Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

В. В. Камоцкий

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Введение

Настоящая работа посвящена обоснованию двух методов вычисления диаграммы направленности сферической волны, возникающей в результате рассеяния падающей плоской волны конусом.

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны $u_{inc}(x,\omega_0) = e^{-ik(x,\omega_0)}$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $-\omega_0$ – единичный вектор, в направлении которого распространяется волна) на конусе $\Xi = \widetilde{N} \times \mathbb{R}^+$ ($\widetilde{N} \subset S^2$):

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 \\ u\big|_{\partial\Xi} = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Xi} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В результате процесса дифракции появляется сферическая волна, рассеянная вершиной конуса $G_{\text{diff}} = 2\pi \frac{e^{ikr}}{kr}\left(f(\omega,\omega_0) + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right)$, где $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$. В работе [2] В. П. Смышляевым была получена формула для амплитуды рассеяния:

$$f(\omega,\omega_0) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g(\omega,\omega_0,\nu)\nu \, d\nu, \tag{2}$$

где g – функция Грина оператора $Q_\nu = \widetilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4}$ ($\widetilde{\Delta}$ – обозначает оператор Бельтрами–Лапласа на S^2) в $N = S^2 \setminus \widetilde{N}$, т.е.

$$\begin{cases} Q_\nu g(\omega,\omega_0,\nu) = \delta(\omega,\omega_0), \\ B_0 g = 0, \end{cases}$$

где B_0 – граничный оператор на ∂N (Дирихле или Неймана – в соответствии с краевым условием в (1)), а контур интегрирования изображен на Рис. 1.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-RFBR 95-0012 и РФФИ 96-15-96121.

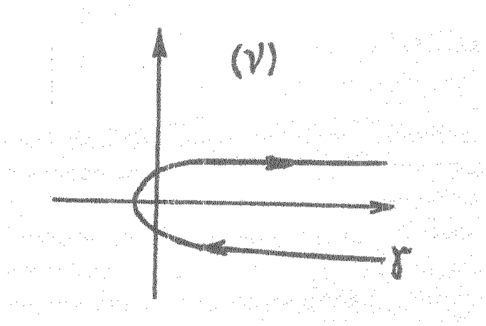

Рис. 1.

Интеграл в (2) сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'_Q(N)$ (см. [5]), f почти всюду регулярна, однако формула (2) непригодна для вычислений даже если $\omega \notin \operatorname{sing\,supp} f$ (описание $\operatorname{sing\,supp} f$ см. в [2, 3]).

Первая часть работы посвящена обоснованию приближенного вычисления f в области регулярности по формуле

$$f_d(\omega, \omega_0, t) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\gamma} e^{-i\pi\nu - t\nu^{2d}} g(\omega, \omega_0, \nu)\nu \, d\nu. \tag{3}$$

и является обобщением работы [3], в которой рассматривался случай $d = 1$. В [3] было установлено, что в области регулярности f приближение $f_1(\omega, \omega_0, t)$ стремится к $f(\omega, \omega_0)$ со всеми производными. В настоящей работе доказывается аналогичный факт для произвольного натурального d.

Вторая часть работы посвящена доказательству возможности деформировать контур в (2) в мнимую прямую. Точнее, пусть $g_0(\omega, \omega_0, \nu)$ – функция Грина для всей сферы, тогда

$$f(\omega, \omega_0) = -\frac{2i}{\pi} \int\limits_0^\infty \operatorname{sh}(\pi\xi)(g - g_0)(\omega, \omega_0, i\xi) d\xi \tag{4}$$

при $\omega \in N_1(\omega_0) = \{\omega : \theta_1(\omega, \omega_0) = \sup_{s \in \partial N}[\operatorname{dist}(\omega_0, s) + \operatorname{dist}(\omega, s)] > \pi\}$. Эта формула была приведена В. П. Смышляевым в [2], и там же был намечен план ее вывода. Формула использовалась в расчетах (см. [4]), однако подробное ее доказательство нигде не было опубликовано.

1. Вычисление $f(\omega, \omega_0)$ методом Абеля–Пуассона

В обосновании сходимости f_d к f в области регулярности f мы будем придерживаться идеологии, изложенной в [3]. Несложно убедиться, что $f_d(\omega, \omega_0, t)$ при $t > 0$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\widetilde{\Delta}_\omega + \frac{1}{4}\right)^d\right) f_d(\omega, \omega_0, t) = 0, \tag{5}$$

краевым условиям

$$B_0 \left(-\widetilde{\Delta}_\omega + \frac{1}{4}\right)^k f_d = 0, \quad k = 0, \dots, d-1,$$

и стремится к $f(\omega, \omega_0)$ в $\mathcal{D}'_Q(N)$. Как и в [3], мы представим $f_d(\omega, \omega_0, t)$ в виде "свертки" с функцией Грина $G_{B_0}(\omega, \omega_0, t)$ оператора $P = \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\widetilde{\Delta}_\omega + \frac{1}{4}\right)^d$ и, установив асимптотический вид G_{B_0}, получим указанное свойство решения $f_d(\omega, \omega_0, t)$.

Для простоты изложения перейдем к более общей ситуации: пусть M – компактное риманово многообразие размерности m, Q – положительно определенный самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор на M порядка d. Докажем такую теорему:

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(M)$, тогда существует $u(x,t)$:*

$$u \in C^\infty(M \times (0,T)), \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Q\right) u = 0 \ \forall t > 0, \tag{7}$$

$$u(\cdot, t) \to f \text{ при } t \to 0 \text{ в } \mathcal{D}'(M), \tag{8}$$

$$\forall M' \subset M \setminus \operatorname{sing\,supp} f \ u(\cdot,t)\big|_{M'} \to f\big|_{M'} \text{ в } C^\infty \text{ при } t \to 0. \tag{9}$$

Для доказательства нам потребуется теорема, которую мы докажем позже:

Теорема 2. *Пусть $G(x,y,t)$ – фундаментальное решение $\frac{\partial}{\partial t} + Q$, т.е.*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Q_x\right) G = \delta_{(y,0)},$$

тогда при $t > 0$ $G \in C^\infty$ *и при* $x \neq y$ *стремится к* 0 *со всеми производными, когда* $t \to 0$, *т.е.* $\forall M'' \subset\subset M' \subset\subset M$

$$\forall \alpha, \beta\, D_x^\alpha D_y^\beta(\cdot,\cdot,t) \to 0 \text{ равномерно на } M'' \times (M \setminus M'). \tag{10}$$

Доказательство Теоремы 1. Определим $u(x,t)$ таким образом: положим

$$u(x,t) = \langle f(y), G(x,y,t)\rangle.$$

Условия (6) и (7), очевидно, выполняются. Пусть $\varphi \in C^\infty(M)$, заметим, что $v(x,t) = \langle \varphi(y), G(x,y,t)\rangle$ является решением задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Q\right) v = 0, \quad v(\cdot,0) = \varphi,$$

и $v(x,t) \in C^\infty(M\times[0,T))$. Поэтому $\langle u(x,t), \varphi(x)\rangle = \langle\langle f(y), G(x,y,t)\rangle, \varphi(x)\rangle = \langle \varphi\otimes f, G\rangle = \langle f(y), \langle\varphi(x), G(x,y,t)\rangle\rangle = \langle f(y), v(y,t)\rangle \to \langle f,\varphi\rangle$ при $t \to 0$, т.е. (8) доказано.

Проверим справедливость (9). Пусть $B_{3\varepsilon}(x_0) \subset M \setminus \operatorname{sing\,supp} f$, $\varphi \in C_0^\infty(B_{3\varepsilon}(x_0))$ и $\varphi = 1$ в $B_{2\varepsilon}(x_0)$. Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \langle \varphi(y) f(y), G(x,y,t)\rangle + \langle f(y), (1-\varphi(y))G(x,y,t)\rangle.$$

Так как $\varphi f \in C^\infty$, первое слагаемое есть функция класса $C^\infty(M\times[0,T))$, и, в частности, при $x \in B_\varepsilon(x_0)$ стремится в C^∞ к $\varphi f\big|_{B_\varepsilon(x_0)} = f\big|_{B_\varepsilon(x_0)}$. Второе слагаемое при $x \in B_\varepsilon(x_0)$ стремится к 0 со всеми производными, так как в силу Теоремы 2 $(1-\varphi(y))G(x,y,t)\big|_{B_\varepsilon(x_0)\times M\times[0,T)} \in C^\infty$ и, таким образом, $u(x,t)\big|_{B_\varepsilon(x_0)\times[0,T)} \in C^\infty$, т.е., мы получили (9). Единственность же в задачах вида (6)–(8) легко получается из спектрального представления для Q. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Пусть* $\Omega \subset\subset M$, $\partial\Omega \in C^\infty$. *Пусть* B *– граничный оператор на* $\partial\Omega$ *такой, что* (Q,B) *определяет эллиптическую самосопряженную задачу в* Ω. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'(\Omega; Q, B)$ *(*$\mathcal{D}'(\Omega;Q,B)$ *– пространство, двойственное к* $\{h \in C^\infty(\bar\Omega) : BQ^k f = 0\,\forall k\}$*). Тогда существует* $u(x,t)$, *удовлетворяющая* (6)–(8) *и*

$$Bu = 0\ \forall t > 0, \tag{11}$$

$$\forall M' \subset\subset \Omega\setminus \operatorname{sing\,supp} f\; u(\cdot,t)\big|_{M'} \to f\big|_{M'} \text{ в } C^\infty \text{ при } t \to 0. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем сначала аналог Теоремы 2 для G_B – функции Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t}+Q$. Пусть $G_B(x,y,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}+Q_x\right)G_B=\delta_{(y,0)}, \\ BG_B=0, \end{cases}$$

Покажем, $\forall M''\subset\subset M'\subset\subset\Omega$

$$\forall\alpha,\beta D_x^\alpha D_y^\beta G_B(\cdot,\cdot,t)\to 0 \text{ равномерно на } M''\times(\Omega\setminus M'). \tag{13}$$

Пусть $\varphi(x,\cdot)\in C_0^\infty(B_{2d(x)/3}(x))$ и $\varphi(x,\cdot)=1$ в $B_{d(x)/3}(x)$, где $d(x)=\operatorname{dist}(x,\Omega\setminus M')$, тогда в силу (10) при $x\in M''$ функция $\left(\frac{\partial}{\partial t}+Q_y\right)(\varphi G)(x,\cdot,t)$ гладка и имеет компактный y-носитель. Следовательно, применяя теорему о корректной разрешимости начально-краевой задачи (см. [6]), выводим, что существует $G_B'(x,y,t)\in C^\infty(M''\times\Omega\times[0,T))$ и

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}+Q_y\right)G_B'=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+Q_y\right)(\varphi G) \\ B_yG_B'=0, \\ G'_{B|_{t=0}}=0. \end{cases}$$

Теперь заметим, что G_B' удовлетворяет (13) и, следовательно, $G_B=G_B'+\varphi G$ также удовлетворяет (13). Оставшаяся часть доказательства, т.е. вывод (12) из (13), дословно повторяет вывод (9) из (10) (доказательство Теоремы 1). □

Это следствие и гарантирует нам, что $f_d(\cdot,\omega_0,t)$ стремится к $f(\cdot,\omega_0)$ со всеми производными на $N\setminus\operatorname{sing\,supp}f$ при $t\to 0$.

Теперь докажем Теорему 2. В работе [3] для случая $d=1$ утверждение аналогичной теоремы было следствием удачно подобранного анзаца для функции Грина. В общем же случае нам придется использовать принципиально другие построения.

Доказательство Теоремы 2. На протяжении этого доказательства будем рассматривать $G(x,y,t)$ как ядро оператора $e^{-tQ}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t\lambda}(Q-\lambda)^{-1}d\lambda$.

Построим параметрикс $R(\lambda)$ оператора $(Q-\lambda)$. Символ $R(\lambda)$ в любой карте имеет вид

$$\sigma R(\lambda)\sim\sum_{n=0}^\infty r_n(x,\xi,\lambda), \tag{14}$$

где r_n квазиоднороден по (ξ, λ) степени $-d-n$, т.е.

$$\forall t > 0 \quad r_n(x, t\xi, t^d\lambda) = t^{-d-n} r_n(x, \xi, \lambda).$$

Из формального выполнения $\sigma(R(\lambda)(Q-\lambda)) \sim I$ получаем следующее выражение для r_n:

$$r_0 = (q_d - \lambda)^{-1}, \quad r_n = -r_0 \sum_{\substack{|\alpha|+j+d-k=n \\ j<n}} d_\xi^\alpha r_j D_x^\alpha q_k \alpha!.$$

Тут мы использовали $\sigma Q = \sum_{k=0}^d q_k(x, \xi)$, где q_k – однородный многочлен степени k. Несложно показать, что r_n представляется в виде

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \rho_{n,k}(x, \xi) r_0^k(x, \xi), \tag{15}$$

где $\rho_{n,k}$ – однородный по ξ многочлен степени $d(k-1)-n$.

Оператор $R(\lambda)$ сколь угодно хорошо аппроксимирует $(Q-\lambda)^{-1}$ в следующем смысле: пусть $R_n(\lambda)$ – оператор, соответствующий n-ой частичной сумме (14), тогда $\forall k \exists n(k)$:

$$\|(Q-\lambda)^{-1} - R_n(\lambda); L(H^{-k}, H^k)\| \leqslant C_k(1+|\lambda|)^{-k}. \tag{16}$$

Эта оценка следует из того, что для любого $A(\lambda) \in \Psi^{-s}(\lambda)$ при достаточно большом $s > 0$ справедлива оценка, аналогичная (16): $\|A(\lambda); L(H^{-k}, H^k)\| \leqslant C_k(1+|\lambda|)^{-k}$ (см. [7]).

Поэтому оператор $E_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t\lambda} R_n(\lambda) d\lambda$ хорошо аппроксимирует e^{-tQ}:

$$E_n(t) - e^{-tQ} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t\lambda}(R_n(\lambda) - (Q-\lambda)^{-1}) d\lambda =$$

$$= \frac{t^{-1}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\lambda}\left(R_n\left(\frac{\lambda}{t}\right) - \left(Q - \frac{\lambda}{t}\right)^{-1}\right) d\lambda,$$

и, следовательно, при малых t справедливы оценки:

$$\|E_n(t) - e^{-tQ}; L(H^{-k}, H^k)\| \leqslant \frac{C_k}{t}\int_\gamma e^{-|\lambda|}\left(1 + \frac{|\lambda|}{t}\right)^{-k} d|\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant C_k t^{k-1} \int\limits_{\gamma} \frac{e^{-|\lambda|}}{(t+|\lambda|)^k}\, d|\lambda| \leqslant C'_k t^{k-1}. \tag{17}$$

А так как при $t > 0$ $E_n(t)$ и e^{-tQ} бесконечно сглаживающие операторы, то имеет место аналогичная (17) оценка ядер: пусть $G_n(x,y,t)$ – ядро $E_n(t)$, тогда $\forall k\ \exists n$:

$$\|G_n - G; C^k(M\times M)\| \leqslant C_k t^{k-1} \tag{18}$$

(в силу априорной оценки $\|K_A; C^k\| \leqslant C\|A; L(H^{-k}, H^k)\| \forall k$ ядра K_A любого $A \in \Psi^{-\infty}$).

Теперь локализуем задачу. Пусть $\{\phi_i\}_1^N$ – разбиение единицы, согласованное с атласом $\{U_i\}_1^N$ на M. Определим

$$R_{ij}(\lambda) = \phi_i R(\lambda)\phi_j.$$

Тогда $\sigma R_{ij}(\lambda) \sim \sum_n r_{n,ij}$, где $r_{n,ij} = \phi_i \sum_{|\alpha|+k=n} d_\xi^\alpha r_k D_x^\alpha \phi_j/\alpha!$. По аналогии с (15) имеет место представление

$$r_{n,ij} = \phi_i \sum_{k=1}^{2n+1} \rho_{n,k}^{(ij)}(x,\xi) r_0^k(x,\xi). \tag{19}$$

Обозначим $R_n^0(\lambda)$ оператор с символом $\sum_{i,j}\sum_{k=0}^n r_{k,ij}$, он также сколь угодно хорошо приближает $R_n(\lambda)$ и, следовательно, для него выполняются оценки, аналогичные (16)–(18). Благодаря локализации $E_n^0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t\lambda} R_n^0(\lambda) d\lambda$ распадается в сумму бесконечно сглаживающих операторов на отдельных картах, что благодаря (18) уже позволяет сделать сформулированный в теореме вывод. Действительно, не умаляя общности $M'' \subset\subset U_1 \subset\subset M'$. Пусть $\phi_1 = 1$ в некоторой окрестности M''. Тогда $G_n^0(x,y,t) = 0$ при $x \in M''$, $y \in M'$, и из (18) получаем, что первые k производных G равномерно стремятся к 0 на $M'' \times M \setminus M'$. Теорема доказана. □

В завершение этого пункта, используя выведенные выражения для $r_{n,ij}$, можно сказать несколько слов об асимптотике G_n вблизи особенности. Пусть $\phi_1 = 1$ в $B_\varepsilon(x_0)$, тогда при $x, y \in B_\epsilon(x_0)$ $G_n^0(x,y,t) = G_{n,11}$, а выражение (19) для $r_{n,11}$ переходит в (15). Поэтому, применяя теорему о вычетах, получаем:

$$G_n(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{-t\lambda} \sum_{s=0}^n r_s(x,\xi,\lambda) d\lambda\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\xi} \sum_{s=0}^{n} \sum_{k=s+1}^{2s+1} \rho_{s,k}(x,\xi) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{-t\lambda} (q_d(x,\xi) - \lambda)^{-k} \, d\lambda \, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\xi - t q_d(x,\xi)} \sum_{s=0}^{2n} \left[\sum_{k=\left[\frac{s+1}{2}\right]}^{n} \rho'_{k,s+1}(x,\xi) \right] t^s \, d\xi.$$

Пользуясь однородностью $q_d(x,\xi)$, $\rho'_{k,s}(x,\xi)$ по ξ мы приходим к таком выражению для G_n:

$$G_n(x,y,t) = \sum_{s=0}^{2n} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i \frac{x-y}{t^{1/d}} \eta - q_d(x,\eta)} \sum_{k=\left[\frac{s+1}{2}\right]}^{n} \rho_{k,s+1}(x,\eta) t^{\frac{k-m}{d}} \, d\eta,$$

т.е., так как $e^{-q_d(x,\eta)} \rho_{k,s+1}(x,\eta)$ – быстро убывающие по η функции, то G_n имеет вид

$$G_n(x,y,t) = \sum_{s=0}^{2n} k_s \left(\frac{x-y}{t^{1/d}}, x \right) t^{\frac{s-m}{d}},$$

где k_s быстро убывает на ∞ по первому аргументу и гладкая по второму в некоторой окрестности x_0.

2. Вычисление $f(\omega,\omega_0)$ в $N_1(\omega_0)$

В доказательстве того, что в (2) можно разогнуть контур при $\omega \in N_1(\omega_0)$, мы будем следовать плану, изложенному В. П. Смышляевым в [2]. Мы докажем, что для любого $\mu > 0$ при $\omega \in N_1(\omega_0) = \{\omega : \theta_1(\omega,\omega_0) = \sup_{s \in \partial N} [\operatorname{dist}(\omega_0, s) + \operatorname{dist}(\omega, s)] > \pi\}$ и $|\operatorname{Im} \nu| > \mu$ имеет место оценка

$$|(g - g_0)(\omega, \omega_0, \nu)| \leqslant C(\mu, \omega, \omega_0)(1 + |\nu|)^2 e^{-(\pi + \varepsilon(\omega,\omega_0))|\operatorname{Im} \nu|}, \qquad (20)$$

где $\varepsilon(\omega,\omega_0) > 0$.

Покажем, что функция Грина g представима в виде преобразования Фурье–Лапласа некоторого решения гиперболического уравнения. Пусть $\Gamma(\omega,\omega_0,t)$ есть решение

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\widetilde{\Delta}_\omega - \frac{1}{4} \right) \right) \Gamma = -\delta(t-0)\delta(\omega,\omega_0) \\ \Gamma\big|_{t<0} = 0, \ B_0 \Gamma = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Тогда при $\operatorname{Im}\nu < 0$

$$g(\omega,\omega_0,\nu) = \mathcal{F}_t(\Gamma(\omega,\omega_0,t)) \tag{22}$$

(здесь и далее $\mathcal{F}_t$ – преобразование Фурье–Лапласа). Для проверки (22) разложим $\Gamma(\omega,\omega_0,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям оператора $\widetilde{\Delta} - \frac{1}{4}$: пусть $\left(-\widetilde{\Delta} + \frac{1}{4}\right)\varphi_k = \nu_k^2\varphi_k$, тогда

$$\Gamma(\omega,\omega_0,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\nu_k t}{\nu_k}\,\chi_{[0,\infty)}(t)\varphi_k(\omega)\varphi_k(\omega_0). \tag{23}$$

При фиксированных ω,ω_0 ряд (23) сходится в $S'(\mathbb{R}^1)$. (Это следует из того, что, если достаточно много раз формально проинтегрировать (23) по t, то получится равномерно сходящийся на любом компакте ряд, имеющий своей суммой непрерывную функцию степенного роста.) Поэтому

$$\mathcal{F}_t\Gamma(\omega,\omega_0,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_t\left(\frac{\sin\nu_k t}{\nu_k}\,\chi_{[0,\infty)}(t)\right)\varphi_k(\omega)\varphi_k(\omega_0). \tag{24}$$

Непостредственная проверка дает

$$\mathcal{F}_t\left(\frac{\sin\nu_k t}{\nu_k}\,\chi_{[0,\infty)}(t)\right) = \int\limits_0^{\infty} e^{-i\nu t}\frac{\sin\nu_k t}{\nu_k}\,dt = -\frac{1}{\nu^2-\nu_k^2}$$

при $\operatorname{Im}\nu < 0$, и мы видим, что ряд (24) совпадает со спектральным разложением g:

$$g(\omega,\omega_0,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-\nu_k^2}\,\varphi_k(\omega)\varphi_k(\omega_0).$$

Таким образом, соотношение (22) доказано.

Такие же рассуждения показывают, что $g_0(\omega,\omega_0,\nu) = \mathcal{F}_t\,\Gamma_0(\omega,\omega_0,t)$, где Γ_0 – решение аналогичной (21) задачи для всей сферы. Прежде, чем двигаться дальше, заметим, что из спектрального представления (23) и оценок $\nu_k \sim Ck^{\frac{1}{2}}$, $\|\varphi_k;C\| \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]) следует, что Γ и Γ_0 – распределения не более, чем второго порядка.

Положим $\Gamma_1(\omega,\omega_0,t) = (\Gamma-\Gamma_0)(\omega,\omega_0,t)$, тогда $(g-g_0)(\omega,\omega_0,\nu) = \mathcal{F}_t\Gamma_1(\omega,\omega_0,t)$ при $\omega,\omega_0 \in N$ и $\operatorname{Im}\nu < 0$. Если теперь мы покажем, что

$$\Gamma_1(\omega,\omega_0,t) = 0 \text{ при } \omega \in N_1(\omega_0) \text{ и } t < \theta_1(\omega,\omega_0), \tag{25}$$

то для того, чтобы получить желаемую оценку (20) нам останется воспользоваться следующим вариантом теоремы Пэли–Винера (см. [1]):

Утверждение 4. *Пусть* $u \in S'_N(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} u \subset [A, +\infty)$, *тогда* $\forall \mu > 0$

$$\mathcal{F}_t u(\xi) \leqslant c(\mu)(1 + |\xi|)^N e^{A \operatorname{Im} \xi}$$

при $\operatorname{Im} \xi < -\mu$.

Действительно, если выполнено (25), то, воспользовавшись четностью по ν $g(\omega, \omega_0, \nu)$ и $g_0(\omega, \omega_0, \nu)$, мы сразу получаем (20) с $\varepsilon(\omega, \omega_0) = \theta_1(\omega, \omega_0) - \pi > 0$.

Чтобы доказать (25) рассмотрим задачу, которой удовлетворяет Γ_1:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{4}\right)\right)\Gamma_1 = 0 \\ \Gamma_1\big|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 \\ B\Gamma_1 = -B\Gamma_0. \end{cases} \tag{26}$$

Согласно теории распространения особенностей (см. [1]) мы априори знаем, что при $\omega \in N_1(\omega_0)$ и $t < \theta_1(\omega, \omega_0)$ $\Gamma_1 \in C^\infty$. А так как при $t < \theta_1(\omega, \omega_0)$ в нижней полости светового конуса с вершиной (ω, t) граничные данные задачи (26) нулевые, то стандартные энергетические оценки для Γ_1 и дадут нам (25). Оценка (20) доказана.

Осталось показать, почему оценка (20) позволяет нам разогнуть в (2) контур. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что интегралы по вертикальным полуосям

$$f_r^{\pm}(\omega, \omega_0, a) = \int\limits_{a \pm i(b + \mathbb{R}^+)} e^{-i\pi\nu}(g - g_0)(\omega, \omega_0, \nu)\nu \, d\nu$$

стремятся к 0 в $\mathcal{D}'(N_1(\omega_0))$ при $a \to +\infty$. Пусть $\psi(\omega) \in C_0^\infty(N_1(\omega_0))$, тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$\langle f_r^{\pm}((\omega, \omega_0, a), \psi(\omega)\rangle =$$

$$= \int\limits_{N_1(\omega_0)} \int\limits_{a \pm i(b + \mathbb{R}^+)} e^{-i\pi\nu}(g - g_0)(\omega, \omega_0, \nu)\nu\psi(\omega) d\nu \, d\omega =$$

$$= \int\limits_{a \pm i(b + \mathbb{R}^+)} \nu e^{-i\pi\nu} \int\limits_{N_1(\omega_0)} \left[\frac{1}{\nu^4}\left(-\widetilde{\Delta}_\omega + \frac{1}{4}\right)^2 (g - g_0)(\omega, \omega_0, \nu)\right] \psi(\omega) d\omega \, d\nu =$$

$$= \int\limits_{N_1(\omega_0)} \int\limits_{a\pm i(b+\mathbb{R}^+)} e^{-i\pi\nu}\nu^{-3}(g-g_0)(\omega,\omega_0,\nu)\left(-\widetilde{\Delta}+\frac{1}{4}\right)^2\psi(\omega)d\nu\,d\omega =$$

$$= \int\limits_{N_1(\omega_0)} \int\limits_{b}^{\infty} e^{-i\pi(a\pm is)}(a\pm is)^{-3}(g-g_0)(\omega,\omega_0,a\pm is)ds\left(-\widetilde{\Delta}+\frac{1}{4}\right)^2\psi(\omega)d\omega.$$

Следовательно, используя (20), имеем

$$|\,\langle f_r^{\pm}(\omega,\omega_0,a),\psi(\omega)\rangle\,| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{N_1(\omega_0)} \int\limits_{b}^{\infty} e^{-\varepsilon s}a^{-1}\left(1+\frac{s}{a}\right)^{-1}dsC(b,\omega,\omega_0)\left|\left(-\widetilde{\Delta}+\frac{1}{4}\right)^2\psi\right|d\omega$$

$$\leqslant C'(\psi,\omega_0)a^{-1}\to 0 \text{ при } a\to\infty.$$

Таким образом, $f_r^{\pm}(\omega,\omega_0,a)$ стремятся к 0 в $\mathcal{D}'(N_1(\omega_0))$ при $a\to+\infty$, откуда получаем возможность разогнуть в (2) контур и справедливость (4).

В заключание автор выражает признательность профессору В. М. Бабичу за постановку задачи и полезное обсуждение.

Литература

1. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных уравнений.* **1**, **3**, Москва, 1987.
2. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction of waves by cones at high frequencies.* Preprint LOMI E-9-89, Leningrad.
3. В. М. Бабич, В. В. Камоцкий, *О расчете диаграммы направленности волны, рассеянной вершиной произвольного конуса.* настоящий сборник.
4. V. M. Babich, Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *Numerical calculations of the diffraction coefficients for an arbitrarily shaped perfectly conducting cone.* IEEE Transactions on Antennas and Propagations, **44(5)**, 740–747.
5. V. M. Babich, Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "non-singular" directions of a smooth convex cone.* SIAM J. Appl. Math. (в печати).
6. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа.* Москва, Мир, 1968.
7. М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* Москва, Наука, 1978.

Kamotski V. V. On calculation of some integrals, describing the wave fields.

Two methods of calculation of scattering amplitude $f(\omega,\omega_0)$ of the wave scattered by the vertex of an arbitrarily shaped cone are justified. It is shown that the approximation $f_d(\omega, \omega_0, t)$, obtained by the method similar to Abel–Poisson's method of summation, converges uniformly in the domain of regularity of f. Also the possibility of calculation of $f(\omega, \omega_0)$ when $\omega \in N_1(\omega_0)$ by means of rapidly converging integrals is proved.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 24 августа 1998 г.