Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Н. Г. Власюк

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ

Введение.

В данной статье исследуется двумерная задача распространения возбуждаемых точечным источником волн в волноводе, допускающая точное решение в виде контурного интеграла. Путем преобразования точного решения показывается возможность представления решения в виде суммы геометрооптических, нормальных волн и остатка для той части поля, которая соответствует предельной задаче.

Впервые "комбинированный метод" был разработан В. Б. Филипповым [1–3] для получения поля точечного источника в окрестности вогнутой стороны зеркала. В работе В. Б. Филиппова [4] разработанный метод применен к изучению эталонной задачи распространения волн в волноводе в предельном варианте (без краевых условий). При исследовании точного решения здесь во многом используются также результаты работы В. С. Булдырева "Поле точечного источника в волноводе" [5].

Заметим, что близкие (с некоторыми отличиями) результаты, полученные другими методами, имеются в работах [6–11].

Известно, что в средах с немонотонным показателем преломления возникает волновод с осью по линии максимума показателя преломления. Поле лучей в волноводе образует сложную систему каустик, имеющих острия и сгущающихся при возрастании расстояния между источником и наблюдателем. Для получения поля точечного источника в волноводе необходимы существенные усложнения лучевого метода (см. [5, 11]). Применение метода нормальных волн также наталкивается на трудности, поскольку при высоких частотах возникает необходимость суммирования большого числа мод.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 98-01-00316.

В связи с этими трудностями здесь применяется и обосновывается комбинированный метод, состоящий в том, что поле в волноводе ищется в виде суммы нормальных, геометрооптических волн и остатка. Получены достаточные условия на количество отщепленных нормальных и геометрооптических волн. Остаток выражается простой формулой.

1. Преобразование решения.

Рассмотрим задачу распространения волн, возбуждаемых точечным источником, в двумерной среде с показателем преломления равным

$$n(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l_1}\right)^2}, \quad |z| < l_1. \tag{1.1}$$

Звуковое давление u удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(z))u = -\delta(x)\delta(z - z_0), \tag{1.2}$$

краевому условию Дирихле на верхней границе

$$z = z_1, \ l_1 > z_1 > z_0,$$

краевому условию Неймана на нижней границе

$$z = z_2, \, -l_1 < z_2 < z_0,$$

и условию предельного поглощения на бесконечности

$$u \to 0 \ \text{ при } \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{1.3}$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Фурье по переменной x

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta} \Psi(z, \zeta) \, dk\zeta,$$

для функции Ψ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(k^2 n^2(z) - k^2 \zeta^2\right) \Psi = -\delta(z - z_0), \tag{1.4}$$

$$\Psi(z, \zeta)|_{z=z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial z}|_{z=z_2} = 0. \tag{1.5}$$

Введем новую переменную Z и параметр t по формулам

$$Z = \sqrt{\frac{2k}{l_1}} z, \quad t + 1/2 = (1 - \zeta^2) \frac{kl_1}{2}.$$

Выполняя ряд элементарных преобразований, приведем уравнение (1.4) к уравнению Вебера для функций параболического цилиндра $D_t(Z)$, $D_t(-Z)$, но с дельта функцией в правой части. Построим из двух линейно-независимых решений уравнения Вебера функцию Грина $\Psi(Z, Z_0, \zeta)$ задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \big(t + \frac{1}{2} - \frac{Z^2}{4}\big)\Psi = -\sqrt{\frac{l_1}{2k}} \delta(Z - Z_0), \tag{1.6}$$

$$\Psi(Z, \zeta)|_{Z=Z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi(Z, \zeta)}{\partial Z}|_{Z=Z_2} = 0, \quad Z_2 < Z_0 < Z_1. \tag{1.7}$$

Функция Грина $\Psi(Z, Z_0, \zeta)$ задачи (1.6), (1.7) имеет вид

$$\Psi(Z, Z_0, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{\Psi_1(Z_0)\Psi_2(Z)}{W(\Psi_1\Psi_2)}, & Z_2 < Z < Z_0, \\ \dfrac{\Psi_1(Z)\Psi_2(Z_0)}{W(\Psi_1\Psi_2)}, & Z_1 > Z > Z_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

или в более компактной форме

$$\Psi(Z_>, Z_<, \zeta) = \frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{W(\Psi_1\Psi_2)}. \tag{1.9}$$

Здесь через $Z_>$, $(Z_<)$ обозначено наибольшее (наименьшее) значение аргументов (Z, Z_0), $W(\Psi_1\Psi_2)$ – определитель Вронского двух линейно независимых решений Ψ_1, Ψ_2

$$W(\Psi_1\Psi_2) = \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial Z} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial Z} =$$

$$= -W(D_t(Z)D_t(-Z))[D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t'(Z_1)D_t(-Z_2)], \tag{1.10}$$

где $W(D_t(Z)D_t(-Z))$ – вронскиан функций параболического цилиндра $D_t(Z)$ и $D_t(-Z)$ равный

$$W(D_t(Z)D_t(-Z)) = 2D_t(0)\, D_t'(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(t+1) \sin \pi t.$$

Линейно независимые решения Ψ_1, Ψ_2 определены формулами

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1 &= D_t(Z)D_t(-Z_1) - D_t(-Z)D_t(Z_1),\\ \Psi_2 &= D_t(Z)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z)D_t'(Z_2).\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Решение задачи (1.2), (1.3) с показателем преломления вида (1.1) определяется следующим выражением

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta}\times$$

$$\times\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)[D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t'(Z_2)D_t(-Z_1)]}\,d\zeta. \tag{1.12}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках знаменателя формулы (1.12), равно функции $\Psi_2(Z_1)$. Следовательно, корни знаменателя подинтегрального выражения (1.12) совпадают с корнями вронскиана $D_t(0)D_t'(0)$ и функции $\Psi_2(Z_1)$.

Ограничимся в данной работе исследованием решения задачи (1.2), (1.3)

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta}\,\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta \tag{1.13}$$

в случае, когда источник и наблюдатель находятся вблизи оси волновода, а границы волновода $z = z_1 > 0$, $z = z_2 < 0$ далеки по отношению к предельным границам волновода так, что $\left|\frac{z_i}{l_1}\right| \ll 1$, $i = 1, 2$.

Для сходимости интеграла (1.13) контур интегрирования при $x < 0$ должен быть приподнят во второй квадрант плоскости ζ, $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, а при $x > 0$ опущен в четвертый квадрант $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$, (см. Рис. 1).

Числитель подинтегрального выражения $\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)$ представим в виде композиции функций параболического цилиндра

$$\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<) = \Psi_2(Z_1)D_t(Z_>)D_t(-Z_<) -$$

$$- D_t(Z_1)D_t'(-Z_2)[D_t(Z_>)D_t(-Z_<) + D_t(Z_<)D_t(-Z_>)] +$$

$$+ D_t(Z_>)D_t(Z_<)D_t'(-Z_2)D_t(-Z_1) - D_t(-Z_>)D_t(-Z_<)D_t(Z_1)D_t'(Z_2).$$

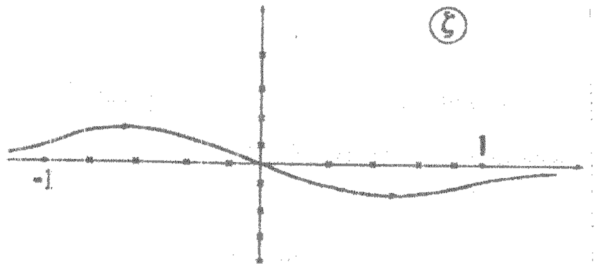

Рис. 1.

Используя это представление числителя, все подинтегральное выражение, стоящее при экспоненте, запишется через функции параболического цилиндра формулой

$$\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)} = \frac{D_t(Z_>)D_t(-Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)} -$$

$$-\frac{D_t(Z_1)D_t'(-Z_2)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}[D_t(Z_>)D_t(-Z_<) + D_t(Z_<)D_t(-Z_>)] +$$

$$+\frac{D_t'(-Z_2)D_t(-Z_1)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}D_t(Z_>)D_t(Z_<) -$$

$$-\frac{D_t(Z_1)D_t'(Z_2)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}D_t(-Z_>)D_t(-Z_<), \qquad (1.14)$$

где функция $\Psi_2(Z_1)$ в свою очередь определена условием

$$\Psi_2(Z_1) = D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z_1)D_t'(Z_2).$$

В отличие от предельной задачи без краевых условий с показателем преломления (1.1) (см. [4]), в рассматриваемом случае именно краевые условия Дирихле на верхней границе и условие Неймана – на нижней вносят некоторые трудности при исследовании решения (1.13) не только в окрестности оси волновода, но и вблизи границ. Из всех слагаемых формулы (1.14) лишь одно (первое) не зависит от краевых условий и совпадает с подинтегральным выражением предельной задачи [4].

Нетрудно показать, что при $x > 0$ контур интегрирования в интеграле (1.13) можно продеформировать и совместить с контуром γ, изображенным на Рис. 2.

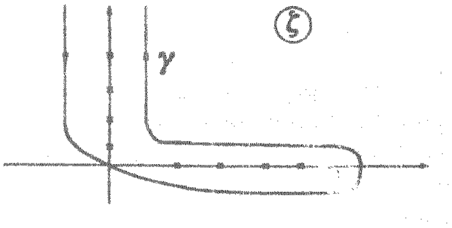

Рис. 2.

Для этого необходимо воспользоваться асимптотикой функции параболического цилиндра при больших $|t+1/2|$. Асимптотика функций параболического цидиндра $D_t(Z)$ и $D_t(-Z)$ на плоскости комплексного переменного ζ (плоскость значка t), при больших $|t+1/2|, (|t+1/2| \gg |\frac{Z^2}{4}|)$ имеет осциллирующий характер. ВКБ-решение при $(|t+1/2| \gg |\frac{Z^2}{4}|)$ можно представить в виде

$$D_t(Z) \underset{|t+\frac{1}{2}|\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[4]{t+\frac{1}{2}}} \exp\left(\pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}Z\left(1+\frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{4}-\frac{Z^2}{24}+\ldots\right]\right)\right).$$

Подынтегральное выражение (1.14), содержащее четыре различных слагаемых, при $|t+1/2| > |Z^2/4|$ имеет оценку, составленную из линейной комбинации функций вида

$$\sim \frac{c}{\sqrt{t+\frac{1}{2}}} \exp\{ikx\zeta \pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}\,(Z_> \pm Z_<)\}, \qquad (*)$$

где

$$\sqrt{t+1/2} = \sqrt{|t+1/2|}\exp\left(i/2\arg\,(t+1/2)\right), \qquad \left|\arg\,(t+1/2)\right| < \pi,$$

причем знак “+” берется, когда $0 < \arg(t+1/2) < \pi$, знак “$-$” берется, когда $-\pi < \arg(t+1/2) < 0$.

Кроме этого в трех слагаемых, содержащих в знаменателе функцию $\Psi_2(Z_1)$, добавится множителем оценка, числитель которой состоит из линейной комбинации функций

$$\sim c\exp\{\pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}\,(Z_1 \pm Z_2)\},$$

а в знаменатель входит функция $\sin(\sqrt{t+1/2}\,[Z_1 - Z_2])$.

Деформация контура γ из первоначального возможна по следующим причинам. Во-первых, из ВКБ оценки числителя в подинтегральном выражении (1.13). Во-вторых, из того факта, что корни знаменателя первого слагаемого в подинтегральном выражении (1.13), лежащие на вещественной оси ζ, по модулю $|\zeta_n| < 1$. И, наконец, корни ζ_l функции $\sin(\sqrt{t+1/2}[Z_1 - Z_2])$ также лежат на вещественной оси и по модулю меньше единицы.

Теперь контур интегрирования γ продеформируем в контур γ_N (см. Рис. 3).

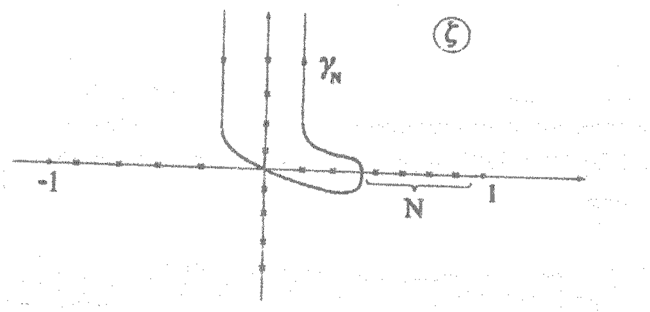

Рис. 3.

При этом выделится сумма вычетов в полюсах подынтегрального выражения (нормальные волны). Действительно, вронскиан, стоящий в знаменателе подынтегрального выражения, равен

$$D_t(0)\, D_t'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(t+1) \sin\, \pi t.$$

Полюса подинтегрального выражения, которые являются нулями $D_t(0)D_t'(0)$, могут быть определены (см. [5]) на плоскости комплексного переменного ζ из уравнения

$$t = \frac{1}{2}\Big[kl_1(1-\zeta^2) - 1\Big] = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\, ,$$

и равны

$$\zeta = \zeta_n \equiv \pm\sqrt{1 - \frac{2n+1}{kl_1}}\,.$$

Таким образом, полюса $\pm\zeta_n$ располагаются на плоскости ζ симметрично относительно начала координат. При вещественных k

и $n < \frac{1}{2}(kl_1 - 1) \equiv n_0$ полюса $\pm\zeta_n$ вещественны и по модулю не превосходят единицы: $|\pm\zeta_n| < 1$, при $n > n_0$ – чисто мнимые.

Другие полюса подинтегрального выражения, которые являются нулями знаменателя $\Psi_2(Z_1)$, определены на плоскости комплексного переменного ζ из уравнения

$$\sqrt{t+1/2}[Z_1 - Z_2] = k\sqrt{1-\zeta^2}(z_1 - z_2) = l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

и равны

$$\zeta = \zeta_l \equiv \pm\sqrt{1 - \frac{l^2\pi^2}{k^2(z_1 - z_2)^2}}.$$

Тогда вычеты при $t = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, на плоскости комплексного переменного ζ вычисляются, с использованием формул

$$\left(\Gamma(t+1)\sin\,\pi t\right)'_\zeta\Big|_{t=n} = \pi\, n!(-1)^n\,(-\zeta_n)kl_1,$$

где

$$\zeta_n \equiv \sqrt{1 - \frac{2n+1}{kl_1}}.$$

После выделения N вычетов интеграла (1.13) решение примет вид:

$$u = \sum_{n=0}^{N} u_n^{\text{норм}} + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}}\int\limits_{\gamma_N} e^{ikx\zeta}\,\frac{\Psi_1(Z_>)\,\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)\,D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta, \tag{1.15}$$

где

$$u_n^{\text{норм}} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\frac{e^{ikx\sqrt{1-\frac{2n+1}{kl_1}}}}{\sqrt{kl_1-(2n+1)}}\left[\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{\Psi_2(Z_1)}\right]\Bigg|_{t=n}. \tag{1.16}$$

Здесь произведение функций $\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)$ деленное на $\Psi_2(Z_1)$ вычисляется по формуле (1.14), где значок t функций параболического цилиндра принимает целые значения $t = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. В главном приближении выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (1.16) с учетом (1.14), даст нам выражения вида

$$\sim \frac{c_r \exp\{ikx\zeta_n \pm i\sqrt{1-\zeta_n^2}\,(z_> \pm z_< + \beta_r z_1 - \gamma_r z_2)\}}{\sin[k\sqrt{1-\zeta_n^2}(z_1 - z_2)]},$$

где c_r, β_r, γ_r – некоторые константы, $r = 1, 2, 3, 4$.

Условия на выбор величины N будут указаны ниже, когда будет выделена из оставшегося интеграла геометрооптическая часть поля.

Полюса подинтегрального выражения, которые являются нулями функции $\Psi_2(Z_1)$ и входят в три последних слагаемых (1.14), дадут еще серию вычетов на вещественной оси ζ_l, $l = 0, 1, 2, \dots$. Это будет другая серия нормальных волн, которая связана с краевыми условиями, с шириной волновода $(z_1 - z_2)$.

В главном приближении после вычисления вычетов в полюсах ζ_l, $l = 0, 1, 2, \dots$ интеграл (1.13) может быть представлен формулой

$$u = \sum_{n=0}^{N} u_n^{\text{норм}} + \sum_{l=0}^{L} u_l^{\text{норм}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}} \int\limits_{\gamma_N} e^{ikx\zeta} \frac{\Psi_1(Z_>)\,\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)\,D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta, \tag{1.17}$$

где суммирование по l происходит лишь для трех последних слагаемых функции (1.14)

$$u_l^{\text{норм}} = \pm \frac{l\pi(-1)^{l+1}}{4\sqrt{2}k(z_1 - z_2)} \frac{e^{ikx\sqrt{1 - \frac{l^2\pi^2}{k^2(z_1 - z_2)^2}}}}{\sqrt{k^2(z_1 - z_2)^2 - l^2\pi^2)}} \times$$

$$\times \left[\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)}\right]\Bigg|_{t=t_l}. \tag{1.18}$$

Для дальнейших преобразований решения воспользуемся тем, что вронскиан, стоящий в знаменателе подынтегрального выражения, равен

$$D_t(0)\,D_t'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(t+1)\,\sin\,\pi t.$$

Как и в работе [5], разложим функцию $(\sin\,\pi t)^{-1}$ в геометрическую прогрессию с остаточным членом:

$$\frac{1}{\sin \pi t} = -2i\left[\sum_{m=0}^{M-1} e^{i\pi t(2m+1)} + \frac{e^{i\pi t(2M+1)}}{1 - e^{i2\pi t}}\right]. \tag{1.19}$$

Аналогично разложим функцию $(\sin k\sqrt{1-\zeta^2}[z_1 - z_2])^{-1}$.

Подставляя значение вронскиана и ряд (1.19) вместо $\sin \pi t$ в интеграл (1.17), получим представление для поля u в виде суммы нормальных волн, суммы M интегралов и остаточного интеграла. Очевидно, что интегралы, стоящие в сумме по m от 0 до $M-1$, равны нулю, поскольку подынтегральное выражение не имеет особенностей, и контур интегрирования γ_N стягивается в точку. Тогда для решения задачи получаем формулу, соответствующую первому слагаемому подинтегрального выражения (1.14):

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n^{\text{норм}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{kl_1}{\pi}}\times$$

$$\times \int_{\gamma_N} \frac{e^{i[kx\zeta+\pi t(2M+1)]}}{\Gamma(t+1)} \frac{D_t(Z_>)D_t(Z_<)}{(1-e^{i2\pi t})} d\zeta. \qquad (1.20)$$

2. Комбинированное представление для поля в волноводе.

В этом разделе статьи рассмотрим применение комбинированного метода лишь к интегралу (1.20). Остальные слагаемые интеграла (1.17) содержащие в знаменателе функцию $\Psi_2(Z_1)$ и обобщение этого метода на случай скорости, зависящей произвольным образом от координаты z, будут исследованы в дальнейшем.

Заменим функции параболического цилиндра, входящие как линейная комбинация в подинтегральное выражение (1.20), на новые функции по формуле:

$$D_t(Z) = \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{i\pi t/2}D_{-t-1}(iZ) + e^{-i\pi t/2}D_{-t-1}(-iZ)\right]. \qquad (2.1)$$

Предположим, что контур γ_N настолько удален от точки $\zeta = 1$ $(t=0)$, что на нем выполняются условия:

$$\left|t+\frac{1}{2}\right| \gg 1, \quad \mathrm{Re}\sqrt{t+\frac{1}{2}} - \frac{Z}{2} \gg \left|t+\frac{1}{2}\right|^{-1/6}. \qquad (2.2)$$

Условия (2.2) означают, что исследуется область вблизи точки поворота уравнения Вебера.

Тогда функции параболического цилиндра можно заменить на их асимптотические разложения:

$$D_{-t-1}(iZ) \sim \left[1 - \frac{Z^2}{4(t+\frac{1}{2})}\right]^{-1/4}\times$$

$$\times \exp\left\{ -i\Big(t+\frac{1}{2}\Big)\, P\left(\frac{Z}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right)\right\} D_{-t-1}(0), \qquad (2.3)$$

где $P(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin\, x$.

Заметим, что имеют место формулы

$$D_{-t-1}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-t/2} \frac{1}{\Gamma\Big(\frac{t}{2}+1\Big)}, \qquad (2.4)$$

$$\Gamma(t+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^t \Gamma\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Big)\, \Gamma\Big(\frac{t}{2}+1\Big), \qquad (2.5)$$

$$\frac{\Gamma\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{t}{2}+1\Big)} \sim \sqrt{\frac{2}{t}} \;\; \text{при} \;\; |t| \gg 1, \;\; |\arg t| < \pi. \qquad (2.6)$$

При подстановке формул (2.1), (2.3)–(2.6) в интеграл (1.20) получим:

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n^{\text{норм}} + \frac{i}{8\pi}\sqrt{kl_1} \sum_{\alpha,\beta=\pm 1} \int\limits_{\gamma_N} \frac{\varphi(t, Z_>, Z_<) e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}}}{1-e^{i2\pi t}}\, d\zeta, \qquad (2.7)$$

$$\Phi_{m\alpha\beta} = x\zeta + \frac{t\pi}{k}\Big[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big] - \frac{t+\frac{1}{2}}{k} \times$$
$$\times \left[\alpha P\left(\frac{Z_>}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right) - \beta P\left(\frac{Z_<}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right)\right], \qquad (2.8)$$

$$\varphi = \Big(t+\frac{1}{2}-\frac{Z_>^2}{4}\Big)^{-1/4}\Big(t+\frac{1}{2}-\frac{Z_<^2}{4}\Big)^{-1/4}. \qquad (2.9)$$

Интеграл по контуру γ_N в формуле (2.7) разобьем на два: на интеграл по контуру γ^1 и γ_N^2. Контуры γ^1 и γ_N^2 при $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ уходят на бесконечность в секторе $-\pi/2 < \arg\zeta < -\pi/4$, а при $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ – γ^1 в секторе $\pi/2 < \arg\zeta < 3\pi/4$, γ_N^2 в секторе $\pi/4 < \arg\zeta < \pi/2$. Схематически контуры γ^1 и γ_N^2 показаны на рис. 4.

Контур γ_N^2 пересекает вещественную ось при $\zeta = a_N$, так что

$$\zeta_{N+1} < a_N < \zeta_N, \qquad (2.10)$$

где $\zeta_n = \sqrt{1-\frac{2n+1}{kl_1}}$. Нетрудно показать, что интегралы по контуру γ^1 и γ_N^2 существуют по отдельности.

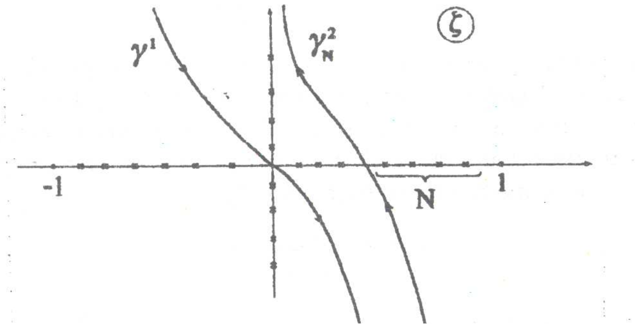

Рис. 4.

В интеграле по γ^1 разложим знаменатель в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-e^{i2\pi t}}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{i2m\pi t},$$

тогда формула (2.7) примет вид

$$u=\sum_{n=1}^{N}u_n^{\text{норм}}+\sum_{m=M}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=\pm1}I^{(1)}_{m\alpha\beta}+\sum_{\alpha,\beta=\pm1}I^{(2)}_{M\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

где

$$I^{(1)}_{m\alpha\beta}=\frac{i}{8\pi}\sqrt{kl_1}\int_{\gamma^1}\varphi(\zeta,Z_>,Z_<)e^{ik\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta,x,Z_>,Z_<)}\,d\zeta, \tag{2.12}$$

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta}=\frac{i}{8\pi}\sqrt{kl_1}\int_{\gamma^2_N}\varphi(\zeta,Z_>,Z_<)\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(\zeta,x,Z_>,Z_<)}}{1-e^{i2\pi t}}\,d\zeta, \tag{2.13}$$

3. Вычисление интегралов $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$, $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$.

Обратимся к вычислению входящих в формулы (2.11)–(2.13) интегралов $I^{(1,2)}_{m\alpha\beta}$.

Интегралы $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ могут быть вычислены методом стационарной фазы. Уравнение для стационарной точки имеет вид (в переменных ζ, z – малое)

$$\Phi'_{m\alpha\beta}=x-l_1\zeta\left\{\left[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\pi-\alpha\arcsin\,\frac{z_>}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}+\right.$$

$$+\beta \arcsin \frac{z_<}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}} = 0. \tag{3.1}$$

Решение этого уравнения $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$ имеет наглядную лучевую интерпретацию. Выпустим из источника $x=0$, $z=z_0$ (предположим, что $z_0=z_>$) луч так, чтобы он попал в точку наблюдения (x,z).

Для частного закона (1.1) изменения показателя преломления $n(z)$ уравнение луча имеет вид (см. [5]):

$$z = A\sin(Bx + C),$$

где

$$A = l_1\sqrt{1-a^2}, \quad B = \frac{1}{l_1 a}, \quad C = \arcsin\frac{z_0}{A}.$$

Величина $a = n(z)\cos\Psi(z)$ постоянна на луче ($\Psi(z)$ – угол наклона луча, см. Рис. 5).

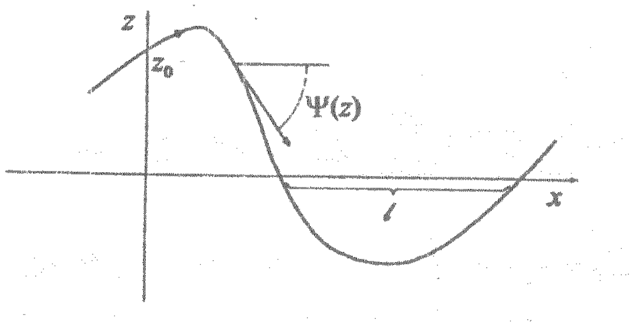

Рис. 5.

Расстояние между соседними точками пересечения лучом оси x называют циклом, величина цикла равна

$$l = \pi l_1 a.$$

Очевидно, имеет место равенство

$$x = pl \pm l_1 a \arcsin\frac{z_0}{l_1\sqrt{1-a^2}} \pm l_1 a \arcsin\frac{z}{l_1\sqrt{1-a^2}}. \tag{3.2}$$

В этом случае будем говорить, что луч имеет p циклов. Знаки “+” или “−” выбираются в зависимости от знаков z_0, z и четности величины p. Если z_0 и z одинаковых знаков и p – нечетное, то в формуле (3.2) надо брать одинаковые знаки, если же p – четное, то – разные. Если величины z_0 и z разных знаков, то наоборот. С учетом этого правила можно записать

$$x = \left[2m + 1 + (\alpha+\beta)/2\right] l - \alpha \arcsin \frac{z_>}{l_1\sqrt{1-a^2}} +$$

$$+\beta \arcsin \frac{z_<}{l_1\sqrt{1-a^2}}, \quad \alpha,\, \beta = \pm 1. \tag{3.3}$$

Мы видим, что формула (3.3) совпадает с (3.1), если взять $\zeta = a$, т.е. для стационарной точки получаем выражение

$$\zeta_{m\alpha\beta} = n(z_0)\,\cos\Psi, \tag{3.4}$$

где Ψ – угол выхода луча, попадающего в точку (x, z) и имеющего $2m+1+(\alpha+\beta)/2$ циклов. Заметим, что имеет место монотонность по величине m:

$$\zeta_{m\alpha\beta} \leqslant \zeta_{m'\alpha'\beta'} \tag{3.5}$$

при $m > m'$ и любых α, β, α', β'. Нетрудно показать, что фаза $\Phi_{m\alpha\beta}$, вычисленная в стационарной точке $\zeta_{m\alpha\beta}$, равна эйконалу этого луча

$$\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta}, x, z_>, z_<) = \tau_{m\alpha\beta}(x, z_0, z).$$

Рассмотрим теперь вопрос о правомочности применения метода стационарной фазы. Легко видеть, что начальный контур интегрирования γ^1 может быть совмещен со стационарным контуром для фазы $\Phi_{m\alpha\beta}$, который проходит через точку $\zeta_{m\alpha\beta}$ и уходит на бесконечность, асимптотически приближаясь к лучам $\arg\zeta = -\pi/4$ и $\arg\zeta = 3\pi/4$. Существенной областью интегрирования будет область, где

$$\frac{k}{2}\Phi''_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\,(\zeta - \zeta_{m\alpha\beta})^2 = O(1). \tag{3.6}$$

Метод стационарной фазы применим, если в существенной области интегрирования при $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\frac{k}{n!}\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\,(\zeta - \zeta_{m\alpha\beta})^n \ll 1, \tag{3.7}$$

где $\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta}$ – производная от фазы порядка n. Условие (3.7) будет выполнено, если производные от фазы удовлетворяют неравенству

$$k\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\left[k\Phi''_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\right]^{-n/2} \ll 1. \tag{3.8}$$

Учитывая (3.1), имеем:

$$\Phi''_{m\alpha\beta} = -l_1\pi[2m+1+(\alpha+\beta)/2] + \theta'_{\alpha\beta}(\zeta, z_>, z_<), \tag{3.9}$$

$$\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta} = \theta^{(n-1)}_{\alpha\beta}(\zeta, z_>, z_<), \tag{3.10}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = l_1\zeta\left[\alpha \arcsin\frac{z_>}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}} - \beta\arcsin\frac{z_<}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}\right]. \tag{3.11}$$

В реальных задачах распространения волн отношение z/l_1 является малой величиной. Поэтому естественно предположить, что выполняется условие

$$\left|\frac{z}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}\right| \ll 1. \tag{3.12}$$

Тогда выражения для фазы и ее производной заметно упростятся. Имеем при ζ близких к 1:

$$\theta_{\alpha\beta} \sim \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,[\alpha z_> - \beta z_<], \tag{3.13}$$

$$\theta^{(n)}_{\alpha\beta} \sim (-2)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\zeta^{n+1}}{(1-\zeta^2)^{n+1/2}}\,[\alpha z_> - \beta z_<]. \tag{3.14}$$

Если предположить, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{z}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll l_1\pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2],$$

которое с учетом уравнения (3.1) эквивалентно условию

$$\left|\frac{z}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll x, \tag{3.15}$$

то мы получим, что вторая производная от фазы $\Phi''_{m\alpha\beta}$ не обращается в нуль и имеет оценку

$$\Phi''_{m\alpha\beta} \sim -l_1\pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2] \sim -\frac{x}{\zeta}. \tag{3.16}$$

Учитывая формулы (3.10), (3.14), получим, что неравенство (3.8) будет выполнено, если стационарная точка $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$ отделена от нуля настолько, что выполняется условие

$$\frac{kz}{(1-\zeta^2)^{n-1/2}}\,(kx)^{-n/2} \ll 1,$$

которое можно переписать в другом виде

$$(1-\zeta^2) \gg \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2}{2n-1}} (kx)^{-\frac{n-2}{2n-1}}, \quad n \geqslant 3. \tag{3.17}$$

Учитывая сделанные ранее предположения (2.2), (3.12), (3.15), получим, что при $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$, удовлетворяющем условию

$$1-\zeta^2 \gg \max\left\{\frac{1}{kl_1}, \left(\frac{z}{l_1}\right)^2, \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2}{2n-1}} (kx)^{-\frac{n-2}{2n-1}}\right\} \tag{3.18}$$

при $n \geqslant 2$, проведение метода стационарной фазы для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ не встретит препятствий.

Результат вычисления интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ по методу стационарной фазы дает геометрическую волну, проходящую через точки $(0, z_0)$ и (x, z) и имеющую $2m+1+(\alpha+\beta)/2$ циклов.

Обратимся к интегралу $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$. Предположим, что точка пересечения a_N контура γ^2_N с вещественной осью удовлетворяет неравенству

$$\zeta_{M\alpha\beta} \leqslant a_N \leqslant \zeta_{M-1\,\alpha'\beta'} \quad \forall\ \alpha, \beta, \alpha', \beta', \tag{3.19}$$

где

$$\zeta_{m\alpha\beta} \sim \frac{x}{l_1\pi[2m+1+(\alpha+\beta)/2]}$$

– стационарная точка для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$. Заметим, что, ввиду соотношения (3.5), всегда можно добиться, чтобы условие (3.19) выполнялось. В верхней полуплоскости ζ при $\operatorname{Re}\zeta > 0$ величина $\exp\{i2\pi t\}$ экспоненциально растет, а в нижней – экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси (см. (*)). Следовательно, в верхней полуплоскости ζ (при $\operatorname{Re}\zeta > 0$) подынтегральное выражение в интеграле $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ (см. (2.13)) будет вести себя как $\exp\left\{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta}\right\}$, а в нижней – как $\exp\left\{ik\Phi_{M\alpha\beta}\right\}$. Нетрудно показать, что при выполнении условия (3.19) подынтегральное выражение экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси. Имеем при $\zeta = a_N + i\xi$, учитывая (*), (2.9),

$$\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta) = \Phi_{m\alpha\beta}(a_N) + i\Phi'_{m\alpha\beta}(a_N)\xi + O(\Phi''_{m\alpha\beta}\xi^2),$$

$$t(\zeta) = t(a_N) - ikl_1 a_N \xi + O(kl_1\xi^2),$$

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{kl_1}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-a_N^2}} + O\left(\frac{\xi}{(1-a_N^2)^{3/2}}\right)\right].$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.13), получим:

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta} \sim -\frac{1}{4\pi\sqrt{1-a_N^2}} e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(a_N)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\Phi'_{M\alpha\beta}(a_N)\xi}}{1-e^{i2\pi t(a_N)}e^{2\pi k l_1 a_N \xi}}\, d\xi.$$

Эту формулу можно записать в другом виде

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta} \sim -\frac{1}{8\pi^2 k l_1 a_N\sqrt{1-a_N^2}}\Big\{ e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(a_N)}\big[F(\alpha_N,\beta_N)+F(2-\alpha_N,\beta_N)\big] -$$

$$-e^{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta}(a_N)}\big[F(1-\alpha_N,\beta_N)+F(1+\alpha_N,\beta_N)\big]\Big\}, \qquad (3.20)$$

где

$$F(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1-2x\cos\beta + x^2}\, dx,$$

$$\alpha_N = -\frac{\Phi'_{M\alpha\beta}(a_N)}{2\pi l_1 a_N}, \quad \beta_N = k l_1 \pi(1-a_N^2) - \pi.$$

Заметим, что формула (3.20) имеет смысл при $1 > \alpha_N > 0$, что выполняется, если справедливо неравенство (3.19) для величины a_N. Погрешность формулы (3.20) имеет порядок максимума из величин $xk^{-1}l_1^{-2}$ и $(kl_1)^{-1}(1-a_N^2)^{-3/2}$.

4. Формулировка основных результатов.

Итак, показано, что при достаточно больших значениях волнового числа k имеет место комбинированное представление (2.11) для вычисления звукового поля u, в котором функции $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ представляют собой значения геометрооптических волн, а для остатка $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ справедлива простая формула (3.20). Величины M и N (соответственно количество отщепленных геометрооптических и нормальных волн) находятся из условия, чтобы выполнялись неравенства (2.10), (3.18), (3.19). Остальные слагаемые формулы

(1.14) также имеют комбинированное представление, но с добавлением в эйконал (2.8) функций, соответствующих волнам, отраженным от границ волновода.

Обоснование возможности использования "комбинированного метода" в случае, когда скорость $c(z)$ на оси волновода (ось x-ов) имеет минимальное значение, будет выполнена авторами в следующих публикациях.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, В. Б. Филиппов, *Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на вогнутой поверхности.* — В кн.: XI Всесоюзный симпозиум по распространению радиоволн, т. 3. Наука, М. 1975, с. 47–50.
2. В. Б. Филиппов, *Коротковолновая асимптотика тока и диаграмма направленности для задачи дифракции на неплоских экранах.* — В кн.: VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространения волн, т. 1 (Ростов н/Д). Наука, М. 1977, с. 47–50.
3. V. B. Philippov, *Diffraction by a nonplanar screen.* — Wave Motion **3** (1981), 78–81.
4. В. Б. Филиппов, *Об одном методе расчета поля точечного источника в волноводе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 146–156.
5. В. С. Булдырев, *Поле точечного источника в волноводе.* Труды МИАН им. В. А. Стеклова, Т. CXV Математические вопросы теории дифракции и распространения волн. 1, Наука, Л. 1971, с. 78–102.
6. В. С. Булдырев, *Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде.* — В кн.: Проблемы математической физики. Вып. 3. . Изд-во ЛГУ, Л. 1968, с. 5–30.
7. В. М. Кудряшов, *Геометроволновой способ вычисления акустических полей в волноводе.* — Акустический журнал **22, вып. 5** (1976), 724–728.
8.. A. Erdelyi, M. Wyman, *The asymptotic evaluation of certain integrals.* — ARMA **14, No. 3** (1963), 217–260.
9. L. B. Felsen, *Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones.* — J. Appl. Phys. **26, No. 2** (1955), 138–151.
10. L. B. Felsen, *Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts.* — J. Acoust. Soc. Am. **69** (1981), 352–361.
11. D. Ludwig, *Diffraction by a circular cavity.* — J. Math. Phys. **11, No. 5** (1970), 1617–1630.
12. Л. М. Бреховских, *Акустика океана.* Наука, М. (1974).

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B., Vlasjuk N.G. Combined method of calculation of the field of the point source in a wave guide.

The two-dimensional problem of propagation of waves, raised by a point source, in an interior wave guide is investigated. The Dirichlet

(Neumann) boundary condition is given on the upper (lower) bound of the wave guide. The possibility of representation of the exact solution as a sum of the geometro-optical waves, the normal waves and the residual is shown. The sufficient conditions on the general amount of the detached normal and geometro-optical waves are obtained. The residual is expressed by the simple formula.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 25 декабря 1998 г.