Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

М. Белишев, А. Гласман

К ПРОЕКТИРОВАНИЮ В ПРОСТРАНСТВЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

0. Введение

0.1. О работе. В статье авторов [1] была намечена программа решения обратной задачи для динамической системы Максвелла; эта программа реализована в [2]. Последняя работа имеет характер предварительной публикации: часть доказательств дана в набросках, некоторые результаты лишь анонсированы. В настоящей статье мы описываем один из главных фрагментов процедуры решения обратной задачи: диагонализацию оператора, определяемого семейством проекторов на подпространства соленоидальных векторных полей.

0.2. c-метрика. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой границей Γ; $c = c(x)$-гладкая функция, положительная в $\overline{\Omega}$. Функция c определяет в $\overline{\Omega}$ метрику $(ds)^2 = c^{-2}|dx|^2$; пусть dist_c есть соответствующее расстояние; обозначим $\tau(x) := \operatorname{dist}_c(x, \Gamma)$, $x \in \overline{\Omega}$.

В Ω выделено расширяющееся семейство подобластей $\Omega^\xi := \{x \in \Omega \colon | \colon \tau(x) < \xi\}$, $0 < \xi \le T$; обозначим $\Gamma^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = \xi\}$; при этом $\partial\Omega^\xi = \Gamma \cup \Gamma^\xi$. В наших рассмотрениях $T > 0$ таково, что подобласть Ω^T покрывается регулярной системой полугеодезических (лучевых) координат с базой на Γ.

0.3. Соленоидальные поля. Пусть ε есть положительная функция, заданная в $\overline{\Omega}$; фиксируем $T > 0$ и рассмотрим пространство

$$\mathcal{H} := \operatorname{clos}_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega^T) \mid \mathbf{y} = 0 \ \text{ вблизи } \ \Gamma^T;$$
$$\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{y} = 0 \ \text{ в } \ \Omega^T\}$$

(с мерой εdx). В нем выделено семейство подпространств

$$\mathcal{H}^\xi := \left\{\mathbf{y} \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} \mathbf{y} \subset \overline{\Omega^\xi}\right\}, \quad 0 \le \xi \le T$$

Работа поддержана грантом РФФИ 98-01-00314.

($\mathcal{H}^0 = \{0\}$; $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}$); обозначим через G^ξ (ортогональный) проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$.

Семейство $\{G^\xi\}$ определяет оператор $\widehat{\sigma} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$\widehat{\sigma} := \int_0^T \xi \, dG^\xi.$$

0.4. Касательные поля на границе. Пусть $\nu = \nu(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ есть нормаль; введем пространство

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}_2(\Gamma) \mid \mathbf{y} \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\}.$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{T}(\Gamma)$-значных функций от $\tau \in [0, T]$

$$\mathcal{F} := L_2\left([0, T]; \mathcal{T}(\Gamma)\right) = \oplus \int_0^T \mathcal{T}(\Gamma) d\tau;$$

пусть $\widehat{\tau} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ есть оператор умножения на независимую переменную τ.

0.5. Главный результат. Основной результат работы – построение унитарного преобразования $U : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$, диагонализирующего оператор $\widehat{\sigma}$ в смысле Спектральной Теоремы (см. [3, 7]):

$$U \widehat{\sigma} U^{-1} = \widehat{\tau}.$$

Преобразование U строится по разрывам, возникающим на поверхностях Γ^ξ при действии проекторов G^ξ. Доказательство изометричности U опирается на уравнение Риккати для оператора, связанного с эллиптической задачей в Ω^ξ и отображающего данные Неймана на Γ^ξ в данные Дирихле. Этот оператор – центральный объект импедансной томографии, а упомянутое уравнение составляет основу одного из ее методов (т.н. Layer Stripping Method (LSM)). Мы проводим вывод уравнения Риккати, пользуясь схемой, близкой к предложенной в [8]. Появление этого уравнения и его важная роль в процедуре диагонализации – новый, и на наш взгляд, неожиданный факт.

0.6. Примечания. Авторы глубоко признательны М. Ш. Бирману за полезные обсуждения по теме работы. Мы весьма благодарны Дж. Сильвестру за консультации по LSM.

1. Геометрия

Определяются лучевые координаты; приводятся связанные с ними понятия и соотношения.

1.1. c-метрика, эйконал, подобласти. Пусть Ω есть ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с гладкой[1] границей Γ; $c = c(x)$ – заданная в $\overline{\Omega}$ гладкая *положительная* функция. Функция c определяет метрику

$$(ds)^2 = \frac{|dx|^2}{c^2(x)}, \tag{1.1}$$

превращающую $\overline{\Omega}$ в компактное риманово многообразие с краем; через dist_c мы обозначаем соответствующее расстояние.

С метрикой (1.1) связана функция (*эйконал*) $\tau = \tau(x) := \mathrm{dist}_c(x, \Gamma)$, $x \in \overline{\Omega}$. Множества уровня эйконала

$$\Gamma^\xi := \{x \in \overline{\Omega} \mid \tau(x) = \xi\}, \quad \xi \geq 0$$

($\Gamma = \Gamma^0$) суть поверхности, эквидистантные Γ; они ограничивают расширяющиеся подобласти

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \xi\}, \quad \xi > 0.$$

1.2. Лучевые координаты. Если $T > 0$ достаточно мало, то для каждой точки $x \in \Omega^T \cup \Gamma$ найдется *единственная* ближайшая к ней точка границы $\gamma(x) \in \Gamma$, причем $\gamma(x)$ есть конец единственной кратчайшей геодезической (в c-метрике) связывающей x с Γ. Соответствие $i : x \to (\gamma(x), \tau(x))$ в этом случае оказывается биекцией $\Omega^T \cup \Gamma$ на цилиндр $\Gamma \times [0, T)$.

Определим T_{reg} как верхнюю грань тех $T > 0$, для которых отображение i является гладким диффеоморфизмом. Отметим, что величина T_{reg} совпадает с расстоянием от Γ до т.н. множества раздела (*cut locus*) многообразия Ω относительно его края: см. [4]. Заметим еще, что при $T < T_{\mathrm{reg}}$ эквидистанты Γ^ξ, $(0 \leq \xi \leq T)$ суть гладкие поверхности, диффеоморфные Γ.

Фиксируем $T < T_{\mathrm{reg}}$ и выберем точку $x \in \Omega^T$; на границе Γ в окрестности точки $\gamma(x)$ выберем локальную систему координат γ^1, γ^2. Набор γ^1, γ^2, τ называется *лучевыми координатами* (л.к.) точки x. Тот же термин мы используем и для пары $\gamma(x)$, $\tau(x)$. Через $x(\gamma, \tau)$ обозначается точка в $\Omega^T \cup \Gamma$, имеющая данные л.к. (γ, τ).

---

[1] всюду в работе "гладкий" означает C^∞- гладкий.

Соглашение I. Все дальнейшие рассмотрения относятся к случаю $T < T_{\rm reg}$, так что подобласть Ω^T покрывается регулярной системой лучевых координат.

Соглашение II. Если $h = h(x)$ есть функция (скалярная или векторная) в Ω^T, то мы обозначаем $h(\gamma, \tau) := h(x(\gamma, \tau))$; если $g = g(\gamma, \tau)$ есть функция л.к., то полагаем $g(x) := g(\gamma(x), \tau(x))$. Запись $h(x) = g(\gamma, \tau)$ равносильна $h(x(\gamma, \tau)) = g(\gamma, \tau)$ или $h(x) = g(\gamma(x), \tau(x))$.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = \mathbf{r}(\gamma, \tau)$ есть радиус-вектор точки $x = x(\gamma, \tau) \in \Omega^T \cup \Gamma$; γ^1, γ^2 – локальные координаты на Γ; обозначим

$$\mathbf{r}_\alpha := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \mathbf{r}_0 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}$$

(всюду в работе греческие индексы пробегают значения 1, 2) и отметим, что векторы $\mathbf{r}_\alpha(\gamma, \xi)$ касательны к поверхности Γ^ξ, а $\mathbf{r}_0(\gamma, \xi)$ нормален к ней.

Через $|\mathbf{y}|$ и $\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}$ мы обозначаем стандартные норму и скалярное произведение векторов в $\mathbf{R}^3$. Евклидовы элементы длины и объема имеют в л.к. известный вид:

$$|dx|^2 = g_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + g_{00}(d\tau)^2; \quad dx = cJ\, d\gamma^1 d\gamma^2 d\tau, \tag{1.2}$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta; \quad g_{00} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = c^2; \quad J = |\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta| = \left(\det\{g_{\alpha\beta}\}\right)^{1/2};$$

функция cJ совпадает с якобианом перехода $(\gamma^1, \gamma^2, \tau) \to (x^1, x^2, x^3)$ от л.к. к декартовым координатам; евклидов элемент площади на Γ^ξ есть

$$d\Gamma^\xi = J(\gamma, \xi) d\gamma^1 d\gamma^2 = \frac{J(\gamma, \xi)}{J(\gamma, 0)} d\Gamma. \tag{1.3}$$

1.3. Векторные поля. Эйконал определяет гладкое поле единичных нормалей к поверхностям Γ^ξ:

$$\boldsymbol{\nu}(x) := \frac{\nabla \tau(x)}{|\nabla \tau(x)|}, \quad x \in \overline{\Omega}^T;$$

отметим простое соотношение

$$\mathbf{r}_0 = c\boldsymbol{\nu}.$$

Произвольное векторное поле в Ω^T можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu, \tag{1.4}$$

где

$$\mathbf{y}_\theta = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{y} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{y}_\nu = y^0 \mathbf{r}_0 = (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y})\boldsymbol{\nu}$$

суть *поперечная* и *продольная* составляющие $\mathbf{y}$; отметим равенства

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} = y^0 |\mathbf{r}_0| = c y^0. \tag{1.5}$$

Приведем полезные вспомогательные соотношения; в их записи использовано Соглашение II: для гладкой функции φ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)(\gamma, \tau); \tag{1.6}$$

градиент функции допускает представление

$$(\nabla \varphi)(x) = \left[\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^\beta}\right)\mathbf{r}_\alpha + \left(g^{00}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)\mathbf{r}_0\right](\gamma, \tau), \tag{1.7}$$

в котором $\{g^{\alpha\beta}\}$ есть матрица обратная к $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g^{00} = (g_{00})^{-1} = c^{-2}$; дивергенция поля $\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha + y^0 \mathbf{r}_0$ вычисляется в л.к. по формуле:

$$(\operatorname{div} \mathbf{y})(x) = \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial \gamma^\alpha}(cJy^\alpha) + \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial \tau}(cJy^0)\right](\gamma, \tau); \tag{1.8}$$

для гладких функций φ и ε имеем:

$$(\operatorname{div} \varepsilon \nabla \varphi)(x) = \\ = \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial \gamma^\alpha}\left(cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^\beta}\right) + \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{J\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)\right](\gamma, \tau). \tag{1.9}$$

1.4. Параллельный перенос. Ниже мы используем операцию параллельного переноса в c-метрике. Коротко опишем, как она проводится в л.к.

В соответствии с (1.1), (1.2) элемент длины c-метрики в л.к. имеет вид:

$$(ds)^2 = h_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + (d\tau)^2,$$

где $h_{\alpha\beta} := c^{-2} g_{\alpha\beta}$; соответствующий метрический тензор есть

$$h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{h_{\alpha\beta}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1.10}$$

Временно обозначим $\tau =: \gamma^0$ и условимся, что латинские индексы пробегают значения 1,2,0. Пусть Γ^k_{ij} суть коэффициенты связности, отвечающие тензору h:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^0) = \left[\frac{1}{2} h^{kp} \left(\frac{\partial h_{ip}}{\partial \gamma^j} + \frac{\partial h_{pj}}{\partial \gamma^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial \gamma^p}\right)\right] (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^0);$$

отметим равенства

$$\Gamma^k_{00} = 0, \quad \Gamma^0_{i0} = 0, \tag{1.11}$$

вытекающие из структуры матрицы (1.10).

Пусть $\gamma^i = \gamma^i(t)$, $t \in [a, b]$ есть гладкая кривая в Ω^T; обозначим $\mathbf{r}_i(t) := \mathbf{r}_i(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^0(t))$, $\Gamma^k_{ij}(t) := \Gamma^k_{ij}(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^0(t))$. Пусть $\mathbf{y} = y^i_a \mathbf{r}_i(a)$ есть вектор на одном из концов кривой; поле $\mathbf{y} = y^i(t)\mathbf{r}_i(t)$, построенное по решениям $y^i(t)$ системы

$$\frac{dy^i}{dt} + \Gamma^i_{kj}(t) \frac{d\gamma^k}{dt} y^j = 0, \quad a < t < b; \tag{1.12}$$

$$y^i\big|_{t=a} = y^i_a \tag{1.13}$$

есть семейство параллельных векторов; вектор $\mathbf{y}(b) = y^i(b)\mathbf{r}_i(b)$ есть результат параллельного переноса исходного вектора вдоль данной кривой.

Вернемся к прежним обозначениям координат. Пусть $x = x(\gamma, \xi) \in \Omega^T$ – фиксированная точка, $\mathbf{y}(\gamma, \xi) = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha(\gamma, \xi) + y^0 \mathbf{r}_0(\gamma, \xi)$ – вектор в x; l – кратчайшая геодезическая, соединяющая x с Γ (с точкой $x(\gamma, 0) = \gamma$). Перенесем $\mathbf{y}(\gamma, \xi)$ параллельно вдоль l из $x(\gamma, \xi)$ в $x(\gamma, 0)$. Параметрические уравнения l суть $\gamma^1(t) = \mathrm{const}$; $\gamma^1(t) = \mathrm{const}$; $\tau(t) = t$, $t \in [0, \xi]$, так что

$$\frac{d\gamma^1}{dt} = \frac{d\gamma^2}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} = 1. \tag{1.14}$$

В этом случае, с учетом (1.11), (1.14) система (1.12), (1.13) приобретает вид:

$$\frac{dy^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta 0}(t) y^\beta = 0, \quad \frac{dy^0}{dt} = 0, \quad 0 < t < \xi;$$
$$y^\alpha\big|_{t=\xi} = y^\alpha, \quad y^0\big|_{t=\xi} = y^0;$$

причем из условий на $y^0(t)$ сразу следует $y^0(t) = y^0$. Решив систему, найдем искомый вектор

$$\mathbf{y}(\gamma, 0) = y^\alpha(0)\mathbf{r}_\alpha(\gamma, 0) + y^0 \mathbf{r}_0(\gamma, 0) =: [\mathbf{y}(\gamma, \xi)]^\wedge.$$

Очевидно, если $\mathbf{y}(\gamma,\xi)$ касателен к Γ^ξ (т.е. $y^0 = 0$), то вектор $[\mathbf{y}(\gamma,\xi)]^\wedge$ оказывается касательным к Γ.

Метрика (1.1) и евклидова метрика конформно эквивалентны; скалярное произведение векторов в c-метрике инвариантно относительно переноса $[\ \ ]^\wedge$. Из сказанного следует соотношение

$$\frac{1}{c^2(\gamma,\xi)}\mathbf{y}(\gamma,\xi)\cdot\mathbf{w}(\gamma,\xi) = \frac{1}{c^2(\gamma,0)}[\mathbf{y}(\gamma,\xi)]^\wedge\cdot[\mathbf{w}(\gamma,\xi)]^\wedge. \qquad (1.15)$$

2. Уравнение Риккати

Выводится нелинейное уравнение для граничного оператора, связанного с эллиптической краевой задачей.

2.1. Пространства. Приведем список пространств, используемых в работе; позднее он будет дополнен. Все пространства вещественны; в $\overline{\Omega}$ предполагается заданной гладкая *положительная* функция $\varepsilon=\varepsilon(x)$; как и раньше, фиксировано положительное $T<T_{\rm reg}$. Введем:

пространство $L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)$ функций на Γ^ξ $(0\le\xi\le T)$,

$$(f,g)_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)} = \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi \varepsilon f\, g$$

пространство $L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$:

$$(\varphi,\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T} = \int\limits_{\Omega^T} dx\varepsilon\varphi\,\psi =$$

$$< \text{см. } (1.2),\ (1.3) >== \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} d\Gamma d\tau\left(c\frac{J}{J_0}\varepsilon\varphi\psi\right)(\gamma,\tau), \qquad (2.1)$$

где $J_0 := J(\gamma,0)$;

пространство векторных полей $\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$,

$$(\mathbf{y},\mathbf{w})_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} = \int\limits_{\Omega^T} dx\varepsilon\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}$$

пространство *поперечных* полей

$$\mathcal{L}_\theta := \left\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)\mid \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}=0 \ \text{ в } \ \Omega^T\right\}.$$

2.2. Оператор Λ^ξ. Фиксируем $\xi \in (0,T]$ и рассмотрим граничную задачу:

$$\operatorname{div} \varepsilon \nabla p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{\Gamma^\xi} = f; \tag{2.3}$$

$$p|_\Gamma = 0; \tag{2.4}$$

пусть $p = p^f(x;\xi)$ есть ее решение.

В случае $f \in C^\infty(\Gamma^\xi)$ задача имеет единственное классическое решение $p^f \in C^\infty(\overline{\Omega^\xi})$; при $f \in L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)$ определено решение $p^f \in H^{3/2}(\Omega^\xi)$ ($H^s(\,\cdot\,)$ – Соболевские классы).

С задачей (2.2)–(2.4) связан оператор $\Lambda^\xi : L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi) \to L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)$,

$$\Lambda^\xi f := p^f(\,\cdot\,;\xi)\big|_{\Gamma^\xi};$$

приведем некоторые из его известных свойств:

(i) при каждом $\xi \in (0,T]$ Λ^ξ есть положительный компактный оператор, $\operatorname{Ker}\Lambda^\xi = \{0\}$; $\Lambda^\xi H^s(\Gamma^\xi) = H^{s+1}(\Gamma^\xi)$, $s \in \mathbf{R}$;

(ii) на гладких f выполнены равномерные по $\xi \in [\delta, T]\,(\delta > 0)$ оценки:

$$c_*(\delta)\|f\|^2_{H^{1/2}(\Gamma^\xi)} \le \left(\left(\Lambda^\xi\right)^{-1} f, f\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)} \le c^*(\delta)\|f\|^2_{H^{1/2}(\Gamma^\xi)}; \tag{2.5}$$

с $c_*(\delta) > 0$ и

$$\|(\Lambda^\xi)^{-1} f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)} \le c(\delta)\|f\|_{H^1(\Gamma^\xi)}. \tag{2.6}$$

(см., например, [6]).

Лемма 2.1. *Верна оценка*

$$\|\Lambda^\xi\| \le A\xi \tag{2.7}$$

($A = \mathrm{const}$).

Доказательство. Выберем $f \in C^\infty(\Gamma^\xi)$; интегрируя по частям с учетом (2.2)–(2.4), нетрудно получить

$$\int\limits_{\Omega^\xi} dx\, \varepsilon\, |\nabla p^f(\,\cdot\,;\xi)|^2 = \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, \varepsilon f\, \Lambda^\xi f,$$

откуда

$$\|\nabla p^f(\,\cdot\,;\xi)\|^2_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi)} \le \|f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)} \|\Lambda^\xi f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)}. \tag{2.8}$$

С другой стороны, для $p^f(x;\xi)=p^f(\gamma,\tau;\xi)$ имеем оценку

$$|p^f(\gamma,\xi;\xi)|^2=\left|\int\limits_0^\xi \frac{\partial p^f}{\partial\tau}(\gamma,s;\xi)ds\right|^2 \le \xi\int\limits_0^\xi\left[\frac{\partial p^f}{\partial\tau}(\gamma,s;\xi)\right]^2 ds\le$$

$$\le <\text{см. (1.7)}> \le \xi\left[\max_{\overline{\Omega^T}} c\right]\int\limits_0^\xi |\nabla p^f(\gamma,s;\xi)|^2 ds. \tag{2.9}$$

Интегрируя по Γ^ξ, получаем:

$$\|\Lambda^\xi f\|^2_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)} =<\text{см. (1.3)}>= \int\limits_\Gamma d\Gamma\left(\frac{J}{J_0}\varepsilon\right)(\gamma,\xi)|p^f(\gamma,\xi;\xi)|^2\le$$

$$\le <\text{см. (2.9)}> \le \xi\left[\max_{\overline{\Omega^T}} c\right]\left[\max_{\overline{\Omega^T}}\left(\frac{J}{J_0}\varepsilon\right)\right]\left[\min_{\overline{\Omega^T}}\left(c\frac{J}{J_0}\varepsilon\right)\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Gamma\times[0,\xi]} d\Gamma ds\left(c\frac{J}{J_0}\varepsilon\right)(\gamma,s)|\nabla p^f(\gamma,s;\xi)|^2 =<\text{см. (2.1)},>=$$

$$=\xi A\|\nabla p^f(\cdot;\xi)\|^2_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi)}\le <\text{см. (2.8)}> \le$$

$$\le \xi A\|f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)}\|\Lambda^\xi f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)}.$$

Сопоставляя начало и конец этой выкладки, имеем:

$$\|\Lambda^\xi f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)}\le \xi A\|f\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)}$$

откуда, по плотности гладких f, получаем (2.7). Лемма доказана.

Оценка (2.7) позволяет доопределить по непрерывности

$$\Lambda^0=\mathbf{0}. \tag{2.10}$$

2.3. Другие операторы. Опишем операторы, которые будут фигурировать в уравнении Риккати:

(i) оператор $\Lambda: L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)\to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, $\mathrm{Dom}\,\Lambda=C^\infty(\overline{\Omega^T})$ действует послойно (в соответствии с представлением $\Omega^T=\cup_{0<\tau<T}\Gamma^\tau$) по правилу

$$(\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\tau}=\Lambda^\tau\left[\varphi|_{\Gamma^\tau}\right],\quad 0\le\tau\le T;$$

отметим соотношение

$$(\Lambda\varphi)|_{\Gamma} = 0, \tag{2.11}$$

следующее из (2.10);

(ii) оператор $\Lambda_* : L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, Dom $\Lambda_* = C^\infty(\overline{\Omega^T})$,

$$\Lambda_* := \frac{1}{c}\,\Lambda\, c.$$

В последующих определениях мы пользуемся Соглашением II; введем

(iii) оператор $D : L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, Dom $D = C^\infty(\overline{\Omega^T})$,

$$(D\varphi)(x) := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)(x) =< \text{см. } (1.6) >= \left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)(\gamma,\tau);$$

(iv) оператор $D_* : L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, Dom $D_* = C^\infty(\overline{\Omega^T})$,

$$(D_*\varphi)(x) := -\left[\frac{1}{\varepsilon c J}\,\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon J\varphi)\right](\gamma,\tau);$$

(v) оператор $\nabla_\theta : L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to \mathcal{L}_\theta$, Dom $\nabla_\theta = C^\infty(\overline{\Omega^T})$,

$$(\nabla_\theta\varphi)(x) := \left[\left(g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)\mathbf{r}_\alpha\right](\gamma,\tau)$$

(ср. с (1.7));

(vi) оператор $\operatorname{div}_\theta : \mathcal{L}_\theta \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, Dom $\operatorname{div}_\theta = \mathcal{L}_\theta \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$; для $\mathbf{v} = v^\alpha\mathbf{r}_\alpha$

$$(\operatorname{div}_\theta \mathbf{v})(x) := \left[\frac{1}{cJ}\,\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}(cJv^\alpha)\right](\gamma,\tau)$$

(ср. с (1.8));

(ii) оператор $B : L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, Dom $B = C^\infty(\overline{\Omega^T})$,

$$B := -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon\nabla_\theta;$$

в лучевых координатах имеем

$$(B\varphi)(x) = -\left[\frac{1}{cJ\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}\left(cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)\right](\gamma,\tau).$$

Отметим некоторые свойства введенных операторов:

(a) оператор Λ ограничен, инъективен и имеет область значений $\operatorname{Ran}\Lambda = \left\{\psi \in C^\infty(\overline{\Omega^T}) \mid \psi|_\Gamma = 0\right\}$; области значений операторов Λ_*, D, D_*, $\operatorname{div}_\theta$, B содержатся в $C^\infty(\overline{\Omega^T})$; $\operatorname{Ran}\nabla_\theta \subset \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$;

(b) все операторы обладают следующим свойством: если прообраз локализован в слое $\Omega^{\xi''}\setminus\Omega^{\xi'}$, $(0\le\xi'<\xi''\le T)$, то носитель образа содержится в том же слое;

(c) интегрированием по частям устанавливаются соотношения:

$$(\Lambda\varphi,\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} = (\varphi,\Lambda_*\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)};$$

$$(\nabla_\theta\varphi,\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta} = -(\varphi,\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v})_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}; \qquad (2.12)$$

если φ и ψ таковы, что $(\varphi\psi)|_\Gamma = 0$ и $(\varphi\psi)|_{\Gamma^T} = 0$, то

$$(D\varphi,\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} = (\varphi,D_*\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}. \qquad (2.13)$$

2.4 Операторное уравнение. Введенные выше операторы связаны замечательным соотношением; его вывод мы проводим по схеме, близкой к использованной в работе [8].

Теорема 2.1. *Справедливо равенство*

$$D\Lambda + \Lambda_* D_* + \Lambda_* B\Lambda = \mathbf{1}. \qquad (2.14)$$

Доказательство.

(i) Выберем $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega^T})$ и фиксируем $\xi\in(0,T]$; рассмотрим задачу

$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla p = 0 \qquad \text{в}\quad \Omega^\xi; \qquad (2.15)$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial\nu}\right|_{\Gamma^\xi} = \varphi|_{\Gamma^\xi}; \qquad (2.16)$$

$$p|_\Gamma = 0; \qquad (2.17)$$

пусть $p(x;\xi)$ есть ее решение. Согласно (1.9), в лучевых координатах эта задача приобретает вид:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2} + \frac{1}{cJ}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{J\varepsilon}{c}\right)\frac{\partial p}{\partial\tau} +$$

$$+\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}\left(cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial\gamma^\beta}\right) = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma\times(0,\xi); \qquad (2.18)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=\xi} = \varphi(\,\cdot\,,\xi); \tag{2.19}$$

$$p|_{\tau=0} = 0; \tag{2.20}$$

решение $p(\gamma,\tau;\xi)$ есть гладкая функция от $(\gamma,\tau)\in\Gamma\times[0,\xi]$, гладко зависящая от параметра $\xi\in(0,T]$.

(ii) Вторую производную по τ можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=\xi} = \lim_{\delta\to+0}\frac{\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\xi} - \frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi-\delta)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta} -$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\frac{\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\xi-\delta} - \frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi-\delta)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta} =: \mathrm{I}\text{–}\mathrm{II} \tag{2.21}$$

Согласно (2.19) имеем

$$\mathrm{I} = \lim_{\delta\to+0}\frac{(c\,\varphi)|_{\tau=\xi} - (c\,\varphi)|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta} = \frac{\partial(c\varphi)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi};$$

формула Лагранжа дает представление

$$\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi-\delta} - \frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi-\delta)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi-\delta} = \frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi-\alpha\delta)}{\partial\xi\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi-\delta}\cdot\delta$$

с $\alpha=\alpha(\delta)\in(0,1)$ и приводит к равенству

$$\mathrm{II} = \frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi}.$$

Возвращаясь к (2.21) получаем:

$$\frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=\xi} = \frac{\partial\colon(c\,\varphi)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi} - \frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau}\bigg|_{\tau=\xi}. \tag{2.22}$$

(iii) Полагая в (2.18) $\tau=\xi-0$ и используя (2.19), (2.22), имеем:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\left[\frac{\partial(c\varphi)}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau}\right] + \frac{1}{J}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{J\varepsilon}{c}\right)\varphi +$$

$$+\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}\left[cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\gamma^\beta}\right] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi;$$

затем простые вычисления дают:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau} = \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\tau}(J\varepsilon\varphi) + \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}\left[cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\gamma^\beta}\right] \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi.$$

Умножая на $\frac{c}{\varepsilon}$ и вспоминая определения операторов, преобразуем последнее равенство к виду

$$\left.\frac{1}{c}\frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau}\right|_{\tau=\xi} = -c\left[D_*\varphi + B\Lambda\varphi\right]\big|_{\Gamma^\xi}. \tag{2.23}$$

Применим к обеим частям (2.23) оператор Λ^ξ и запишем результат в виде:

$$\Lambda^\xi\left[\left.\frac{1}{c}\frac{\partial^2 p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi\partial\tau}\right|_{\tau=\xi}\right] =$$

$$= -\left\{\Lambda^\xi\left[(c\,D_*\varphi)|_{\Gamma^\xi}\right] + \Lambda^\xi\left[(cB\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\xi}\right]\right\} =$$

$$= -\left[\Lambda(cD_*\varphi) + \Lambda(cB\Lambda\varphi)\right]\big|_{\Gamma^\xi}. \tag{2.24}$$

(iv) Варьируя ξ, нетрудно показать, что производная $\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}$ (как функция от (γ,τ) при $\tau<\xi$) удовлетворяет тому же уравнению, что и $p(\,\cdot\,;\xi)$:

$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi,$$

причем

$$\left.\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Поэтому, в силу определения оператора Λ^ξ имеем:

$$\Lambda^\xi\left[\left.\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right)\right|_{\Gamma^\xi}\right] = \frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi. \tag{2.25}$$

Вспоминая соотношение $\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}$ и сопоставляя (2.25) с (2.24), получаем

$$\left.\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right|_{\Gamma^\xi} = -\left[\Lambda(cD_*\varphi) + \Lambda(cB\Lambda\varphi)\right]\big|_{\Gamma^\xi}. \tag{2.26}$$

(v) Применяя оператор D к функции $\Lambda\varphi$ и вычисляя значения на Γ^ξ имеем:

$$
\begin{aligned}
(D\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\xi} &= \left.\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\Lambda\varphi\right)\right|_{\tau=\xi} = \\
&= \frac{1}{c}\lim_{\delta\to+0}\frac{\Lambda^\xi[\varphi|_{\Gamma^\xi}] - \Lambda^{\xi-\delta}[\varphi|_{\Gamma^{\xi-\delta}}]}{\delta} = \\
&= \frac{1}{c}\lim_{\delta\to+0}\frac{p(\,\cdot\,;\xi)|_{\tau=\xi} - p(\,\cdot\,;\xi-\delta)|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta} = \\
&= \frac{1}{c}\left[\lim_{\delta\to+0}\frac{p(\,\cdot\,;\xi)|_{\tau=\xi} - p(\,\cdot\,;\xi)|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta} + \right.\\
&+ \left.\lim_{\delta\to+0}\frac{p(\,\cdot\,;\xi)|_{\tau=\xi-\delta} - p(\,\cdot\,;\xi-\delta)|_{\tau=\xi-\delta}}{\delta}\right] = \\
&= \frac{1}{c}\left.\left[\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\tau} + \frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right]\right|_{\tau=\xi} = \varphi|_{\tau=\xi} + \left.\frac{1}{c}\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right|_{\tau=\xi},
\end{aligned}
$$

откуда

$$
D\Lambda\varphi = \varphi + \left.\frac{1}{c}\frac{\partial p(\,\cdot\,;\xi)}{\partial\xi}\right|_{\tau=\xi}. \tag{2.27}
$$

Деля в (2.26) на c и сопоставляя с (2.27), получаем окончательно

$$
\begin{aligned}
D\Lambda\varphi - \varphi &= -\left[\frac{1}{c}\Lambda(cD_*\varphi) + \frac{1}{c}\Lambda(cB\Lambda\varphi)\right] = \\
&= -\left[\Lambda_* D_*\varphi + \Lambda_* B\Lambda\varphi\right] \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi,
\end{aligned}
$$

что равносильно (2.14) ввиду произвольности ξ. Теорема доказана.

Примечательно следующее. Действуя по той же схеме, нетрудно получить прямой аналог уравнения (2.14) в размерности 2. В случае круга $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ тривиальные преобразования переводят этот аналог в уравнение Риккати для отображения "Dirichlet–to–Neumann", известное в импедансной томографии и лежащее в основе одного из ее методов (т.н. Layer Stripping Method; см. [8]). В смысле сказанного уравнение (2.14) обобщает уравнение LSM.

2.5. Параболическое уравнение. Ниже нам встретится следующая задача: найти функцию $\varphi = \varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$
(\mathbf{1} - \Lambda D)\varphi = \psi \quad \text{в} \quad \Omega^T \tag{2.28}
$$

с известным ψ и условию

$$\varphi|_{\Gamma^T} = 0. \tag{2.29}$$

Здесь мы обсудим вопрос об ее разрешимости.

(i) Преобразуем задачу. Обозначим $\eta := -\Lambda\varphi$; из определения оператора D и равенства

$$(\Lambda\varphi)|_{\Gamma^T} = \Lambda^T \left[\varphi|_{\Gamma^T}\right] =< \text{см. } (2.29) >= 0,$$

имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - c\Lambda^{-1}\right)\eta = c\psi \quad \text{в} \quad \Omega^T, \tag{2.30}$$

$$\eta|_{\Gamma^T} = 0. \tag{2.31}$$

Далее, определим гладкую в $\overline{\Omega^T}$ функцию

$$\alpha = \alpha(\gamma,\tau) := \left(\frac{J\varepsilon}{J_0 c}\right)^{-1/2}(\gamma,\tau)$$

и введем операторы $K^\tau : L_2(\Gamma) \to L_{2,\varepsilon/c}(\Gamma^\tau)$,

$$\left(K^\tau a\right)(\gamma,\tau) := \alpha(\gamma,\tau)a(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma \quad (0 \le \tau \le T).$$

Нетрудно проверить, что, по выбору функции α, операторы K^τ унитарны и сохраняют гладкость: $K^\tau H^s(\Gamma) = H^s(\Gamma^\tau)$, $s \in \mathbf{R}$. Функцию

$$\rho(\gamma;\tau) := \left[\left(K^\tau\right)^{-1}\left(\eta|_{\Gamma^\tau}\right)\right](\gamma)$$

рассмотрим как $L_2(\Gamma)$-значную функцию переменной $\tau \in [0,T]$. С использованием (2.30), (2.31) проверяется, что ρ есть (формальное) решение задачи:

$$\frac{d\rho}{d\tau} - A(\tau)\rho = w, \quad \tau \in (0,T); \tag{2.32}$$

$$\rho|_{\tau=T} = 0, \tag{2.33}$$

с оператором $A(\tau)$:

$$A(\tau)a := (K^\tau)^{-1}\left[c(\cdot,\tau)(\Lambda^\tau)^{-1}\right]K^\tau a - \left(\frac{\partial \ln\alpha}{\partial\tau}\right)a$$

и правой частью

$$w(\tau) := (K^\tau)^{-1}[(c\psi)|_{\Gamma^\tau}].$$

(ii) Из положительности Λ^τ следует, что при всех $\tau > 0$ оператор $c(\cdot, \tau)(\Lambda^\tau)^{-1}$ положительно определен в $L_{2,\varepsilon/c}(\Gamma^\tau)$ на $H^1(\Gamma^\tau)$. По унитарности K^τ заключаем: при каждом $\tau \in (0, T]$ оператор $A(\tau) : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma), \mathrm{Dom}\, A(\tau) = H^1(\Gamma)$ самосопряжен и ограничен снизу, причем из (2.7) легко извлекается оценка

$$(A(\tau)\chi, \chi)_{L_2(\Gamma)} \geq \sigma(\tau)\|\chi\|^2_{L_2(\Gamma)}, \tag{2.34}$$

где

$$\sigma(\tau) := \frac{c_1}{\tau} - c_2; \quad c_1 := \frac{1}{A}\min_{\Omega^T} c, \quad c_2 := \max_{\Omega^T}\left|\frac{\partial \ln \alpha}{\partial \tau}\right|,$$

(постоянная c_1 положительна).

Помимо того, с помощью (2.5) нетрудно получить оценки

$$\begin{aligned} &|(A(\tau)\chi, \theta)_{L_2(\Gamma)}| \leq d^*(\delta)\|\chi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\theta\|_{H^{1/2}(\Gamma)}; \\ &(A(\tau)\chi, \chi)_{L_2(\Gamma)} + \lambda\|\chi\|^2_{L_2(\Gamma)} \geq d_*(\delta)\|\chi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

с $\lambda \in \mathbf{R}$, $d_*(\delta) > 0$, равномерные по $\tau \in [\delta, T]$ $(\delta > 0)$.

(iii) Введем оснащение (тройку) $H^{-1/2}(\Gamma) \supset L_2(\Gamma) \supset H^{1/2}(\Gamma)$; как следует из (2.35), на любом интервале $[\delta, T]$ $(\delta > 0)$ форма $(A(\tau)\chi, \theta)_{L_2(\Gamma)}$ непрерывна и коэрцитивна в соответствующих нормах. В силу сказанного, уравнение (2.32) вписывается в теорию абстрактных параболических уравнений (см. [6]) и мы имеем возможность воспользоваться ее результатами: для задачи (2.32), (2.33) с правой частью $w \in L_2([\delta, T]; H^{-1/2}(\Gamma))$ гарантированы существование и единственность (обощенного) решения $\rho \in L_2([\delta, T]; H^{1/2}(\Gamma)) \cap C([\delta, T]; L_2(\Gamma))$. Нетрудно также показать, что при $w \in L_2([\delta, T]; L_2(\Gamma))$ решение приобретает дополнительную гладкость: $\rho \in L_2([\delta, T]; H^1(\Gamma))$.

(iv) Поведение $\rho(\tau)$ при $\tau \to 0$ требует дополнительных рассмотрений. Умножая (2.32) на ρ имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\rho(\cdot;\tau)\|^2_{L_2(\Gamma)} - (A(\tau)\rho(\cdot;\tau), \rho(\cdot;\tau))_{L_2(\Gamma)} = (w(\tau), \rho(\cdot;\tau))_{L_2(\Gamma)};$$

интегрируя по $\tau \in [s, \delta]$, $(0 < s < \delta \leq T)$, получаем:

$$\|\rho\|^2\Big|_{\tau=s}^{\tau=\delta} - 2\int_s^\delta (A\rho, \rho)d\tau = 2\int_s^\delta (w, \rho)d\tau.$$

Пусть δ выбрано так, что $\sigma(\tau) > 0$ при $\tau \in (0, \delta)$; с учетом монотонности $\sigma(\tau)$ и оценки (2.34) имеем:

$$\|\rho\|^2\Big|_{\tau=s}^{\tau=\delta} - 2\sigma(\delta)\int_s^\delta \|\rho\|^2 d\tau \geq 2\int_s^\delta (w, \rho) d\tau \geq$$

$$\geq -2\left(\int_s^\delta \|w\|^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^\delta \|\rho\|^2 d\tau\right)^{1/2} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\sigma(\delta)}\int_s^\delta \|w\|^2 d\tau - \sigma(\delta)\int_s^\delta \|\rho\|^2 d\tau,$$

что приводит к неравенству

$$\|\rho(\,\cdot\,;s)\|^2 + \sigma(\delta)\int_s^\delta \|\rho(\cdot;\tau)\|^2 d\tau \leq \|\rho(\,\cdot\,;\delta)\|^2 + \tfrac{1}{\sigma(\delta)}\int_s^\delta \|w(\cdot;\tau)\|^2 d\tau. \quad (2.36)$$

Отсюда получаем неравенство:

$$\int_s^\delta \|\rho(\,\cdot\,;\tau)\|^2 d\tau \leq \tfrac{1}{\sigma(\delta)}\left[\|\rho(\,\cdot\,;\delta)\|^2 + \tfrac{1}{\sigma(\delta)}\int_s^\delta \|w(\,\cdot\,;\tau)\|^2 d\tau\right];$$

устремляя $s \to 0$ заключаем, что при $w \in L_2([0,T]; L_2(\Gamma))$ решение ρ попадает в класс $L_2([0,T]; L_2(\Gamma))$.

(v) Установим еще одно свойство решения ρ. Пусть правая часть (2.32) аннулируется вблизи конца $\tau = 0 : \operatorname{supp} w \subset [\delta, T]$; в этом случае из (2.36) имеем неравенство:

$$\|\rho(\,\cdot\,, s'')\|^2 - \|\rho(\,\cdot\,, s')\|^2 \geq \sigma(s'')\int_{s'}^{s''} \|\rho(\,\cdot\,, \tau)\|^2 d\tau$$

для $0 < s' < s'' \leq \delta$. Из него легко следует оценка:

$$\|\rho(\,\cdot\,; s')\|^2 \leq \|\rho(\,\cdot\,; s'')\|^2 e^{-\int_{s'}^{s''}\sigma(\tau)d\tau} \leq$$
$$\leq \|\rho(\,\cdot\,; s'')\|^2 e^{-\sigma(s'')(s''-s')}.$$

Полагая $s'' = 2s' = s$ имеем:

$$\|\rho(\,\cdot\,; s/2)\|^2 \leq \|\rho(\,\cdot\,; s)\|^2 e^{-(c_1/s - c_2)s/2};$$

устремляя $s \to 0$, получаем

$$\|\rho(\,\cdot\,;0)\|^2 \leq \|\rho(\,\cdot\,;0)\|^2 e^{-c_1/2}$$

откуда

$$\rho(\,\cdot\,;\tau) \to 0, \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \quad \text{в} \quad L_2(\Gamma). \tag{2.37}$$

(vi) Располагая определением решения ρ (см. [6]) и его свойствами, установленными в (iii)–(v) можно определить и описать решение исходной задачи.

Пусть в (2.28) $\psi \in L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$; решением задачи (2.28), (2.29) мы назовем функцию φ, квадратично суммируемую в любой подобласти $\Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$, $(0 < \delta < T)$ и удовлетворяющую тождеству

$$(\varphi, [\mathbf{1} - \Lambda_* D_*]\chi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} = (\psi, \chi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \tag{2.38}$$

для любой функции $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega^T})$, аннулирующейся вблизи Γ. Такое решение существует, единственно и может быть найдено по решению задачи (2.32), (2.33) по схеме $\rho \to \eta \xrightarrow{\Lambda^{-1}} \varphi$; оно обладает следующими свойствами:

из рассмотрений (iii) имеем:

$$\int\limits_\delta^T d\tau \|(\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\tau}\|^2_{H^1(\Gamma^\tau)} < \infty \tag{2.39}$$

при любом $\delta > 0$;

из (iv) заключаем: $\Lambda\varphi \in L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$; если $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$ то, согласно (2.37) имеем

$$\|(\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\tau}\|_{L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\tau)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{2.40}$$

3. Проектирование соленоидальных полей. Диагонализация

Рассматриваются проекторы G^ξ на подпространства ε-соленоидальных векторных полей, локализованных в подобластях Ω^ξ. Строится преобразование, диагонализующее оператор $\int \xi dG^\xi$ в смысле Спектральной Теоремы.

3.1. Пространство $\mathcal{H}$. Как и выше, фиксировано $T < T_{\rm reg}$; через $\dot{\mathbf{C}}^\infty(\overline{\Omega^T})$ мы обозначаем множество гладких в $\overline{\Omega^T}$ векторных полей, аннулирующихся вблизи Γ^T.

Рассмотрим гильбертово пространство ε-соленоидальных полей
$$\mathcal{H} := \operatorname{clos}_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}\{\mathbf{y} \in \dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T) \mid \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{y} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^T\}$$
(см. [5]) и отметим следующие легко проверяемые свойства и факты:

(i) для гладкого $\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha + y^0\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu$ ε – соленоидальность равносильна соотношению
$$D_*(cy^0) = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon\mathbf{y}_\theta; \tag{3.1}$$

(ii) поле $\mathbf{y} \in \mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, носитель которого содержится в $\Omega^T \cup \Gamma$ (так что $\operatorname{supp}\mathbf{y}$ отделен от Γ^T) является элементом $\mathcal{H}$ если и только если $\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{y} = 0$ в Ω^T в смысле теории распределений;

(iii) пусть $\xi < T$; если поле $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu$ является гладким в $\overline{\Omega^\xi}$ и аннулируется в $\Omega^T \setminus \overline{\Omega^\xi}$ (при этом допускается разрыв $\mathbf{y}$ на Γ^ξ) и, кроме того, $\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{y} = 0$ в Ω^ξ, то включение $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ равносильно условию
$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{y} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma^\xi \tag{3.2}$$
(т.е. продольная составляющая $\mathbf{y}_\nu$ должна быть непрерывна при переходе через Γ^ξ).

3.2. Подпространства и проекторы. В пространстве $\mathcal{H}$ выделено семейство подпространств
$$\mathcal{H}^\xi := \left\{\mathbf{y} \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp}\mathbf{y} \subset \overline{\Omega^\xi}\right\}; \quad 0 \le \xi \le T,$$
$(\mathcal{H}^0 = 0, \mathcal{H}^T = \mathcal{H})$; пусть G^ξ есть (ортогональный) проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$. Следующее предложение описывает, как действует G^ξ.

Лемма 3.1. *Для гладких $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ справедливо представление*
$$G^\xi\mathbf{y} = \begin{cases} \mathbf{y} - \nabla p(\,\cdot\,;\xi) & \text{в} \quad \Omega^\xi; \\ \mathbf{0} & \text{в} \quad \Omega^T\setminus\Omega^\xi, \end{cases} \tag{3.3}$$
в котором $p = p(x;\xi)$ есть решение задачи
$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{3.4}$$
$$\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla p = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{y} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi; \tag{3.5}$$
$$p = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}^\xi$ есть поле в Ω^T, определяемое правой частью (3.3); обозначим $\mathbf{y}^\xi_\perp := \mathbf{y} - \mathbf{y}^\xi$, так что

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^\xi + \mathbf{y}^\xi_\perp. \tag{3.7}$$

Согласно (3.4) имеем $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y}^\xi = 0$ в Ω^ξ; из (3.5) следует $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y}^\xi = 0$ на $\Gamma^{\xi-0}$. Отсюда по свойству (iii), п. 3.1 заключаем, что $\mathbf{y}^\xi \in \mathcal{H}^\xi$.

Для любого $\mathbf{w} \in \mathcal{H}^\xi \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ имеем

$$(\mathbf{y}^\xi_\perp, \mathbf{w})_\mathcal{H} = \int\limits_{\Omega^\xi} dx\, \varepsilon \nabla p(\,\cdot\,;\xi) \cdot \mathbf{w} = - \int\limits_{\Omega^\xi} dx\, p(\,\cdot\,;\xi) \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{w} = 0$$

(граничные члены исчезают в силу $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}|_{\Gamma^\xi} = 0$ (см. (3.2)) и условия (3.6)); следовательно, по плотности гладких $\mathbf{w}$ в $\mathcal{H}^\xi$ получаем $\mathbf{y}^\xi_\perp \in \mathcal{H}^T \ominus \mathcal{H}^\xi$. Таким образом, представление. (3.7) есть ортогональное разложение. Лемма доказана.

Важное обстоятельство состоит в том, что проектирование $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^\xi$ приводит к появлению разрыва на поверхности Γ^ξ: для гладкого $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu \in \mathcal{H}$ имеем:

$$\begin{aligned}(G^\xi \mathbf{y})\big|_{\Gamma^{\xi-0}} - (G^\xi \mathbf{y})\big|_{\Gamma^{\xi+0}} &=< \text{см. } (3.3) >= [\mathbf{y} - \nabla p(\,\cdot\,;\xi)]|_{\Gamma^\xi} = \\ &= \{[\mathbf{y} - \nabla p(\,\cdot\,;\xi)]_\theta + [\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{y} - \nabla p(\,\cdot\,;\xi))]\,\boldsymbol{\nu}\}|_{\Gamma^\xi} = \\ &=< \text{см. } (3.5) >= [\mathbf{y}_\theta - (\nabla p(\,\cdot\,;\xi))_\theta]|_{\Gamma^\xi}\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Условие (3.5) записывается в виде равенства

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} =< \text{см. } (1.5) >= c y^0 \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi,$$

так что по определению оператора Λ^ξ имеем:

$$p(\,\cdot\,;\xi)|_{\Gamma^\xi} = \Lambda^\xi \left[(c y^0)|_{\Gamma^\xi}\right]; \tag{3.9}$$

для входящего в (3.8) градиента имеем:

$$(\nabla p(\,\cdot\,;\xi))_\theta =< \text{см. } (1.7) >= \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \gamma^\beta} p(\,\cdot\,;\xi)\right] \mathbf{r}_\alpha. \tag{3.10}$$

С учетом (3.9), (3.10) соотношение (3.8) приводит к соотношению на поверхности разрыва:

$$(G^\xi \mathbf{y})\big|_{\Gamma^{\xi-0}} = \mathbf{y}_\theta - \left\{g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \gamma^\beta} \Lambda^\xi \left[(c y^0)|_{\Gamma^\xi}\right]\right\} \mathbf{r}_\alpha. \tag{3.11}$$

Множество проекторов $\{G^\xi\}$, $0 \le \xi \le T$ можно рассматривать, как спектральное семейство в $\mathcal{H}$; как таковое, оно определяет самосопряженный оператор

$$\widehat{\sigma} := \int_0^T \xi dG^\xi.$$

Последующие рассмотрения преследуют главную цель работы: построить преобразование, диагонализующее $\widehat{\sigma}$, т.е. переводящее его в оператор умножения на независимую переменную.

3.3. Преобразование M. Напомним, что $\dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T)$ есть класс гладких полей, аннулирующихся вблизи Γ^T; множество $\mathcal{H} \cap \dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T)$ плотно в $\mathcal{H}$.

Введем преобразование $M : \mathcal{H} \to \mathcal{L}_\theta$, $\operatorname{Dom} M = \mathcal{H} \cap \dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T)$, действующее послойно по правилу

$$(M\mathbf{y})|_{\Gamma^\xi} := (G^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^{\xi-0}}, \quad 0 \le \xi \le T;$$

отметим включение $\operatorname{Ran} M \subset \dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T)$. Определения операторов (см. (i), (v) п. 2.3) и соотношение (3.11) приводят к представлению в Ω^T:

$$M\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta \Lambda(cy^0). \tag{3.12}$$

Следующее предложение – один из основных результатов данной работы.

Теорема 3.1. *Преобразование M допускает расширение по непрерывности до унитарного оператора из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}_\theta$.*

Доказательство.

(i) Установим изометричность M. Для двух произвольных полей

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}_\theta + (cy^0)\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_\theta + w^0\mathbf{r}_0 = \mathbf{w}_\theta + (cw^0)\boldsymbol{\nu}$$

из $\operatorname{Dom} M$ имеем:

$$(M\mathbf{y}, M\mathbf{w})_{\mathcal{L}_\theta} =< \text{см. } (3.12) >= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} -$$

$$-(\mathbf{y}_\theta, \nabla_\theta\Lambda(cw^0))_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} - (\nabla_\theta\Lambda(cy^0), \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+(\nabla_\theta\Lambda(cy^0), \nabla_\theta\Lambda(cw^0))_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =< \text{см. } (2.12) >=$$

$$= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{y}_\theta, \Lambda(cw^0)\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+ \left(\Lambda(cy^0), \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{w}_\theta\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + \left(\Lambda_* B\Lambda(cy^0), cw^0\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=<\text{ см. (3.1) }>= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (D_*(cy^0), \Lambda(cw^0))_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+(\Lambda(cy^0), D_*(cw^0))_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (\Lambda_* B\Lambda(cy^0), cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}. \tag{3.13}$$

Из включения $w \in \dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega^T)$ следует $(cw^0)|_{\Gamma^T} = 0$; согласно (2.10) имеем $\left[\Lambda(cy^0)\right]\big|_\Gamma = 0$; поэтому

$$(\Lambda(cy^0), D_*(cw^0))_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=<\text{ см. (2.13) }>= (D\Lambda(cy^0), cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}; \tag{3.14}$$

кроме того, имеем равенство:

$$(D_*(cy^0), \Lambda(cw^0))_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =<\text{ см. (2.12) }>=$$

$$= (\Lambda_* D_*(cy^0), cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}. \tag{3.15}$$

Используя (3.14), (3.15) в (3.13), получаем:

$$(M\mathbf{y}, M\mathbf{w})_{\mathcal{L}_\theta} = (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + ([\Lambda_* D_* + D\Lambda +$$

$$+\Lambda_* B\Lambda](cy^0), cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=<\text{ см. (2.14)! }>= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (cy^0, cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} = (\mathbf{y}, \mathbf{w})_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно, M есть изометрия.

(ii) Покажем, что $\operatorname{Ran} M$ плотен в $\mathcal{L}_\theta$. По плотности множества гладких финитных полей в $\mathcal{L}_\theta$ для этого достаточно установить включение $\operatorname{Ran} M \supset \mathbf{C}_0^\infty(\Omega^T) \cap \mathcal{L}_\theta$, т.е. доказать разрешимость уравнения $M\mathbf{y} = \mathbf{v}$ с правой частью из этого множества.

Выберем произвольное поперечное поле $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega^T) \cap \mathcal{L}_\theta$; по полю найдем функцию φ, решив задачу

$$(\mathbf{1} - D\Lambda)\varphi = \Lambda_* \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v} \quad \text{в} \quad \Omega^T; \tag{3.16}$$

$$\varphi|_{\Gamma^T} = 0 \tag{3.17}$$

с гладкой в $\overline{\Omega^T}$ правой частью. По результатам п. 2.5 о ее решении можно сказать следующее: функция φ квадратично суммируема в *любой подобласти* $\Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$, $(0 < \delta < T)$; в силу (2.39) векторное поле $\nabla_\theta \Lambda\varphi$ квадратично суммируемо в $\Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$.

По φ построим поле $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0 \mathbf{r}_0$, положив $\mathbf{y}_\theta := \mathbf{v} + \nabla_\theta \Lambda\varphi$, $y^0 := \frac{1}{c}\varphi$. Оно суммируемо с квадратом в любой подобласти $\Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$ и вместе с полем $\mathbf{v}$ аннулируется вблизи Γ^T. Проверим равенство $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y} = 0$ в Ω^T. Для произвольного $\eta \in C_0^\infty(\Omega^T)$ имеем:

$$-\int_{\Omega^T} dx\, (\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y})\eta = (\mathbf{y}, \nabla \eta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$= \left(\mathbf{v} + \nabla_\theta \Lambda\varphi + \left(\frac{1}{c}\varphi\right)\mathbf{r}_0, \nabla_\theta \eta + \left(\frac{1}{c} D\eta\right)\mathbf{r}_0\right)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=< \text{см. } (2.12) >= -\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v}, \eta\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+(\varphi, \Lambda_* B\eta)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (\varphi, D\eta)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v}, \eta\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (\varphi, [\Lambda_* B\Lambda + D\Lambda]\Lambda^{-1}\eta)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=< \text{см. } (2.14) >= -\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v}, \eta\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+(\varphi, [\mathbf{1} - \Lambda_* D_*]\Lambda^{-1}\eta)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =$$

$$=< \text{см. } (2.12) >= -\left(\Lambda_* \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v}, \chi\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} +$$

$$+(\varphi, [\mathbf{1} - \Lambda_* D_*]\chi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} =< \text{см. } (2.38),\ (3.16) >= 0,$$

где $\chi := \Lambda^{-1}\eta \in C_0^\infty(\Omega^T)$, откуда следует проверяемое равенство.

Установим, что $\mathbf{y}$ квадратично суммируемо во *всей* Ω^T. Выберем и фиксируем $\delta > 0$ так, чтобы $\operatorname{supp} \mathbf{v} \subset \Omega^T \setminus \overline{\Omega^\delta}$. Согласно (3.16) имеем:

$$(\mathbf{1} - D\Lambda)\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\delta,$$

откуда

$$\mathbf{y} = \nabla_\theta \Lambda\varphi + \left(\frac{1}{c} D\Lambda\varphi\right)\mathbf{r}_0 =< \text{см. } (1.7) >= \nabla p \quad \text{в} \quad \Omega^\delta,$$

где $p := \Lambda\varphi$. Поскольку $\mathbf{y}$ ε-соленоидально в Ω^T, имеем:

$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\delta; \tag{3.18}$$

значит, функция p гладкая в Ω^δ. Из (2.40) следует

$$\left\| p|_{\Gamma^\tau} \right\|_{L_2(\Gamma^\tau)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0; \tag{3.19}$$

по гладкости p имеем

$$p\big|_{\Gamma^{\delta/2}} = f \in C^\infty(\Gamma^{\delta/2}). \tag{3.20}$$

Для решения эллиптического уравнения поведение (3.19) равносильно граничному условию

$$p\big|_\Gamma = 0; \tag{3.21}$$

из (3.18), (3.20) и (3.21) следует: $p \in C^\infty(\overline{\Omega^{\delta/2}})$; поэтому $\mathbf{y}\big|_{\Omega^{\delta/2}} = \nabla p \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^{\delta/2})$. Значит, $\mathbf{y} \in \mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$.

Итак, поле $\mathbf{y}$ квадратично суммируемо и ε-соленоидально в Ω^T; оно аннулируется вблизи Γ^T. По свойству (ii) п. 3.1 заключаем: $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$; при этом, по построению поля $\mathbf{y}$ имеем:

$$M\mathbf{y} =< \text{см. } (3.12) >= \mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta\Lambda(cy^0) = (\mathbf{v} + \nabla_\theta\Lambda\varphi) - \nabla_\theta\Lambda\varphi = \mathbf{v}.$$

Таким образом, установлена плотность $\operatorname{Ran} M$ в $\mathcal{L}_\theta$. Теорема доказана.

За расширением преобразования (3.12) на все $\mathcal{H}$ мы сохраняем символ M. Отметим, что в работе [2] аргументы, приведенные для доказательства сюръективности M недостаточны; здесь, в части (ii) доказательства этот пробел устранен.

Продолжим изучение свойств M. В пространстве поперечных полей $\mathcal{L}_\theta$ рассмотрим семейство подпространств

$$\mathcal{L}_\theta^\xi := \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{L}_\theta \mid \operatorname{supp}\mathbf{v} \subset \overline{\Omega^\xi} \right\}, \quad 0 \le \xi \le T$$

($\mathcal{L}_\theta^0 = \{0\}$, $\mathcal{L}_\theta^T = \mathcal{L}_\theta$). Действие проекторов X^ξ в $\mathcal{L}_\theta$ на $\mathcal{L}_\theta^\xi$ сводится к срезке на подобласти Ω^ξ:

$$X^\xi\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{в} \quad \Omega^\xi; \\ \mathbf{0} & \text{в} \quad \Omega^T \setminus \Omega^\xi. \end{cases}$$

Как легко видеть, оператор $E : \mathcal{L}_\theta \to \mathcal{L}_\theta$,

$$E := \int\limits_0^T \xi \, dX^\xi$$

действует по правилу

$$(E\mathbf{v})(x) = \tau(x)\mathbf{v}(x), \quad x \in \Omega^T,$$

т.е. умножает поля на эйконал. Напомним, что оператор $\widehat{\sigma}$ был определен в конце п. 3.2

Лемма. *Справедливы соотношения*

$$MG^\xi = X^\xi M, \quad 0 \le \xi \le T; \quad M\widehat{\sigma} = EM. \tag{3.22}$$

Доказательство. Фиксируем $\xi > 0$ и выберем гладкое $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$; отметим соотношение

$$G^\xi G^\tau = G^\tau G^\xi = G^{min\{\xi,\tau\}}.$$

При $\tau < \xi$ имеем равенства

$$(MG^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^\tau} = (G^\tau G^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^{\tau-0}} = (G^\tau \mathbf{y})|_{\Gamma^{\tau-0}} = (M\mathbf{y})|_{\Gamma^\tau}; \tag{3.23}$$

в случае $\tau > \xi$ имеем:

$$(MG^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^\tau} = (G^\tau G^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^{\tau-0}} = (G^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^{\tau-0}} = \mathbf{0}, \tag{3.24}$$

поскольку $\operatorname{supp} G^\xi \mathbf{y} \subset \overline{\Omega^\xi}$, а Γ^τ находится вне $\overline{\Omega^\xi}$. Сопоставляя (3.23) и (3.24), получаем:

$$MG^\xi \mathbf{y} = \begin{cases} M\mathbf{y} & \text{в } \Omega^\xi; \\ \mathbf{0} & \text{в } \Omega^T \setminus \Omega^\xi; \end{cases} = X^\xi M\mathbf{y},$$

чем доказано первое из соотношений (3.22). Второе соотношение следует из первого. Лемма доказана.

3.4 Преобразование I**.** Преобразование M переводит оператор $\widehat{\sigma}$ в оператор умножения на эйконал. Сейчас мы опишем еще одно преобразование, которое завершает диагонализацию: композиция $U = IM$ переведет $\widehat{\sigma}$ в оператор умножения на независимую переменную.

Рассмотрим семейство пространств

$$\mathcal{T}(\Gamma^\xi) := \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}_2(\Gamma^\xi) \mid \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma^\xi\}, \quad 0 \le \xi \le T$$

($\mathcal{T}(\Gamma^0) = \mathcal{T}(\Gamma)$), образованных полями, касательными к поверхностям Γ^ξ. В каждом из них определено (поточечное) умножение на гладкие скалярные функции.

Введем пространство

$$\mathcal{F} := L_2\left([0,T];\, \mathcal{T}(\Gamma)\right) = \oplus \int\limits_0^T \mathcal{T}(\Gamma) d\tau$$

$\mathcal{T}(\Gamma)$-значных функций переменной $\tau \in [0,T]$ со скалярным произведением

$$(a,b)_{\mathcal{F}} = \int\limits_0^T d\tau (a(\tau), b(\tau))_{\mathcal{T}(\Gamma)} = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_\Gamma d\Gamma a(\gamma\,;\tau) b(\gamma\,;\tau).$$

Выделим семейство подпространств

$$\mathcal{F}^\xi := \{a \in \mathcal{F} \mid \operatorname{supp} a \subset [0,\xi]\}, \quad 0 \le \xi \le T$$

($\mathcal{F}^0 = \{0\}, \mathcal{F}^T = \mathcal{F}$). Через $\mathcal{X}^\xi$ мы обозначаем проектор в $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^\xi$; он действует как срезка:

$$\left(\mathcal{X}^\xi a\right)(\tau) = \begin{cases} a(\tau) & \tau \in [0,\xi]; \\ 0 & \tau \in (\xi, T]. \end{cases}$$

Семейство $\{\mathcal{X}^\xi\}$ определяет оператор $\widehat{\tau} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$,

$$\widehat{\tau} := \int\limits_0^T \xi d\mathcal{X}^\xi,$$

действие которого, очевидно, сводится к умножению на независимую переменную:

$$(\widehat{\tau} a)(\tau) = \tau a(\tau), \qquad 0 \le \tau \le T.$$

Фиксируем ξ и рассмотрим отображение $\pi : \mathcal{T}(\Gamma^\xi) \to \mathcal{T}(\Gamma)$, действующее по правилу

$$(\pi \mathbf{y})(\gamma) := [\mathbf{y}(\gamma, \xi)]^\wedge, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Из свойств параллельного переноса (см. п. 1.4) следует, что π есть изоморфизм.

Обозначим

$$\varkappa = \varkappa(\gamma\,; \tau) := \frac{c(\gamma,\tau)}{c(\gamma,0)} \left(\frac{J(\gamma,\tau)}{J(\gamma,0)}\right)^{1/2} [c(\gamma,\tau)\varepsilon(\gamma,\tau)]^{1/2};$$

рассмотрим преобразование $I : \mathcal{L}_\theta \to \mathcal{F}$,

$$(I\mathbf{v})(\tau) := \varkappa(\,\cdot\,;\tau)\pi\,[\mathbf{v}|_{\Gamma^\tau}]\,, \qquad \tau \in [0,T].$$

Лемма 3.2. *Преобразование I есть унитарный оператор; выполнены соотношения*

$$IX^\xi = \mathcal{X}^\xi I, \quad 0 \le \xi \le T; \quad I\,E = \widehat{\tau} I. \tag{3.25}$$

Доказательство. Проверим изметричность I:

$$(I\mathbf{v}', I\mathbf{v}'')_{\mathcal{F}} = \int_0^T d\tau \int_\Gamma d\Gamma\, \varkappa^2(\gamma,\tau)[\mathbf{v}'(\gamma,\tau)]^\wedge \cdot [\mathbf{v}''(\gamma,\tau)]^\wedge =$$

$$=<\text{см. (1.15)}>= \int_0^T d\tau \int_\Gamma d\Gamma\, \varkappa^2(\gamma,\tau)\frac{c^2(\gamma,0)}{c^2(\gamma,\tau)}\mathbf{v}'(\gamma,\tau)\cdot\mathbf{v}''(\gamma,\tau) =$$

$$= \int_0^T d\tau \int_\Gamma d\Gamma\, \frac{J}{J_0} c\varepsilon \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'' =<\text{см. (2.1)}>= (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')_{\mathcal{L}_\theta}.$$

Используя обратный параллельный перенос с Γ на Γ^τ, нетрудно построить обратное преобразование I^{-1} на всем $\mathcal{F}$. Значит, I унитарно.

Первое из равенств (3.25) устанавливается простым анализом действия I; второе вытекает из первого. Лемма доказана.

3.5 Диагонализация. Обозначим $U := I\,M$. Следующий результат подводит итог работе.

Теорема 3.2. *Преобразование $U : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ диагонализует оператор $\widehat{\sigma}$:*

$$U\,G^\xi = \mathcal{X}^\xi\, U, \quad 0 \le \xi \le T; \quad U\widehat{\sigma} = \widehat{\tau}\, U.$$

Доказательство. Эти соотношения суть прямые следствия соотношений (3.22) и (3.25). Теорема доказана.

Литература

1. М. Белишев, А. Гласман, *Визуализация волн в динамической системе Максвелла (БЦ-метод).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 49–61.
2. M. Belishev, A. Glasman, *Boundary control and inverse problem for the dynamical Maxwell system: the recovering velocity in regular zone.* Preprint CMLA ENS Cachan, **9814**, March 1998 (http://www.cmla.ens-cachan.fr.).
3. М. Бирман, М. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд. Лен. Гос. Ун-та, Ленинград (1980).
4. Д. Громол, В. Клингенберг, В.Мейер, *Риманова геометрия в целом.* Мир, М. (1971).
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задачи магнитной гидродинамики.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 46–93.
6. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, М. (1971).
7. К. Морен, *Методы гильбертова пространства.* Мир, М. (1965).
8. J. Sylvester, *A convergent layer stripping algorithm for the radially symmetric impedance tomography problem.* — Commun. Partial Differ. Equations. **17**, (1992); **11–12**, 1955–1994.

Belishev M. I., Glasman A. K. On the projecting in the space of solenoidal vector fields.

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ be a bounded domain; let $\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \xi\}, \xi > 0$ be an increasing family of subdomains; let $\varepsilon = \varepsilon(x)$ be a positive function in $\overline{\Omega}$; $\mathcal{H} := \{\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) \mid \int_\Omega dx \varepsilon |\mathbf{y}|^2 < \infty, \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y} = 0 \text{ in } \Omega\}$ be a space of ε-solenoidal vector fields; let $\mathcal{H}^\xi := \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} \mathbf{y} \subset \overline{\Omega^\xi}\}$, $\xi > 0$ be a family of subspaces; let G^ξ be orthogonal projectors in $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}^\xi$. The unitary transform which diagonalizes the family of projectors $\{G^\xi\}$ is constructed: it transfers $\int \xi dG^\xi$ into an operator multiplying by independent variable. An isometry of the transform is proved with the help of the operator Riccati equation for the Neumann–to–Dirichlet map.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 20 ноября 1998 г.