Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

К. Кохась, А. Суворов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Пусть H – дискретная группа Гейзенберга:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k, \ell, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Аналогичную группу матриц с элементами из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ будем называть конечной группой Гейзенберга и обозначать H_n. Образующие групп H и H_n будем обозначать одинаковыми буками:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Элемент Δ групповой алгебры группы H $\Delta = 1/4(x+x^{-1}+y+y^{-1})$ называется оператором Лапласа, построенным по системе образующих (x, y); аналогично будем рассматривать оператор $\Delta_n = 1/4(x+x^{-1}+y+y^{-1})$ для конечной группы Гейзенберга H_n. Другим способом можно описать эти операторы как операторы перехода для случайного блуждания по группе. Всякий раз, когда мы будем говорить о спектре этих операторов, мы будем иметь в виду спектр в регулярном представлении соответствующей группы.

Нетрудно показать [2], что спектр оператора Δ совпадает с отрезком $[-1, 1]$. Рассмотрим семейство E_x, $x \in [-1, 1]$ спектральных проекторов оператора Δ и соответствующую спектральную меру $\mu A = (E_A\delta_e, \delta_e)$, где $\delta_e \in L_2(H)$ – характеристическая функция единичного элемента группы H. Мы оценим величину $\mu\big([-1, -1+t] \cup [1-t, 1]\big)$ при $t \to 0$, доказав неравенство

$$\mu\big([-1, -1+t] \cup [1-t, 1]\big) \geq \operatorname{const} t^{2+\alpha}.$$

Работа поддержана грантом РФФИ 96-15-96060.

В первом параграфе описаны представления конечной группы Гейзенберга. Во втором параграфе мы показываем, что собственные числа оператора Δ_n в неодномерных неприводимых представлениях не превосходят величины $1-O(\frac{1}{n})$. В третьем параграфе дана комбинаторная реализация характеристических полиномов оператора Δ_n в многомерных представлениях. Наконец, в четвертом параграфе мы оцениваем спектральную меру оператора Δ, опираясь на оценки, сделанные для конечной группы.

Задача поставлена А. М. Вершиком.

1. Представления конечной группы Гейзенберга H_n.

Будем рассматривать технически наиболее простой случай, когда число n – простое.

Группа H_n имеет n^2 одномерных представлений $T_{\alpha,\beta}$, α, $\beta = 1, 2, \dots, n$:

$$T_{\alpha,\beta}(x) = e^{\frac{2\pi i}{n}\alpha}, \quad T_{\alpha,\beta}(y) = e^{\frac{2\pi i}{n}\beta}, \quad T_{\alpha,\beta}(z) = 1.$$

Кроме одномерных, группа H_n имеет $n-1$ неприводимых представлений T_q размерности n. Эти представления могут быть получены индуцированием с представлений ρ_q абелевой подгруппы, порожденной образующими y и z, вида

$$\rho_q(y) = 1, \quad \rho_q(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}q}, \quad q = 1, \dots, n-1.$$

В пространстве $\mathbb{C}^n$ с базисом u_1, u_2, $\dots$, u_n представление T_q задается формулами

$$T_q(x)\, u_j = u_{j+1}, \quad T_q(y)\, u_j = e^{\frac{2\pi i}{n}qj} u_j, \quad T_q(z)\, u_j = e^{\frac{2\pi i}{n}q} u_j.$$

Предложение 1.1. *$T_{\alpha,\beta}$ и T_q – полный список неприводимых унитарных представлений группы H_n.*

Действительно, неприводимость и неэквивалентность представлений T_q проверяется прямым подсчетом скалярных произведений характеров. Подсчет квадратов размерностей представлений $T_{\alpha,\beta}$ и T_q показывает, что других неприводимых представлений нет.

Пусть $\Delta_n = \frac{1}{4}(x + y + x^{-1} + y^{-1}) \in \mathbb{C}H_n$ – оператор Лапласа для системы образующих (1). Обозначим $\tilde{\Delta}_n = 4\Delta_n$. Для изучения спектра оператора $\tilde{\Delta}_n$ в регулярном представлении группы достаточно изучить спектры этого оператора во всех неприводимых представлениях. Что касается одномерных представлений $T_{\alpha,\beta}$ – тут все просто

$$T_{\alpha,\beta}(\tilde{\Delta}_n) = 2\cos\frac{2\pi\alpha}{n} + 2\cos\frac{2\pi\beta}{n}.$$

В многомерных представлениях T_q этот оператор устроен сложнее

$$T_q(\tilde{\Delta}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\frac{0\cdot 2q\pi}{n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2\cos\frac{1\cdot 2q\pi}{n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\frac{2\cdot 2q\pi}{n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\frac{(n-2)\cdot 2q\pi}{n} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\frac{(n-1)\cdot 2q\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

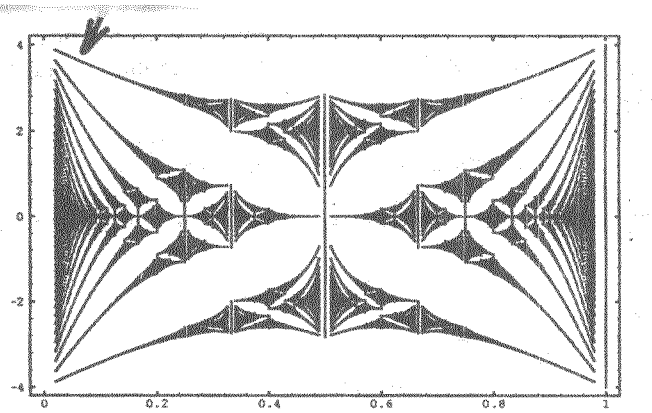
К сожалению, спектры этих матриц не поддаются непосредственному вычислению.

Эти матрицы возникают при изучении оператора Харпера и уравнения Матье (см., например, [1, 2]). Рассмотрим оператор Харпера, заданный в пространстве $L^2(\mathbb{Z})$

$$u_n \mapsto u_{n+1} + u_{n-1} + 2\cos(2\pi n\alpha)u_n.$$

Специалистам по физике высоких энергий хорошо известна т. наз. бабочка Хофштадтера [5], приведенная на рисунке (мы взяли рисунок из [7]). Здесь по горизонтали отложены значения параметра α, а по вертикали изображен спектр оператора. При рациональном $\alpha = q/n$ (несократимая дробь) спектр состоит из n отрезков вида $f^{-1}([-4,0])$, где f – характеристический полином матрицы $T_q(\Delta_n)$ (при четных n два средних отрезка имеют общую вершину 0). При иррациональных α спектр представляет собой канторово множество.

На картинке хорошо видны линии, образованные концами отрезков. Для линии, на которую указывает стрелка, это означает, что $\rho_n \sim 4 - \frac{c}{n}$, где ρ_n – спектральный радиус оператора Харпера с параметром $\alpha = \frac{1}{n}$. Но $\rho_n = \lambda_n$, где λ_n – наибольшее собственное число матрицы $T_1(\Delta_n)$. В следующем параграфе мы доказываем, что $4 - \lambda_n = O(\frac{1}{n})$. Это "почти" объясняет наблюдаемое явление для линии, помеченной стрелкой.



Вычисления на компьютере позволяют предположить, что при

$$n \to +\infty \quad \lambda_n = 4 - \frac{2\pi}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Так, при $n = 1000$ выражение $(4 - \lambda_n)n$ приближенно равно 6.28 (третий знак уже не совпадает; вычислено при помощи пакета Mathematica 3.0).

2. Оценка максимального собственного числа оператора $\tilde{\Delta}_n$ в представлении T_q..

Обозначения. *Матрицы мы будем обозначать "рукописными" буквами – $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и т. д. Наибольшее собственное число матрицы $\mathcal{A}$ будем обозначать $\lambda_{\mathcal{A}}$. Пусть $\mathcal{P} = (p_{ij})$ и $\mathcal{Q} = (q_{ij})$ – вещественные матрицы $n \times n$. Будем писать $\mathcal{P} \le \mathcal{Q}$, если $p_{ij} \le q_{ij}$ при всех i, j.*

Пусть $\mathcal{A}_n$ – матрица $n \times n$, задающая наш оператор $\tilde{\Delta}_n$ в представлении T_1:

$$\mathcal{A}_n =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\frac{0\cdot 2\pi}{n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2\cos\frac{1\cdot 2\pi}{n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\frac{2\cdot 2\pi}{n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\frac{(n-2)\cdot 2\pi}{n} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

Это симметричная матрица, ее спектр вещественен. Наибольшее собственное число этой матрицы обозначим λ_n. Нам удобно будет работать с матрицей $\tilde{\mathcal{A}}_n = 2\mathcal{E}_n + \mathcal{A}_n$ ($\mathcal{E}_n$ – единичная матрица $n \times n$), у которой все элементы неотрицательны, спектр отличается от спектра матрицы $\mathcal{A}_n$ сдвигом на 2, а все собственные вектора совпадают с собственными векторами матрицы $\mathcal{A}_n$. В частности, для наибольшего собственного числа $\tilde{\lambda}_n$ матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_n$ имеем $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + 2$. По теореме Перрона–Фробениуса наибольшее собственное число неразложимой неотрицательной матрицы имеет кратность 1, отсюда мы заключаем, что λ_n – собственное число кратности 1.

Нам понадобится следующее утверждение, также являющееся следствием теоремы Перрона–Фробениуса:

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – матрицы $n \times n$ с неотрицательными элементами, $\mathcal{P} \le \mathcal{Q}$, тогда $\lambda_{\mathcal{P}} \le \lambda_{\mathcal{Q}}$.*

Мы покажем, что при $n \to +\infty$ $4 - \lambda_n = O(1/n)$. Числа $\sqrt{n/2}$, $37/15$ и т.п. в доказательствах двух следующих лемм подобраны так, чтобы без излишней громоздкости получить константы получше.

Лемма 2.2. $4 - 40/n < \lambda_n < 4 - \frac{2}{n}$.

Доказательство. 1) Левое неравенство.

Так как это не сказывается на конечном результате, мы будем использовать выражение $\sqrt{n/2}$ так, словно это целое число и к тому же четное. Пусть $\mathcal{C}_{\sqrt{n/2}}$ – трехдиагональная матрица $\sqrt{n/2} \times \sqrt{n/2}$, имеющая вид

$$\mathcal{C}_{\sqrt{n/2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда спектр матрицы $\mathcal{C}_{\sqrt{n/2}}$ хорошо известен (см., например, [4]) и представляет собой множество

$$\left\{ 2\cos\frac{j\pi}{\sqrt{n/2}+1},\ 1 \le j \le \sqrt{n/2} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{B}_n$ – матрица $n\times n$, в блочной записи имеющая вид

$$\mathcal{B}_n=\begin{pmatrix} (4-\frac{20}{n})\mathcal{E}_{\sqrt{n/2}}+\mathcal{C}_{\sqrt{n/2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (4-\frac{20}{n})\mathcal{E}_{\sqrt{n/2}}+\mathcal{C}_{\sqrt{n/2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde{\mathcal{A}}_n\geq\mathcal{B}_n$ (поскольку при $|k|\leq\sqrt{n/2}$ $2\cos\frac{2\pi k}{n}\geq 2-\frac{2\pi^2}{n}>2-\frac{20}{n}$). В силу предложения 2.1

$$\lambda_n\geq\lambda_{\mathcal{B}_n}-2=2-\frac{20}{n}+2\cos\frac{\pi}{\sqrt{n/2}+1}>4-\frac{40}{n}.$$

2) Правое неравенство. Чтобы не загромождать обозначения в этой части доказательства, мы будем использовать выражение $\sqrt{n}/4$ так, словно это целое число без оговорок на то, какое именно выражение с целой частью нужно брать, если это не так.

Пусть $\mathcal{D}_n$ – "обобщенно"-трехдиагональная матрица, у которой по главной диагонали расположено $\sqrt{n}/4$ чисел $37/15n$, после этого $n+1-2\sqrt{n}/4$ нулей, а далее опять $\sqrt{n}/4-1$ чисел $37/15n$:

$$\mathcal{D}_n=\begin{pmatrix}
\frac{37}{15n} & 1 & & & & & & & & & 1\\
1 & \frac{37}{15n} & 1 & & & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
 & & 1 & \frac{37}{15n} & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \frac{37}{15n} & 1 & \\
 & & & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & & & & & & & & & 1 & \frac{37}{15n}
\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\leq\left(4-\frac{37}{15n}\right)\mathcal{E}_n+\mathcal{D}_n, \tag{2}$$

потому что при $\sqrt{n}/4\leq k\leq n-\sqrt{n}/4$ при больших n

$$2\cos\frac{2\pi k}{n}\leq 2-\frac{\pi^2}{4n}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)<2-\frac{37}{15n}$$

(так как $\pi^2/4\approx 2.467>37/15=2.466$).

Оценим наибольшее собственное число $\lambda_{\mathcal{D}_n}$. Очевидно,

$$2 < \lambda_{\mathcal{D}_n} < 2 + \frac{37}{15n}.$$

Пусть

$$\lambda_{\mathcal{D}_n} = 2 + \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{37}{15n}.$$

Мы получим более тонкую оценку

$$\alpha < \frac{5}{11n} = \frac{0.454}{n}.$$

Тогда результат леммы будет сразу следовать из неравенства (2).

Будем вести рассуждения от противного. Допустим, что $\alpha > 5/11n$. Пользуясь этим предположением для устранения технических затруднений, мы получим ниже противоречащую оценку $\alpha < 5/11n$. Этим будет доказано, что все таки $\alpha < 5/11n$. Только утверждения п. 4 ниже используют сделанное предположение.

Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$ – собственный вектор для числа $\lambda_{\mathcal{D}_n}$:

$$\mathcal{D}_n \mathbf{v} = (2 + \alpha)\mathbf{v}. \tag{3}$$

Для удобства будем считать, что v_k определено при всех $k \in \mathbb{Z}$ по периодичности. Нормируем вектор $\mathbf{v}$ условием $\max\limits_k v_k = 1$. Напомним, что все v_i неотрицательны.

Отметим некоторые свойства вектора $\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{v}$ – собственный вектор кратности 1. В силу этого он симметричен: $v_k = v_{n+2-k}$ (считаем, что $v_{n+1} = v_1$).
2. $\max\limits_k v_k = v_1 = 1$, $\min\limits_k v_k = v_{n/2}$.

Действительно, при $-\sqrt{n}/4 + 1 \le k \le \sqrt{n}/4$ из соотношения (3) следует, что

$$v_{k-1} + v_{k+1} = \big(2 - \frac{37}{15n} + \alpha\big) v_k, \tag{4}$$

то есть, $v_{k-1} + v_{k+1} < 2v_k$, и v_k не может быть локальным минимумом. Аналогично при $\sqrt{n}/4 < k \le n - \sqrt{n}/4$

$$v_{k-1} + v_{k+1} = (2 + \alpha) v_k, \tag{5}$$

то есть, $v_{k-1} + v_{k+1} > 2v_k$, и v_k не может быть локальным максимумом. Осталось воспользоваться симметрией вектора $\mathbf{v}$.

3. $v_{\sqrt{n}/4} = v_{n-\sqrt{n}/4+2} > \frac{12}{13}$ при достаточно больших n.

Действительно, из соотношения (4) получаем

$$v_k - v_{k+1} = \Big(\frac{37}{15n} - \alpha\Big)v_k + (v_{k-1} - v_k) \le \frac{37}{15n} + (v_{k-1} - v_k).$$

Складывая такие соотношения, мы придем к неравенству

$$v_k - v_{k+1} \le \frac{37}{15n}(k-1) + (v_1 - v_2),$$

откуда

$$v_1 - v_{\sqrt{n}/4} \le \frac{37}{15n}\big(1 + 2 + \dots + (\sqrt{n}/4 - 1)\big) + \big(\sqrt{n}/4 - 1\big)(v_1 - v_2).$$

Осталось заметить, что первое слагаемое не превосходит $\frac{1}{32}\cdot\frac{37}{15} = \frac{37}{480} < \frac{1}{13}$, а второе – не превосходит $\frac{37}{120\sqrt{n}}$ (это следует из (4) при $k = 1$ и симметрии вектора $\mathbf{v}$). Таким образом, при больших n $v_{\sqrt{n}/4} > \frac{12}{13}$.

4. При больших n $v_{\sqrt{n}/4+1} + v_{\sqrt{n}/4+2} + \dots + v_{n-\sqrt{n}/4} > \frac{24}{13\sqrt{\alpha}}$.

Действительно, решая однородное разностное уравнение (5) и учитывая симметрию $\mathbf{v}$, мы приходим к формуле

$$v_{n/2+k} = C_0\Big(\Big(1 + \alpha/2 + \sqrt{\alpha + \alpha^2/4}\Big)^k + \Big(1 + \alpha/2 - \sqrt{\alpha + \alpha^2/4}\Big)^k\Big)$$
$$(-n/2 + \sqrt{n}/4 \le k \le n/2 - \sqrt{n}/4).$$

Таким образом, нам нужно всего лишь оценить сумму геометрической прогрессии. Обозначим для краткости $N = n/2 - \sqrt{n}/4$, $x = 1 + \alpha/2 + \sqrt{\alpha + \alpha^2/4}$, тогда $x^{-1} = 1 + \alpha/2 - \sqrt{\alpha + \alpha^2/4}$,

$$\begin{aligned} v_{\sqrt{n}/4+1} + v_{\sqrt{n}/4+2} + \dots + v_{n-\sqrt{n}/4} &= C_0 \sum_{k=-N}^{N} (x^k + x^{-k}) = \\ &= 2C_0 \frac{x^{N+1/2} - x^{-(N+1/2)}}{x^{1/2} - x^{-1/2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу предположения $\alpha > \frac{5}{11n}$, $x^N = e^{\mathrm{const}\sqrt{n}}$, $x^{-N} = e^{-\mathrm{const}\sqrt{n}}$, поэтому $x^{N+1/2} - x^{-(N+1/2)} \ge (1-\varepsilon)x^{N+1/2}$ при любом положительном ε, если только n достаточно велико. Заметим также, что

$$\frac{1}{x^{1/2} - x^{-1/2}} = \frac{x^{1/2} + x^{-1/2}}{x - x^{-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{\alpha + \alpha^2/4}} \ge \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}.$$

Теперь мы можем получить оценку снизу в равенстве (6):

$$\sum_{k=-N}^{N} v_{n/2+k} = 2C_0 \frac{x^{N+1/2} - x^{-(N+1/2)}}{x^{1/2} - x^{-1/2}} \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^2 \frac{2C_0 x^N x^{1/2}}{\sqrt{\alpha}} = (1-\varepsilon)^2 \frac{2v_{\sqrt{n}/4}}{\sqrt{\alpha}} > \frac{24}{13\sqrt{\alpha}},$$

(ε следует выбрать так, чтобы не нарушилось неравенство п. 3, использованное в последнем переходе).

Чтобы завершить доказательство леммы 2, сложим равенства (4) и (5) при всех k:

$$\frac{37}{15n} \sum_{k=-\sqrt{n}/4+1}^{\sqrt{n}/4} v_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Благодаря нормировке $0 \leq v_i \leq 1$ и неравенству п. 4 мы легко оценим обе части

$$2 \cdot \frac{37}{15n}\sqrt{n}/4 > \frac{37}{15n} \sum_{k=-\sqrt{n}/4+1}^{\sqrt{n}/4} v_k \geq \alpha \sum_{k=\sqrt{n}/4+1}^{n-\sqrt{n}/4} v_k > \frac{24}{13}\sqrt{\alpha}.$$

Итак,

$$\alpha \leq \left(\frac{37 \cdot 2 \cdot 13}{24 \cdot 15 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{11n}.$$

Лемма 2.2 доказана. □

Для наибольших собственных чисел оператор $\tilde{\Delta}_n$ в других представлениях T_k мы приводим только оценку сверху. Она хуже, чем в лемме 2.2, хотя мы уверены, что λ_n из леммы 2.2 – наибольшее среди собственных чисел матриц $T_q(\Delta_n)$ при всех q. Пусть μ_n – наибольшее собственное число оператора $\tilde{\Delta}_n$ в любом из представлений T_q.

Лемма 2.3. $\mu_n \leq 4 - \frac{3}{5n}$.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 2.2 подберем матрицу, мажорирующую $T_q(\tilde{\Delta}_n)$. Для этого $\sqrt{n}/3$ самых крупных выражений вида $2\cos\frac{2\pi qj}{n}$, стоящих на диагонали, заменим на 2, а остальные диагональные элементы – на $2 - 1/n$ (здесь мы пользуемся тем, что $\cos\frac{2\pi\sqrt{n}/6}{n} \le 2 - \frac{\pi^2}{9n} + O(\frac{1}{n^4}) < 2 - \frac{1}{n}$ при больших n). Тогда будет выполнено неравенство

$$T_q(\tilde{\Delta}_n) + 2\mathcal{E}_n \le (4 - \frac{1}{n})\mathcal{E}_n + \tilde{\mathcal{D}}_n,$$

где $\tilde{\mathcal{D}}_n$ – матрица, аналогичная $\mathcal{D}_n$, у которой по диагонали расположены $\sqrt{n}/3$ чисел $1/n$ (в местах, соответствующих крупным косинусам), а остальные диагональные элементы равны нулю. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$ – собственный вектор для числа $\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}_n}$, нормированный условием $\max_k v_k = 1$. Как и раньше, обозначим $\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}_n} = 2 + \alpha$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что $\alpha \le 2/5n$.

Компоненты вектора $\mathbf{v}$ удовлетворяют соотношениям

$$v_{k-1} + v_{k+1} = \big(2 - \frac{1}{n} + \alpha\big)v_k \quad \text{или} \quad v_{k-1} + v_{k+1} = (2+\alpha)v_k.$$

Домножим каждое соотношение на v_k и просуммируем по всем k:

$$2\sum_{k=1}^{n} v_k v_{k+1} = -\frac{1}{n}\sum{}' v_k^2 + (2+\alpha)\sum_{k=1}^{n} v_k^2,$$

где значок $\sum'$ обозначает суммирование по всем k, для которых k-я строка матрицы $\tilde{\mathcal{D}}_n$ содержит на диагонали $1/n$ (напомним, что всего имеется $\sqrt{n}/3$ таких k). Перепишем это равенство в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1})^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \frac{1}{n}\sum{}' v_k^2. \tag{7}$$

Для правой части очевидна оценка сверху

$$\frac{1}{n}\sum{}' v_k^2 \le \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{n}}. \tag{8}$$

Применив при необходимости циклическую перестановку координат, мы можем считать, что $v_1 = \max_k v_k$. Тогда для любого s мы имеем следующую оценку снизу для левой части:

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1})^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} v_k^2 \ge \sum_{k=1}^{s}(v_k - v_{k+1})^2 \ge \frac{(1-v_s)^2}{s}. \tag{9}$$

Здесь второе неравенство – это неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном (или его простое следствие, если среди разностей $v_k - v_{k+1}$ есть отрицательные). Комбинируя (7), (8) и (9), получаем неравенство

$$(1-v_s)^2 \le \frac{s}{3\sqrt{n}},$$

откуда, учитывая что $0 \le v_s \le 1$,

$$v_s \ge 1 - \sqrt{\frac{s}{3\sqrt{n}}}.$$

Как и в доказательстве предыдущей леммы, мы можем считать, что последовательность v_k определена при всех $k \in \mathbb{Z}$ по периодичности. Тогда при $|s| \le 5/4\sqrt{n}$

$$v_s \ge 1 - \sqrt{\frac{|s|}{3\sqrt{n}}} \ge 1 - \sqrt{5/12}.$$

Теперь мы можем написать еще одну оценку снизу для равенства (7):

$$\frac{1}{3\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}\sum{}' v_k^2 = \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1})^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} v_k^2 \ge$$

$$\ge \alpha \sum_{k=-\frac{5}{4}\sqrt{n}}^{\frac{5}{4}\sqrt{n}} v_k^2 \ge \left(1-\sqrt{5/12}\right)\alpha\cdot\frac{5}{2}\sqrt{n}.$$

Таким образом,

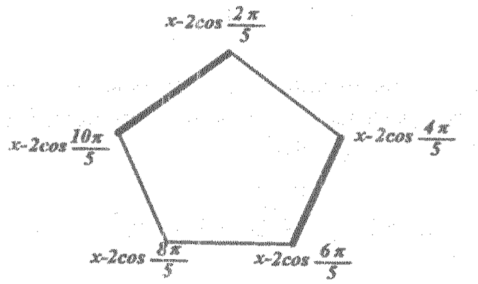
$$\alpha \le \frac{2}{15(1-\sqrt{5/12})}\cdot\frac{1}{n} \approx 0.376\cdot\frac{1}{n} < \frac{2}{5n}.$$

Лемма 2.3 доказана. □

3. Комбинаторное описание характеристического полинома.

В этом пункте мы дадим комбинаторную реализацию характеристических полиномов $P_{n,q}$ матриц $T_q(\tilde{\Delta}_n)$.

Рассмотрим граф, представляющий собой цикл из n вершин. Пронумеруем вершины в порядке обхода цикла, k-й вершине сопоставим вес $x - 2\cos\frac{2\pi q k}{n}$, а каждому ребру сопоставим вес -1. Назовем этот помеченный граф $\Gamma_{n,q}$. Произвольному набору ξ, состоящему из нескольких непересекающихся ребер графа $\Gamma_{n,q}$, сопоставим вес w_ξ, равный произведению весов всех ребер, входящих в этот набор, и весов всех вершин графа, не принадлежащих этим ребрам. Например, на рисунке изображен граф $\Gamma_{5,1}$. Вес набора, состоящего из двух жирных ребер, равен $x - 2\cos\frac{8\pi}{5}$, а вес "пустого" набора – $\prod_{k=1}^{5}(x - 2\cos\frac{2\pi k}{5})$. Пусть $K_{n,q}(x) = \sum_\xi w_\xi$, где суммирование ведется по всем возможным наборам непересекающихся ребер.



Лемма 3.1. $P_{n,q}(x) = K_{n,q}(x) + 2(-1)^n$.

Доказательство. Пусть для краткости $x\mathcal{E}_n - T_q(\Delta_n) = (a_{ij})$. Тогда по определению определителя

$$P_{n,q} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{10}$$

Напомним, что матрица (a_{ij}) трехдиагональная. Рассмотрим какой-нибудь ненулевой одночлен из правой части этого равенства. Пусть в него входят сомножители a_{kk} и $a_{k+1\,k+2}$. Тогда из следующей строки в него обязательно входит сомножитель $a_{k+2\,k+1}$. Нетрудно видеть, что внедиагональные элементы матрицы (a_{ij}) входят в каждый ненулевой одночлен парами вида $a_{k\,k+1}, a_{k+1\,k}$ (исключение составляют лишь два одночлена $a_{12}a_{23}\dots a_{n1}$ и $a_{21}a_{32}\dots a_{1n}$). Это дает возможность построить биекцию между наборами непересекающихся ребер и ненулевыми одночленами в равенстве (10), а именно: набору ребер (k_1, k_1+1), (k_2, k_2+1) ... поставим в соответствие одночлен

$$a_{11}\dots a_{k_1-1\,k_1-1} a_{k_1\,k_1+1} a_{k_1+1\,k_1} a_{k_1+2\,k_1+2} \dots a_{k_2,k_2+1} a_{k_2+1\,k_2} \dots .$$

Знак, стоящий перед этим одночленом, определяется четностью числа ребер, что как раз и учитывается весом ребер. Двум исключительным одночленам соответствует слагаемое $2(-1)^n$. Лемма 3.1 доказана. □

4. Оценка спектральной меры для бесконечной группы Гейзенберга.

Пусть δ_e – характеристическая функция единицы группы, как элемент пространства L^2 над этой группой. Мы будем использовать это обозначение в применении к различным группам, не боясь путаницы. В этом параграфе мы оценим величину $(E_t\delta_e, \delta_e)$, где E_t – спектральный проектор оператора Δ, соответствующий множеству $[-1, -1+t) \cup (1-t, 1]$.

Отметим, что для оператора Лапласа в $\mathbb{Z}^n$, построенного по стандартным образующим, пользуясь преобразованием Фурье, легко показать что $(E_t\delta_e, \delta_e) \sim \mathrm{const} t^{n/2}$.

Следующая несложная лемма является ключевым элементом для перехода от бесконечной группы к конечной.

Лемма 4.1. *Пусть n – произвольное натуральное число, $N = n^2 + 1$. Тогда при всех $k \leq n$ $(\Delta^k\delta_e, \delta_e) = (\Delta_N^k\delta_e, \delta_e)$. Здесь левая часть – это скалярное произведение в $L^2(H)$, правая – в $L^2(H_N)$.*

Доказательство. Оператор Δ^k, как элемент групповой алгебры группы H, можно представлять как линейную комбинацию матриц $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, каждая из которых – произведение k образующих группы (или их обратных). Искомое скалярное произведение равно коэффициенту при единичной матрице в таком разложении. Очевидно, что в каждой такой матрице координаты a и b не превосходят k, а координата c – не превосходит квадратичной функции от k. По индукции нетрудно проверить, что $|c| \leq k^2/2$. Вычисления в группе H_N отличаются тем, что элементы матриц – это не числа, а остатки (а ещё лучше – вычеты из диапазона от $-N/2$ до $N/2$). Поэтому при $k \leq n$ мы получим формально одинаковые результаты в H и H_N. Лемма 4.1 доказана. □

Лемма 4.2. *Для всякого $\alpha > 0$ существует константа $c_0 > 0$, сколь угодно большое натуральное число n и полином $P_n(x)$ степени n, которые обладают следующими свойствами:*

1) $|P_n(x)| \leq 1$ *при* $|x| \leq 1$, $P_n(1) = 1, P_n(-1) = 1$;

2) $|P_n(x)| \le \frac{1}{n^6}$ *при* $|x| \le 1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}$;

3) $P_n(x) \ge s_0$ *при* $1 - \frac{1}{n^2} \le |x| \le 1$.

Доказательство. В качестве такого полинома можно взять правильным образом отмасштабированный полином Чебышева. Действительно, пусть

$$P_n(x) = S_n T_n\big(\frac{n^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha}-1}\, x\big),$$

где C_n – нормировочная константа. При $|x| \ge 1$ для полиномов Чебышева имеет место формула

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\big(x + \sqrt{x^2-1}\,\big)^n + \big(x - \sqrt{x^2-1}\,\big)^n\Big).$$

Отсюда при $x = \pm 1$ и $n \to +\infty$ получаем:

$$P_n(x) \sim \frac{C_n}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n^{1-\alpha/2}}\right)^n \sim C_n e^{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}. \tag{11}$$

Таким образом, можно взять $C_n \sim 2e^{-\sqrt{2}n^{\alpha/2}}$. Это автоматически обеспечит нам не полиномиальную, а экспоненциальную малость $P_n(x)$ при $|x| < 1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ (точнее, при $|x| < 1 - \frac{2}{n^{2-\alpha}}$) и отделенность от нуля при $1 - \frac{1}{n^2} \le |x| \le 1$. Лемма 4.2 доказана. $\square$

Замечание. Из минимаксных свойств полинома Чебышева сразу следует, что показатель $2-\alpha$ в условии 2) леммы 4.2 нельзя заменить на 2. Действительно, в этом случае из оценки, аналогичной (11), мы получили бы, что C_n не стремится к нулю, поэтому многочлен P_n, а вместе с ним и любой другой многочлен, удовлетворяющий условию 1), не будет маленьким внутри $[-1,1]$, даже если не накладывать дополнительно условие 3).

Теорема 4.3. *Для всякого* $\alpha > 0$ *при достаточно малых* n $c_1 t^{2+\alpha} \le (E_t\delta_e, \delta_e)$.

Доказательство. Пусть $t = 1/n^2$, $N = n^2+1$, χ_t – характеристическая функция множества $A_t = [-1, -1+t] \cup [1-t, 1]$. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы подменить функцию χ_t на многочлен, после чего "переместить" все вычисления из бесконечной группы Гейзенберга в конечную.

Для многочленов P_n из леммы 4.2 выполнены неравенства

$$s_0\chi_t(x) \le P_n(x) \le \chi_{t^{1-\alpha}}(x) + \frac{1}{n^6}.$$

Следовательно,

$$s_0\mu(A_t) \le \|P_n(\Delta)\|^2 \le \mu(A_{t^{1-\alpha}}) + \frac{1}{n^6}.$$

Причем верно также аналогичное неравенство для операторов Δ_N. Поскольку $\deg P_n = n$, то аналогично лемме 4.1 имеет место равенство

$$\|P_n(\Delta)\|^2 = \|P_n(\Delta_N)\|^2.$$

Таким образом,

$$\mu(A_{t^{1-\alpha}}) + \frac{1}{n^6} \ge \|P_n(\Delta)\|^2 = \|P_n(\Delta_N)\|^2 \ge s_0\mu_N(A_t). \tag{12}$$

Правая часть этого неравенства вычисляется в регулярном представлении конечной группы Гейзенберга H_N. Заметим, что, благодаря оценкам леммы 2.3, для вычисления правой части достаточно использовать информацию только об одномерных представлениях группы H_N (напомним, что $t = \frac{1}{n^2} \asymp \frac{1}{N}$)! Таким образом,

$$\mu_N(A_t) \ge \frac{1}{N^3} \sum_{s,t:\frac{s^2+t^2}{N^2} \le \frac{1}{n^2}} 1 \quad \ge \frac{1}{n^4}$$

(в последнем неравенстве мы оценили число слагаемых как $N^2/n^2 \asymp n^2$). Вместе с (12) это дает требуемое неравенство. Формально для применения леммы 2.3 требуется, чтобы N было простым числом, поэтому окончательный результат получается при более аккуратном выборе N (например, в качестве N можно взять любое простое число из диапазона $[n^2+1, 2n^2+1]$). Теорема 4.3 доказана. $\square$

К сожалению, таким же способом получить оценку вида $(E_t\delta_e, \delta_e) \le c_2 t^{2-\alpha}$ не удается. Для того чтобы “откинуть” многомерные представления, требуется выбрать слишком малое t. Но тогда в силу замечания после леммы 4.2 многочлен P_n не будет хорошо аппроксимировать функцию χ_t.

В работе [6] приводится следующая оценка снизу для спектральной меры оператора Лапласа на аменабельной группе:

$$(E_t\delta_e, \delta_e) \ge \frac{1 - \frac{2\varepsilon}{t^2}}{|A_\varepsilon|},$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, $|A_\varepsilon|$ – величина ε-множества Фельнера. Наилучшее значение правой части при фиксированном t достигается при $\varepsilon = O(t^2)$. В этом случае числитель – некоторая константа, а знаменатель – по-видимому, выражение порядка $1/\varepsilon^4$. Мы получаем оценку $(E_t\delta_e, \delta_e) \geq Ct^8$, что значительно хуже нашей грубой оценки.

Литература

1. J. Avron, P. H. M. van Mouche, B. Simon, *On the measure of the spectrum for almost Mathieu operator.* — Comm. Math. Phys. **132** (1990), 103–118.
2. C. Béguin, A. Valette, A. Zuk, *On the spectrum of a random walk on the discrete Heisenberg group and the norm of Harper's operator.* — J. of Geom. and Phys. **21** (1997), 337–356.
3. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* т.1. М. (1984).
4. F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras.* Springer-Verlag (1989).
5. D. R. Hofstadter, — Phys. Rev. **B14** (1976), 2239.
6. Кайманович В. А., *Спектральная мера оператора перехода и гармонические функции, связанные со случайным блужданием на дискретных группах.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **97** (1980), 102–109.
7. K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, H. Suzuki, *Quantum Hall Dynamics on von Neumann lattice.* cond-mat/9809287.

Kokhas K., Suvorov A. Spectral estimations for Laplace operator for the discrete Heisenberg group.

Let H be the discrete 3-dimensional Heisenberg group with the standard generators x, y, z. The element Δ of the group algebra for H of the form $\Delta = (x + x^{-1} + y + y^{-1})/4$ is called the Laplace operator. This operator can also be defined as transition operator for random walk on the group.

The spectrum of Δ in the regular representation of H is the interval $[-1, 1]$. Let $E(A)$, where A is a subset of $[-1, 1]$, be a family of spectral projectors for Δ and $m(A) = (E(A)e, e)$ be the corresponding spectral measure. Here e is the characteristic function of the unit element of the group H. We estimate the value $m([-1, -1+t] \cup [1-t, 1])$ when t tends to 0. More precisely we prove the inequality

$$m([-1, -1+t] \cup [1-t, 1]) > \mathrm{const}\, t^{2+alpha}$$

for any positive alpha.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 июня 1999 г.