Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

О. М. Фоменко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА, БИНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

§0. Введение

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – положительно определенная примитивная квадратичная форма от $k \geqslant 2$ переменных, d – ее дискриминант. R и C – род и класс формы f соответственно. Натуральное число n, представимое родом R (классом C) называется R-представимым (C-представимым). Число, представимое родом R, но не классом C, называется C-исключительным. Обозначим через $S(R)$, $S(C)$ и E множества R-представимых, C-представимых и C-исключительных чисел соответственно. Справедливо соотношение

$$S(R) = S(C) \smile E,$$

а также аналогичное соотношение для пересечений указанных множеств с отрезком $[1, x]$:

$$S(n \leqslant x; R) = S(n \leqslant x; C) \smile E(x).$$

Пусть $\#S(n \leqslant x; R) = B(n \leqslant x; R)$, $\#S(n \leqslant x; C) = B(n \leqslant x; C)$, $\#E(x) = \Delta(x)$. Тогда

$$B(n \leqslant x; C) = B(n \leqslant x; R) - \Delta(x). \tag{1}$$

Классики нашли в явном виде (при $k \geqslant 2$) множество $S(R)$. Отсюда стало возможным нахождение в явном виде (при $k \geqslant 3$) множества $S(C)$. Для этого на протяжении десятилетий создавались мощные аналитические методы.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00663).

При $k \geqslant 3$ имеем соотношение

$$B(n \leqslant x; R) \sim c\,x \quad (x \to \infty),$$

где $0 < c \leqslant 1$. Для всех $k \geqslant 2$ известно, что

$$B(n \leqslant x; C) = B(n \leqslant x; R)\{1 + o(1)\}, \tag{2}$$

т.е. почти все R-представимые числа являются C-представимыми. Известно и больше: при $k \geqslant 5$ множество E конечно, при $k = 4, 3$ множество E может быть и конечным и бесконечным, причем оно (в принципе) находится в явном виде. Поэтому можно определить поведение $\Delta(x)$ $(x \to \infty)$.

Подробнее скажем о тернарных формах; для них

$$\Delta(x) \ll x^{1/2}.$$

В конкретных случаях возможны уточнения. Например (см. [1]), тернарные формы $f = x_1^2+3x_2^2+36x_3^2$ и $g = 3x_1^2+4x_2^2+9x_3^2$ принадлежат классам C_1 и C_2 соответственно, образующим двухклассный род R. Имеем

$$S(R) = S(C_1); \quad S(R) = S(C_2) \cup E,$$

где E состоит из всех чисел вида

$$n = s^2, \quad s = \prod_{\substack{p \mid s \\ p \equiv 1 \pmod 3}} p^r.$$

Тем самым,

$$\Delta(x) \sim \frac{a x^{1/2}}{(\log x)^{1/2}} \quad (x \to \infty),$$

где $a > 0$ – константа.

Теперь рассмотрим бинарный случай ($k = 2$), который стоит особняком. К числу немногих известных общих фактов о представимости целых чисел классом бинарных форм относится соотношение (1) при $k = 2$, в котором

$$B(n \leqslant x; R) \sim \frac{b\,x}{(\log x)^{1/2}} \quad (x \to \infty), \tag{3}$$

где $b > 0$ – константа, и

$$\Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{2/3}}; \tag{4}$$

по поводу (3) см. [2], по поводу (4) и сходных оценок см. [3, 4].

Из (3), (4) вытекает теорема Бернайса [2]

$$B(n \leqslant x; C) \sim \frac{b\,x}{(\log x)^{1/2}} \quad (x \to \infty),$$

а также (2) для $k=2$. Последний факт, видимо, не был известен классикам. В неявной форме он впервые был получен в работе Б. М. Бредихина и Ю. В. Линника (см. [5] и комментарий к ней в [3]). Других общих результатов о множестве $S(C)$ нет. Даже о его подмножестве $S(P;C)=\{p|p\in S(C)\}$ известно довольно мало. Доказанные к настоящему времени факты, характеризующие принадлежность простых p к множеству $S(P;C)$, относятся лишь к конкретным формам. Для простых чисел закон типа (2) не выполняется, он заменяется другим законом (это старый результат Ландау [6], см. п. 2.1).

В §2 настоящей работы рассматривается задача – перенести (2) ($k=2$) на некоторые бесконечные последовательности возрастающих целых чисел $\{a_n\}$, т.е. получить закономерности вида ($x \to \infty$)

$$B(a_n; n \leqslant x; C) = B(a_n; n \leqslant x; R)\{1+o(1)\},$$

где обозначения имеют вполне понятный смысл, а точное их определение см. в п. 2.1. В общем задача трудна, но удается изучить последовательности ($n=1,2,\ldots$): $a_n=p_n+l$, $l\neq 0$; $a_n=n(n+1)$; $a_n=n^2+a$, $a\neq 0$ (только в частных случаях); $a_n=n^f$; $a_n=qn+l$.

Отсылая за подробностями к теоремам 2–6, приведем лишь конкретный пример. Рассмотрим положительно определенные примитивные бинарные квадратичные формы дискриминанта $d=-164$. Они распадаются на 2 рода, в каждом из которых 4 класса. Пусть $-a$ – дискриминант квадратичного поля, $(a,82)=1$, C – любой из 8 классов. Имеем ($x\to\infty$)

$$B(n^2+a; n \leqslant x; C) = B(n^2+a; n \leqslant x; R)\left\{1+O\left(\frac{1}{(\log x)^{\delta})}\right)\right\},$$

где

$$B(n^2+a; n \leqslant x; R) \gg_{\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^{\log 2+\varepsilon}}, \quad \delta = 0,00510\ldots$$

Отметим, что в теореме 6 доказывается аналог теоремы Бернайса для арифметических прогрессий с растущей разностью.

Необходимые в §§2, 3 леммы о мультипликативных функциях приведены в §1, там же они прилагаются к исследованию поведения в среднем модулей коэффициентов Фурье параболических форм. В частности, в теореме 1 уточняются некоторые результаты работы [4].

В §3 результаты §1 используются при получении асимптотической формулы ($x \to \infty$) для суммы

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;C)>0}} \frac{1}{r(n;C)},$$

где $r(n;C)$ – количество представлений n классом C. В случае многоклассного рода R, которому принадлежит C, эта задача решается лишь при некоторых ограничениях. Доказанный результат (теорему 8) проиллюстрируем на простейшем примере. Рассмотрим положительно определенные примитивные бинарные квадратичные формы дискриминанта $d = -23$. Они образуют 1 род, содержащий 3 класса. Пусть C – любой из них. Тогда

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;C)>0}} \frac{1}{r(n;C)} = \frac{K_1 x}{(\log x)^{3/4}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{\frac{5}{6}-\varepsilon}}\right),$$

где $K_1 > 0$.

Обозначения.

1) d – дискриминант положительно определенной примитивной бинарной квадратичной формы – всегда предполагается фундаментальным. Будем говорить, что выполняется условие $(*)$, если

$$d = -P, \quad \text{где} \quad P \equiv 3 \pmod 4 \text{ – простое число.} \tag{$*$}$$

2) суммы типа

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;C)>0}} \frac{1}{r(n;C)}$$

могут быть записаны в эквивалентной форме

$$\sideset{}{'}\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{r(n;C)};$$

3) ε всегда означает произвольно малое фиксированное положительное число.

§1. Леммы о мультипликативных функциях. Поведение в среднем модулей коэффициентов Фурье параболических форм

1.1. Пусть $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ – положительно определенная примитивная бинарная квадратичная (п.п.б.к.) форма дискриминанта $d = b^2 - 4ac < 0$. Пусть $\Theta(z; f)$ – тета-ряд формы f. Имеем

$$\Theta(z; f) = E(z; f) + S(z; f), \tag{5}$$

где $E(z; f)$ – ряд Эйзенштейна, ассоциированный с тета-рядом, $S(z; f)$ – параболическая форма, входящая в тета-ряд. Переходя от равенства (5) к равенству соответствующих коэффициентов Фурье, имеем

$$r(n; f) = e(n; f) + s(n; f), \tag{5'}$$

где $r(n; f)$ – количество представлений n формой f.

Пусть C, R и O означают соответственно класс, род и множество всех п.п.б.к. форм дискриминанта d. Будем использовать хорошо известное соответствие между классами C п.п.б.к. форм дискриминанта d и классами идеалов $\tilde{C}$ мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Пусть h, h_0, h_1 – число всех классов п.п.б.к. форм дискриминанта d, число классов в роде, число родов соответственно (те же обозначения будут употребляться для идеалов). Обозначим через χ_3 характеры группы классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ порядка $k \geqslant 3$. С каждым таким характером χ_3 свяжем параболическую форму

$$S(z; \chi_3) = \sum_{\mathfrak{A}} \chi_3(\mathfrak{A}) \exp(2\pi i N\mathfrak{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n, \chi_3) e^{2\pi i n z},$$

где суммирование $\sum\limits_{\mathfrak{A}}$ идет по всем ненулевым целым идеалам $\mathfrak{A}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. $S(z; \chi_3)$ является параболической формой веса 1 и характера $\chi_d(n) = (d/n)$ для группы $\Gamma_0(|d|)$, где $\chi_d(n)$ есть характер поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Более того, $S(z; \chi_3)$ является новой формой и соответствует диэдральному представлению (по классификации

Серра [7]). Как показано, например, в [4], параболическая форма $S(z;f)$ есть линейная комбинация новых форм $S(z;\chi_3)$.

Введем мультипликативную функцию $\lambda(n)=\lambda(n,\chi_3)=|\sigma(n,\chi_3)|$. Ее свойства легко следуют из теории Гекке, но впервые были выведены непосредственно в [8]. Достаточно рассмотреть поведение $\lambda(n)$ на степенях простых чисел. Пусть p – простое число с условием $\chi_d(p)=1$; тогда $p=\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ есть норма простых идеалов первой степени и

$$\lambda(p^a)=\left|1+\sum_{\nu=1}^{a}\chi_3^{2\nu}(\mathfrak{p})\right| \quad (a=0,1,2,\ldots). \tag{6}$$

Пусть p – простое число с условием $\chi_d(p)=-1$, тогда

$$\lambda(p^{2b})=1 \quad (b=0,1,2,\ldots),$$
$$\lambda(p^{2b+1})=0 \quad (b=0,1,2,\ldots).$$

Пусть p – простое число с условием $\chi_d(p)=0$, тогда $\lambda(p^e)=1$ $(e=0,1,2,\ldots)$. Легко видеть, что $\lambda(n)\leqslant d(n)$ (число делителей n).

В настоящем параграфе мы вернемся к задаче, уже рассмотренной в [4], – исследованию суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\lambda(n),$$

причем получим более точные результаты (см. также [9]). Ранее в [4] было доказано, что

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\lambda(p)}{p}=\gamma(k)\log\log x+O(1), \tag{7}$$

где $\gamma(k)=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\left|\cos\frac{2\pi l}{k}\right|$, k – степень характера χ_3. Имеем

$$\gamma(k)=\frac{2}{k\,\mathrm{tg}\,\pi/k}, \quad \text{если} \quad k\equiv 0 \pmod 4;$$
$$\gamma(k)=\frac{1}{k\sin\pi/2k}, \quad \text{если} \quad k\equiv 1,3 \pmod 4;$$
$$\gamma(k)=\frac{2}{k\sin\pi/k}, \quad \text{если} \quad k\equiv 2 \pmod 4.$$

Тем самым, для $k \equiv 0 \pmod 4$

$$\frac{1}{2} \leqslant \gamma(k) < \frac{2}{\pi} = 0,63\ldots;$$

для $k \equiv 1, 3, 2 \pmod 4$

$$\frac{2}{\pi} < \gamma(k) \leqslant \frac{2}{3}.$$

Сформулируем теперь результат М. Б. Барбана и П. П. Вехова [10] в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $t(n)$ *– мультипликативная функция,* $t(n) \geqslant 0$, $t(p^k) \ll k$, *где* c *– константа,* $k = \overline{1, \infty}$ *(*p *простое),* $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *– неприводимый (над кольцом целых) полином,* $(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1$, *тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} t(F(n)) \ll x \exp\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{\rho(p)(t(p)-1)}{p}\right).$$

Здесь $\rho(a)$ *– число решений сравнения* $F(n) \equiv 0 \pmod a$, $0 \leqslant n < a$, $\ll$ *– константа зависит от* $t(n)$ *и* $F(x)$.

Нам также потребуется равномерный вариант частного случая леммы 1, в котором переменная пробегает арифметическую прогрессию с растущей разностью (см. [11]).

Лемма 1′. *Пусть* $t(n)$ *– мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям леммы* 1; *пусть* $(l, q) = 1$, $q \leqslant x^{1-\varepsilon}$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{n \leqslant z \\ n \equiv l \pmod q}} t(n) \ll \frac{x}{\varphi(q) \log x} \exp\left(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \nmid q}} \frac{t(p)}{p}\right),$$

где $\ll$ *– константа зависит от* $t(n)$ *и* ε.

Следствием леммы 1 и (7) является доказанная в [4] оценка

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) \ll \frac{x}{(\log x)^{1-\gamma(k)}}. \tag{8}$$

Покажем, что вместо оценки (8) можно получить асимптотику. Для этого нам необходимы следующие факты, вытекающие из классических результатов Ландау об L-функциях полей алгебраических чисел,

$$\sum_{p\leqslant x}\lambda(p)=\gamma(k)x/\log x+O(x/(\log x)^2), \tag{9}$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\lambda(p)}{p}=\gamma(k)\log\log x+C(\chi_3)+O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{10}$$

где $C(\chi_3)$ – константа. Свойства функции $\lambda(n)$, в частности (9), (10), позволяют применить теоремы Вирзинга [12] и Одони [9], на основании которых можно получить следующий результат.

Теорема 1. *Для суммы модулей коэффициентов Фурье параболической формы $S(z;\chi_3)$ справедлива асипмтотика ($x\to\infty$)*

$$\sum_{n\leqslant x}\lambda(n)=\frac{e^{-E\gamma(k)+C(\chi_3)}}{\Gamma(\gamma(k))}P\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma(k)}}$$

$$+O\left(\frac{x}{(\log x)^{3/2-\gamma(k)-\varepsilon}}\right), \tag{10}$$

где E – константа Эйлера,

$$P=\prod_p\left\{e^{-\lambda(p)p^{-1}}\left(1+\frac{\lambda(p)}{p}+\frac{\lambda(p^2)}{p^2}+\dots\right)\right\}.$$

Сформулируем еще две леммы о мультипликативных функциях.

Лемма 2. *Пусть $t(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям леммы 1, $l\neq 0$ – целое число. Тогда*

$$\sum_{p\leqslant x}t(p+l)\ll\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{t(p)-1}{p}\right),$$

причем $\ll$ – константа зависит от $t(n)$ и l.

Доказательство использует метод работы М. Б. Барбана и Б. В. Левина [13] и здесь не приводится.

Лемма 3. *Пусть $t(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям леммы 1.*

Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} t(n)t(n+1) \ll x \exp\left(\sum_{p\leqslant x} \frac{2(t(p)-1)}{p}\right),$$

причем $\ll$ – константа зависит от $t(n)$.

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 1 и здесь не приводится.

Непосредственным следствием лемм 2 и 3 и равенства (7) являются следующие оценки

$$\sum_{p\leqslant x} \lambda(p+l) \ll \frac{x}{(\log x)^{2-\gamma(k)}},$$
$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n)\lambda(n+1) \ll \frac{x}{(\log x)^{2-2\gamma(k)}}.$$

1.2. Пусть $S_{2k}(\Gamma)$ – пространство голоморфных параболических форм четного веса $2k$ относительно полной модулярной группы $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n z}$ – нормализованная ($a(1)=1$) собственная функция всех операторов Гекке, принадлежащая пространству $S_{2k}(\Gamma)$. Пусть $a(n)/n^{k-1/2} = a_0(n)$. По известной оценке Делиня

$$|a_0(n)| \leqslant d(n).$$

Сделаем несколько замечаний по поводу переноса результатов предыдущего пункта на формулы типа $f(z)$. Аналоги результата (8) хорошо известны [14, 15]. Аналоги асимптотик (9) и (11) могут быть получены в настоящее время лишь с использованием трудных гипотез (типа Сато–Тейта). Эти аналоги имеют следующий вид [14, 15]:

$$\sum_{p\leqslant x} |a_0(p)| \sim \frac{8}{3\pi}\,\frac{x}{\log x};$$
$$\sum_{n\leqslant x} |a_0(n)| \sim A\,x(\log x)^{(8/3\pi)-1},$$

где $(8/3\pi)-1 = -0,15117\ldots$. В случае параболических форм $f(z)$ известно неравенство [14]

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{|a_0(p)|-1}{p}\leqslant -\frac{1}{18}\log\log x + O(1).$$

Сочетая леммы 2 и 3 с этим неравенством, получаем следующие оценки ($l\neq 0$ – целое число):

$$\sum_{p\leqslant x}|a_0(p+l)|\ll\frac{x}{(\log x)^{19/18}},$$
$$\sum_{n\leqslant x}|a_0(n)|\,|a_0(n+1)|\ll\frac{x}{(\log x)^{1/9}}.$$

§2. Представление целых чисел специального вида положительно определенными бинарными квадратичными формами

2.1. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ – некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел. Пусть $B(a_n; n\leqslant x; C)$ – количество натуральных a_n, $n\leqslant x$, которые могут быть представлены классом C п.п.б.к. форм $f(x_1,x_2)$ заданного дискриминанта d; $B(a_n; n\leqslant x; R)$ – аналогичная величина с заменой класса C на род форм $R=R(C)$.

В настоящем параграфе рассматривается задача – исследовать, для каких последовательностей $\{a_n\}$ справедливы соотношения типа $(x\to\infty)$

$$B(a_n; n\leqslant x; C) = B(a_n; n\leqslant x; R)\{1+o(1)\}; \tag{12}$$

при этом предполагаем, что $B(a_n; n\leqslant x; R)\to\infty$. Пусть $B(a_n; n\leqslant x; C) = B(a_n; n\leqslant x; R)-\Delta(x)$. В общем задача трудна и поддается анализу лишь в некоторых частных случаях. Рассмотрим сначала простейший из них.

В работах [3, 4] было показано, что (12) имеет место для $a_n = n$ $(n=1,2,\ldots)$, причем за исключением конечного числа классов, для которых $\Delta(x)\equiv 0$, справедливы оценки [4]

$$\frac{x}{\log x}\ll\Delta(x)\ll\frac{x}{(\log x)^{2/3}}. \tag{13}$$

Оценка снизу следует из хорошо известных фактов о представлении простых чисел бинарными формами; в [3] оценка сверху (13) в некоторых случаях была улучшена (см. также лемму 6 ниже). Известно, что $(x \to \infty, b > 0)$

$$B(n; n \leqslant x; R) = \frac{bx}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

так что для $a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (12) доказано.

Рассмотрим теперь последовательность $a_n = p_n$ (p_n – n-ое простое число; $n = 1, 2, \ldots$), для которой соотношение (12) не выполняется, за исключением конечного числа классов. Действительно, для

$$B(p \leqslant x; C) := B(p_n; n \leqslant \pi(x); C)$$

(аналогичный смысл имеет $B(p \leqslant x; R)$) справедливы соотношения $(x \to \infty)$

1) если C – амбиговый класс, то $(c > 0)$

$$B(p \leqslant x; C) = \frac{1}{h_0} B(p \leqslant x; R) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}});$$

2) если C – неамбиговый класс, то $(c > 0)$

$$B(p \leqslant x; C) = \frac{2}{h_0} B(p \leqslant x; R) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Известно, что

$$B(p \leqslant x; R) \sim c_1 \int\limits_2^x \frac{du}{\log u},$$

где $c_1 = \frac{1}{2h_1}$. Указанные факты впервые были получены Ландау [6].

2.2. Пусть $l \neq 0$ – целое число. Докажем (12) для последовательности $a_n = p_n + l$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем некоторые обозначения. Поскольку $r(n; f)$ постоянно для всех $f \in C$, иногда удобно писать $r(n; C) := r(n; f)$. Пусть $r(n; R)$ означает количество представлений n всеми классами рода R, $r(n; O)$ – количество представлений n всеми классами множества O. Известно, что

$$r(n; O) = w \sum_{\nu | n} \chi_d(\nu),$$

где $\chi_d(\nu)$ – характер поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; $w = 6, 4$ или 2.

Зафиксируем класс C, род $R = R(C) \ni C$ и множество $O = O(C) \ni R$. В работе [4] было получено равенство

$$r(n;C) = \frac{1}{h_0}\, r(n;R) + O\left(\sum_{\chi_3} \lambda(n)\right), \tag{14}$$

где $\lambda(n) = \lambda(n, \chi_3)$.

Пусть $R(x)$ – множество всех чисел вида $p + l$, $p \leqslant x$, представимых родом форм R; A – некоторое множество чисел, содержащееся в $R(x)$. Используя (14) и хорошо известные факты, имеем

$$\sum_{p+l\in A}{}' \frac{r(p+l;C)}{r(p+l;O)} = \frac{1}{h_0} \cdot \#A + O\left(\sum_{\chi_3} \sum_{p\leqslant x}{}' \frac{\lambda(p+l)}{r_0(p+l)}\right),$$

где $r_0(n) := \sum_{\nu|n} \chi_d(\nu)$. По лемме 2 и равенству (7) имеем

$$\sum_{p\leqslant x}{}' \frac{\lambda(p+l)}{r_0(p+l)} \ll \frac{x}{(\log x)^2} \exp\left(\sum_{p\leqslant x} \frac{\lambda(p)}{2p}\right) \ll \frac{x}{(\log x)^{5/3}}.$$

Тем самым доказано, что

$$\sum_{p+l\in A}{}' \frac{r(p+l;C)}{r(p+l;O)} = \frac{1}{h_0} \cdot \#A + O\left(\frac{x}{(\log x)^{5/3}}\right). \tag{15}$$

Применим (15) к множеству $A = A_0$, состоящему лишь из тех $p + l \in R(x)$, которые не представимы классом C. Тогда справедлива оценка

$$\#A_0 \ll \frac{x}{(\log x)^{5/3}}.$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2. *При* $x \to \infty$

$$B(p+l; p \leqslant x; C) = B(p+l; p \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где

$$B(p+l; p\leqslant x; R) \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \ \textit{(см. [16])},\ \Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{5/3}}.$$

2.3. Докажем (12) для последовательности $a_n = n(n+1)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Сохраним обозначения пункта 2.2, но теперь $R(x)$ означает множество всех чисел вида $(n(n+1)$, $n \leqslant x$, представимых родом форм R; A – некоторое множество чисел, содержащееся в $R(x)$.

Используя (14) и хорошо известные факты, имеем

$$\sum_{n(n+1)\in A}{}^{*} \frac{r(n(n+1);C)}{r(n(n+1);O)} = \frac{1}{h_0} \cdot \#A$$

$$+O\left(\sum_{\chi_3} \sum_{n\leqslant x}{}^{*} \frac{\lambda(n)\lambda(n+1)}{r_0(n)r_0(n+1)}\right).$$

По лемме 3 и равенству (7) имеем

$$\sum_{n\leqslant x}{}^{*} \frac{\lambda(n)\lambda(n+1)}{r_0(n)r_0(n+1)} \ll \frac{x}{(\log x)^2} \exp\left(\frac{\lambda(p)}{p}\right) \ll \frac{x}{(\log x)^{4/3}}.$$

Следовательно, доказано соотношение

$$\sum_{n\leqslant x}{}^{*} \frac{r(n(n+1);C)}{r(n(n+1);O)} = \frac{1}{h_0} \cdot \#A + O\left(\frac{x}{(\log x)^{4/3}}\right). \qquad (16)$$

Применим (16) к множеству $A = A_0$, состоящему лишь из тех чисел $n(n+1) \in R(x)$, которые не представимы классом C. Тогда справедлива оценка

$$\#\, A_0 \ll \frac{x}{(\log x)^{4/3}},$$

которая влечет соотношение

$$B(n(n+1); n \leqslant x; C) = B(n(n+1); n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где $\Delta(x) \ll x/(\log x)^{4/3}$.

Дадим достаточную для наших целей оценку снизу для $B(n(n+1); n \leqslant x; R)$. Нам придется ограничиться частным случаем – наложить на d условие $(*)$, откуда следует, что $h_1 = 1$. Пусть $b(n;R)$ означает характеристическую функцию натуральных чисел, представимых родом форм R.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* $(*)$. *Тогда*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} r(n-1;R)b(n;R) = C\frac{x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{1/2+\eta}}\right), \qquad (17)$$

где $\eta = 0,042$; $C > 0$.

Следствие 1.

$$B(n(n+1); n\leqslant x; R) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{2}+\log 2+\varepsilon}},$$

где $\frac{1}{2} + \log 2 = 1,19315\ldots$.

Доказательство леммы 4 основано на варианте метода Холи [17, 18], использованном в работе [19] для доказательства (17) в случае формы $x_1^2 + x_2^2$. Рассмотрим следующее разложение

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} r(n-1;R)b(n;R) = w\sum_{2\leqslant n\leqslant x} b(n;R)\Biggl\{\sum_{\substack{l|(n-1)\\ l\leqslant x^{1/2}x_1^{-1}}} \chi_d(l)$$

$$+\sum_{\substack{l|(n-1)\\ x^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}<l<x^{\frac{1}{2}}x_1}} \chi_d(l) + \sum_{\substack{l|(n-1)\\ l\geqslant x^{\frac{1}{2}}x_1}} \chi_d(l)\Biggr\} = w\left\{\sum\nolimits_A + \sum\nolimits_B + \sum\nolimits_C\right\},$$

где $x_1 = \exp((\log x)^{\xi_0})$, $\xi_0 > 0$ может быть выбрано произвольно малым. Суммы $\sum_A$ и $\sum_C$ изучаются с помощью аналога известной теоремы Бомбьери–Виноградова для функции $b(n;R)$, причем $\sum_A$ дает главный член задачи; сумма $\sum_B$ изучается методами решета по Холи с усовершенствованиями Б. М. Бредихина (см. [18]). Мы опускаем доказательство, сформулируем лишь аналог теоремы Бомбьери–Виноградова.

Пусть $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, \ldots, l_0^{(\varphi(P))}$ – приведенная система вычетов $(\operatorname{mod} P)$.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* $(*)$. *Тогда для любого* $A > 0$ *существует* $B = B(A)$ *такое, что*

$$\sum_{\substack{k\leqslant \frac{x^{1/2}}{(\log x)^B}\\ P\nmid k}} \max_{(l,k)=1}\max_{y\leqslant x}\Biggl|\sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv l \pmod k}} b(n;R) - \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n\leqslant y\\ (n,k)=1}} b(n;R)\Biggr|$$

$$+\sum_{\substack{k\leqslant \frac{x^{1/2}}{(\log x)^B}\\ P|k}} \max_{l_0=l_0^{(1)},l_0^{(2)},\dots,l_0^{(P-1)}} \max_{\substack{l\equiv l_0 \pmod P\\ (l,k)=1}} \max_{y\leqslant x}\Bigg| \sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv l \pmod k}} b(n;R)$$

$$-\frac{P-1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n\leqslant y\\ (n,k)=1,\\ n\equiv l_0 \pmod P}} b(n;R)\Bigg| = O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right).$$

Доказательство леммы 5 обобщает доказательство теоремы 2 работы [19].

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* $(*)$. *Тогда при* $x\to\infty$

$$B(n(n+1);n\leqslant x;C) = B(n(n+1);n\leqslant x;R) - \Delta(x),$$

где $B(n(n+1);n\leqslant x;R) \gg_\varepsilon \dfrac{x}{(\log x)^{\frac12+\log 2+\varepsilon}}$, $\Delta(x)\ll \dfrac{x}{(\log x)^{4/3}}$.

Замечание 1. Можно предположить, что

$$B(n(n+1);n\leqslant x;R)\asymp \frac{x}{\log x}.$$

Это доказано для случая формы $x_1^2+x_2^2$ в работах [20, 21].

2.4. Рассмотрим задачу (12) для последовательности $a_n=n^2+a$ $(n=1,2,\dots)$, где a – целое число. Будем считать, что $-a$ – дискриминант квадратичного поля, причем $(a,d)=1$. Нам необходимо оценить сумму $(\lambda(n)=\lambda(n,\chi_3))$

$$\sum_{\chi_3}\sideset{}{'}\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda(n^2+a)}{r_0(n^2+a)} = \sum_{\chi_3} I(\chi_3).$$

По лемме 1 имеем

$$I(\chi_3)\ll \frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\rho(p)\lambda(p)}{2p}\right), \tag{18}$$

где $\rho(p)$ – число решений сравнения $n^2+a\equiv 0 \pmod p$. Справедлива асимптотика

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \left(-\frac{a}{p}\right)=1}} \frac{\lambda(p)}{p} = \frac{1}{2}\,\gamma(k)\log\log x + O(1), \tag{19}$$

которая вытекает из следующего факта, доказываемого на основании свойств L-функций мнимого квадратичного поля:

в предположении $(l,q)=1$, $(d,q)=1$ имеем

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{p})\leqslant x\\ \mathfrak{p}\in\tilde{C},N(\mathfrak{p})\equiv l \pmod q}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} = \frac{1}{h\varphi(q)}\,\log\log x + O(1).$$

Соединяя (18) и (19), получаем оценку

$$I(\chi_3) \ll \frac{x}{(\log x)^{1-\gamma(k)/2}}.$$

По аналогии с доказанным выше теперь имеем $(x\to\infty)$

$$B(n^2+a;n\leqslant x;C) = B(n^2+a;n\leqslant x;R) - \Delta(x),$$

где $\Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{2/3}}$. Используя хорошо известные результаты Холи [22], можно показать, что

$$B(n^2+a;n\leqslant x;R) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{\log 2+\varepsilon}},$$

где $\log 2 = 0,69315\ldots$. Тем самым, в общем случае мы не можем доказать (12) для рассматриваемой последовательности.

Но для форм дискриминанта d с условием $h=4,8$ это можно сделать, поскольку должным образом оцениваются суммы $I(\chi_3)$, если использовать точное значение $\gamma(k)$ для $k\equiv 0 \pmod 4$. Имеем следующий результат.

Теорема 4. *Предполагаем, что $-a$ – дискриминант квадратичного поля, $(a,d)=1$. Пусть выполнено условие: $h=4,8$. Тогда при $x\to\infty$*

$$B(n^2+a;n\leqslant x;C) = B(n^2+a;n\leqslant x;R) - \Delta(x),$$

причем

$$B(n^2+a;n\leqslant x;R) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{\log 2+\varepsilon}},$$

где $\log 2 = 0,69315\ldots$,

$$\Delta(x) \ll \begin{cases} \dfrac{x}{(\log x)^{3/4}}, & \textit{если} \quad h = 4; \\ \dfrac{x}{(\log x)^{0,69825\ldots}}, & \textit{если} \quad h = 8. \end{cases}$$

Замечание 2. Можно предположить, что $(x \to \infty)$

$$B(n^2 + a; n \leqslant x; R) \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}}.$$

Пример 1. Проиллюстрируем теорему на формах дискриминанта $d = -39$ (см. [23]). Такие формы разбиваются на два рода – род R_1, содержащий два класса C_1 и C_2, и род R_2, содержащий два класса C_3 и C_4. Форму $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ обозначим через $[a, b, c]$. Имеем

$$\begin{aligned} &C_1 \ni [1,1,10], \quad C_2 \ni [3,3,4]; \\ &C_3 \ni [2,1,5], \quad C_4 \ni [2,-1,5]. \end{aligned}$$

Для классов C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ справедливо соотношение (20), причем

$$\begin{aligned} &\Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{3/4}} \quad &(\text{для} \quad C_1 \text{ и } C_2), \\ &\Delta(x) \equiv 0 \quad &(\text{для} \quad C_3 \text{ и } C_4). \end{aligned}$$

2.5. Докажем (12) для последовательности $a_n = n^m$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где m – натуральное число. Нам необходимо оценить сумму

$$\sum_{\chi_3} \sum_{n \leqslant x}{}' \frac{\lambda(n^m)}{r_0(n^m)} = \sum_{\chi_3} I(\chi_3).$$

По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} I(\chi_3) &\ll \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{p \leqslant x}{}' \frac{\lambda(p^m)}{r_0(p^m)p} \right) \\ &= \frac{x}{\log x} \exp(K(x)). \end{aligned}$$

1) Пусть $m = 2k$. При $\chi_d(p) = 1$ из (6) легко следует, что

$$\lambda(p^{2k}) \ll 1 + k\lambda(p);$$

легко видеть, что $r_0(p^{2k}) = 2k + 1$. При $\chi_d(p) = -1$ $\lambda(p^{2k}) = 1$, $r_0(p^{2k}) = 1$. Следовательно,

$$K(x) \leqslant \left\{ \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2} + k\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \right\} \log\log x + O(1)$$
$$= \left(1 - \frac{k}{6k+3} \right) \log\log x + O(1),$$

и

$$\sum_{\chi_3} I(\chi_3) \ll \frac{x}{(\log x)^{k/(6k+3)}}.$$

Пусть R – главный род. По аналогии с доказанным выше имеем $(x \to \infty)$

$$B(n^{2k}; n \leqslant x; C) = B(n^{2k}; n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где

$$\Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{k/(6k+3)}},$$
$$B(n^{2k}; n \leqslant x; R) = [x].$$

Если R – неглавный род, то, как хорошо известно, $B(n^{2k}; n \leqslant x; R) \equiv 0$.

2) Пусть $m = 2k + 1$. При $\chi_d(p) = 1$ из (6) легко следует, что

$$\lambda(p^{2k+1}) \leqslant (k+1)\lambda(p);$$

легко видель, что $r_0(p^{2k+1}) = 2k + 2$. При $\chi_d(p) = -1$ $\lambda(p^{2k+1}) = 0$, $r_0(p^{2k+1}) = 0$. Следовательно,

$$K(x) \leqslant \frac{k+1}{2k+2} \left\{ \frac{2}{3} \log\log x + O(1) \right\} = \frac{1}{3} \log\log x + O(1),$$

и

$$\sum_{\chi_3} I(\chi_3) \ll \frac{x}{(\log x)^{2/3}},$$

Имеет место аналог (21). Тем самым, верна

Теорема 5. *Пусть $x \to \infty$ имеют место асимптотики:*

1) *если R – главный род, то*

$$B(n^{2k}; n \leqslant x; C) = B(n^{2k}; n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где

$$B(n^{2k}; n \leqslant x; R) = [x], \quad \Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{k/(6k+3)}}$$

(для неглавного рода R $B(n^{2k}; n \leqslant x; R) \equiv 0$);

2) *если R – любой род, то*

$$B(n^{2k+1}; n \leqslant x; C) = B(n^{2k+1}; n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где

$$B(n^{2k+1}; n \leqslant x; R) = \frac{c\,x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \ (c > 0),$$

$$\Delta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{2/3}}.$$

2.6. Рассмотрим задачу (12) для случае, когда a_n – числа арифметической прогрессии

$$n \equiv l \pmod q, \quad (l, q) = 1,$$

с растущей разностью q. Имеем

$$B(n \equiv l \pmod q; n \leqslant x; C) = B(n \equiv l \pmod q; n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

где

$$\Delta(x) \ll \sum_{\chi_3} \sideset{}{'}\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \pmod q}} \frac{\lambda(n)}{r_0(n)}.$$

Предположим, что $q \leqslant x^{1-\varepsilon}$. По лемме $1'$,

$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \pmod q}} \frac{\lambda(n)}{r_0(n)} \ll \frac{x}{\varphi(q)\log x}\, \exp\left(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \nmid q}} \frac{\lambda(p)}{2p}\right)$$

$$\ll \frac{x}{\varphi(q)\log x}\, \exp\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{\lambda(p)}{2p}\right).$$

По (7)

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\lambda(p)}{2p}=\frac{\gamma(k)}{2}\log\log x+O(1),$$

поэтому

$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l \pmod q}}\frac{\lambda(n)}{r_0(n)}\frac{x(\log x)^{\frac{\gamma(k)}{2}-1}}{\varphi(q)}\ll\frac{x}{\varphi(q)(\log x)^{2/3}},$$

откуда

$$\Delta(x)\ll\frac{x}{\varphi(q)(\log x)^{2/3}}\quad(q\leqslant x^{1-\varepsilon}),$$

причем $\ll$-константа зависит лишь от ε.

Для вычисления $B(n\equiv l \pmod q;\ n\leqslant x;R)$ применим метод Иванца [24], основанный на полуразмерном решете. Ограничимся частным случаем – на d наложим условие $(*)$, причем будем считать, что $(d,q)=1$. Тогда по аналогии с работой [24], в которой рассматривался случай $d=-4$, имеем

$$B(n\equiv l \pmod q; n\leqslant x;R)$$
$$=\frac{b(R)}{q}\prod_{\substack{p\mid q\\ \left(\frac{d}{p}\right)=-1}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{x}{(\log x)^{1/2}}\left(1+O\left(\left(\frac{\log q}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right),$$

причем на рост $q>1$ надо наложить ограничение $\log q=o(\log x)$. В силу условия $(*)$ $h_1=1$, поэтому $b(R)=b(O)$ (константа Полла, вычисленная в [25]).

Тем самым доказан аналог теоремы Бернайса для арифметических прогрессий с растущей разностью.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* $(*)$, $q>2$, $(d,q)=1$, $(l,q)=1$. *Тогда при* $x\to\infty$ *и* $\log q=o(\log x)$ *имеем*

$$B(n\equiv l \pmod q; n\leqslant x;C)=\frac{b(R)}{q}\prod_{\substack{p\mid q\\ \left(\frac{d}{p}\right)=-1}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{x}{(\log x)^{1/2}}$$
$$\times\left(1+O\left(\left(\frac{\log q}{\log x}\right)^{1/5}\right)+O\left(\frac{\log\log q}{(\log x)^{1/6}}\right)\right),$$

где $b(R)=b(O)$ *(константа Полла).*

§3. Суммы, включающие обратные величины количеств представлений целых чисел положительно определенными бинарными квадратичными формами

3.1. Начнем с задачи о получении асимптотики для суммы

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{1}{r(n;R)} \quad (x\to\infty). \tag{22}$$

Здесь и ниже для простоты примем условие $(*)$. Разберем простейший случай

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{1}{r_2(n)},$$

где $r_2(n)$ – число представлений n суммой двух квадратов. Нам удобно обозначать простые числа $p=4k+1$ через q, простые числа $p=4k-1$ через r. Пусть $s=\sigma+it$. Введем ряд Дирихле

$$f(s):=\sum_{\substack{n=1\\ r_2(n)>0}}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}r_2(n)\right)^{-1}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}.$$

В силу мультипликативности $\frac{1}{4}r_2(n)$ имеем

$$f(s)=\frac{1}{1-2^{-s}}\prod_q\left(1+\frac{1}{2q^s}+\frac{1}{3q^{2s}}+\dots\right)\prod_r\frac{1}{1-r^{-2s}};$$

$$I_q(s):=1+\frac{1}{2q^s}+\frac{1}{3q^{2s}}+\dots\ .$$

Очевидно,

$$\{f(s)\}^4=\Psi(s)\zeta(s)L(s,\chi_4),$$

где

$$\Psi(s):=\frac{1}{(1-2^{-s})^3}\prod_q I_q(s)^4(1-q^{-s})^2\prod_r\frac{1}{(1-r^{-2s})^3}.$$

Функция $\Psi(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$ и не имеет там нулей. Докажем последнее для функции

$$\Psi_0(s):=\prod_q I_q^4(s)(1-q^{-s})^2$$

$$= \prod_q \left(1 + \frac{A_2}{q^{2s}} + \frac{A_3}{q^{3s}} + \dots\right). \tag{23}$$

Разобьем эйлеровское произведение(23) в соответствии с $q \leqslant q_0$ и $q > q_0$:

$$\Psi_0(s) = \Psi_0^{(1)}(s)\Psi_0^{(2)}(s).$$

Легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $q_0 = q_0(\varepsilon)$ такое, что в полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$ $\Psi_0^{(2)}(s) > 0$. Что касается $\Psi_0^{(1)}(s)$, то для него необращение в нуль в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ проверяется непосредственно. Как хорошо известно, $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$ не обращаются в нуль в области D:

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\{\log(|t|+2\}},$$

где c – подходящим образом выбранная положительная константа. $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$ ведут себя для $s \in D$ при больших $|t|$ как $O(\log|t|)$, а $\Psi(s)$ – как $O(1)$. Имеем (после аналитического продолжения $f(s)$)

$$f(s) = (s-1)^{-\frac{1}{4}} g(s),$$

где функция $g(s)$ регулярна в области D и $g(1) \neq 0$. Применяя к функции $f(s)$ формулу обращения для рядов Дирихле, получаем

$$\sum_{n \leqslant x} b(n)\log(x/n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s)\frac{x^s}{s^2}\,ds. \tag{24}$$

Пользуясь свойствами функции $f(s)$, с помощью хорошо известных приемов [26–28] преобразуем правую часть (24) и после некоторых вычислений получаем асимптотическую формулу ($B > 0$)

$$\sum_{n \leqslant x}{}' \frac{1}{r_2(n)} = \frac{Bx}{(\log x)^{3/4}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}.$$

Аналогично доказывается и общий результат, причем здесь полезны работы [25, 29].

Теорема 7. *Пусть выполнено условие $(*)$. Тогда при $x \to \infty$*

$$\sum_{n \leqslant x}{}' \frac{1}{r(n;R)} = \frac{Bx}{(\log x)^{3/4}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\},$$

где $B > 0$ – константа.

3.2. Исследовать поведение суммы

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{1}{r(n;C)} \quad (x\to\infty), \tag{25}$$

где класс C принадлежит многоклассному роду R, значительно сложнее, чем поведение суммы (22). Мы решаем задачу (25) для некоторого множества родов. В этом пункте по-прежнему $h_1 = 1$. Нам потребуется частный случай результатов Е. П. Голубевой [3].

Лемма 6. *Пусть G – группа классов п.п.б.к. форм дискриминанта d порядка $h(=h_0)$.*

1) *Пусть множество классов $C_1,\dots,C_s$ является системой образующих G и D_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ – любой класс, удовлетворяющий условию $D_i^2 = C_i$. Пусть натуральное число n имеет вид*

$$n = \prod_{i,j} p_{ij} n_1, \tag{26}$$

где $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant K$, p_{ij} – различные простые, $p_{ij} = f_i(x_j, y_j)$, где $f_i\in D_i$. Тогда для любой формы f из рода R имеем

$$r(n;f) = \frac{r(n;R)}{h}\left\{1 + O\left(\frac{1}{M^K}\right)\right\},$$

где $M > 1$.

2) *Разложим G в прямой произведение нетривиальных циклических подгрупп (инвариантных множителей) $G_1, G_2,\dots,G_k$, порядки которых h_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ обладают свойством*

$$h_{i+1} \mid h_i \quad (1\leqslant i\leqslant k-1).$$

Пусть $N_K(x)$ – число целых $n\leqslant x$, представимых родом R и не удовлетворяющих условию (26) для любой системы образующих G. Тогда при $K\leqslant \log\log\log x$

$$N_K(x) \ll x(\log x)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varphi(h_k)}{2h}+\varepsilon}. \tag{27}$$

Ниже имеет место следующее

Предположение А: выберем K вида $K = [\log\log\log x]$ и будем рассматривать только такие роды форм R, у которых

$$N_K(x) \ll x(\log x)^{-\alpha}, \tag{28}$$

где $\alpha > \frac{3}{4}$.

Замечание 3. В ряде случаев оценка (28) выполняется на основании (27). Например, если G – циклическая группа порядка p^a, $p > 2$, то по (27) имеем

$$N_K(x) \ll x(\log x)^{-1+\frac{1}{2p}+\varepsilon}.$$

Из новых результатов Е. П. Голубевой (настоящий том, с. 56–64) следует, что предположение А выполняется для любых циклических групп G нечетного порядка.

Переходим к исследованию суммы (25). Пусть $f \in C$ и $r(n; f) > 0$. Возьмем равенство ($5'$):

$$r(n; f) = \frac{1}{h}\, r(n; R) + s(n; f),$$

разделим обе его части на $r(n; f)r(n; R)$ и просуммируем по $n \leqslant x$. Получаем

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}} \frac{1}{r(n; R)} = \frac{1}{h} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}} \frac{1}{r(n; f)} + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}} \frac{s(n; f)}{r(n; f)r(n; R)}. \qquad (29)$$

Воспользуемся обозначениями из п. 2.1. Имеем

$$B(n; n \leqslant x; C) = B(n; n \leqslant x; R) - \Delta(x),$$

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}} \frac{1}{r(n; R)} = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;R)>0}} \frac{1}{r(n; R)} - \Delta_1(x),$$

где

$$\Delta_1(x) \leqslant \Delta(x) \leqslant N_K(x) \ll x(\log x)^{-\alpha}.$$

По теореме 7

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;R)>0}} \frac{1}{r(n; R)} = \frac{Kx}{(\log x)^{3/4}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}, \quad x \to \infty.$$

Вторую сумму справа в (29) разобьем на две:

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}} \frac{s(n; f)}{r(n; f)r(n; R)} = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ r(n;f)>0}}{}^{(\mathrm{I})} \frac{s(n; f)}{r(n; f)r(n; R)}$$

$$+ \sum_{\substack{n\leqslant x\\ r(n;f)>0}}^{(\mathrm{II})} \frac{s(n;f)}{r(n;f)r(n;R)},$$

где в сумме $\sum^{(\mathrm{I})}$ берутся лишь те n, которые не удовлетворяют условию (26) леммы 6 для любой системы образующих G, а в сумме $\sum^{(\mathrm{II})}$ берутся лишь те n, которые удовлетворяют условию (26) для какой-нибудь системы образующих G.

Обратимся сначала к сумме $\sum^{(\mathrm{I})}$. В ней $\frac{s(n;f)}{r(n;R)} \ll 1$, поэтому

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ r(n;f)>0}}^{(\mathrm{I})} \frac{1}{r(n;f)} \frac{s(n;f)}{r(n;R)} \ll N_K(x) \ll x(\log x)^{-\alpha}.$$

К сумме $\sum^{(\mathrm{II})}$ применим лемму 6. Имеем

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ r(n;f)>0}}^{(\mathrm{II})} \frac{s(n;f)}{r(n;f)r(n;R)}$$

$$\ll \sum_{\substack{n\leqslant x\\ r(n;f)>0}}^{(\mathrm{II})} \sum_{\chi_3} \frac{1}{r(n;R)\left(1+O\left(\frac{1}{M^K}\right)\right)} \frac{\lambda(n,\chi_3)}{r(n;R)}$$

$$\ll \sum_{\chi_3} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ r(n;R)>0}} \frac{\lambda(n,\chi_3)}{(r(n;R))^2} = J.$$

Применяя к внутренней сумме в J лемму 1 и соотношение (7), получаем

$$J \ll x(\log x)^{-\frac{5}{6}}.$$

Тем самым доказана

Теорема 8. *Пусть выполнены условие* $(*)$ *и предположение* A. *Тогда при* $x \to \infty$ *имеем*

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{1}{r(n;C)} = \frac{B_1 x}{(\log x)^{3/4}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{\alpha}}\right)$$

$$+O\left(\frac{x}{(\log x)^{5/6}}\right),$$

где $B_1 = hB$, B – *константа из теоремы 7.*

Пример 2. Формы дискриминанта $d = -47$ образуют 1 род, разбивающийся на 5 классов; эти классы образуют циклическую группу. По лемме 6

$$N_K(x) \ll x(\log x)^{-\frac{9}{10}+\varepsilon},$$

и оценка (28) выполняется. Пусть C – любой из пяти классов. По теореме 8

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \frac{1}{r(n;C)} = \frac{B_1 x}{(\log x)^{3/4}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{5/6}}\right).$$

Литература

1. Г. А. Ломадзе, *Формулы, для числа представлений чисел некоторыми регулярными и полурегулярными тернарными квадратичными формами, принадлежащими двухклассным родам,* Acta Arithm. **34**, No. 2 (1978), 131–162.
2. P. Bernays, *Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Discriminante,* Diss. Göttingen, 1912.
3. Е. П. Голубева, *О представлении больших чисел бинарными квадратичными формами,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 60–64.
4. О. М. Фоменко, *Распределение значений коэффициентов Фурье модулярных форм веса 1,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 196–227.
5. Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник, *Асимптотика и эргодические свойства решений обобщенного уравнения Харди–Литтлвуда,* Мат. сб. **71**, No. 2 (1966), 145–161; Ю. В. Линник, *Избранные труды. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод,* Л., 1980, 299–316.
6. E. Landau,, *Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen Zahlkr̈pers,* Math. Ann. **63** (1907), 145–204.
7. J.-P. Serre, *Modular forms of weight one and Galois representation,* Algebraic Number Fields, ed. by A. Frölich, Academic Press, London, 1977, 193–268.
8. А. И. Виноградов, *Общее уравнение Харди–Литтдвуда,* Мат. заметки **1**, No. 2 (1967), 189–197.
9. R. W. K. Odoni, *A problem of Rankin on sums of powers of cusp-form coefficients,* J. London Math. Soc. (2) **44**, No. 2 (1991), 203–217.
10. М. Б. Барбан, П. П. Вехов, *Суммирование мультипликативных функций от полиномов,* Мат. заметки **5**, No. 6 (1969), 669–680.
11. P. Shiu, *A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions,* J. reine and angew. Math. **313** (1980), 161–170.
12. E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplicative Funktionen. I,* Math. Ann. **143**, No. 1 (1961), 75–102.

13. М. Б. Барбан, Б. В. Левин, *Мультипликативные функции на "сдвинутых" простых числах,* Докл. АН СССР **181**, No. 4 (1968), 778–780.
14. P. D. T. A. Elliott, C. J. Moreno, F. Shahidi, *On the absolute value of Ramanujan's τ-function,* Math. Ann **226**, No. 4 (1984), 507–511.
15. R. A. Rankin, *Sums of powers of cusp form coefficients. II,* Math. Ann **272**, No. 4 (1985), 593–600.
16. H. Iwaniec, *Primes of the type $\varphi(x,y)+A$ where φ is a quadratic form,* Acta Arithm. **21** (1972), 203–234.
17. C. Hooley, *On the representations of a number as the sum of two squares and a prime,* Acta Math. **97**, No. 3–4 (1957), 189–210.
18. C. Hooley, *Applications of sieve methods to the theory of numbers,* Cambridge, 1976.
19. M. Gottschalk, K.-H. Indlekofer, *Über binäre additive Probleme,* J. reine und angew. Math. **297** (1978), 65–79.
20. C. Hooley, *On the intervals between numbers that are sums of two squares. III,* J. reine und angew. Math. **267** (1974), 207–218.
21. K.-H. Indlekofer, *Scharfe untere Abschätzung für die Anzahlfunction der B-Zwillinge,* Acta Arithm. **26**, No. 2 (1974), 207–212.
22. C. Hooley, *On the number of divisors of quadratic polynomials,* Acta Math. **110**, No. 1–2 (1963), 97–114.
23. Т. В. Вепхвадзе, *О представлении чисел положительными бинарными квадратичными формами нечетного дискриминанта,* Тр. Тбилис. Мат. ин-та АН Груз. ССР **45** (1974), 5–40.
24. H. Iwaniec, *The half dimensional sieve,* Acta Arithm. **29**, No. 1 (1976), 69–95.
25. G. Pall, *The distribution of integers represented by binary quadratic forms,* Bull. Amer. Math. Soc. **49**, No. 6 (1943), 447–449.
26. E. Landau, *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihren additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate,* Arch. Math. und Phusik (3) **13**, No. 4 (1908), 305–312.
27. R. D. James, *The distribution of integers represented by quadratic forms,* Amer. J. Math. **60**, No. 3 (1938), 737–744.
28. I. S. Luthar, *A generalization of a theorem of Landau,* Acta Arithm. **12**, No. 3 (1967), 223–228.
29. W. Heupel, *Die Verteilung der ganzen Zahlen, die durch quadratische Formen dargestellt werden,* Arch. Math. **19**, No. 2 (1968), 162–166.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 19 октября 1998 г.