Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

**Ю. А. Неретин**

# ПСЕВДОРИМАНОВЫ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА: ОДНОТИПНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ И ОТКРЫТЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В ГРАССМАНИАНЫ

Рассмотрим вещественную полупростую группу $G$. Пусть $\sigma$ – автоморфизм группы $G$ порядка 2 (т.е. $\sigma^2 = 1$). Через $H$ мы обозначим множество неподвижных точек автоморфизма $\sigma$. Однородные пространства вида $G/H$ называются псевдоримановыми *симметрическими пространствами* (другой термин – аффинные симметрические пространства; ниже мы называем их симметрическими пространствами). Согласно классификации Берже [1] существует 54 серии классических псевдоримановых симметрических пространств и 131 особое пространство.[1] Этот список содержит многие интересные объекты из разных областей математики, в частности, римановы симметрические пространства (включая сферы, пространства Лобачевского, верхнюю полуплоскость Зигеля, грассманианы, матричные шары, области Картана, трубы будующего, квадрики в $\mathbb{C}^n$, симметричесие конуса, пространство модулей поверхностей $K3$), комплексные симметрические пространства (включая пространство $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ всех невырожденных квадрик), полупростые группы[2], многомерные гиперболоиды, пространства корреляций.

Гармонический анализ для многих из перечисленных выше пространств возник весьма давно. Анализ на сфере и плоскости Лобачевского – классический сюжет (от Лежандра до Мелера, П. Функа, Дж. Радона), анализ на полупростых группах изучал-

---

Поддержано грантом РФФИ 98-01-00303 и Российской программой поддержки ведущих научных школ 96-01-96249.

[1]Разумеется классификация проводилась с точностью до накрытий и компонент связности. Симметрическое пространство называется классическим, если группа $G$ является классической (тогда классической является и группа $H$). Число серий в разных версиях списка называется разным, что связано с наличием пространств $\mathrm{O}(n+2,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{O}(2,\mathbb{C})$ (и их вещественных форм). Эти пространства обладают весьма специфическими свойствами и поэтому часто не включаются в серию $\mathrm{O}(n+m,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{O}(m,\mathbb{C})$.

[2]Пусть $P$ – полупростая группа. Тогда группа $G = P \times P$ действует на $P$ домножениями слева и справа, стабилизатор точки $e$ есть $H = P$.

ся И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком, Хариш-Чандрой, а также их многочисленными продолжателями, анализ на римановых симметрических пространствах – Хуа Ло Кеном, С. Г. Гиндикиным и Ф. И. Карпелевичем, С. Хелгасоном и др. Анализ на гиперболоидах исследовался В. Ф. Молчановым. Изучение анализа на произвольных псевдоримановых пространствах началось после работы М. Фленстеда–Йенсена [4] о дискретных сериях (Х. Шлихткруль, Т. Ошима, Секигучи, В. Ф. Молчанов, Е. П. Ван ден Бан, П. Делорм и др.), и сейчас этот сюжет является одним из наиболее обширных и любопытных разделов гармонического анализа.

Цель настоящей работы – сформулировать два простых наблюдения, которые, как ни странно, не были известны[3]. Первое наблюдение – что все 54 серии классических симметрических пространств имеют очень простые однотипные реализации. А именно точкой симметрического пространства является пара дополнительных подпространств $V_1$, $V_2$ в $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}^k$ или $\mathbb{H}^k$ которые удовлетворяют очень простым условиям (изотропность, ортогональность или наличие фиксированного оператора, который переставляет $V_1$ и $V_2$). Это (как мне кажется) приятно упрощает картину, кроме того появляется возможность работать с произвольными *классическими* симметрическими пространствами однотипными элементарными методами. Несколько утверждений такого рода приводятся в §3. В частности для всех симметрических пространств мы вводим простые матричные координаты (эта конструкция обобщает матричные шары Картана [2]).

Второе наблюдение – существование открытого вложения классического симметрического пространства в грассманиан. Этот факт был известен во многих частных случаях, он много обсуждался с геометрической точки зрения и довольно интенсивно использовался в гармоническом анализе (см., например, работы Хуа Ло Кена [6], Макаревича [7], а также статью Гиндикина [5] и содержащуюся в ней библиографию; я извиняюсь перед всеми авторами, которых я здесь не процитировал). Мы показываем, что такое вложение есть для всех[4] классических симметрических пространств, и более того, в нашей модели оно непосредствен-

[3] Я думаю, что причиной является длина списка и то, что излагаемая ниже конструкция вроде бы не описывается хорошо на языке систем корней.

[4] с точностью до накрытий, центра и компонент связности

но очевидно. Прямым следствием из этого наблюдения является следующий факт (точную формулировку см. в §3): представление группы $G$ в $L^2(G/H)$ есть ограничение с некоторого представления некоторой большей группы $G^*$.

## §0. Обозначения

Здесь мы для избежания двусмысленностей фиксируем терминологию и обозначения.

**0.0.** Символ $\mathbb{K}$ будет обозначать $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Под *линейным пространством над* $\mathbb{H}$ мы будем понимать правый модуль. Удобно считать, что элемент $\mathbb{H}^n$ есть вектор-столбец $v$, линейные операторы мы будем писать в виде $v \mapsto Av$ где $A$ – матрица, а умножение на скаляр – в виде $v \mapsto v\lambda$.

*Антилинейным оператором* в линейном пространстве $V$ над $\mathbb{C}$ называется отображение $V \mapsto V$, удовлетворяющее условиям

$$A(v+w) = Av + Aw \qquad A\lambda v = \overline{\lambda} Av, \quad \text{где} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Замечание.** Антилинейных отображений в линейных пространствах над $\mathbb{H}$ не бывает. Действительно, пусть $A$ антилинейно. Тогда

$$A(v\lambda\mu) = A((v\lambda)\mu) = (A(v\lambda))\overline{\mu} = (Av)\overline{\lambda}\overline{\mu},$$
$$A(v\lambda\mu) = A(v(\lambda\mu)) = (Av)\overline{\lambda\mu} = (Av)\overline{\mu}\overline{\lambda}. \tag{1}$$

**0.1. Формы.** Напомним, что отображение $B(v,w)$ из $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}$ называется *полуторалинейным*, если для любых $v$, $v_1$, $v_2$, $w$, $w_1$, $w_2 \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ выполнено

$$B(v\lambda, w) = B(v,w)\lambda B(v_1+v_2, w) = B(v_1,w) + B(v_2,w)$$
$$B(v, w\lambda) = \overline{\lambda} B(v,w) B(v, w_1+w_2) = B(v,w_1) + B(v,w_2). \tag{2}$$

Полуторалинейное отображение называется *эрмитовой формой*, если выполнено $B(v,w) = \overline{B(w,v)}$ для всех $v, w \in \mathbb{K}^n$. Полуторалинейное отображение называется *антиэрмитовой формой*, если $B(v,w) = -\overline{B(w,v)}$.

Слово *форма* всюду в этой статье обозначает *невырожденную* форму на линейном пространстве над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ одного из следующих 7 типов:

над $\mathbb{R}$ – билинейные симметрические и антисимметрические;

над $\mathbb{C}$ – билинейные симметрические и антисимметрические, а также эрмитовы и антиэрмитовы;

над $\mathbb{H}$ – эрмитовы и антиэрмитовы;

**Замечания.** a) Разумеется эрмитовы (антиэрмитовы) формы над $\mathbb{R}$ – это то же самое, что симметричные (кососимметричные) формы.

b) Антиэрмитовы формы над $\mathbb{C}$ несущественно отличаются от эрмитовых форм. А именно, если форма $B(v,w)$ – эрмитова, то форма $iB(v,w)$ – антиэрмитова.

c) Билинейных форм на $\mathbb{H}^n$ не бывает (выражение $\sum x_s y_s$ билинейной формой на правом модуле не является!).

d) Эрмитовы (антиэрмитовы) формы над $\mathbb{H}$ записываются в виде $B(v,w) = \sum \overline{w}_s b_{st} v_t$, где $b_{st} = \overline{b}_{ts}$ (соответственно $b_{st} = -\overline{b}_{ts}$).

Напомним классификацию форм с точностью до линейной замены переменной. Эрмитовы формы[5] над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ нумеруются индексами инерции. Во всех остальных случаях все невырожденные формы данного типа на фиксированном линейном пространстве эквивалентны.

**0.2. Классические группы.** Группу всех линейных операторов, сохраняющих форму $B$, мы обозначим через $\mathcal{U}(B)$. Фиксируем обозначения для всех 7 типов групп вида $\mathcal{U}(B)$:

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ – группа всех линейных операторов в $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{C}^{2n}$, сохраняющих кососимметричную билинейную форму;

$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ – группа всех операторов в $\mathbb{C}^n$, сохраняющих симметричную форму;

$\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$ – группа всех операторов в $\mathbb{R}^{p+q}$, $\mathbb{C}^{p+q}$, $\mathbb{H}^{p+q}$, сохраняющих эрмитову форму с индексами инерции $(p,q)$;

$\mathrm{SO}^*(2n)$ – группа всех операторов в $\mathbb{H}^n$, сохраняющих антиэрмитову форму.

Под словом *“классическая группа”* мы подразумеваем группу одной из только что упомянутых 7 серий, а также

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ – группы всех линейных операторов в $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$. Мы также используем обозначение $\mathrm{GL}(V)$.

Подчеркнем, что *мы не включаем в этот список группы*

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}),\quad \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}),\quad \mathrm{SL}(n,\mathbb{H}),\quad \mathrm{SU}(p,q),\quad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})\quad \text{и т.п.}.$$

[5] включая антиэрмитовы формы над $\mathbb{C}$

Соответственно мы рассматриваем, например, симметрические пространства $\mathrm{U}(p,q)/\mathrm{O}(p,q)$, а не $\mathrm{SU}(p,q)/\mathrm{SO}(p,q)$. С точки зрения гармонического анализа между этими двумя пространствами почти нет разницы, а с точки зрения наших реализаций первое пространство выглядит более приятно.

**0.3. Грассманианы.** Через $\mathrm{Gr}_p(V)$ мы будем обозначать множество всех $p$-мерных подпространств в линейном пространстве $V$.

Пусть пространство $V$ снабжено формой $B$. Напомним, что подпространство $Q$ называется *изотропным* относительно формы $B$, если $B$ тождественно равна нулю на $Q$.

Напомним, что форма $B$ в $V$ называется *расщепимой*, если существует $B$-изотропное подпространство половинной размерности. Напомним, что условием расщепимости для эрмитовых форм является совпадение положительного и отрицательного индексов инерции. Для ортогональных форм над $\mathbb{C}$ и антиэрмитовых форм над $\mathbb{H}$ расщепимость равносильна четномерности пространства. Кососимметричные формы всегда расщепимы.

Напомним, что в случае, если $B$ расщепима, в пространстве $V$ существует базис $e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n$ в $V$ такой, что

$$B(e_k,e_l)=0,\quad B(f_k,f_l)=0,\quad B(e_k,f_l)=\delta_{k,l}.$$

Пусть $B$ – *расщепимая* форма. Через $\mathrm{Gr}(V,B)$ мы будем обозначать множество всех максимальных изотропных подпространств в $V$.

Слово *грассманиан* будет относиться к пространствам вида $\mathrm{Gr}_p(V)$ или $\mathrm{Gr}(V,B)$.

## §1. Полуинволюции и их централизаторы

**1.1. Полуинволюции.** *Полуинволюцией* (подробное обсуждение и определение для произвольных тел см. у Дьедонне [3]) в линейном пространстве $V$ над $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ назывется линейный или антилинейный оператор $J$ такой, что

$$J^2=\lambda,$$

где $\lambda$ лежит в центре тела $\mathbb{K}$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $J$ – антилинейная полуинволюция над $\mathbb{C}$, пусть $J^2=\lambda$. Тогда $\lambda\in\mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Вычислим двумя способами $J^3$:

$$J^3 v = JJ^2 v = J\lambda v = \overline{\lambda} v \quad J^3 v = J^2 J v = \lambda J v. \qquad \square$$

Рассмотрим отображение $S(J) : \mathrm{Gr}_p(V) \to \mathrm{Gr}_p(V)$, заданное формулой $Q \mapsto JQ$. Легко видеть, что $S(J)^2 = 1$. Нас, собственно говоря, интересуют именно эти отображения. Заметим, что для любого $\sigma$ из центра тела $\mathbb{K}$ выполнено $S(\sigma J) = S(J)$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что

$$\boxed{J^2 = \pm 1}.$$

Более того, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, а $J$ линейна, мы можем считать $J^2 = 1$.

Централизатор полуинволюции $J$ в группе $\mathrm{GL}(V)$ мы будем обозначать через $\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}^J(V)$.

**1.2. Описание полуинволюций.** Полуинволюция $J$ задает в линейном пространстве $V$ дополнительную структуру в описанном ниже смысле слова.

a) Пусть $J$ линейна, $J^2 = 1$. Определим подпространства $V_\pm \subset V$, состоящие из векторов $v$, удовлетворяющих условиям $Jv = \pm v$. Тогда $V = V_+ \oplus V_-$. Таким образом фиксировано разложение $V$ в прямую сумму двух подпространств. Очевидно $\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(V_+) \times \mathrm{GL}(V_-)$.

b) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $J^2 = -1$, $V = \mathbb{R}^{2n}$. Тогда мы можем рассматривать наше пространство как пространство над $\mathbb{C}$, где умножение на скаляр $i$ есть оператор $J$. Очевидно $\mathrm{GL}^J \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

c) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $J$ антилинейна, $J^2 = -1$. Определим действие алгебры $\mathbb{H}$ на $V$, положив, что подалгера $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ действует так же, как и действовала, а кватернионная мнимая единица $j$ есть оператор $J$. Теперь наше пространство может рассматриваться как пространство над $\mathbb{H}$. Очевидно $\mathrm{GL}^J$ есть кватернионная группа GL.

d) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim V = k$, $J$ антилинейна, $J^2 = 1$. Рассмотрим множество $W$, состоящее из неподвижных точек инволюции $J$. Очевидно $W$ является вещественным подпространством в $V$, и $V = V \oplus iV$. Таким образом $V$ может рассматриваться как комплексификация вещественного подпространства $W$. Легко видеть, что $\mathrm{GL}^J \simeq \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$.

e) Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{H}$, $\dim V=k$, $J^2=-1$. Рассмотрим множество $W$ точек $v\in V$, удовлетворяющих условию

$$Jv=vi.$$

Легко видеть, что $W$ есть линейное пространство над $\mathbb{C}$, при этом $V=W\oplus Wj$. Таким образом $V$ может рассматриваться как "кватернионизация" $k$-мерного комплексного пространства $W$ (т.е. $V=W\otimes_{\mathbb{H}} V$). Очевидно $\mathrm{GL}^J\simeq \mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$.

Нас интересует лишь ситуация, когда существует подпространство $Q$ такое, что $V=Q\oplus JQ$. Такие полуинволюции мы будем называть *расщепимыми*. Отметим, что полуинволюции типов b)–e) всегда расщепимы. Для расщепимости полуинволюции типа a) очевидно необходимо и достаточно условие $\dim V_+=\dim V_-$.

**1.3. Полуинволюции, согласованные с формами.** Пусть $B$ - форма, а $J$ – линейная полуинволюция. Мы говорим, что полуинволюция $J$ согласована с формой $B$, если для всех $v,w$ выполнено

$$B(Jv,Jw)=\mu B(v,w), \tag{3}$$

где $\mu$ лежит в центре тела $\mathbb{K}$.

Мы говорим, что антилинейная полуинволюция $J$ согласована с формой $B$, если выполнено условие

$$B(Jv,Jw)=\mu\overline{B(v,w)}. \tag{4}$$

Сейчас мы покажем, что всегда можно считать $\mu=\pm1$.

**Лемма 1.2.** a) Пусть $J$ линейна. Тогда $\mu=\pm1$.

b) Пусть $J$ антилинейна, а форма $B$ эрмитова. Тогда $\mu=\pm1$.

c) Пусть $J$ антилинейна, а форма $B$ билинейна. Тогда можно домножить форму $B$ на число так, что будет выполнено $\mu=1$.

**Доказательство.** a) Учитывая, что $J^2=\pm1$, мы получаем

$$B(v,w)=B(J^2v,J^2w)=\mu B(Jv,Jw)=\mu^2B(v,w);$$

b) $B(v,w)=B(J^2v,J^2w)=\mu\overline{B(Jv,Jw)}=\mu\overline{\mu}B(v,w)$.

Отсюда $|\mu|=1$. Далее подставляем $v=w$ в (1.2) и замечаем, что $B(v,v)$ вещественно.

c) Точно так же мы получаем $|\mu|=1$. Положим $C(v,w)=\frac{1}{\sigma}B(v,w)$. Тогда

$$\sigma C(v,w)=\mu\overline{\sigma}\overline{C(v,w)}$$

и теперь утверждение очевидно. $\square$

**Лемма 1.3.** *Пусть $J$ – полуинволюция, согласованная с формой $B$. Пусть $Q$ – подпространство, изотропное относительно формы $B$. Тогда подпространство $JQ$ изотропно относительно $B$.*

**Доказательство.** Если $B(v,w)=0$, то $B(Jv,Jw)=0$. $\square$

Итак *полуинволюция $J$ задает инволюцию на $B$-изотропном грассманиана.*

**1.4. Управляющая форма.** Фиксируем форму $B$ и согласованную с ней полуинволюцию $J$. Рассмотрим выражение

$$D(v,w) := B(v,Jw).$$

Легко проверить (в каждом отдельном случае это очевидно), что $D(v,w)$ является "формой" в нашем смысле слова.

**Пример.** Пусть $B$ – симметричная билинейная форма над $\mathbb{R}$. Фиксируем $\lambda$ и $\mu$. Тогда

$$D(v,w) = B(v,Jw) = \mu B(Jv,J^2w) =$$
$$= \mu\lambda B(Jv,w) = \mu\lambda B(w,Jv) = \mu\lambda D(w,v)$$

и тип формы $D$ становится очевидным.

**Лемма 1.4.** *Пусть $Q$ – подпространство, изотропное относительно $B$. Тогда $JQ$ ортогонально $Q$ относительно управляющей формы $D$.*

**Доказательство.** Пусть $v,w \in Q$. Тогда $D(v,Jw) = B(v,J^2w) = 0$. $\square$

Итак мы имеем в пространстве $V$ три структуры: две формы и полуинволюцию. Очевидно, зная любые две из них, можно восстановить третью. Это замечание можно сформулировать в следующем виде.

Обозначим через $\mathcal{U}(B)^J$ множество элементов $\mathcal{U}(B)$, коммутирующих с $J$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(B)^J &= \mathcal{U}(B)\cap \mathrm{GL}(V)^J \\ \mathcal{U}(B)^J &= \mathcal{U}(B)\cap \mathcal{U}(D) \\ \mathcal{U}(B)^J &= \mathcal{U}(D)\cap \mathrm{GL}(V)^J. \end{aligned} \tag{5}$$

**1.5. Расщепимые пары $(B, J)$.** Пусть $J$ – полуинволюция, согласованная с формой $B$. Мы скажем, что пара $(B, J)$ *расщепима*, если в $V$ существует $B$-изотропное подпространство $Q$ такое, что $V = Q \oplus JQ$. Такие подпространства мы будем называть *расщепляющими*.

**Лемма 1.5.** *Пусть $(B, J)$ – расщепимая пара. Тогда для любого максимального изотропного подпространства $P$ в $V$ подпространство $JP$ совпадает с $D$-ортогональным дополнением до $P$*

**Доказательство.** Утверждение следует из леммы 1.4 и подсчета размерностей. □

**Предложение 1.6.** *Фиксируем тип формы $B$, тип полуинволюции $J$ и число $\mu = \pm 1$. Тогда существует единственная (с точностью до линейной замены переменой) расщепимая пара $(B, J)$ данного типа.*

**Доказательство.** Легко сообразить, что все определяется ограничением управляющей формы $D$ на подпространство $Q$. Теперь задача сводится к классификации форм. □

**1.6. Описание групп $\mathcal{U}^J(B)$ для расщепимых пар $(B, J)$.** Здесь нам придется провести длинный перебор случаев, параллельный перебору из п. 1.2. Мы сохраняем нумерацию подпунктов пункта 1.2. В действительности здесь все может быть проделано в общем виде для произвольных тел и не только для расщепимых пар $(B, J)$, см. ([3]).

а) Пусть $J$ линейна, $J^2 = 1$. Понятно что подпространства $V_\pm$ являются $\mathcal{U}^J(B)$-инвариантными, поэтому элементы группы $\mathcal{U}^J(B)$ имеют блочное строение вида

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Далее придется рассмотреть два подслучая.

а1) Пусть $\mu = +1$. Тогда подпространства $V_+$ и $V_-$ ортогональны относительно формы $B$. Обозначим через $B_\pm$ ограничение формы $B$ на $V_\pm$. Очевидно, $\mathcal{U}^J(B) = \mathcal{U}(B_+) \times \mathcal{U}(B_-)$.

Далее, расщепляющее подпространство $P$ является графиком обратимого оператора $L_P : V_+ \to V_-$. Легко видеть, что оператор $L_P$ отождествляет форму $B_+$ с формой $(-B_-)$ (это равносильно изотропности $P$). Поэтому $\mathcal{U}(B_+) \simeq \mathcal{U}(B_-)$.

a2) Пусть $\mu = -1$. Пусть $v_1, v_2 \in V_+$. Тогда

$$B(v_1, v_2) = -B(Jv_1, Jv_2) = -B(v_1, v_2).$$

Поэтому подпространства $V_\pm$ являются $B$-изотропными. Форма $B$ задает между ними невырожденное спаривание. Поэтому операторы $g_1$, $g_2$ в (1.6) контраградиентны друг к другу.

Итак $\mathcal{U}^J(B) = \mathrm{GL}(V_+)$.

b) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $J^2 = -1$. Тогда наше $\mathbb{R}$-линейное пространство может рассматриваться как пространство над $\mathbb{C}$. Введем в нем $\mathbb{C}$-значную форму

$$Z(v, w) = B(v, w) + iD(v, w) = B(v, w) + iB(v, Jw).$$

Теперь $\mathcal{U}^J(B) = \mathcal{U}(Z)$.

c) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $J$ антилинейна, $J^2 = -1$. Тогда в полученном $\mathbb{H}$-пространстве мы введем $\mathbb{H}$-значную форму

$$Y(v, w) = B(v, w) + jD(v, w) = B(v, w) + jB(v, Jw).$$

Теперь $\mathcal{U}^J(B) = \mathcal{U}(Y)$.

d) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $J$ антилинейна, $J^2 = 1$. Рассмотрим $\mathbb{R}$-подпространство $V_\mathbb{R}$, состоящее из неподвижных точек полуинволюции $J$. Рассмотрим ограничение формы $B$ на $V_\mathbb{R}$. Для любых $v, w \in V_\mathbb{R}$ выполнено

$$B(v, w) = \mu\overline{B(Jv, Jw)} = \mu\overline{B(v, w)}.$$

Теперь определим форму $X$ на $V_\mathbb{R}$, равную $B$, если $\mu = 1$, и равную $iB$, если $\mu = -1$. Тогда форма $X$ является $\mathbb{R}$-значной и $\mathcal{U}^J(B) = \mathcal{U}(X)$.

e) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $J^2 = -1$. Здесь все аналогично.

## §2. Модели классических симметрических пространств

Модели всех классических симметрических пространств были построены в предыдущем параграфе. Нам осталось лишь зафиксировать полученный перечень.

**2.1. Список 1. Случай расщепимых пар** $(B, J)$**.** Фиксируем пространство $V = \mathbb{K}^\alpha$, и расщепимую пару $(B, J)$ (см. п. 1.5). Форму $B$ мы будем называть *основной*, а полуинволюцию $J$ –

*управляющей* Пусть $Q$ - соответствующая управляющая форма, см. п. 1.4.

Определим пространство $\mathcal{S}(B,J)$. Его точками являются упорядоченные пары подпространств $Q_1$, $Q_2$ в $V$, удовлетворяющие условиям

1. $Q_1$, $Q_2$ – максимальные $B$-изотропные подпространства.
2. $V = Q_1 \oplus Q_2$.
3. $JQ_1 = Q_2$, или, что равносильно $JQ_2 = Q_1$(или, что тоже равносильно, $Q_2$ есть $D$-ортогональное дополнение до $Q_1$).

На множестве $\mathcal{S}(B,J)$ действует группа $G = \mathcal{U}^J(B)$ – централизатор полуинволюции $J$ в группе $\mathcal{U}(B)$. Мы утверждаем, что либо $\mathcal{S}(B,J)$ есть симметрическое пространство $G/H$, либо $\mathcal{S}(B,J)$ – объединение конечного набора симметрических пространств вида $G/H_i$.

В п. 1.6 мы уже вычислили группу $G$. Чтобы описать стабилизатор $H$ пары подпространств $(Q_1,Q_2)$, определим форму $D'(v,w) = B(v,Jw)$ на подпространстве $Q_1$ (это есть ограничение управляющей формы $D$ на $Q_1$). Легко видеть, что $H \simeq \mathcal{U}(D')$.

Ниже приводится список симметрических пространств получаемых таким способом.

В первой строчке указывается симметрическое пространство $G/H$.

Во второй – пространство $V = \mathbb{K}^l$, тип формы $B$, линейна или антилинейна полуинволюция $J$, а также числа $\lambda$ и $\mu$ из пп. 1.1, 1.3.

В третьей строчке указывается группа $\mathcal{U}(B)$, которую нам будет приятней обозначать через $G^*$ (в некоторых случаях эта информация уточняет индексы инерции формы $B$).

В четвертой строчке мы указывем группу $\mathrm{GL}^J$ – централизатор полуинволюции $J$ в $\mathrm{GL}(V)$ – и группу $\mathcal{U}(D)$, состоящую из операторов, сохраняющих управляющую форму $D(v,w) = B(v,Jw)$. Напомним, что выполнены равенства (1.3)–(1.5).

Случаи, когда $\mathcal{S}(B,J)$ не являются $G$-однородным, отмечены символом $\star$. В таких случаях мы указываем объединением каких именно симметрических пространств является $\mathcal{S}(B,J)$.

$$V = R^{2p(+q)}, \qquad \overline{B} \text{ кососимм.},$$
$$\overline{J} \text{ антилинейна}, \quad \overline{J}^2 = -1, \qquad B(Jv,Jw) = -\overline{B(v,w)}.$$

$\mathrm{O}(p,q) \times \mathrm{O}(p,q)/\mathrm{O}(p,q)$

$V=\mathbb{R}^{2(p+q)}$, $B$ симметр., $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(p+q,p+q)$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(2p,2q)$.
$\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(p)/\mathrm{O}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})\times\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$
$V=\mathbb{R}^{4n}, B$ кососимм., $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{R})$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,n-p)$
$V=\mathbb{R}^{2n}, B$ кососимм., $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^{n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,n-p)$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$
$V=\mathbb{R}^{4n}, B$ симметр., $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(2n,2n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$

$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(p,n-p)$
$V=\mathbb{R}^{2n}$, $B$ симметр., $J^2=-1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(n,n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^{n}\mathrm{O}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(p,n-p)$
$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$
$V=\mathbb{R}^{4n}, B$ кососимм., $J^2=-1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{R})$

$\mathrm{U}(n,n)/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$
$V=\mathbb{R}^{4n}$, $B$ симметр., $J^2=-1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(2n,2n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{R})$

$\mathrm{U}(p,q)/\mathrm{O}(p,q)$
$V=\mathbb{R}^{2(p+q)}, B$ кососимм., $J^2=-1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(2(p+q),\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(2p,2q)$

$\mathrm{U}(p)/\mathrm{O}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{O}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$
$V=\mathbb{C}^{2n}$, $B$ симметр., $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})\times\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$
$V=\mathbb{C}^{4n}$, $B$ кососимм., $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{C})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{C})$

$\mathrm{U}(p,q)\times\mathrm{U}(p,q)/\mathrm{U}(p,q)$
$V=\mathbb{C}^{2(p+q)}$, $B$ эрмитова, $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{U}(p+q,p+q)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{U}(2p,2q)$
$\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(p)/\mathrm{U}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$
$V=\mathbb{C}^{4n}$, $B$ симметр., $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{O}(4n,\mathbb{C})$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(4n,\mathbb{C})$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$
$V=\mathbb{C}^{2n}$, $B$ кососимм., $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(p,n-p)$
$V=\mathbb{C}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J$ линейна, $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{U}(n,n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{U}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^{n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(p,n-p)$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(p,n-p)$
$V=\mathbb{C}^{2n}$, $B$ кососимм., $J$ антилин., $J^2=1, B(Jv,Jw)=\overline{B(v,w)}$.
$G^*=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{U}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^{n}\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(p,n-p)$
$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{O}(2p,2q)/\mathrm{U}(p,q)$
$V=\mathbb{C}^{2(p+q)}$, $B$ симметр., $J$ антилин., $J^2=1, B(Jv,Jw)=\overline{B(v,w)}$.

$G^* = \mathrm{O}(2(p+q), \mathbb{C})$
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(2(p+q), \mathbb{R})$ $\mathcal{U}(D) = \mathrm{U}(2p, 2q)$
$\mathrm{O}(2p)/\mathrm{U}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{O}(n,n)/\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$
$V = \mathbb{C}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J$ антилин., $J^2 = 1, B(Jv, Jw) = \overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{U}(n,n)$,
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ $\mathcal{U}(D) = \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$

$\mathrm{Sp}(4n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$
$V = \mathbb{C}^{4n}$, $B$ эрмитова, $J$ антилин., $J^2 = 1, B(Jv, Jw) = -\overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{U}(2n, 2n)$,
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(4n, \mathbb{R})$, $\mathcal{U}(D) = \mathrm{Sp}(4n, \mathbb{C})$

$\mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{U}(p,q)$
$V = \mathbb{C}^{2(p+q)}$, $B$ кососимм., $J$ антилин., $J^2 = -1, B(Jv, Jw) = \overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{Sp}(2(p+q), \mathbb{C})$
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{H})$, $\mathcal{U}(D) = \mathrm{U}(2p, 2q)$
$\mathrm{Sp}(p)/\mathrm{U}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{U}(p, n-p)$
$V = \mathbb{C}^{2n}$, $B$ симметр., $J$ антилин., $J^2 = -1, B(Jv, Jw) = \overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$,
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ $\mathcal{U}(D) = \mathrm{U}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J) = \cup_{p=1}^n \mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{U}(p, n-p)$
$\mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{U}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{Sp}(n,n)/\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$
$V = \mathbb{C}^{4n}$, $B$ эрмитова, $J$ антилин., $J^2 = -1, B(Jv, Jw) = \overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{U}(2n, 2n)$
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(2n, \mathbb{H})$ $\mathcal{U}(D) = \mathrm{Sp}(4n, \mathbb{C})$

$\mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$
$V = \mathbb{C}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J$ антилин., $J^2 = -1, B(Jv, Jw) = -\overline{B(v,w)}$.
$G^* = \mathrm{U}(n,n)$
$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$, $\mathcal{U}(D) = \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$

$\mathrm{Sp}(p,q) \times \mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{Sp}(p,q)$
$V = \mathbb{H}^{2(p+q)}$, $B$ эрмитова, $J^2 = 1, B(Jv, Jw) = B(v,w)$.
$G^* = \mathrm{Sp}(p+q, p+q)$,
$\mathrm{GL}^J = \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{H}) \times \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{H})$ $\mathcal{U}(D) = \mathrm{Sp}(2p, 2q)$
$\mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(p)/\mathrm{Sp}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{SO}^*(2n) \times \mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{SO}^*(2n)$

$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ антиэрмитова, $J^2=1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{SO}^*(4n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{SO}^*(4n)$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{SO}^*(2n)$
$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(n,n)$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{SO}^*(4n)$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(p,n-p)$
$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ антиэрмитова, $J^2=1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{SO}^*(4n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^n\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(p,n-p)$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{U}(2p,2q)/\mathrm{Sp}(p,q)$
$V=\mathbb{H}^{2(p+q)}$, $B$ антиэрмитова, $J^2=-1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{SO}^*(4(p+q))$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2(p+q),\mathbb{C})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(2p,2q)$
$\mathrm{U}(2p)/\mathrm{Sp}(p)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$\mathrm{U}(n,n)/\mathrm{SO}^*(2n)$
$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J^2=-1, B(Jv,Jw)=B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(n,n)$,
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$, $\mathcal{U}(D)=\mathrm{SO}^*(4n)$

$\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{SO}^*(2n)$
$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ антиэрмитова, $J^2=-1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{SO}^*(4n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{SO}^*(4n)$

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(p,n-p)$
$V=\mathbb{H}^{2n}$, $B$ эрмитова, $J^2=-1, B(Jv,Jw)=-B(v,w)$.
$G^*=\mathrm{Sp}(n,n)$
$\mathrm{GL}^J=\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ $\mathcal{U}(D)=\mathrm{Sp}(n,n)$
$\mathcal{S}(B,J)=\cup_{p=0}^n\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(p,n-p)$
$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$ – риманово некомпактное симм. пр-во.

**2.2. Список 2. Случай, когда есть только основная форма $B$.** Фиксируем пространство $V=\mathbb{K}^{2n}$, снабженное расщепимой формой $B$. Определим пространство $\mathcal{S}(B)$, его точками являются упорядоченные пары максимальных изотропных подпространств

$(Q_1, Q_2)$ в $V$ такие, что $V = Q_1 \oplus Q_2$. Легко видеть, что все эти пространства являются симметрическими пространствами вида

$$G/H = \mathcal{U}(B)/\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Список таких пространств приводится ниже

1. $\mathrm{O}(n,n)/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
2. $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
3. $\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
4. $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
5. $\mathrm{U}(n,n)/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
6. $\mathrm{Sp}(n,n)/\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$
7. $\mathrm{SO}^*(4n)/\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$.

Во всех случаях определим группу

$$G^* = G \times G.$$

**2.3. Список 3. Случай, когда есть только управляющая полуинволюция.** Рассмотрим пространство $V = \mathbb{K}^{2n}$ и расщепимую (см. п. 1.2) полуинволюцию $J$ в нем. Рассмотрим пространство $\mathcal{S}(J)$, точками которого являются всевозможные пары подпространств $(Q_1, Q_2)$ в $V$ такие, что $V = Q_1 \oplus Q_2$, $JQ_1 = Q_2$. Группа $G := \mathrm{GL}^J$ (централизатор полуинволюции) действует на $\mathcal{S}(J)$. Легко проверить, что во всех случаях $\mathcal{S}(J)$ оказывается симметрическим пространством.

Список таких пространств приводится ниже. В первой строчке указано полученное пространство $G/H$, во второй – пространство $V$ и тип полуинволюции $J$. $\quad V = \mathbb{H}^{2n} \qquad \overline{J}^2 = -1ff, \overline{J}$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
$\quad V = \mathbb{R}^{2n},\ J^2 = 1$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
$\quad V = \mathbb{R}^{2n},\ J^2 = -1$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
$\quad V = \mathbb{C}^{2n},\ J^2 = 1,\ J$ линейна
$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
$\quad V = \mathbb{C}^{2n}\ J^2 = 1,\ J$ антилинейна
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$
$\quad V = \mathbb{C}^{2n},\ J^2 = -1, J$ антилинейна
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$
$\quad V = \mathbb{H}^{2n}, J^2 = 1$
$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$

$V = \mathbb{H}^{2n}$, $J^2 = -1$

Во всех случаях определим группу

$$G^* = \mathrm{GL}(V).$$

**2.4. Список 4. Случай, когда есть только управляющая форма.** Рассмотрим пространство $V = \mathbb{K}^n$, снабженное формой $D$. Положим $G = \mathcal{U}(D)$. Рассмотрим пространство $\mathcal{S}_m(D)$, состоящее из всех $m$-мерных подпространств в $V$, на которых форма $D$ невырождена. Можно также сказать, что точкой пространства $\mathcal{S}_m(D)$ является пара подпространств $(Q_1, Q_2)$ таких, что

1. $V = Q_1 \oplus Q_2$,
2. $Q_2$ есть $D$-ортогональное дополнение до $Q_1$.

Очевидно, что или $\mathcal{S}_m(D)$ есть симметрическое пространство вида $G/H$ или $\mathcal{S}_m(D)$ есть объединение конечного набора симметрических пространств $G/H_i$. Список получаемых таким образом пространств приводится ниже. В случае, когда форма $D$ эрмитова, мы указываем, объединением каких именно симметрических пространств является $\mathcal{S}_m(D)$.

$$\mathrm{O}(p,q)/\mathrm{O}(r,s) \times \mathrm{O}(p-r, q-s)$$

$$\mathcal{S}_m(D) = \bigcup_{r,s:\, r+s=m, r\leqslant p, s\leqslant q} \mathrm{O}(p,q)/\mathrm{O}(r,s) \times \mathrm{O}(p-r, q-s).$$

В том числе $\mathrm{O}(p,q)/\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{O}(p)/\mathrm{O}(r) \times \mathrm{O}(p-r)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$$\mathrm{Sp}(2(k+l), \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2l, \mathbb{R})$$

$$\mathrm{O}(n+m, \mathbb{C})/\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(m, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{Sp}(2(k+l), \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2l, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{U}(p,q)/\mathrm{U}(r,s) \times \mathrm{U}(p-r, q-s)$$

$$\mathcal{S}_m(D) = \bigcup_{r,s:\, r+s=m, r\leqslant p, s\leqslant q} \mathrm{U}(p,q)/\mathrm{U}(r,s) \times \mathrm{U}(p-r, q-s).$$

В том числе $\mathrm{U}(p,q)/\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$ риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{U}(p)/\mathrm{U}(r)\times\mathrm{U}(p-r)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$$\mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{Sp}(r,s)\times\mathrm{Sp}(p-r,q-s)$$

$$\mathcal{S}_m(D)=\bigcup_{r,s:\,r+s=m,r\leqslant p,s\leqslant q}\mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{Sp}(r,s)\times\mathrm{Sp}(p-r,q-s).$$

В том числе $\mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)$ риманово некомпактное симм. пр-во.

$\mathrm{Sp}(p)/\mathrm{Sp}(r)\times\mathrm{Sp}(p-r)$ – риманово компактное симм. пр-во.

$$\mathrm{SO}^*(2(m+n))/\mathrm{SO}^*(2m)\times\mathrm{SO}^*(2n).$$

Во всех случаях мы определим группу

$$G^*=\mathrm{GL}(V).$$

**2.5. Список 5. Случай, когда ничего нет.** Рассмотрим пространство $V=\mathbb{K}^{p+q}$. Далее рассмотрим пространство $\mathcal{S}_p$, состоящее из всех пар подпространств $(Q_1,Q_2)$ в $V$ таких, что

1. $\dim Q_1=p$, $\dim Q_2=q$;
2. $V=Q_1\oplus Q_2$.

Таким способом мы получаем следующие симметрические пространства:

$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$
$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})/\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{C})$
$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{H})/\mathrm{GL}(p,\mathbb{H})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{H})$.

Во всех перечисленных случаях мы определим группу

$$G^*=\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{K}).$$

## §3. Приложения

**3.1. Открытые вложения в грассманианы.** Итак во всех случаях точкой симметрического пространства $G/H$ является пара подпространств $(Q_1,Q_2)$ в линейном пространстве. Если у нас есть управляющая полуинволюция или управляющая форма (списки 1, 3, 4), то подпространство $Q_2$ однозначно определяется подпространством $Q_1$. Таким образом отображение $(Q_1,Q_2)\mapsto Q_1$ является вложением симметрического пространства в некоторый грассманиан $\mathrm{Gr}^*$ (этот грассманиан является полным грассманианом в случае списков 3, 4 и изотропным грассманианом в случае списка 1).

Если нет ни управляющей формы, ни управляющей полуинволюции, то $(Q_1, Q_2)$ есть точка произведения двух грассманианов, это произведение грассманианов мы также будем обозначать через $\mathrm{Gr}^*$.

Образ $G/H$ в грассманиане( или произведении двух грассманианов) $\mathrm{Gr}^*$ всегда открыт. Более того, во всех случаев, кроме 10 серий, отмеченных символом $\star$, этот образ плотен.

**Замечание.** В случае компактных симметрических пространств этот образ совпадает со всем грассманианом. Иными словами, мы реализовали все 10 серий компактных симметрических пространств как грассманианы.

**3.2. Надгруппа.** Для всех симметрических пространств мы указали некоторую группу $G^* \supset G$. По построению эта группа действует транзитивно на грассманиане $\mathrm{Gr}^*$, стабилизатор точки является максимальной параболической подгруппой в $G^*$.

**3.3. Ограничение с вырожденной основной серии.** Рассмотрим естественное унитарное представление $\rho$ группы $G^*$ в пространстве $L^2$ на $\mathrm{Gr}^*$.

**Предложение 3.1.** a) *Для всех классических симметрических пространств $G/H$, за исключением случаев, отмеченных в списке знаком $\star$, ограничение представления $\rho$ на подгруппу $G$ эквивалентно представлению $G$ в $L^2(G/H)$.*

b) *В случаях, отмеченных знаком $\star$, ограничение $\rho$ на $G$ эквивалентно представлению $G$ в $\bigoplus G/H_i$, где пространства $G/H_i$ указаны в таблице.*

**Доказательство.** Это автоматическое следствие из п. 3.1. $\square$

**Замечание.** Рассмотрим случай, когда $G^* = G \times G$ (списки 2, 5). Тогда представление группы $G^* = G \times G$ в $L^2$ на произведении грассманианов есть тензорное произведение двух представлений группы $G$. Итак в этом случае, представление $G$ в $L^2(G/H)$ есть тензорное произведение двух представлений группы $G$ вырожденной основной серии.

**3.4. Матричные координаты на симметрических пространствах.** Рассмотрим некоторое линейное пространство $Z$ и пару подпространств $X$, $Y$ таких, что $Z = X \oplus Y$. Пусть $\dim X = \alpha$. По-прежнему, через $\mathrm{Gr}_\alpha(V)$ мы будем обозначать грассманиан всех

$\alpha$-мерных подпространств. Пусть $R \in \mathrm{Gr}_\alpha(Z)$ не пересекается с $Y$. Тогда $R$ является графиком некоторого оператора $X \to Y$. Этот оператор мы будем называть *угловым оператором* подпространства $R$, связанным с разложением $Z = X \oplus Y$.

Фиксируем разложение $Z = X \oplus Y$. Элементы группы $\mathrm{GL}(V)$ мы будем записывать в виде блочных операторов

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \oplus Y \to X \oplus Y.$$

Тогда действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на грассманиане на языке угловых операторов задается формулой

$$R \to (C + DR)(A + BR)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь симметрическое пространство $G/H$, реализованное как некоторое множество $\mathcal{S}$, состоящее из упорядоченных пар подпространств $(Q, R)$. Фиксируем некоторую пару $(X, Y) \in \mathcal{S}$. Поставим в соответствие произвольной точке $(Q, R) \in \mathcal{S}$ пару операторов

$$(M, N),$$

где $M : X \to Y$ – угловой оператор подпространства $Q$, соответствующий разложению $X \oplus Y$, а где $N : Y \to X$ – угловой оператор подпространства $R$, соответствующий разложению $Y \oplus X$.

Условие $Q \cap R = 0$ на языке угловых операторов переписывается в виде

$$\det(1 - MN) \neq 0. \tag{7}$$

Все прочие условия также переписываются в очень простой форме.

а) Рассмотрим случай, когда $Q$, $R$ (и в частности $X$, $Y$) должны быть изотропны относительно формы $B$ (списки 1б2). Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено $x_1 + Mx_1, x_2 + Mx_2 \in Q$. Поэтому

$$0 = B(x_1 + Mx_1, x_2 + Mx_2) =$$
$$= B(x_1, x_2) + B(Mx_1, Mx_2) + B(Mx_1, x_2) + B(x_1, Mx_2)$$
$$= 0 + 0 + B(Mx_1, x_2) + B(x_1, Mx_2)$$

(и аналогично для $N$). Итак

$$B(Mx_1, x_2) + B(x_1, Mx_2) = 0. \tag{8}$$

На языке матриц это переписывается как симметричность, кососимметричность, эрмитовость или антиэрмитовость( в зависимости от типа формы $B$).

b) Пусть $R$, $Q$ должны быть ортогональны относительно управляющей формы $D$ (списки 1, 4). Тогда для любых $x \in Q$, $y \in R$

$$0 = D(x+Mx, y+Ny) = D(x, y)+D(Mx, Ny)+D(x, Ny)+D(Mx, y) =$$
$$= 0 + 0 + D(x, Ny) + D(Mx, y). \qquad (9)$$

Итак
$$D(x, Ny) + D(Mx, y) = 0. \qquad (10)$$

На уровне матриц это условие типа $N = \pm M^*$ или $N = \pm M^t$ (в зависимости от типа формы $D$).

c) Если $R$ и $Q$ связаны упраляющей полуинволюцией $J$(списки 1, 3), то это дает условие

$$N = JMJ^{-1}. \qquad (11)$$

d) Наконец, в случаях, отмеченных $\star$, различные симметрические пространства $G/H_i$ разделяются гиперповерхностью $\det(1-MN) = 0$.

**Замечание.** Еще раз подчеркнем, что уравнения (3.2)–(3.4) являются линейными. Таким образом по каждой точке $(X, Y) \in \mathcal{S}$ мы построили карту на многообразии $G/H = \mathcal{S}$.

**Замечание.** Для римановых некомпактных симметрических пространств мы получаем реализацию типа “матричного шара” (см., например, [8], добавление A).

**3.5. Двойное отношение Хуа Ло Кена.** Пусть $(Q_1, Q_2)$, $(R_1, R_2)$ – точки симметрического пространства $\mathcal{S} = G/H$. Пусть $M : Q_1 \to Q_2$ – угловой оператор подпространства $R_1$ относительно разложения $V = Q_1 \oplus Q_2$. Пусть $N : Q_2 \to Q_1$ – угловой оператор подпространства $R_2$ относительно разложения $V = Q_2 \oplus Q_1$. Тогда $NM$ – канонически определенный оператор $Q_1 \to Q_1$. Его собственные числа $(\lambda_1, \lambda_1, \dots)$ суть инварианты пары точек $(Q_1, Q_2)$, $(R_1, R_2)$ под действием группы $G$. Эта конструкция близка к обычному двойному отношению четырех точек на проективной прямой, для нескольких серий симметрических пространств она была введена Хуа Ло Кеном в [6].

**Замечание.** Пусть $(X_1, X_2)$ координаты точки $(Q_1, Q_2)$, а $(Y_1, Y_2)$ – координаты точки $(R_1, R_2)$ в смысле п. 3.4. Тогда двойное отношение совпадает с собственными числами матрицы

$$(1 - Y_2X_1)^{-1}(X_2 - Y_2)(1 - Y_1X_2)^{-1}(X_1 - Y_1).$$

**3.6. Конформные структуры Гончарова–Гиндикина.** Пусть $\mathrm{Gr}^*$ – один из наших грассманианов. Фиксируем точку $P \in \mathrm{Gr}^*$ и число $\alpha = 1, 2, \dots, \dim P$. Через $\mathrm{D}_\alpha(P)$ мы обозначим множество всех подпространств $Q \in \mathrm{Gr}^*$, таких, что коразмерность $P \cap Q$ в $P$ не превосходит $\alpha$. Через $T_P$ мы обозначим касательное пространство к $\mathrm{Gr}^*$ в точке $P$. Через $\mathrm{C}_\alpha(P)$ мы обозначим конус в $T_P$, состоящий из векторов, касающихся многобразия $\mathrm{D}_\alpha(P)$. Таким образом для каждого $\alpha$ мы получили поле конусов $\mathrm{C}_\alpha$ на грассманиане $\mathrm{Gr}^*$. Разумеется, это поле конусов является $G^*$-инвариантным.

В силу нашей конструкции мы получаем $G$-инвариантное поле конусов на $G/H$. А. Б. Гончаров и С. Г. Гиндикин (см. [5]) рассматривали поле $C_1$ (или, если оно пусто $C_2$). Приятным свойством этой структуры является то, что (в случае пространств ранга $> 1$) она "помнит" группу $G^*$. А именно псевдогруппа диффеоморфизмов $G/H$, сохраняющих поле конусов $C_1$ в действительности является группой $G^*$ (или группой, в которой $G^*$ есть связная компонента).

## Литература

1. M. Berger, *Les espaces symmetriques noncompacts.* — Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.
2. E. Cartan, *Sur les domaines bornes de l'espace de n variables complexes.* — Abh. Math. Sem. Hamb. **11** (1935), 116–162.
3. J. Dieudonne, *La Geometrie des Groupes Classiques.* Springer (1954).
4. M. Flensted-Jensen, *Discrete series for semisimple symmetric spaces.* — Ann. of Math. **111** (1980), 253–311.
5. S. Gindikin, *Tube domains in Stein symmetric spaces.* Positivity in Lie Theory: Open Problems. eds. J. Hilgert, J. D. Lawson, R.-Y. Neeb, and E. B. Vinberg, Walter de Gruyter (1998), pp. 81–98.
6. Loo Keng Hua, *Geometry of matrices.* — Trans. Am. Math. Soc. **57** (1945), 441–580.
7. Б. О. Макаревич, *Открытые орбиты редуктивных групп в симметрических R-пространствах.* — Мат. сб. **20:3** (1973), 390–401.
8. Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite dimensional groups.* Clarendon Press, Oxford (1996).

Neretin Yu. A. Pseudo-Riemannian symmetric spaces: uniform realizations, and open embeddings into Grassmanians.

This paper aims on two major observations. The first is that all 54 series of classical symmetric spaces admit simple uniform realizations. Namely, a point of a symmetric space is represented by a pair of complementary linear subspaces $V_1$, $V_2$ in $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}^k$ or $\mathbb{H}^k$, subject to simple conditions (subspaces may be isotropic, or orthogonal, or rigged with an operator permuting $V_1$ and $V_2$). This observation allows one to work with arbitrary classical symmetric spaces by applying simple elementary methods. The second observation is that there always exist an open embedding of a classical symmetric space into a Grassmanian.

Московский
независимый университет

Поступило 27 мая 1999 г.