde{g}_i^{\pm}; L_2(\Sigma_\gamma^{\pm})\|\}+$$

$$+h^{-1}\|\tilde f_3; L_2(\Omega_h)\| + h^{-3/2}\sum_{\pm}\|\tilde g_3^{\pm}; L_2(\Sigma_\gamma^{\pm})\| = |\log h|\tilde{\mathcal N}_0. \qquad (6.3)$$

2. Задача в полуполосе. Примем соглашение из п. 2 §4, но не будем в обозначениях указывать на точку s^0. Поступая так же, как и ранее, выводим задачу для описания пограничного слоя

$$-\mathbb{D}_\eta A\mathbb{D}_\eta^t v^0(\eta) = 0, \quad \eta \in \Pi, \qquad (6.4)$$

$$\pm\mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_\eta^t v^0(\eta) = 0, \quad \eta \in \Sigma^+ \cup \Sigma_h^-, \qquad (6.5)$$

$$-D(e^2)A\mathbb{D}_\eta^t v^0(\eta) = G^0(\eta_2), \quad \eta \in \Upsilon_0 = \{\eta : \eta_1 = 0,\, |\eta_2| < 1/2\}, \quad (6.6)$$

$$v^0(\eta) = g^0(\eta_1), \quad \eta \in \gamma = \{\eta : \eta_2 = -1/2,\, 0 < \eta_1 < Hh^{\delta+1/2}\}, \quad (6.7)$$

в которой $A = A(s^0)$, $\Sigma^\pm = \{\eta : \eta_2 = \pm 1/2, \eta_1 > 0\}$ и $\Sigma_h^- = \{\eta \in \Sigma^- : \eta_1 > Hh^{\delta+1/2}\}$. При этом в соответствии с (4.15)

$$G^0(\eta_2) = D(e^2)A(\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{V}(\eta_2) + \mathcal{Y}(\eta_2))\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s^0). \qquad (6.8)$$

Раскладывая фрагменты (3.2) и (3.17) асимптотического приближения (3.1) в ряды Маклорена по переменной n и удерживая члены до порядка h^0 включительно, находим, что невязка в краевых условиях (2.13) вычисляется по формуле

$$g^0(\eta_1) = -h^{-2}\{w_3(s^0) + h\eta_1\partial_n w_3(s^0) + \frac{1}{2}h^2\eta_1^2\partial_n^2 w_3(s^0)\}e^3 -$$
$$-h^{-1}\{w_n(s^0) + \tau\partial_n w_3(s^0) + h\eta_1\partial_n w_n(s^0) + \tau h\eta_1\partial_n^2 w_3(s^0)\}e^n - \quad (6.9)$$
$$-h^{-1}(w_s(s^0) + \tau\partial_s w_3(s^0) + h\eta_1\partial_n w_s(s_0) + \tau h\eta_1\partial_n\partial_s w_3(s^0)\}e^s -$$
$$-h^0\mathcal{V}(-\tau)\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s^0),$$

где $\tau = 1/2$. Ближайшая цель – уменьшить порядок величины (6.9) за счет выбора устойчивых краевых условий. Заметим, что η_1 – бесконечно малая $O(h^{\delta+1/2})$ на γ. Поэтому равенство (6.1) уничтожают в (6.9) слагаемые $O(h^{-2})$, $O(h^{-1})$, и оказывается, что $g^0(\eta_1) = O(h^{\min\{0,\delta-1/2\}})$. Далее станет ясно, что такая правая часть g^0 допустима даже в случае $\delta \in (0, 1/2)$.

Сделаем условия Дирихле (6.7) однородными путем подбора подходящего продолжения функции (6.9). В силу (2.6) переход к $h = 0$ в задаче (6.4)–(6.7), записанной при помощи координат

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = h^{-\delta-1/2}(\eta_1, \eta_2 + 1/2), \qquad (6.10)$$

порождает задачу о деформации клина $\mathbb{K} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_i > 0,\, i = 1, 2\}$, зажатого по отрезку $\gamma_\xi = \{\xi : \xi_2 = 0,\, 0 < \xi_1 < H\}$. Ее изучение проводится по общей схеме из гл. 6 книги [36].

Лемма 6.2. *Существует единственное ограниченное решение задачи*

$$-\mathbb{D}_\xi A\mathbb{D}_\xi^t Y(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{K}; \quad \mathbb{D}_\nu A\mathbb{D}_\xi^t Y(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\mathbb{K} \setminus \overline{\gamma_\xi},$$
$$Y(\xi) = g^0(h^{\delta+1/2}\xi_1), \quad \xi \in \gamma_\xi.$$

Это решение принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{K}})^3$ и допускает представление

$$Y(\xi) = C + \tilde{Y}(\xi),$$

причем $C \in \mathbb{R}^3$ и $|\nabla_\xi^k \tilde{Y}(\xi)| \leqslant c_k|\xi|^{-\delta_A - k}$ при $|\xi| > H$ и $k = 0, 1, \ldots$ ($\delta_A > 0$ – число, зависящее от матрицы A). Кроме того,

$$|C| + \|\nabla_\xi \tilde{Y}; L_2(\mathbb{K})\| + \|(1 + |\xi|)^{-1}\tilde{Y}; L_2(\mathbb{K})\| + |J(Y)| \leqslant$$
$$\leqslant c\{h^{\delta-1/2}|\partial_n w_3(s^0)| + |\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s^0)|\}, \qquad (6.11)$$

где $J(Y)$ – сумма интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{K}} (e^3\xi_1 - e^2\xi_2)^t[-\mathbb{D}_\xi A\mathbb{D}_\xi^t, \chi_K]\tilde{Y}\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\partial\mathbb{K}} (e^3\xi_1 - e^2\xi_2)^t[\mathbb{D}_\nu A\mathbb{D}_\xi^t, \chi_K]\tilde{Y}\, dl_\xi, \qquad (6.12)$$

не зависящая от срезки $\chi_K \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, равной единице вблизи отрезка γ_ξ. Здесь $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ – коммутатор операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Итак, разность $\mathbf{v}(\eta) = v^0(\eta) - C - \chi_K(\eta)\tilde{Y}(\xi)$ удовлетворяет однородным условиям Дирихле (6.7), а правые части уравнения (6.4) и краевых условий (6.5), (6.6) дополняются коммутаторами, фигурирующими в (6.12). Срезку χ_K фиксируем так, чтобы $\chi_K(\eta) = 0$ при $\eta_1^2 + (\eta_2 + 1/2)^2 \geqslant 1$, – в этом случае носители правых частей попадают в квадрат $\mathbf{Q} = \{\eta : 0 \leqslant \eta_1 \leqslant 1, |\eta_2| \leqslant 1/2\}$. Теперь можно определить обобщенное решение $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{H}$ полученной задачи, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{u}; \Pi) = (\mathbf{F}, \mathbf{u})_\Pi + (\mathbf{G}, \mathbf{u})_{\partial\Pi \setminus \gamma(s^0)}. \qquad (6.13)$$

Для $\mathbf{v}$ выполняется представление (4.23), однако постоянные в неравенстве (4.24) зависят от параметра h (ввиду малой длины отрезка $\gamma(s^0)$). Следующая лемма уточняеет эту зависимость; ее проверка заключается в переносе на двумерный случай доказательства предложения 2.3, т.е. в реализации схемы, предложенной в [35].

Лемма 6.3. *Пусть вектор* $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{H}$ *представлен в виде*

$$\mathbf{v}(\eta) = \mathbf{v}^{\perp}(\eta) + \beta_1 e^1 + \beta_2 e^2 + \beta_4 e^3 + \beta_3 \{e^3 \eta_1 - e^2[\eta_2 + 1/2]\}, \quad (6.14)$$

$$(\mathbf{v}^{\perp}, V^{k+})_{\mathbf{Q}} = 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

При условии (2.6) *справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{v}^{\perp}; H^1(\mathbf{Q})\| + |\log h|^{-1}(|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_4| + h^{\delta+1/2}|\beta_3|) \leqslant c\mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \Pi)^{1/2} \quad (6.15)$$

с постоянной c, *не зависящей от* $\mathbf{v}$ *и* $h \in (0,1)$.

В тождестве (6.13) положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ и справа заменим $\mathbf{v}$ представлением (6.14) (напоминаем, что $\operatorname{supp}\mathbf{F} \subset \mathbf{Q}$, $\operatorname{supp}\mathbf{G} \subset \partial\mathbf{Q}$). Согласно (6.15) наибольший вклад в оценку энергетической нормы $\mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \Pi)^{1/2}$ дают интегралы, содержащие последнее слагаемое из (6.14) – поворот вокруг вершины $O^- = (0, -1/2)$ полуполосы. Потребуем, чтобы

$$\left(G^0, \left[\eta_2 + \frac{1}{2}\right] e^n - n e^3\right)_{\Upsilon_0} = (G^0, \eta_2 e^n)_{\Upsilon_0} + \frac{1}{2}(G^0, n_1 e^1 + n_2 e^2)_{\Upsilon_0} = 0 \quad (6.16)$$

(см. замечание 4.2), и подчеркнем, что при помощи выкладок, сопутсвующих обработке выражения (5.31), соотношение (6.16) преобразуется в краевое условие (6.2). Теперь, принимая во внимание формулы (6.8), (6.16) и оценку (6.15) (нельзя забывать о дополнительных множителях $h^{\cdots}$, возникающих вследствие замены (6.10)), заключаем, что

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \Pi)^{1/2} \leqslant c|\log h|\{h^{\delta-1/2}|\partial_n w_3(s^0)|h^0 + |\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s^0)|\}. \quad (6.17)$$

Замечание 6.4. Из (6.17) вытекает, что вклад пограничного слоя в энергетическую норму $E(u, u; \Omega_h)^{1/2}$ составляет $O(h^{\delta-1/2}|\log h|)$ (а не $O(h^0)$, как в §4). При нарушении (6.16) в фигурной скобке (6.17) появляется слагаемое $h^{-\delta-1/2}|\mathfrak{D}(\nabla_y)^t w(s^0)|$, изменяющее порядок мажоранты и доводящее норму $\mathbf{v}$ до $O(h^{-\delta-1/2}|\log h|)$ (напоминаем, что $\delta > 0$). Если же $\delta < 0$, то главенствует слагаемое из (6.17), содержащее $\partial_n w_3(s^0)$, и потому требуется обычное краевое условие $\partial_n w_3 = 0$ на $\partial\omega$. В обоих случаях норма $O(h^{-1/2})$ составляющей (3.50) гладкого типа превалирует над нормой решения типа пограничного слоя.

Поскольку $\|\mathbf{v}^{\perp}; H^{1/2}(\Upsilon_0)\|$ оценивается при помощи (6.17) и (6.15), теперь можно воспользоваться леммой 4.6 и получить представление (4.23) совместно с неравенством (4.24). Сформулируем результат в удобном для дальнейших целей виде.

Предложение 6.5. *Для решения v^0 задачи* (6.4)–(6.7) *справедливы представления* (4.23) *и неравенство*

$$\|v^0; H^{3/2}(\partial\omega \to \mathcal{H})\| + \|\tilde{v}; H^{3/2}(\partial\omega \to W^1_\delta(\Pi)^3)\| + \|b; H^{3/2}(\partial\omega)\| \leqslant$$

$$\leqslant c|\log h| h^{\min\{\delta-1/2,0\}} \|w; H^3(\omega)^2 \times H^4(\omega)\|, \qquad (6.18)$$

где w – решение результирующей задачи (3.23), (6.1), (6.2).

3. Оценка точности приближения. Центральной в данном параграфе является следующее утверждение.

Теорема 6.6. *Пусть выполнены все условия, сформированные в п. 1, а также соотношение* (2.6) *с $\delta > 0$. Тогда решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)^3$ задачи* (2.11)–(2.13) *и его асимптотическое приближение* (3.50), *определенное по решению w результирующей системы* (3.23) *с краевыми условиями* (6.1), (6.2) *(шарнирное опирание края), связаны неравенством*

$$|||U^0 - u||| + \|\varepsilon(U^0) - \varepsilon(u); L_2(\Omega_h)\| \leqslant c|\log h| h^{\min\{\delta-1/2,0\}}(\mathcal{N}_1 + \tilde{\mathcal{N}}_\delta), \qquad (19)$$

где через $|||u|||^2$ обозначена правая часть (2.29), *а величина $\mathcal{N}_1$ и $\tilde{\mathcal{N}}_\delta$ взяты из* (4.1) *и* (6.3). *Постоянная c зависит от матрицы A, сечения пластины ω и от величин H, $\delta > 0$ из* (2.6).

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и ранее. Поэтому здесь ограничимся указанием на необходимые изменения (незначительные). В качестве промежуточного приближения берется конструкция (4.29), причем в нее дополнительно вводится слагаемое $h^{-2} n \partial_n \mathcal{U}_\Gamma^{-2}(s) = h^{-2} n e^3 \partial_n w_3(s)$, а срезка X в окрестности $\mathcal{O}_h$ считается равной $1 - \chi_\Pi(\xi)$. При выводе подобного (3.42) соотношения для разности $R^{1/2} = U_X^{1/2} - u$ нужно аккуратно обращаться с условием Неймана на боковой поверхности пластины (пограничный слой ликвидирует главный член невязки в этом условии). Все интегралы из правой части (3.42), за исключением I_v (см. п. 3 §4), обрабатываются по прежней схеме при учете предложений 2.3, 6.1 и неравенства (6.18). Поскольку в теореме 6.6 пограничный слой отнесен к асимптотическому остатку, искомая оценка для I_v становится очевидной:

$$|I_v| \leqslant c\|D^t\tilde{v}; L_2(\Omega_h)\| \times \|D^t R^{1/2}; L_2(\Omega_h)\| \leqslant \\ \leqslant c|\log h|h^{\delta-1/2}\mathcal{N}_1 E(R^{1/2}, R^{1/2}; \Omega_h)^{1/2}.$$

Наконец, обращаем внимание на различие весовых множителей в (2.21) и (2,29); тем не менее, требуемая оценка разности $U_X^{1/2} - U^0$ выводится аналогично доказательствам демм 4.2 и 4.1. •

Замечание 6.7. 1) Так как к проверке неравенства (6.19) был привлечен пограничный слой, в теореме 6.6 использованы условия гладкости (4.1), более ограничительные, чем условия (3.30) в теореме 3.7 и следствии 3.8.

2) Если в (2.6) $\delta = 1/2$ и $\gamma(s) = \{\eta : \eta_1 = -1/2, \eta \in (0, Hh^{1/2})\}$, то влияние слагаемых, обсуждавшихся в замечании 6.4 выравнивается. При этом несложно предсказать, что в краевое условие (6.2) добавляется член $-\beta_H \partial_n w_3(y)$, т.е. оно превращается в условие упругой заделки.

Литература

1. K. O. Fridrichs, R. F. Dressler, *A boundary-layer theory for elastic plates.* — Comm. Pure Appl. Math. **14,** No. **1** (1961), 1–33.
2. А. Л. Гольденвейзер, *Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.* — Прикладная математика и механика **26, No. 4** (1962), 668–686.
3. А. Л. Гольденвейзер, А. В. Колос, *К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин.* — Прикладная математика и механика **29, No. 1** (1965), 141–161.
4. С. А. Назаров, *Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях.* — Вестник ЛГУ No. 7 (1982), 65–68.
5. R. D. Gregory, F. V. Wan, *Decaying states of plane strain in a semi – infinite strip and boundary conditions for plate theory.* — J. Elast. **14,** No. **1** (1984), 27–64.
6. И. С. Зорин, С. А. Назаров, *Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины.* — Прикладная математика и механика **53, No. 4** (1989), 642–650.
7. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных пластин.* М.: Наука, 1987. 360 с.
8. И. С. Зорин, *Операторное представление системы Ламе и предельные краевые задачи теории тонких плит.* — Вестник ЛГУ No. 22 (1987), 108.
9. I. Babuska, J. Pitkaranta, *The plate paradox for hard and soft simple support.* — SIAM J. Math. Anal. **21 No.** (1990), 551–576.

10. О. М. Сапонджян, *Изгиб свободно опертой полигональной плиты.* — Известия АН Арм. ССР **5, No. 2** (1952), 29–46.

11. И. Бабушка, *Устойчивость области определения по отношению к возмущению границы основных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. 1.* — Чехословацкий матем. журнал **11, No. 1** (1961), 76–105; 2.ibid, No. 2 (1961), 165–203.

12. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными.* — Известния АН СССР. Сер. матем. **50, No. 6** (1986), 1156–1177.

13. С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *Приближение гладких контуров многоугольными. Парадоксы в задачах для системы Ламе.* — Известия РАН. Сер. матем. **61, No. 3** (1997), 159–186.

14. Б. А. Шойхет, *Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры.* — Прикладная математика и механика **37, No. 5** (1973), 913–924.

15. P. Destuynder, *Comparison entre les modelèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en èlasticitè.* — RAIRO Analyse Numerique **15** (1981), 331–369.

16. D. Caillerie, *Thin elastic and periodic plates.* — Math. Meth. Appl. Sci. **2** (1984), 251–270.

17. С. Н. Леора, С. А. Назаров, А. В. Проскура, *Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ.* — Журнал вычислительной матем. и матем. физики **26, No. 6** (1986), 1032–1048.

18. P. Destuynder, I. Gruais, *Error estimation for the linear three-dimensional elastic plate model.* — Asymptotic Methods for Elastic Structures. Berlin, New York: Walter de Gruyter (1995), 75–88.

19. С. А. Назаров, *Введение в асимптотические методы теории упругости.* Л.: изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.

20. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.* Bd. 1, 2. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 432, 317 s.

21. M. Dauge, I. Gruais, *Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée.* — C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1 **321** (1995), 375–380.

22. С. А. Назаров, *Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями.* — Матем. сборник **181, No. 3** (1990), 291–320.

23. И. С. Зорин, С. А. Назаров, *Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, защемленной по краю.* — Вычислительная механика деформируемого твердого тела Вып. 2 (1991), 10–21.

24. S. A. Nazarov, *On the accuracy of asymptotic approximations for longitudinal deformation of a thin plate.* — Math. Modelling and Numerical Analysis **30, No. 2** (1995), 185–213.

25. А. М. Ильин, *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с щелью. 2. Область с малым отверстием.* — Матем. сборник **103, No. 2** (1977), 265–284.

26. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области.* — Проблемы математического анализа. Вып. 8. Л.: изд-во ЛГУ (1981), 72–153.
27. О. Б. Агаларян, С. А. Назаров, *Об изменении коэффициента интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне.* — Докл. АН Арм. ССР **72, No. 1** (1981), 18–21.
28. Э. Санчес-Паленсия, *Некоторые вопросы теории упругости в неограниченных областях и их приложения к контактным задачам.* — Труды Матем. института АН СССР **192** (1990), 183–196.
29. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений эллиптических задач.* М.: Наука, 1989. 336 с.
30. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области.* Тбилиси: изд-во ТГУ. 1981. 206 с.
31. J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Paris: Masson, 1967. 351 p.
32. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике.* М.: Наука, 1980, 384 с.
33. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна.* — Успехи матем. наук **43, No. 5** (1988), 55–98.
34. С. А. Назаров, *Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей.* — Вестник СПбГУ No. 8 (1992), 19–24.
35. S. A. Nazarov, *Korn's inequalities for functions of spatial bodies and thin rods.* — Math. Meth. Appl. Sci **20**, No. **3** (197), 219–243.
36. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994, 524 p.
37. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 408 с.
38. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы.* — Проблемы матем. анализа Вып. 16. СПб.: изд-во СПбГУ. 1997.. 167–192.
39. С. А. Назаров, *Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких.* — Алгебра и анализ **7, No. 5** (1995), 1–92.
40. С. А. Назаров, Б. Н. Семенов, *Об асимптотике решений задач изгиба пластин с разрывными нагрузками.* — Прикладная механика Вып. 5. Л.: изд-во ЛГУ, 1981. 135–145.
41. С. А. Назаров, *Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях.* — Матем. заметки **62, No. 5** (1997), 751–765.
42. O. A. Oleinik, G. A. Yosifian, *On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **78**, No. **1** (1982), 29–53.
43. С. А. Назаров, *Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе.* — Сибирский матем. журнал **22, No. 4** (1981), 142–163.

44. С. А. Назаров, *Регулярное вырождение эллиптических систем с малым параметром при старших производных.* — Вестник ЛГУ **No. 13** (1982), 106–108.
45. Н. Х. Арутюнян, С. А. Назаров, *Об особенностях функции напряжений в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием.* — Прикладная матем. и механика **47, No. 1** (1982), 122–132.
46. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972. 740 с.
47. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир, 1971. 371 с.
48. И. А. Алдошина, С. А. Назаров, *Асимптотически точные условия сопряжения на стыке пластин с сильно различающимися характеристиками.* — Прикладная математика и механика **62, No. 2** (1998), 272–282.

Nazarov S. A. Boundary layers and the hinge-support conditions for thin plates.

The boundary layer phenomenon is investigated for a thin three-dimensional plate. Arbitrary anisotropy of elastic properties and inhomogenuity in longitudinal and transversal directions are permitted. Some of initial asymptotic terms are constructed and a way to continue the asymptotic procedure is described. Precise estimates of the difference between the exact and approximate solutions are obtained for the energy norm. The amalgamated problem is formed that gives the two-term asymptotics of the displacement and stress fields at a distance from the lateral side of the plate while the edge effects are simulated by elastic clamping conditions containing integral characteristics of the boundary layer problem in the semi-strip. The hinge-support conditions which appear due to sufficiently narrow claming zone at plate's edge, are derived and justified, too.

Институт проблем
машиностроения РАН

Поступило 19 октября 1998 г.