Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Л. А. Молотков

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ СО СКОЛЬЗЯЩИМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ СЛОЯМИ

В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию распространения волн в пористых и трещиноватых средах. Этот интерес обусловлен тем, что природные коллекторы нефти и газа являются, как правило, пористыми или трещиноватыми средами. Исследование волновых процессов в этих средах проводится на основе эффективных моделей с использованием результатов изучения распространения волн в упругих и жидких средах. Такими эффективными моделями, в частности, являются среды Био [1, 2] и осредненные модели, описывающие пористые, упругие и жидкие слои [3, 4].

В предлагаемой работе исследуется волновое поле в эффективное модели слоистой пористой среды, в которой между упругими фазами соседних пористых слоев имеет место контакт с проскальзыванием. Эта эффективная модель с ее уравнениями была установлена в работе [4] и является трехфазной. В этой модели осреднены жидкие фазы различных слоев, а упругие фазы вследствие контакта с проскальзыванием не осредняются. В частном случае описываемая пористая среда состоит из одинаковых слоев, находящихся в том же самом контакте. В этом случае эффективная модель оказывается двухфазной и отличается от среды Био тем, что в этой модели модуль сдвига равен нулю и отсутствуют квази-поперечные волны.

§1. Уравнения эффективной модели

Пусть задана эффективная модель, которая описывает слоистую периодическую пористую трансверсально-изотропную среду Био с граничными условиями, выражающими контакт с проскальзыванием между упругими фазами, и которая была устано-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-05-65537).

влена в работе [4]. Эффективная модель является трехфазной и характеризуется уравнениями закона Гука

$$\begin{aligned}
\theta_1\tau_{xx1} &= P_{11}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + F_1\frac{\partial u_z}{\partial z} + M_1\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\theta_2\tau_{xx2} &= P_{12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + F_2\frac{\partial u_z}{\partial z} + M_2\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz} &= F_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + F_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p &= M_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + M_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

и уравнениями сплошной среды

$$\begin{aligned}
\theta_1\frac{\partial\tau_{xx1}}{\partial x} &= \rho_{x11}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_{x12}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \rho_{fx1}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
\theta_2\frac{\partial\tau_{xx2}}{\partial x} &= \rho_{x12}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_{x22}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \rho_{fx2}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_{fx1}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_{fx2}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + m_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} &= \rho_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fz}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{fz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z\frac{\partial^2 w_z}{\partial z},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где u_{xi} – смещение вдоль оси x в упругой фазе i, τ_{xxi} – общее напряжение жидкой фазы и упругой фазы i $(i = 1,2)$, u_z и τ_{zz} – общие для всех трех фаз смещение и напряжение, w_x, w_z, p – относительные смещения и давление в жидкой фазе и θ_i – относительная толщина слоя i $(i = 1,2;\ \theta_1 + \theta_2 = 1)$. Входящие в уравнения (1.1) и (1.2) параметры выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \theta_1[\alpha_{31} + \theta_1(\alpha_{11}^2 A_5 - 2\alpha_{11}\alpha_{21}A_4 + \alpha_{21}^2 A_6)A],\\
P_{12} &= \theta_1\theta_2[A_5\alpha_{11}\alpha_{12} + A_6\alpha_{21}\alpha_{22} - A_4(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{12})]A,\\
P_{22} &= \theta_2[\alpha_{32} + \theta_2(\alpha_{12}^2 A_5 - 2\alpha_{12}\alpha_{22}A_4 + \alpha_{22}^2 A_6)A],\\
F_1 &= \theta_1(\alpha_{11}A_5 - \alpha_{21}A_4)A, \quad F_2 = \theta_2(\alpha_{12}A_5 - \alpha_{22}A_4)A,\\
M_1 &= \theta_1(\alpha_{11}A_4 - \alpha_{21}A_5)A, \quad M_2 = \theta_2(\alpha_{12}A_4 - \alpha_{22}A_5)A,\\
C &= A_5 A, \quad Q = A_4 A, \quad R = A_6 A, \quad A = (A_5 A_6 - A_4^2)^{-1};
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_{x11} = \theta_1(\beta_{11} + \beta_{21}^2\theta_1 B_3^{-1}), \quad \rho_{x12} = \theta_1\theta_2\beta_{21}\beta_{22}B_3^{-1},\\
&\rho_{x22} = \theta_2(\beta_{12} + \beta_{22}^2\theta_2 B_3^{-1}), \quad \rho_{fx1} = \theta_1\beta_{21}B_3^{-1}, \quad \rho_{fx2} = \theta_2\beta_{22}B_3^{-1},\\
&m_x = m_{x1}m_{x2}(m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2)^{-1}, \quad \rho_z = \rho_{z1}\theta_1 + \rho_{z2}\theta_2,\\
&\rho_{fz} = \rho_{fz1}\theta_1 + \rho_{fz2}\theta_2, \quad m_z = m_{z1}\theta_1 + m_{z2}\theta_2,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_i = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{ik}\theta_k \ (i = 1, 2, \dots, 6), \quad B_3 = \sum_{k=1}^{2}\beta_{3k}\theta_k,\\
&\alpha_{1i} = \frac{R_i\bar F_i - Q_i\bar M_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\bar F_iQ_i - \bar M_iC_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{3i} = \frac{\Delta_i}{R_iC_i - Q_i^2},\\
&\alpha_{4i} = \frac{Q_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{5i} = \frac{C_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{6i} = \frac{R_i}{R_iC_i - Q_i^2},\\
&\Delta_i = P_iC_iR_i + 2Q_i\bar F_i\bar M_i - C_i\bar M_i^2 - R_i\bar F_i^2 - P_iQ_i^2,\\
&\beta_{1i} = \frac{m_{xi}\rho_{xi} - \rho_{fxi}^2}{m_{xi}}, \quad \beta_{2i} = \frac{\rho_{fxi}}{m_{xi}}, \quad \beta_{3i} = \frac{1}{m_{xi}}.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Параметры P_i, C_i, R_i, $\bar F_i$, $\bar M_i$, Q_i, ρ_{xi}, $\bar\rho_{fxi}$, m_{xi}, ρ_{zi}, ρ_{fzi}, m_{zi} характеризуют слой i $(i = 1, 2)$ заданной среды. Коэффициенты (1.3) и (1.4) в уравнениях (1.1) и (1.2) образуют положительно определенные матрицы

$$
\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & F_1 & M_1\\ P_{12} & P_{22} & F_2 & M_2\\ F_1 & F_2 & C & Q\\ M_1 & M_2 & Q & R \end{pmatrix},
$$
$$
\begin{pmatrix} \rho_{x11} & \rho_{x12} & \rho_{fx1}\\ \rho_{x12} & \rho_{x22} & \rho_{fx2}\\ \rho_{fx1} & \rho_{fx2} & m_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_z & \rho_{fz}\\ \rho_{fz} & m_z \end{pmatrix}.
\tag{1.6}
$$

Доказательства этих утверждений приведены в работе [4] и основаны на использовании положительной определенности соответствующих матриц, относящихся к слоям описываемой среды. Положительная определенность матриц (1.6) обеспечивает неотрицательность плотностей потенциальной и кинетической энергий в эффективных моделях.

Для построения фронтов в эффективной модели полезно из уравнений (1.1) и (1.3) исключить напряжения τ_{xx1}, τ_{xx2}, τ_{zz} и давление p. С этой целью подставим уравнения (1.1) в (1.2) и получим уравнения Ламе

$$
\begin{gathered}
\left(P_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{x11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x1}+\left(P_{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{x12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x2}+\\
+\left(M_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{fx1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x+F_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+M_1\frac{\partial^2 w_z}{\partial x\partial z}=0,\\
\left(P_{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{x12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x1}+\left(P_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{x22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x2}+\\
+\left(M_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{fx2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x+F_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+M_2\frac{\partial^2 w_z}{\partial x\partial z}=0,\\
+\left(M_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{fx1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x1}+\left(M_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{fx2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x2}+\\
+\left(R\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m_x\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x+Q\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+R\frac{\partial^2 w_z}{\partial x\partial z}=0,\\
F_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x\partial z}+F_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x\partial z}+Q\frac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial z}+\left(C\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_z\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z+\\
+\left(Q\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{fz}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z=0,\\
M_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x\partial z}+M_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x\partial z}+R\frac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial z}+\left(Q\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{fz}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z+\\
+\left(R\frac{\partial^2}{\partial z^2}-m_z\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z=0
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

для рассматриваемой эффективной модели.

§2. Характеристические функции $\tau_i(\alpha)$

Решения уравнений (1.7) могут быть выражены двукратными интегралами, которые представляют собой суперпозицию волн

$$e^{ik(\tau t-x-\alpha z)}, \tag{2.1}$$

при этом

$$\tau=v_{ph}/\sin\varphi,\quad \alpha=\operatorname{ctg}\varphi, \tag{2.2}$$

v_{ph} – фазовая скорость, φ – угол между нормалью к плоскости фронта и осью z и k – составляющая волнового вектора вдоль оси x. Фронты волн как особенности указанных интегральных представлений волнового поля определяются функцией $\tau(\alpha)$. В случае источника, расположенного в начале координат, фронты, согласно работе [5], представляются параметрическими формулами

$$x = t[\tau(\alpha) - \alpha\tau'(\alpha)], \quad z = t\tau'(\alpha), \tag{2.3}$$

при этом α – котангес угла между нормалью к фронту и осью z.

Для нахождения функциональной зависимости $\tau(\alpha)$ необходимо в уравнениях (1.7), в соответствии с выражением (2.1), произвести замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \tau, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim -1, \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim -1 \tag{2.4}$$

и записать условие совместности полученных равенств

$$\begin{vmatrix} P_{11} - \rho_{x11}\tau^2 & P_{12} - \rho_{x12}\tau^2 & M_1 - \rho_{fx1}\tau^2 & -F_1\alpha & -M_1\alpha \\ P_{12} - \rho_{x12}\tau^2 & P_{22} - \rho_{x22}\tau^2 & M_2 - \rho_{fx2}\tau^2 & -F_2\alpha & -M_2\alpha \\ M_1 - \rho_{fx1}\tau^2 & M_2 - \rho_{fx2}\tau^2 & R - m_x\tau^2 & -Q\alpha & -R\alpha \\ -F_1\alpha & -F_2\alpha & -Q\alpha & C\alpha^2 - \rho_z\tau^2 & Q\alpha^2 - \rho_{fz}\tau^2 \\ -M_1\alpha & -M_2\alpha & -R\alpha & Q\alpha^2 - \rho_{fz}\tau^2 & R\alpha^2 - m_z\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) можно рассматривать как уравнение для определения характеристических чисел τ^2 в случае одновременного приведения к диагональному виду двух матриц

$$\begin{pmatrix} \rho_{x11} & \rho_{x12} & \rho_{fx1} & 0 & 0 \\ \rho_{x12} & \rho_{x22} & \rho_{fx2} & 0 & 0 \\ \rho_{fx1} & \rho_{fx2} & m_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_z & \rho_{fz} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{fz} & m_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & M_1 & F_1\alpha & M_1\alpha \\ P_{12} & P_{22} & M_1 & F_2\alpha & M_2\alpha \\ M_1 & M_2 & R & Q\alpha & R\alpha \\ F_1\alpha & F_2\alpha & Q\alpha & C\alpha^2 & Q\alpha^2 \\ M_1\alpha & M_2\alpha & R\alpha & Q\alpha^2 & R\alpha^2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Согласно теореме, приведенной в монографии [6], эти характеристические числа являются вещественными, если обе матрицы симметричные, а первая из них матрица является также и положительно определенной. В нашем случае обе матрицы (2.6) являются симметричными при всех вещественных α и неотрицательно определенными вследствие положительной определенности матриц (1.6). Обобщая указанную теорему на этот случай, приходим к выводу, что при всех вещественных α уравнение (2.5) имеет только неотрицательные решения τ^2. Так как левая часть уравнения (2.5) представляет собой полином пятой степени относительно τ^2 с выделенным множителем τ^2, то четыре неотрицательные функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$, $\tau_3(\alpha)$ и $\tau_4(\alpha)$ определены при всех вещественных α.

Для исследования этих функций вычислим определитель, входящий в соотношение (2.5), и после отбрасывания множителя τ^2 получим равенство

$$\alpha^4(\overline{A}_1\tau^4+\overline{A}_2\tau^2+\overline{A}_3)+\alpha^2(B_1\tau^6+B_2\tau^4+\overline{B}_3\tau^2+B_4)+ \\ +\tau^2(C_1\tau^6+C_2\tau^4+C_3\tau^2+C_4)=0, \qquad (2.7)$$

где коэффициенты $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, B_1, B_2, $\overline{B}_3$, B_4, C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются параметрами эффективной модели и не зависят от величин τ^2 и α^2. Явные выражения для этих коэффициентов могут быть легко записаны, но для краткости не приводятся. При $\alpha=0$, $\tau_4=0$, а величины τ_1, τ_2 и τ_3, согласно формуле (2.5), удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\rho_{x11}\tau^2, & P_{12}-\rho_{x12}\tau^2, & M_1-\rho_{fx1}\tau^2 \\ P_{12}-\rho_{x12}\tau^2, & P_{22}-\rho_{x22}\tau^2, & M_2-\rho_{fx2}\tau^2 \\ M_1-\rho_{fx1}\tau^2, & M_2-\rho_{fx2}\tau^2, & R-m_x\tau^2 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.8)$$

Обозначим положительные корни уравнения (2.8) через v_1, v_2 и v_3 и пусть $v_1>v_2\geqslant v_3$. Если в уравнении (2.7) учитывать также члены, содержащие α^2, то получим приближенные формулы

$$\tau_i(\alpha)=v_i+O(\alpha^2) \quad (i=1,2,3) \qquad (2.9)$$

при малых α.

Чтобы найти выражение функции $\tau_4(\alpha)$ при малых α, учтем в уравнении (2.7) члены, содержащие α^2 и τ^2, и получим приближенное равенство

$$\tau_4^2=-c_4B_4^{-1}\alpha^2. \qquad (2.10)$$

Если использовать явные выражения для коэффициентов B_4 и C_4, то формула (2.10) заменится соотношением

$$\tau_4=v_8\alpha,$$

$$v_8^2 = m_z \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & F_1 & M_1 \\ P_{12} & P_{22} & F_2 & M_2 \\ F_1 & F_2 & C & Q \\ M_1 & M_2 & Q & R \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} \rho_z & \rho_{fz} \\ \rho_{fz} & m_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & M_1 \\ P_{12} & P_{22} & M_2 \\ M_1 & M_2 & R \end{vmatrix} \right]^{-1}. \tag{2.11}$$

Неявно заданные функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$, $\tau_3(\alpha)$ и $\tau_4(\alpha)$ при $\alpha = 0$ удовлетворяют условиям

$$\tau_1 > \tau_2 \geqslant \tau_3 \geqslant \tau_4. \tag{2.12}$$

Эти условия также выполняются и при всех $\alpha \geqslant 0$. Чтобы в этом убедиться, отметим, что графики функций $\tau_2(\alpha)$, $\tau_3(\alpha)$ и $\tau_4(\alpha)$ могут иметь общие точки. В этих точках дискриминант биквадратного уравнения (2.7) обращается в нуль. Так как при этом условии выполняются равенства $\tau_i'(\alpha) = 0$ и $\tau_{i+1}'(\alpha) = 0$ $(i = 2, 3)$, то графики функций $\tau_i(\alpha)$ и $\tau_{i+1}(\alpha)$ в общей точке имеют и общую касательную, параллельную оси α. Оба графика касаются этой прямой с разных сторон (рис. 1). Поэтому во всех точках выполняются условия $\tau_i(\alpha) \geqslant \tau_{i+1}(\alpha)$. Как будет показано ниже, график $\tau_1(\alpha)$ не имеет общих точек с графиком $\tau_2(\alpha)$ ни при каких параметрах.

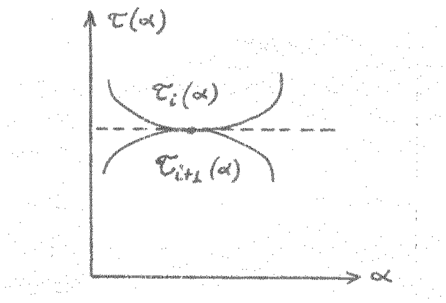

Рис. 1.

При больших α и конечных τ уравнение (2.7) переходит в уравнение

$$\overline{A}_1\tau^4 + \overline{A}_2\tau^2 + \overline{A}_3 = 0, \tag{2.13}$$

которое в некоторых случаях полезно заменить соотношением

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\rho_{x11}\tau^2 & P_{12}-\rho_{x12}\tau^2 & \rho_{fx1} & F_1 & M_1 \\ P_{12}-\rho_{x12}\tau^2 & P_{22}-\rho_{x22}\tau^2 & \rho_{fx2} & F_2 & M_2 \\ -\rho_{fx1}\tau^2 & -\rho_{fx2} & m_x & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & 0 & C & Q \\ M_1 & M_2 & 0 & Q & R \end{vmatrix} = 0. \tag{2.14}$$

Обозначим корни уравнения (2.14) через v_4 и v_5 ($v_4 \geqslant v_5$). С учетом членов, содержащих α^2, получим приближенные формулы

$$\tau_{3,4}(\alpha) = v_{4,5} + O(\alpha^{-2}). \tag{2.15}$$

В случае достаточно больших α и τ приходим, на основании равенств (2.7), к уравнению

$$\overline{A}_1\alpha^4 + B_1\alpha^2\tau^2 + C_1\tau^4 = 0. \tag{2.16}$$

Решая уравнение (2.16) и используя явные выражения для коэффициентов, получим соотношения

$$\tau_{1,2}(\alpha) = v_{6,7}\cdot\alpha,$$

$$v_{6,7}^2 = \Big[\pm\sqrt{(R\rho_z + Cm_z - 2Q\rho_{fz})^2 - 4(RC-Q^2)(\rho_z m_z - \rho_{fz}^2)} + \\ + R\rho_z + Cm_z - 2Q\rho_{fz}\Big]\Big/[2(\rho_z m_z - \rho_{fz}^2)]. \tag{2.17}$$

Отметим, что полученные формулы для $v_{6,7}^2$ совпадают с выражениями для скоростей продольных волн вдоль оси z в трансверсально-изотропной среде Био.

На основании формул (2.9), (2.10), (2.15) и (2.17), определяющих функции $\tau_i(\alpha)$ ($i = 1,2,3,4$) при малых и больших α, удается построить примерные графики этих функций (рис. 2а и 2в).
Для расчета функций $\tau_i(\alpha)$ и для построения точных графиков этих функций полезно использовать функции $\alpha(\tau)$, которые являются решениями биквадратного уравнения (2.7). Изображенные на рис. 2а и 2в графики не имеют максимумов и минимумов и только на графиках функции $\tau_3(\alpha)$ находится одна точка перегиба ($\tau_3''(\alpha) = 0$), отмеченная на рис. 2а и 2в жирной точкой. В общем случае рассматриваемые графики могут быть более сложными и иметь максимумы, минимумы и дополнительные точки перегиба.

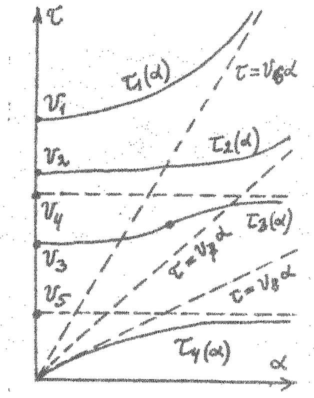

Рис. 2а

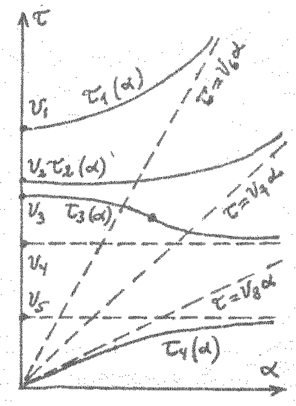

Рис. 2в.

Однако усложнение этих графиков ограничено. Чтобы сформулировать эти ограничения, укажем, что многозначную функцию $\tau(\alpha)$, удовлетворяющую уравнению (2.7), полезно рассматривать на всей плоскости $-\infty < \tau < \infty$ и $-\infty < \alpha < \infty$ и в этой области графики обладают симметрией относительно осей α и τ (рис. 3).

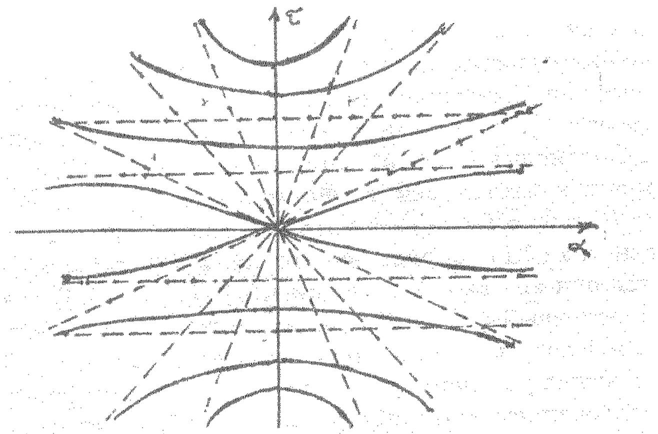

Рис. 3.

Любая прямая на плоскости α, τ не может пересечь графики многозначной функции $\tau(\alpha)$ (рис. 3) более чем 8 раз. В самом деле, произвольная прямая

$$\tau = a\alpha + b \tag{2.18}$$

пересечет графики функции $\tau(\alpha)$ в точках, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (2.7) и (2.18). Так как эта система эквивалентна уравнениям восьмого порядка, то число рассматриваемых точек пересечения не может превышать 8. Из этого ограничения, в частности, следует, что 1) график функции $\tau_1(\alpha)$ не имеет точек перегиба и 2) графики функций $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ не могут иметь общих точек.

Второе ограничение состоит в том, что любая прямая, параллельная оси α, пересекает графики многозначной функции $\tau(\alpha)$ не более чем 4 раза. Это утверждение следует из того, что уравнение (2.7) имеет четвертый порядок относительно α. Из обоих ограничений вытекает, что параметры v_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, определяющие графики, удовлетворяют одному из неравенств в каждой группе неравенств

$$\begin{array}{ll}
1)\ v_1 > v_2 > v_4 > v_3 > v_5, & \mathrm{I})\ v_6 > v_7 > v_8,\\
2)\ v_1 > v_2 > v_4 > v_5 > v_3, & \mathrm{II})\ v_6 > v_8 > v_7.\\
3)\ v_1 > v_4 > v_2 > v_3 > v_5, & \\
4)\ v_1 > v_4 > v_2 > v_5 > v_3, & \\
5)\ v_1 > v_2 > v_3 > v_4 > v_5; &
\end{array} \tag{2.19}$$

Графики на рис. 2а соответствуют случаю 1, I, а графики на рис. 2в – 5, I. В остальных же случаях графики функций $\tau_i(\alpha)$ могут быть изображены, если на рис. 2а переставлять местами точки v_2 и v_4, а также v_3 и v_5 и переставлять местами асимптоты $\tau = v_7\alpha$ и $\tau = v_8\alpha$ на рис. 2а и 2в.

§3. Волновые фронты от точечного источника

Пусть в безграничной среде, описываемой уравнениями (1.1) и (1.2), действует некоторый точечный источник. Таким источником, в частности, может быть точечная сила, приложенная в начале координат к упругим фазам и действующая вдоль оси z.

Так как образующее волновое поле обладает симметрией относительно координатных осей, то будем его рассматривать в квадранте $x > 0$, $z > 0$, при этом основное внимание будет уделяться построению фронтов.

Для этой цели используются формулы (2.3) и результаты исследования функций $\tau_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Равенствам (2.9), справедливым при малых α, соответствуют точки фронта $(x/t = v_{1,2,3}, z = 0)$, в окрестности которых фронт перпендикулярен оси x. Соотношения (2.15) определяют точки $(x/t = v_{4,5},\ z = 0)$, где фронт касается оси x. Формулы (2.17) описывают точки фронта $(x = 0,\ z/t = v_{6,7})$, в которых фронт перпендикулярен оси z. Равенства (2.11) определяют точку $(x = 0,\ z/t = v_8)$, где фронт касается оси z. Каждой функции $\tau_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ соответствует определенный фронт. Соединяя линиями указанные начала и концы, мы получаем примерное положение фронтов. Точное их расположение устанавливается путем расчета по формулам (2.3) с использованием функций $\tau_i(\alpha)$ или им обратных функций $\alpha(\tau)$.

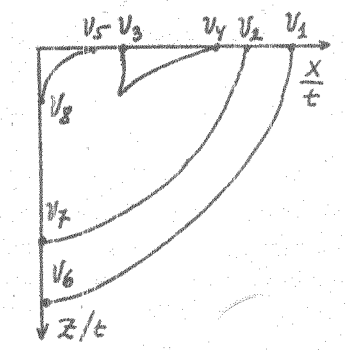

Рис. 4а

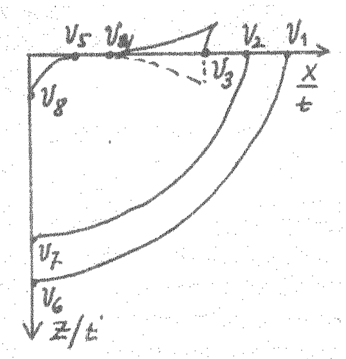

Рис. 4в.

На рисунках 4а и 4в изображены фронты в случаях 1, I и 5, I без усложняющих петель и без пересечений фронтов. В среде распространяются четыре волны. Фронт первой волны всегда выпуклый. Второй фронт при отсутствии петель также является выпуклым. Третья волна распространяется вдоль оси x. Ее фронт имеет “треугольную” форму. В случае 5, I функции $\tau_3(\alpha)$

при $\tau > 0$, $\alpha > 0$ соответствует фронт, расположенный в соседнем квадранте $x > 0$, $z < 0$. Вследствие симметрии в рассматриваемом квадранте также находится "треугольный" фронт. Оба фронта изображены на рис. 4в, при этом фронт в квадранте $x > 0$, $z > 0$ показан пунктиром. Четвертый фронт является вогнутым. Подобные вогнутые и "треугольные" фронты имеют места в эффективных моделях, описывающих слоистые упругие среды с контактом проскальзывания на границах [7]. Все величины v_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ являются скоростями волн вдоль осей.

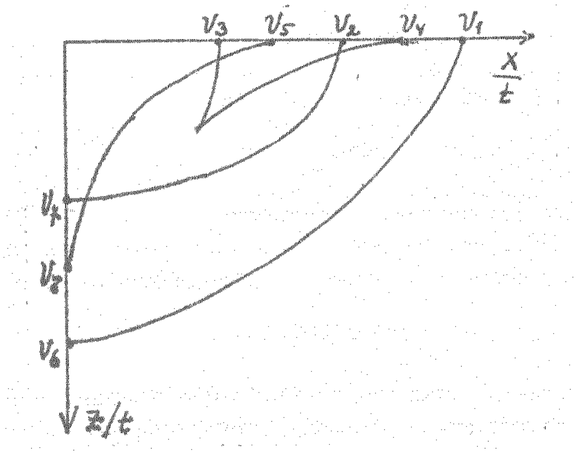

Рис. 5.

Во всех случаях, кроме случаев 1, I и 5, I, имеет место пересечение фронтов, но первый фронт не пересекается с другими фронтами. Теоретически возможен случай 4, II, когда все три остальных фронта попарно пересекаются (рис. 5). Другая особенность фронтов состоит в том, что нормаль к фронту монотонно поворачивается по мере поступательного перемещения точки вдоль фронта. Угол полного поворота нормали внутри одного квадранта для всех фронтов равен прямому углу.

Перейдем теперь к исследованию петель на фронтах и остановимся на рассмотрении особых точек. Кривизна фронтов определяется второй производной d^2x/dz^2, которая выражается формулой

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{t\tau''(\alpha)}, \tag{3.1}$$

вытекающей из соотношений (2.3). Из равенства (3.1) следует, что в соответствующих точках графиков и фронтов кривизны имеют противоположные направления и что направление кривизны фронта изменяется в точках перегиба графика функции $\tau_i(\alpha)$, где

$$\tau_i''(\alpha) = 0. \tag{3.2}$$

Единственная такая точка на рис. 2а и 2в содержится на графиках функции $\tau_3(\alpha)$ и отмечена жирной точкой. Этой точке соответствует угловая точка на третьем фронте. Кроме указанных на рис. 4а, 4в и 5 точек пересечения фронтов с осями, фронты могут еще пересекать оси x и z еще и в петлях. Из формул (2.3) следует, что экстремумам функций $\tau_i(\alpha)$, где

$$\tau_i'(\alpha) = 0, \tag{3.3}$$

соответствуют точки дополнительного пересечения фронтов с осью x, так как $z = t\tau_i'(\alpha)$. Аналогичные точки дополнительного пересечения фронтов с осью z определяются условием

$$\tau(\alpha) - \alpha\tau'(\alpha) = 0, \tag{3.4}$$

которое выражает совпадение в одной точке направлений радиус-вектора и касательной к фронту. В точках фронтов, где выполняется равенство (3.3) или (3.4), углы между фронтами и осями определяются величиной α, равной котангенсу угла между нормалью к фронту и осью z.

Остановимся теперь на исследовании возможных петель на втором фронте и особенностей на графике функции $\tau_2(\alpha)$. Рассмотрим случай, когда на этом графике отсутствуют точки, где выполняются условия (3.3) и (3.4), но имеются две точки перегиба 1 и 2, между которыми участок графика является выпуклым (рис. 6а). Фронт в этом случае содержит петлю внутри квадранта (рис. 6в), и на фронте расположены две угловые точки 1 и 2, соответствующие точкам перегиба 1 и 2. Между этими угловыми точками фронт является вогнутым, а на остальных участках выпуклым.

Рассмотрим теперь случаи, когда график функции $\tau_2(\alpha)$ содержит, кроме двух точек перегиба, еще и точки, в которых выполняется соотношение (3.3) или (3.4). Учитывая ограничение числа пересечений графиков $\tau_i(\alpha)$ произвольными прямыми, убеждаемся, что на графике функции $\tau_2(\alpha)$ при $\alpha > 0$, $\tau > 0$ возможен только один экстремум 2 в виде минимума и возможна только одна точка 3, где выполняется соотношение (3.4). Обе эти точки 2 и 3 расположены между точками перегиба 1 и 4 (рис. 7а). Для убедительности на рис. 7а через точку 3 проведена пунктирная касательная, проходящая также и через начало координат. Особенность соответствующего фронта состоит в том, что он содержит два выступа в соседние квадранты (рис. 7в). Вследствие симметрии фронтов в рассматриваемом квадранте также содержатся выступы, изображенные пунктиром. Эти выступы образуют петли, имеющие вогнутый фронт и распространяющиеся вдоль осей. Особым точкам 1, 2, 3, 4 на графике $\tau_2(\alpha)$ соответствуют точки с одинаковыми номерами на фронте, при этом 1 и 4 – угловые точки, а 2 и 3 – точки пересечения фронта с осями x и z. Вне петель второй фронт является выпуклым.

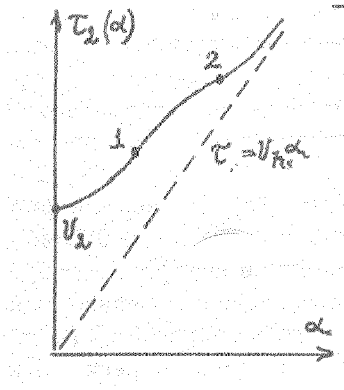

Рис. 6а

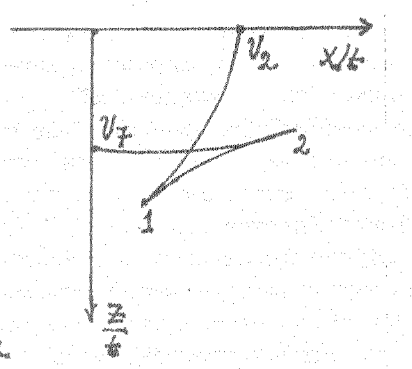

Рис. 6в.

Наряду с рассмотренным случаем возможны два более простых случая. В первом случае график $\tau_2(\alpha)$ не пересекает асимптоту $\tau = v_7\alpha$ и содержит только точку перегиба 1 и точку минимума 2. В этом случае фронт имеет только одну петлю на осях (рис. 7в). Во втором случае график пересекает асимптоту $\tau = v_7\alpha$ и после пересечения имеет особую точку 3, где выполняется условие (3.4), и точку перегиба 4. Соответствующий второй фронт содержит только одну петлю на оси z (рис. 7в). Возможность существования более сложных вторых фронтов (с двойными петлями и с одновременным расположением петель как вдоль

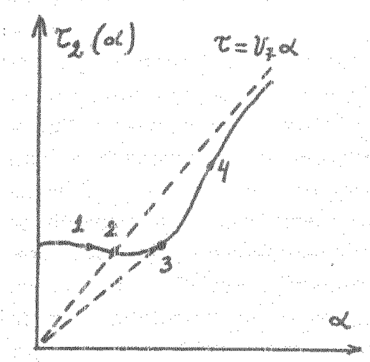

Рис. 7а

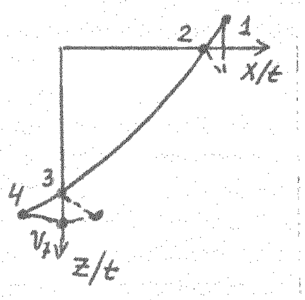

Рис. 7в.

осей, так и внутри квадрантов) может быть выяснена с помощью дополнительных исследований.

Рассмотрим теперь возможные усложнения четвертого фронта и соответствующие графики функции $\tau_4(\alpha)$. В первом случае график $\tau_4(\alpha)$ имеет одну точку перегиба 1 и одну точку 2, в которой выполняется условие (3.4) (рис. 8а). Четвертый фронт в этом случае имеет выступ в квадрант $x < 0$, $z < 0$ (рис. 8в). Аналогичный выступ четвертого фронта в квадрант $x > 0$, $z < 0$ (рис. 9в) образуется во втором случае, когда на графике функции $\tau_4(\alpha)$ находятся точка максимума 1 и точка перегиба 2 (рис. 9а). В третьем случае график $\tau_4(\alpha)$ имеет две точки перегиба 1 и 4 и между ними находятся точка 2, где выполняется условие (3.4), и точка максимума 3 (рис. 10а). В этом случае на четвертом фронте имеют место два указанных выступа (рис. 10в). В четвертом случае на графике $\tau_4(\alpha)$ находятся три точки перегиба 1, 3, 4 и точка 2, в которой удовлетворяется условие (3.4), (рис. 11а). Соответствующий фронт имеет петлю внутри основного квадранта и выступ в квадрант $x < 0$, $z > 0$ (рси. 11в). Особенности этой петли состоят в том, что между ее угловыми точками 3 и 4 фронт является выпуклым. Эта петля без выступа в квадрант $x < 0$, $z > 0$ не может возникнуть на фронте, так как соответствующие в этом случае графики функций $\tau_3(\alpha)$ и $\tau_4(\alpha)$ будут пересекаться прямой, проходящей через начало координат, 10 раз.

Графики функции $\tau_3(\alpha)$ могут иметь дополнительные точки перегиба и точки, в которых выполняется условие (3.3) или (3.4).

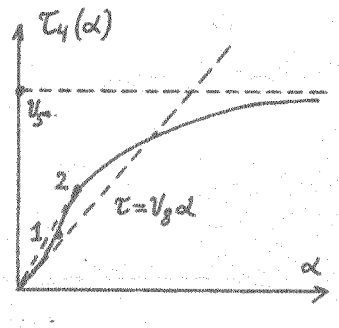

Рис. 8а

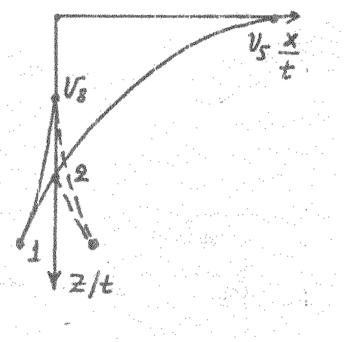

Рис. 8в.

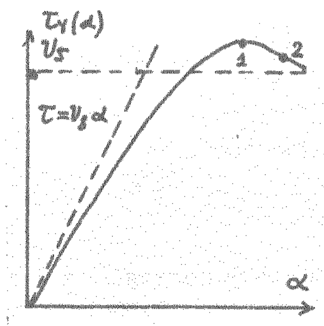

Рис. 9а

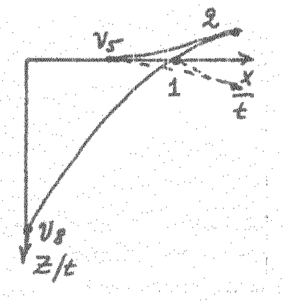

Рис. 9в.

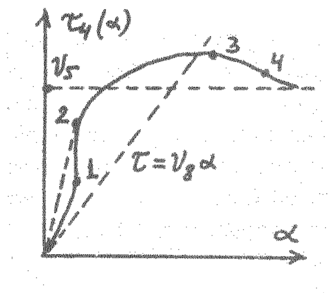

Рис. 10а

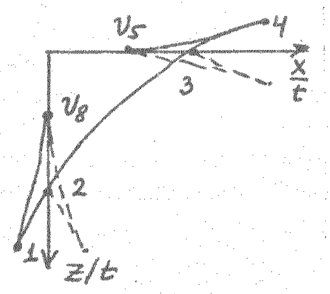

Рис. 10в.

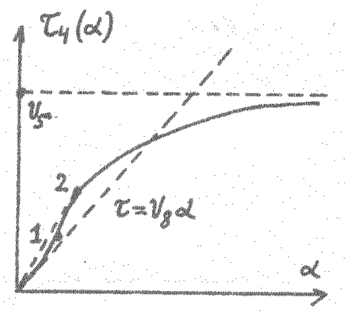

Рис. 11а

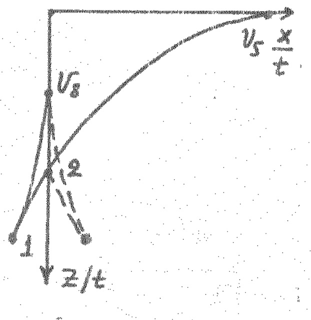

Рис. 11в.

В этих случаях на “треугольном” фронте появляются петли и выступы в квадрант $x > 0$, $z < 0$. Эти усложнения на графике $\tau_3(\alpha)$ и на третьем фронте аналогичны усложнениям на графиках $\tau_2(\alpha)$, $\tau_4(\alpha)$, а также на втором и четвертом фронтах. Анализ подобных особенностей треугольного фронта проводился в работе [8]. Вследствие этого мы не будем в настоящей работе останавливаться на этих исследованиях.

§4. Исследование частного случая, когда описываемая среда состоит из одинаковых пористых слоев

Рассмотрим трансверсально-изотропную пористую среду Био, перерезанную параллельными плоскостями $z = \text{const}$, на которых выполняются граничные условия, выражающие контакт с проскальзыванием между упругими фазами. Для каждой среды в работе [4] была установлена эффективная модель, описываемая уравнениями

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx} &= P\frac{\partial u_x}{\partial x} + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz} &= F\frac{\partial u_x}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p &= M\frac{\partial u_x}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right);
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_{fx} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{fx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fz} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{fz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Коэффициенты в уравнениях (4.1) и (4.2) совпадают с параметрами исходной трансверсально-изотропной среды Био, в которой $L = 0$ и $\tau_{xz} = 0$. После подстановки уравнений (4.1) в (4.2) получаем уравнение Ламе

$$\begin{gathered}
\left(P\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_x + \left(M\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{fx} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w_x + F\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + M\frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} = 0\\
\left(M\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{fx} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_x + \left(R\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m_x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w_x + Q\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + R\frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} = 0\\
F\frac{\partial u_x}{\partial x \partial z} + Q\frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial z} + \left(C\frac{\partial^2}{\partial z} - \rho_z \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_z + \left(Q\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho_{fz} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w_z = 0\\
M\frac{\partial u_x}{\partial x \partial z} + R\frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial z} + \left(Q\frac{\partial^2}{\partial z} - \rho_{fz} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_z + \left(R\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m_z \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w_z = 0
\end{gathered} \tag{4.3}$$

для эффективной модели. В результате замены производных по правилу (2.4) приходим к условию совместности полученных уравнений

$$\begin{vmatrix}
P - \rho_x \tau^2 & M - \rho_{fx}\tau^2 & -F\alpha & -M\alpha\\
M - \rho_{fx}\tau^2 & R - m_x \tau^2 & -Q\alpha & -R\alpha\\
-F\alpha & -Q\alpha & C\alpha^2 - \rho_z \tau^2 & Q\alpha^2 - \rho_{fz}\tau^2\\
-M\alpha & -R\alpha & Q\alpha^2 - \rho_{fz}\tau^2 & R\alpha^2 - m_z \tau^2
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Так как равенство (4.4) аналогично уравнению (2.5), то можно также утверждать, что при всех вещественных α левая часть уравнения (4.4) представляет собой полином четвертой степени относительно τ^2 с выделенным множителем τ^2. Поэтому равенство (4.4) неявно определяет при всех вещественных α три неотрицательные функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$.

Для исследования этих функций вычислим определитель, входящий в соотношение (4.4), и после отбрасывания множителя τ^2 получим уравнение

$$\alpha^4(\overline{A}_1\tau^2+\overline{A}_2)+\alpha^2(B_1\tau^4+B_2\tau^2+\overline{B}_3)+\tau^2(C_1\tau^4+C_2\tau^2+C_3)=0, \quad (4.5)$$

в котором коэффициенты $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, B_1, B_2, $\overline{B}_3$, C_1, C_2 и C_3 не зависят от τ и α. Их явные выражения легко определяются, но для краткости не приводятся. Исследование уравнения (4.5) выполняется теми же приемами, как и уравнение (2.7). Поэтому ограничимся приведением только одних результатов.

При $\alpha = 0$ имеем

$$\tau_1 = \bar{v}_1, \quad \tau_2 = \bar{v}_2, \quad \tau_3 = 0,$$

$$\bar{v}_{1,2}^2 = \Big[\pm\sqrt{(Pm_x + R\rho_x - 2M\rho_{fx})^2 - 4(PR - M^2)(m_x\rho_x - \rho_{fx}^2)} + \\ + Pm_x + R\rho_x - 2M\rho_{fx}\Big]\Big/[2(m_x\rho_x - \rho_{fx}^2)]. \quad (4.6)$$

В случае малых α функция $\tau_3(\alpha)$ удовлетворяет приближенному равенству $\tau_3 = \bar{v}_8\alpha$, в котором

$$\bar{v}_8^2 = m_z\begin{vmatrix} P & F & M \\ F & C & Q \\ M & Q & R \end{vmatrix}\Bigg/\left[\begin{vmatrix} P & M \\ M & R \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \rho_z & \rho_{fz} \\ \rho_{fz} & m_z \end{vmatrix}\right]. \quad (4.7)$$

При больших α функция τ_3^2 является конечной и равной

$$\bar{v}_5^2 = m_x\begin{vmatrix} P & M & M \\ F & C & Q \\ M & Q & R \end{vmatrix}\Bigg/\left[\begin{vmatrix} C & Q \\ Q & R \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \rho_x & \rho_{fx} \\ \rho_{fx} & m_x \end{vmatrix}\right], \quad (4.8)$$

а остальные функции $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ оказываются пропорциональными α и по-прежнему выражаются соотношениями (2.17).

Формулы (4.6)–(4.8) и (2.17) определяют начальные и конечные точки графиков функций $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$. Взаимное расположение этих точек зависит от соотношений между параметрами $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_5$ и между параметрами v_6, v_7, $\bar{v}_8$. Для этих параметров можно указать две группы неравенств

$$\begin{array}{ll} 1)\ \bar{v}_1 > \bar{v}_2 > \bar{v}_5, & \mathrm{I})\ v_6 > v_7 > \bar{v}_8, \\ 2)\ \bar{v}_1 > \bar{v}_5 > \bar{v}_2; & \mathrm{II})\ v_6 > \bar{v}_8 > v_7, \end{array} \quad (4.9)$$

аналогичных соотношениям (2.19). Для случая 1, I графики функций $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$ приведены на рис. 12а. Эти графики для простоты не содержат точек перегиба и точек, удовлетворяющих условиям (3.3) и (3.4). Рис. 12а аналогичен рис. 2а. Легко заметить на обоих графиках соответствие между тремя ветвями и отсутствие на рис. 12а аналога ветви τ_3, изображенной на рис. 2а. Графики $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$ в случае модели (4.1) и (4.2) могут быть усложнены наличием точек перегиба и точек, в которых выполняются условия (3.3) и (3.4). Подобные усложнения графиков показаны на рис. 6а–11а. Эти усложнения ограничиваются условием, что ветви графиков функций $\tau(\alpha)$ на всей плоскости α, τ могут пересекаться произвольной прямой не более 6 раз. Сделанное утверждение доказывается при рассмотрении системы уравнений (2.18) и (4.5). Другое ограничительное условие также состоит в том, что указанные графики функций не должны пересекаться прямыми $\tau = \mathrm{const}$ более, чем 4 раза.

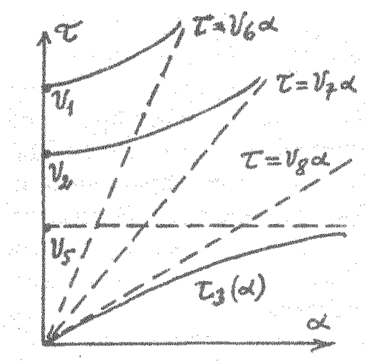

Рис. 12а

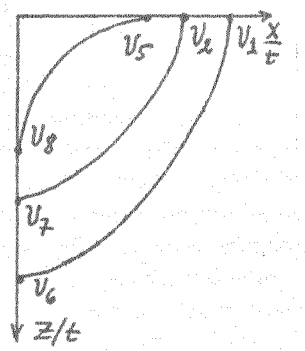

Рис.12в.

На основании построенных графиков строятся по формулам (2.3) фронты волн, возбужденных некоторым точечным источником в начале координат. Графикам, изображенным на рис. 12а, соответствуют фронты, которые не пересекаются и не содержат петель и угловых точек (рис. 12в). Отсутствие пересечений у графиков имеет место только в случае 1, I. Если же на графиках находятся точки перегиба и точки, в которых выполняются условия (3.3) и (3.4), то фронты также содержат соответственно петли и выступы в соседние квадранты (рис. 6в–11в). По сравнению с общим случаем в рассматриваемой модели отсутствует треугольный фронт, а между остальными фронтами имеет место соответствие. Параметры $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_5$, v_6, v_7 и $\bar{v}_8$ также являются скоростями волн вдоль осей.

Рассмотрим теперь два частных случая эффективной модели, заданной в §1, когда эта модель переходит в эффективную модель, описываемую уравнениями (4.1) и (4.2). В первом из этих случаев в периодической среде период состоит из двух слоев, у которых все параметры, кроме толщин, одинаковые. На основании этого предположения выполняются равенства

$$A_j = \alpha_{j1} = \alpha_{j2}, \quad B_3 = \beta_{31} = \beta_{32}, \tag{4.10}$$

из которых следуют соотношения

$$\begin{gathered}
P_{11} = \theta_1^2 P + \theta_1\theta_2 A_3, \quad P_{12} = \theta_1\theta_2(P - A_3), \quad P_{22} = \theta_2^2 P + \theta_1\theta_2 A_3,\\
\bar{F}_1 = \theta_1 F, \quad \bar{F}_2 = \theta_2 F, \quad \bar{M}_1 = \theta_1 M_1, \quad \bar{M}_2 = \theta_2 M,\\
\rho_{x11} = \theta_1^2\rho_x + \theta_1\theta_2 B_1, \quad \rho_{x12} = \theta_1\theta_2(\rho_x - B_1), \quad \rho_{x22} = \theta_2^2\rho_x + \theta_1\theta_2 B_1,\\
\rho_{fx1} = \theta_1\rho_{fx}, \quad \rho_{fx2} = \theta_2\rho_{fx}.
\end{gathered} \tag{4.11}$$

С учетом равенств (4.10) и (4.11) и формул осреднения смещений и напряжений вдоль оси x

$$u_x = \theta_1 u_{x1} + \theta_2 u_{x2}, \quad \tau_{xx} = \theta_1\tau_{xx1} + \theta_2\tau_{xx2}, \tag{4.12}$$

убеждаемся, что уравнения (1.1) и (1.2) переходят в уравнения (4.1) и (4.2), а уравнение Ламе (1.7) заменяется на (4.3).

Проследим теперь переход от общей трехфазной модели к двухфазной модели (4.1) и (4.2) в уравнении Кристофелля, в функциях $\tau(\alpha)$, в выражениях для скоростей и на волновых фронтах. Из левой части уравнения Кристофелля (2.5) выделяется множитель $\tau^2 - v_5^2$. При условии (4.10) уравнение (2.8) имеет корни $\tau = \bar{v}_1$, $\tau = \bar{v}_2$ и $\tau = \bar{v}_5$; уравнение (2.14) – двойной корень $\tau = \bar{v}_5$, скорости v_6 и v_7 сохраняют свои выражения (2.17), а скорость v_8 переходит в скорость $\bar{v}_8$, выраженную формулой (4.7). Треугольный фронт сжимается в точку, которая движется вдоль оси x со скоростью $\bar{v}_5$ и в которой вогнутый фронт касается оси x. Упомянутая скорость $\bar{v}_5$ является аналогом пластинчатой скорости, так как с такой скоростью распространяется волна в слое Био, на границах которого отсутствуют напряжения и давление. Остальные три фронта при рассматриваемом предельном переходе не изменяются существенно. Для исследования предельного перехода в характеристических функциях $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$ полезно использовать явные выражения для обратных функций $\alpha(\tau)$.

Рассмотрим второй случай, когда относительная толщина второго слоя θ_2 обращается в нуль. В этом случае выполняются равенства

$$\begin{aligned} &A_j = \alpha_{j1}, \quad B_3 = \beta_{31}, \quad P_{11} = P, \quad P_{12} = P_{22} = 0, \\ &F_1 = F, \quad F_2 = 0, \quad M_1 = M, \quad M_2 = 0, \quad \rho_{x11} = \rho_x, \\ &\rho_{x12} = \rho_{x22} = 0, \quad \rho_{fx1} = \rho_{fx}, \quad \rho_{fx2} = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

После учета соотношений (4.13) и замены $u_{x1} = u_{x2}$ уравнения (1.1) и (1.2) переходят в уравнения (4.1) и (4.2), а уравнение Ламе (1.7) заменяется на (4.3). Уравнения (2.5), (2.8) и (2.14) в этом случае имеют корень

$$\tau = \sqrt{\alpha_{32}/\beta_{12}}, \tag{4.14}$$

соответствующий упомянутому аналогу скорости пластинчатой волны в пористой среде с параметрами исключаемого слоя 2. После предельного перехода эта скорость теряет физический смысл. Другие решения уравнений (2.8) и (2.14), являющиеся скоростями волн вдоль оси z, представляются формулами (4.6) и (4.8), в которые входят параметры слоя 1. Таким образом, оба предельных перехода приводят к одинаковым эффективным моделям, описывающим пористую среду Био, перерезанную плоскопараллельными границами с проскальзыванием между упругими фазами.

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28,** No. **2** (1956), 168–178.
2. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33,** No. **4** (1962), 1482–1498.
3. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.
4. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 219–243.

5. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
6. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М. (1967), 575 с.
7. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактом проскальзывания на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 192–212.
8. L. A. Molotkov, A. V. Bakulin, *Wave propagation in the effective model of alternating porous and impermeable solid layers.* Revue De L'Institut Francais du Petrole, **53**, No. 5 (1998), 735–748..

Molotkov L. A. On the effective model of porous stratified media with slide contact between layers.

In order to study wave propagation in porous layered media with slide contact between elastic phases on the interfaces the effective models of these media are investigated. For these models the fronts of four waves excited by a point sources are established and formulas of wave velocities along the axes are derived. The applied methods of constructing fronts allow to point out the possible pecularities as loops and juts. The essential case, when all layers are the same but the boundary conditions remain, is also considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 октября 1998 г.