Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

А. Ю. Солынин

МИНИМИЗАЦИЯ КОНФОРМНОГО РАДИУСА ПРИ КРУГОВОМ СУЖЕНИИ ОБЛАСТИ

1. Введение

По теореме Римана, каждая односвязная область $D \subset \mathbb{C}$ с невырожденной границей может быть конформно и однолистно отображена на единичный круг $\Delta = \Delta_1$, где $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$, $r > 0$. При нормировке

$$f(z_0) = 0, \qquad f'(z_0) > 0, \tag{1.1}$$

где z_0 – заданная точка области D, такое отображение $f : D \mapsto \Delta$ определяется единственным образом. В случае $z_0 = 0$ нормировку (1.1) называем *стандартной*. Величина $R(D, z_0) = 1/|f'(z_0)|$, называемая *конформным радиусом* области D в точке z_0, является одной из важнейших интегральных характеристик этой области, в терминах которой принято оценивать другие характеристики области D.

Пусть $0 \in D$. При $0 < r < \infty$ через D_r будем обозначать связную компоненту множества $D \cap \Delta_r$, содержащую точку $z = 0$. В настоящей работе мы рассмотрим задачу о минимизации конформного радиуса

$$R(D_r, 0) \to \min, \tag{1.2}$$

где $r > 0$ – фиксированное число, в семействе всех односвязных областей D, $0 \in D \subset \mathbb{C}$, имеющих заданный конформный радиус

$$R(D, 0) = 1. \tag{1.3}$$

Каждая из областей, удовлетворяющих последнему условию, может рассматриваться как образ единичного круга при отображении функцией f, принадлежащей известному классу однолистных функций S, см. [1, 2]. Из теоремы Кебе об 1/4 следует, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 97-01-00259.

$D_r = \Delta_r$ при всех r, $0 < r \leqslant 1/4$, и следовательно задача нетривиальна только при $r > 1/4$.

Переформулировка задачи (1.2), (1.3) в терминах логарифмической емкости позволяет дать ее достаточно естественную физическую интерпретацию. Определение и свойства логарифмической емкости $\operatorname{cap}(E)$ компакта E см. в [1, гл. 7]. Пусть $\hat{E} = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ – дополнение области D до комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ и пусть $E = \{z : 1/\bar{z} \in \hat{E}\}$ – континуум, симметричный E относительно единичной окружности $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$, где $\mathbb{T}_r = \partial\Delta_r$. Как известно [1, с. 304],

$$\operatorname{cap}(E) = 1/R(D, 0). \tag{1.4}$$

Поэтому при условии (1.3) $\operatorname{cap}(E) = 1$.

Континуум E будем рассматривать как проводящую пластину единичной емкости, на поверхности которой сосредоточен единичный равновесный заряд. Предположим, что пластина E может содержать инородные плавкие вкрапления, локальный размер которых контролируется в процессе изготовления пластин и не превосходит величины $\pi\varepsilon^2$. Под действием внешних причин, например, вследствие перегрева пластины вкрапления могут переходить в газообразную фазу, в результате чего в окрестности некоторой точки пластины, пусть точки $z = 0$, образуется пузырь. При первом, возможно грубом, приближении будем считать, что этот пузырь имеет форму кружка, и что вне этого кружка континуум не меняет своих очертаний. Через некоторое время после образования пузыря единичный заряд на поверхности пластины E трансформируется в единичный равновесный заряд на поверхности нового континуума. В результате такого перераспределения заряда изменится контролируемая характеристика, т.е. емкость пластины. При сделанных предположениях и радиусе, равном $\varepsilon > 0$, новый континуум $E_\varepsilon = E \cup \overline{\Delta}_\varepsilon$ соответствует области $D_{1/\varepsilon}$ в указанном выше смысле: $E_\varepsilon = \{z : 1/\bar{z} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D_{1/\varepsilon}\}$. Отсюда, с учетом соотношения (1.4) и инвариантности логарифмической емкости относительно жестких движений плоскости, заключаем, что задача (1.2), (1.3) эквивалентна задаче

$$\operatorname{cap}(E_\varepsilon(a)) \to \max \tag{1.5}$$

при условии $a \in E$ и $\operatorname{cap}(E) = 1$. Здесь $E_\varepsilon(a) = E \cup \overline{\Delta}_\varepsilon(a)$ и $\Delta_r(a) = \{z : |z - a| < r\}$.

Отметим аналогию задачи (1.5) и известной задачи о модуле-емкости, поставленной независимо В. В. Кожевниковым и Д. Гайером, см. [3, 4]. В двойственной постановке указанной задачи рассматриваются континуумы $E \ni 0$, имеющие единичную логарифмическую емкость: $\operatorname{cap}(E) = 1$. Согласно классическому результату Г. Фабера [2, с. 10], $\operatorname{diam} E \leqslant 4$, поэтому при $r > 4$ определена гиперболическая емкость (= емкость Грина) $\operatorname{cap}_{h,r}(E)$ континуума E относительно круга Δ_r, определения см. в [5], а также в [4], и имеет смысл рассматривать задачу

$$\operatorname{cap}_{h,r}(E) \to \max \tag{1.6}$$

при условии $0 \in E$ и $\operatorname{cap}(E) = 1$. В несколько иной постановке задача о сужении односвязной области рассматривалась В.О. Кузнецовым [6].

Для больших значений r задача о модуле-емкости (1.6) была решена Р. Кюнау [7], для произвольных $r > 4$ ее решение было независимо найдено автором [8] и Р. Лаугезеном [4]. Экстремальной конфигурацией задачи (1.6) является отрезок $I(4) = [0, 4]$ и его вращения вокруг начала. Естественно предполагать, что $I(4)$ является также и экстремальной конфигурацией задачи (1.5). Тогда экстремальной конфигурацией задачи (1.2), (1.3) служила бы область Кебе $K = \mathbb{C} \setminus [1/4, +\infty]$. Следующая теорема, являющаяся одним из основных результатов данной работы, подтверждает справедливость высказанного предположения.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная область с невырожденной границей такая, что $0 \in D \subset \mathbb{C}$ и $R(D, 0) = 1$. Тогда*

$$R(D_r, 0) \geqslant R(K_r, 0) = 16r^2(1 + 4r)^{-2} \tag{1.7}$$

при всех $r > 1/4$.

Равенство в (1.7) достигается только в том случае, когда D является вращением области Кебе, т.е. $D = e^{i\alpha}K$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. *Пусть E – континуум на $\mathbb{C}$ такой, что $\operatorname{cap}(E) = 1$. Тогда для всех $a \in E$ и всех r, $0 < r < 4$,*

$$\operatorname{cap}(E_r(a)) \leqslant 1 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16}r^2. \tag{1.8}$$

Равенство в (1.8) достигается тогда и только тогда, когда E – отрезок длины 4, а точка a – один из его концов.

Следствие 1 решает задачу о максимизации логарифмической емкости локально раздутого континуума. Аналогичная открытая проблема об экстремизации логарифмической емкости глобального ε-раздутия континуумов, т.е. задача

$$\operatorname{cap}(E_\varepsilon) \to \max\ (\min) \quad \text{при условии} \quad \operatorname{cap}(E) = 1,$$

где E_ε – замкнутая ε-окрестность континуума E, также представляет несомненный интерес. В силу естественности постановки, можно ожидать, что эта задача уже рассматривалась в литературе, однако мы не смогли найти подходящих ссылок.

Теорема 1 будет получена в качестве следствия из аналогичного результата для ограниченных односвязных областей. Зафиксируем числа R и R_0 такие, что $0 < R_0 < R < \infty$. Пусть D – односвязная область в круге Δ_R такая, что $0 \in D$ и

$$R(D, 0) = R_0. \tag{1.9}$$

Как известно, во многих задачах для ограниченных областей (или, эквивалентно, для ограниченных однолистных функций) экстремальной областью служит область Пика (другое название – ограниченная область Кебе), т.е. область $\Delta_{R,\rho} = \Delta_R \setminus [\rho, R]$, $0 < \rho \leqslant R$. Далее будут использоваться следующие обозначения, связанные с областью $\Delta_{R,\rho}$: $z = F(\zeta; R, \rho)$ – стандартно нормированное отображение круга Δ на $\Delta_{R,\rho}$; $E(R, \rho) = F^{-1}(\mathbb{T}'_R; R, \rho)$, где $\mathbb{T}'_R = \mathbb{T}_R \setminus \{R\}$, $2\,l(R, \rho) = \operatorname{meas} E(R, \rho)$, где $\operatorname{meas} F$ – угловая мера множества F, лежащего на произвольной окружности. Отметим, что множество $E(R, \rho)$ представляет собой дугу вида $L(\varphi) = \{e^{i\theta} : |\theta - \pi| < \varphi\}$.

Простой подсчет показывает, что область $\Delta_{R,\rho}$ удовлетворяет соотношению (1.9) при условии

$$\rho = \rho_0 := (R/R_0)(\sqrt{R} - \sqrt{R - R_0})^2. \tag{1.10}$$

Рассмотрим задачу (1.2) при ограничениях

$$0 \in D \subset \Delta_R \quad \text{и} \quad R(D, 0) = R_0. \tag{1.11}$$

Из теоремы покрытия для ограниченных однолистных функций, см. [9, с. 109], вытекает, что $D_r = \Delta_r$ при всех $r : 0 < r \leqslant \rho_0$. Следовательно, задача (1.2), (1.11) нетривиальна только при $\rho_0 < r < R$. Решение этой задачи дает

Теорема 2. *Пусть $0 < R_0 < R < \infty$ и пусть область D удовлетворяет условиям задачи* (1.2), (1.11). *Тогда*

$$R(D_r, 0) \geqslant R(\Delta_{r,\rho_0}, 0) = \frac{4r^2 R R_0 (\sqrt{R} - \sqrt{R - R_0})^2}{(rR_0 + R(\sqrt{R} - \sqrt{R - R_0})^2)^2} \tag{1.12}$$

при всех r, $\rho_0 < r < R$.

Равенство в (1.12) *достигается только для областей $e^{i\alpha}\Delta_{R,\rho_0}$ при $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Неравенство (1.12) будет доказано в параграфе 4, а утверждение о случаях равенства в нем – в параграфе 7. Для этих доказательств нам потребуются три вспомогательных результата: вариационная формула для конформного радиуса, которую мы получим в п. 3, неравенство для интегральных средних для производных от однолистных функций из п. 5 и лемма 4 о функциях вещественного переменного из п. 6. Для доказательства указанных результатов мы применим методику, использовавшуюся в наших работах [8, 10] при решении задачи Кожевникова–Гайера и задач о граничном искажении при конформном отображении на ограниченные области. Для удобства читателей необходимые для данной статьи результаты из [10] приведены в п. 2. В п. 8 дается доказательство теоремы 1, а в пп. 9 и 10 рассматривается возможность обобщения результатов данной работы на случай двусвязных и некоторых других областей.

2. Предварительные результаты

Ниже приводятся три утверждения работы [10], на которых базируются основные доказательства данной статьи. Через $S_1(\beta)$, $0 < \beta < 1$, обозначаем класс однолистных аналитических функций $f : \Delta \to \Delta$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = \beta$.

Теорема А. *Пусть $f \in S_1(\beta)$ и пусть E_0 – открытое подмножество окружности $\mathbb{T}$, E – измеримое подмножество E_0. Если $|f(\zeta)| = 1$ при всех $\zeta \in E_0$, то*

$$\operatorname{meas} f(E) \geqslant 4 \arcsin(\beta^{-1/2} \sin(4^{-1} \operatorname{meas} E)). \tag{2.1}$$

Равенство в (2.1) *достигается только в том случае, когда множество E почти всюду совпадает с некоторой дугой $e^{i\alpha}L(\varphi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и когда $f(\zeta) = e^{i\alpha}F(\zeta; 1, \tau(\beta))$, где $\tau(\beta) = \beta^{-1}(1 - \sqrt{1-\beta})^2$.*

Следствие A. *Если $f \in S_1(\beta)$, E – открытое подмножество окружности $\mathbb{T}$ такое, что $|f(\zeta)| = 1$ при всех $\zeta \in E$, то*

$$\operatorname{meas} E \leqslant 4 \arcsin \beta^{1/2}. \tag{2.2}$$

Равенство в (2.2) имеет место тогда и только тогда, когда E почти всюду совпадает с некоторой дугой $e^{i\alpha} L(\varphi)$, где $\varphi = 2 \arcsin \beta^{1/2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а $f(\zeta) = e^{i\alpha} F(\zeta; 1, \tau(\beta))$.

Теорема B. *Пусть $f \in S_1(\beta)$, E – открытое подмножество $\mathbb{T}$, $\operatorname{meas} E = 2l$, где $0 < l \leqslant \arcsin \tau^{1/2}$, $f(E) \subset \mathbb{T}$. Пусть также $f(\zeta) \neq e^{i\alpha} F(\zeta; 1, \tau(\beta))$, если $E = e^{i\alpha} L(l)$. Тогда*

$$\int\limits_E \Phi(|f'(e^{i\theta})|)\, d\theta < \int\limits_{L(l)} \Phi(|F'(e^{i\theta}; 1, \tau(\beta))|)\, d\theta \tag{2.3}$$

для любой строго выпуклой убывающей функции $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

В частности,

$$\int\limits_E \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta})|} < \int\limits_{L(l)} \frac{d\theta}{|F'(e^{i\theta}; 1, \tau(\beta))|}. \tag{2.4}$$

3. Вариационная формула

Для доказательства теоремы 2 потребуется лемма о дифференцируемости конформного радиуса $R(D_r, 0)$ как функции r, которая аналогична лемме 1 работы [8], использовавшейся при решении задачи Кожевникова–Гайера.

Сначала мы определим класс *полигональных областей* и введем связанные с такими областями обозначения. Пусть граница односвязной области D, $0 \in D \subset \Delta_r$, состоит из жордановой кривой и конечного числа жордановых разрезов, выходящих из некоторых точек этой кривой, и пусть при этом указанная кривая и каждый из разрезов состоят из конечного числа дуг окружностей с центром в начале и конечного числа радиальных отрезков. Области такого вида будем называть *полигональными*. Если D – полигональная область в круге Δ_R и $\partial D \cap \mathbb{T}_R \neq \emptyset$, то множество $S(R) := \partial D \setminus (\overline{\partial D \cap \Delta_R})$, состоит из конечного числа дуг τ_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$. Тогда при r, $0 < r < R$ область D_r также является полигональной, а при всех $r < R$ достаточно близких к R множество $S(r) = \partial D_r \setminus (\overline{\partial D_r \cap \Delta_r})$ также состоит из n дуг $\tau_k(r)$.

Лемма 1. *Пусть D – полигональная область в Δ_R и $S(R) \neq \emptyset$. Тогда функция $\log R(D_r, 0)$ дифференцируема слева в точке $r = R$ и при этом*

$$\frac{d}{dr}\log R(D_r,0)\bigg|_{r=R-0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(R)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta})|}, \tag{3.1}$$

где $z = f(\zeta)$ – стандартно нормированное отображение круга Δ на область D, $E(R) = f^{-1}(S(R))$.

Доказательство леммы основано на вариационной формуле типа формулы Адамара, см. [11].

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое фиксированное число, $\Omega_r = f^{-1}(D_r)$, где $r = R-\varepsilon$, и пусть $g_\varepsilon(\zeta)$ – функция Грина области Ω_r с полюсом $\zeta = 0$. Ниже мы покажем, что

$$g_\varepsilon(\zeta) = -\log|\zeta| - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{E(R)} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta})|} + o(\varepsilon), \tag{3.2}$$

где $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ и $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ равномерно по ζ внутри круга Δ при $\varepsilon \to 0$.

Если равенство (3.2) установлено, то доказательство формулы (3.1) завершается следующим образом. Из определения внутреннего (конформного) радиуса, см. [9, с. 98], и соотношения (3.2) имеем

$$\log R(\Omega_r, 0) = \lim_{\zeta\to 0}\{g_\varepsilon(\zeta) + \log|\zeta|\} = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{E(R)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta})|} + o(\varepsilon).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dr}\log R(\Omega_r,0)|_{r=R-0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(R)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta})|}. \tag{3.3}$$

Так как $\log R(\Omega_r, 0) = \log R(D_r, 0) - \log|f'(0)|$ при всех $r \leqslant R$, то из (3.3) следует утверждение леммы.

Докажем соотношение (3.2). Пусть $\gamma_k(r) = p(\tau_k(r))$, где $p = f^{-1}$, $\gamma_k = \gamma_k(R)$. По принципу симметрии Римана–Шварца, функция $p(z)$ продолжается до функции, аналитической в окрестности замыкания дуги τ_k; при этом, если $a = e^{i\varphi}$ – концевая точка τ_k, то в окрестости этой точки $p(z)$ имеет вид

$$p(z) = e^{i\theta_1} + A(z-a)^2(1+q(z)), \tag{3.4}$$

где $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$, $q(z)$ – регулярная в рассматриваемой окрестности функция такая, что $q(0) = 0$. Отсюда следует, что интеграл $I(\zeta)$ в (3.2) можно рассматривать как интеграл Пуассона:

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} F(\theta)\, d\theta$$

с непрерывной плотностью

$$F(\theta) = \begin{cases} |f'(e^{i\theta})|^{-1} & \text{при} \quad \theta \in E(R) \\ 0 & \text{при} \quad \theta \notin E(R). \end{cases}$$

Следовательно, главная часть $G_\varepsilon(\zeta)$ в правой части формулы (3.2) является гармонической в Δ функцией за исключением логарифмического полюса $\zeta = 0$. При этом $G_\varepsilon(e^{i\theta}) = -\varepsilon F(\theta)$ при всех $\theta \in [0, 2\pi)$.

Нетрудно показать, что при фиксированном достаточно малом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, и фиксированном φ, $e^{i\varphi} \in \overline{\gamma_k}$, радиус $[0, e^{i\varphi}]$ и кривая $\gamma_k(1 - \varepsilon)$ имеют единственную точку пересечения, поэтому уравнение

$$te^{i\varphi} = p((1 - \varepsilon)e^{i\theta}) \tag{3.5}$$

однозначно разрешимо относительно t и θ. При этом решения $t = t(\varepsilon, \varphi)$ и $\theta = \theta(\varepsilon, \varphi)$ являются непрерывными функциями и $\theta(\varepsilon, \varphi) = \theta(\varphi) + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\varphi :$ $e^{i\varphi} \in \overline{\gamma_k}$, а $\theta(\varphi) := \theta(0, \varphi)$ такова, что

$$e^{i\theta(\varphi)} \in \tau_k \quad \text{и} \quad p(e^{i\theta(\varphi)}) = e^{i\varphi}. \tag{3.6}$$

Подставляя в (3.5) разложение регулярной функции $p(\zeta)$ по степеням $(\zeta - e^{i\theta})$, получаем

$$t = 1 - \varepsilon \Re \left\{ \frac{e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)} p'(e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)})}{p(e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)})} \right\} + O(\varepsilon^2),$$

где величина $O(\varepsilon^2)/\varepsilon^2$ ограничена равномерно по $\varphi :$ $e^{i\varphi} \in \overline{\gamma_k}$.

Из (3.6) следует, что $e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)} p'(e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)})/p(e^{i\theta(\varepsilon,\varphi)}) > 0$. Отсюда, с учетом соотношения $\theta(\varepsilon, \varphi) = \theta(\varphi) + o(1)$, имеем

$$t = 1 - \varepsilon|p'(e^{i\theta(\varphi)})| + o(\varepsilon) = 1 - \varepsilon|f'(e^{i\varphi}|^{-1} + o(\varepsilon), \tag{3.7}$$

где $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\varphi :$ $e^{i\varphi} \in \gamma_k$.

Рассмотрим граничные значения гармонической в области $\Omega_{1-\varepsilon}$ функции $u_\varepsilon(\zeta) = g_\varepsilon(\zeta) - G_\varepsilon(\zeta)$. Если $|\zeta| = 1$ и $\zeta \in \partial\Omega_{1-\varepsilon}$, то $u_\varepsilon(\zeta) = 0$. Пусть $\zeta = te^{i\varphi} \in \gamma_k(1-\varepsilon)$. Если $e^{i\varphi} \notin \overline{\gamma_k}$, то из (3.4) и непрерывности в замкнутом круге интеграла Пуассона $I(\zeta)$ следует соотношение $u_\varepsilon(\zeta) = o(\varepsilon)$. Если же $e^{i\varphi} \in \overline{\gamma_k}$, то это же соотношение следует из непрерывности $I(\zeta)$ и равенства (3.7). При этом $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ равномерно по ζ. Так как функция $u_\varepsilon(\zeta)$ гармоническая в $\Omega_{1-\varepsilon}$, то, согласно принципу максимума, соотношение $u_\varepsilon(\zeta) = o(\varepsilon)$ выполняется при всех $\zeta \in \Omega_{1-\varepsilon}$. Следовательно, (3.2) доказано. □

4. Доказательство неравенства (1.12)

Выберем последовательность полигональных областей D^n, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к области D, как к ядру, для которой области D^n имеют граничные дуги на окружности $\mathbb{T}_R$ и удовлетворяют условию $R(D_n, 0) = R(D, 0) = R_0$. Нетрудно видеть, что для каждой области D, удовлетворяющей условиям теоремы 2, указанная последовательность областей существует. Соответствующая последовательность срезок (суженных областей) $D_r^n := (D^n)_r$ сходится к области D_r, как к ядру. Поэтому по теореме Каратеодори, см. [1, с. 56], $R(D_r^n, 0) \to R(D_r, 0)$. Отсюда следует, что при доказательстве неравенства (1.12) можем ограничится случаем полигональных областей, имеющих граничные дуги на $\mathbb{T}_R$.

Рассмотрим множество

$$J = \{r' \in [\rho_0, R] : R(D_r, 0) \geqslant R(\Delta_{r,\rho_0}, 0) \quad \text{для всех} \quad r,\ r' \leqslant r \leqslant R\}.$$

Так как $R \in J$, то $J \neq \emptyset$. Из теоремы Каратеодори о сходимости к ядру следует, что функции $R(D_r, 0)$ и $R(\Delta_{r,\rho_0}, 0)$ непрерывны по r, поэтому множество J является замкнутым отрезком $J = [r_1, R]$ и при этом $R(D_{r_1}, 0) = R(\Delta_{r,\rho_0}, 0)$.

Покажем, что $r_1 = \rho_0$. Предположим противное: $\rho_0 < r_1 \leqslant R$. Пусть $f(\zeta, r_1)$ – стандартно нормированное отображение круга Δ на область D_{r_1}, $S(r_1)$ – множество открытых граничных дуг области D_r, лежащих на окружности $\mathbb{T}_{r_1}$, $E(r_1) = f^{-1}(S(r_1), r_1)$.

Из леммы 1 следует, что для всех r из достаточно малой левой окрестности точки r_1 выполняются соотношения

$$\log R(D_r, 0) = \log R(D_{r_1}, 0) - \frac{(r_1 - r)}{2\pi} \int\limits_{E(r_1)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta}, r_1)|} + o(r_1 - r), \tag{4.1}$$

$$\log R(\Delta_{r,\rho_0},0) =$$

$$\log R(\Delta_{r_1,\rho_0},0) - \frac{(r_1-r)}{2\pi} \int\limits_{E(r_1,\rho_0)} \frac{d\theta}{|F'(e^{i\theta};r_1,\rho_0)|} + o(r_1-r). \quad (4.2)$$

Так как $R(D_{r_1},0) = R(\Delta_{r_1,\rho_0},0)$, то к функциям $f(\zeta,r_1)/r_1$ и $F(\zeta;r_1,\rho_0)/r_1$ применимы следствие А и теорема Б п. 2, из которых вытекает, что $\operatorname{meas} E(r_1) < \operatorname{meas} E(r_1,\rho_0)$ и

$$\int\limits_{E(r_1)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta},r_1)|} < \int\limits_{E(r_1,\rho_0)} \frac{d\theta}{F'(e^{i\theta};r_1,\rho_0)|}, \quad (4.3)$$

если D_{r_1} не является вращением Δ_{r_1,ρ_0} вокруг начала.

Из (4.1)–(4.3) следует, что

$$R(D_r,0) > R(\Delta_{r,\rho_0},0) \quad (4.4)$$

для всех $r < r_1$, достаточно близких к r_1. Очевидно, что неравенство (4.4) противоречит определению множества J, поэтому предположение $\rho_0 < r_1$ неверно. Следовательно, $R(D_r,0) \geqslant R(\Delta_{r,\rho_0},0)$ при всех r, $\rho_0 \leqslant r \leqslant R$. $\square$

5. Уточненное неравенство для интегральных средних

Зафиксируем положительные параметры $0 < R_0 < R_1 < R_2 < R$, где R_0 считаем достаточно малым. Рассмотрим семейство $\mathcal{D}$ всех односвязных областей $D \ni 0$, лежащих в круге Δ_R, удовлетворяющих неравенству $R(D_{R_2},0) \geqslant R_0$, и таких что $\partial D \cap \mathbb{T}_R \neq \emptyset$ и ∂D содержит фиксированные точки $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_0}$, где $R_0 < r_1, r_2 \leqslant R_1$, $0 < \theta_0 \leqslant \pi$. Далее всюду предполагается, что при рассматриваемых значениях параметров семейство $\mathcal{D}$ не пусто.

Зафиксировав некоторую область $D \in \mathcal{D}$, введем необходимые связанные с этой областью обозначения. Через $z = f(\zeta,r)$ обозначаем стандартно нормированное отображение круга Δ на область D_r. Каждому r, $R_2 \leqslant r \leqslant R$ сопоставим произвольное множество $S(r)$ (возможно пустое), состоящее из открытых граничных дуг области D_r, лежащих на окружности $\mathbb{T}_r$. Пусть $E(r) := f^{-1}(S(r),)$, $2\,l(r) = \operatorname{meas}(E(r))$. Каждой области $D \in \mathcal{D}$ сопоставим также функцию $\rho(r)$, определяемую соотношением

$$R(D_r,0) = R(_{r,\rho(r)},0).$$

Лемма 2. *Существует постоянная $C > 0$, не зависящая от выбора области $D \in \mathcal{D}$ и выбора множеств $S(r)$ и такая, что*

$$\int\limits_{E(r)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta}, r)|} \leqslant \int\limits_{E(r,\rho(r))} \frac{d\theta}{|F'(e^{i\theta}; r, \rho(r))|} - C \tag{5.1}$$

для всех r, $R_2 \leqslant r \leqslant R$.

При доказательстве леммы 2 будет использоваться формулируемая ниже экстремальная задача. Пусть z_1, z_2 – фиксированные точки в проколотом круге $\Delta_r \setminus \{0\}$, и пусть семейство Γ состоит из всевозможных объединений $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ континуумов $\gamma_1, \gamma_2 \subset \overline{\Delta_r} \setminus \{0\}$ таких, что $z_k \in \gamma_k$ и $\gamma_k \cap \mathbb{T}_r \neq \emptyset$, $k = 1, 2$; при этом допускается случай $\gamma_1 = \gamma_2$. Пусть $\Delta_r(\gamma) \ni 0$ – связная компонента множества $\Delta \setminus \gamma$. Требуется найти минимум гармонической меры

$$\omega(0, \gamma, \Delta_r(\gamma)) \to \min \tag{5.2}$$

и указать все экстремальные конфигурации среди всех компактов $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$R(\Delta_r(\gamma), 0) = d, \tag{5.3}$$

где $d > 0$ – фиксированная постоянная.

Без дополнительного нормирующего условия (5.3) постановка задачи (5.2) как открытой проблемы приведена в работе [12]. Здесь нам потребуется только следующая лемма о существовании и некоторых свойствах экстремальных конфигураций.

Лемма 3. *Если подмножество $\Gamma(d)$ компактов $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющих условию (5.3), не пусто, то оно содержит компакт $\gamma^0 = \gamma^0(r, d)$, реализующий минимум в (5.2). При этом гармоническая мера $\omega(0, \gamma^0, \Delta_r(\gamma^0))$ непрерывно зависит от параметров r и d.*

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность компактов $\gamma^{(n)} = \gamma_1^{(n)} \cup \gamma_2^{(n)} \in \Gamma(d)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть f_n – стандартно нормированное отображение круга Δ на области $\Delta_r(\gamma)$. Так как $f_n'(0) = d$, то без ограничения общности можем считать, что $f_n \to f$ в Δ. Пусть дуги $L_k^{(n)} = \{e^{i\theta} : \alpha_k^{(n)} \leqslant \theta \leqslant \beta_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2$, где $\alpha_k^{(n)} < \beta_k^{(n)}$, соответствуют континуумам $\gamma_k^{(n)}$ при отображении f. Можно считать, что $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$, $\beta_k^{(n)} \to \beta_k$ при $n \to \infty$.

Пусть $\gamma^0 = \gamma_1^0 \cup \gamma_2^0$, где $\gamma_k^0 = f(L_k)$ и $L_k = \{e^{i\theta} : \alpha_k \leqslant \theta \leqslant \beta_k\}$. Тогда

$$\omega(0, \gamma^{(n)}, \Delta_r(\gamma^{(n)})) \to (\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2) = \omega(0, \gamma^0, \Delta_r(\gamma^0)).$$

Так как компакт γ^0 допустим для задачи (5.2), (5.3), то существование экстремального компакта доказано.

Непрерывность гармонической меры $\omega(0, \gamma^0, \Delta_r(\gamma^0))$ от r и d следует из аналогичных соображений, связанных с компактностью соответствующего класса стандартно нормированных конформных отображений $f : \Delta \to \Delta_r(\gamma^0(r, d))$. $\square$

Доказательство леммы 2. Для доказательства неравенства (5.1) покажем, что при условиях леммы

$$l(r) \leqslant l(r, \rho(r)) - \alpha \tag{5.4}$$

при некотором $\alpha > 0$, не зависящем от области $D \in \mathcal{D}$, множеств $E(r)$ и параметра r, $R_2 \leqslant r \leqslant R$. Если (5.4) установлено, то из теоремы Б п.2 вытекает следующее соотношение, доказывающее (5.1):

$$\int\limits_{E(r)} \frac{d\theta}{|f'(e^{i\theta}, r)|} \leqslant \int\limits_{L(l(r))} \frac{d\theta}{|F'(e^{i\theta}; r, \rho(r))|} - C.$$

Здесь

$$C = \min 2 \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\theta}{|F'(e^{i\theta}; r, \rho)|} > 0, \tag{5.5}$$

где $\beta_1 = \pi - l(r, \rho)$, $\beta_2 = \pi - l(r, \rho) + \alpha$, а минимум берется по всем r и ρ таким, что $R_2 \leqslant r \leqslant R$, $\rho_0(r, \rho) \geqslant \alpha$, $R_0 \leqslant R(\Delta_{r,\rho}, 0) \leqslant R$. Положительность минимума в (5.5) следует из непрерывной зависимости соответствующих функций от параметров r и ρ.

Докажем (5.4). Через $\gamma_1(r)$ и $\gamma_2(r)$ обозначаем замыкания связных компонент множества $\partial D_r \setminus \mathbb{T}_r$, содержащие точки z_1 и z_2, соответственно (может оказаться, что $\gamma_1(r)$ совпадает с $\gamma_2(r)$); пусть $\gamma(r) = \gamma_1(r) \cup \gamma_2(r)$.

Каждое из отображений $f = f(\cdot, r)$ и $F = F(\cdot, r, \rho(r))$ представимо в виде композиции двух стандартно нормированных отображений: $f = h_1 \circ h_2$, $F = H_1 \circ H_2$. Здесь $h_1(w, r)$ отображает круг Δ на область $\Delta_r(\gamma(r))$, а $h_2(\zeta, r)$ отображает Δ на область

$D_1(r) := h_1^{-1}(D_r, r)$. Функции $H_1 = H_1(w, r)$ и $H_2 = H_2(\zeta, r)$ отображают круг Δ на области Δ_{r,τ_1} и Δ_{1,τ_2}, соответственно; при этом параметры $\tau_k > 0$ выбираются из условий $H_k'(0, r) = h_k'(0, r)$, $k = 1, 2$.

Пусть $S_1(r) = h_1^{-1}(S(r), r)$, $E_1(r) = \mathbb{T} \setminus h_1^{-1}(\gamma_0(r))$. Компакт $\gamma(r)$ допустим для задачи (5.2), (5.3), если положить $d = h_1'(0, r)$. Поэтому

$$2l_1(r) := \operatorname{meas} E_1(r) \leqslant 2\pi(1 - \omega(0, \gamma_0, \Delta_r(\gamma_0)), \tag{5.6}$$

где γ_0 – экстремальный компакт задачи (5.2), (5.3), соответствующий рассматриваемым значениям параметров. Используя (5.6) и применяя следствие A п. 2 к функции H_1 и функции, отображающей Δ на область $\Delta_r(\gamma_0)$, получим неравенство

$$\operatorname{meas} E(r, \tau_1) - \operatorname{meas} S_1(r) \geqslant C_1, \tag{5.7}$$

где

$$C_1 = \min \left\{\operatorname{meas} E(r, \tau) - 2\pi(1 - \omega(0, \gamma_0, \Delta_r(\gamma_0))\right\}, \tag{5.8}$$

а минимум берется по всем r, $R_1 \leqslant r \leqslant R$ и всем d, $R_0 \leqslant d \leqslant R(\Delta_{R,R_1}, 0)$.

Так как γ_0 не является радиальным отрезком, то, согласно утверждению о случаях равенства в следствии A п. 2, минимизируемая в (5.8) функция строго положительна при рассматриваемых значениях r, d и ε_0; так как эта функция и непрерывна, то $C_1 > 0$. Отсюда и из (5.7) вытекает неравенство

$$\operatorname{meas} H_2^{-1}(L(l(r, \tau_1)) \setminus L(l_1(r))) \geqslant C_2 > 0, \tag{5.9}$$

где C_2 не зависит от D, $E(r)$ и $r, R_1 \leqslant r \leqslant R$.

Пусть $2\varphi(r) = \operatorname{meas}(H_2^{-1}(L(l_1(r)))$. Так как $H_2'(0, r) = h_2'(0, r)$, то из теоремы A п.2 следует, что

$$\varphi(r) \geqslant l(r). \tag{5.10}$$

Так как $2l(r, \rho(r)) = 2\varphi(r) + \operatorname{meas}(L(l(r, \tau_1)) \setminus L(l_1(r))$, то из (5.9) и (5.10) вытекает (5.4). $\square$

6. Вспомогательная лемма

Нам потребуется следующее утверждение о функциях вещественного переменного.

Лемма 4. *Пусть функции* $f(x) \in C([a,b])$ *и* $g(x,y) \in C^1([a,b]\times[c,d])$ *удовлетворяют следующим условиям:*

(1) f *имеет левую производную на* $(a,b]$;

(2) f, g *не убывают по* x;

(3) g *строго возрастает по* y *и для каждого* $x \in [a,b]$ *существует* $y = y(x) \in [c,d]$ *такое, что* $g(x,y(x)) = f(x)$; *при этом* $g(b,c) = f(b)$;

(4) *при некоторых фиксированных* $\delta > 0$ *и* $k > 1$ *для всех* $x \in (a,b]$ *выполняется неравенство*

$$f'(x-0) \leqslant \frac{\partial}{\partial x} g(x,y(x)) - k\delta.$$

Пусть $m = \min \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$, $M = \max \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ *и пусть* $0 < m \leqslant M < \infty$. *Тогда*

$$f(x) \geqslant g(x,c) + (\delta m/M)(b-x)$$

при всех x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказательство. Покажем, что при всех x, $a \leqslant x \leqslant b$ выполняется неравенство

$$y(x) - c \geqslant (\delta/M)(b-x). \tag{6.1}$$

Обозначим через J множество всех $x' \in [a,b]$ таких, что (6.1) выполняются при всех x из промежутка $x' \leqslant x \leqslant b$. Так как $b \in J$, то $J \neq \emptyset$. Из непрерывности функции $y(x)$ следует, что множество J замкнуто. Покажем, что $J = [a,b]$.

Предполагая, что $J = [x_0, b]$, где $x_0 > a$, в некоторой левой окрестности точки x_0 имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 - 0)\,(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$$g(x, y(x_0)) = g(x_0, y(x_0)) + g'_x(x_0, y(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Отсюда, используя теорему о среднем, получаем соотношение

$$g'_y(x,\xi)(y(x) - y(x_0)) = g(x,y(x)) - g(x,y(x_0)) =$$

$$(g'_x(x_0,y(x_0)) - f'(x_0-0))(x_0 - x) + o(x - x_0) \geqslant \delta(x_0 - x),$$

где $\xi \in (y(x_0), y(x))$.

Следовательно, $y(x) - y(x_0) \geqslant (\delta/M)(x_0 - x)$. Отсюда имеем

$$y(x) - c = (y(x) - y(x_0)) + (y(x_0) - c) \geqslant$$

$$(\delta/M)(x_0 - x) + (\delta/M)(b - x_0) = (\delta/M)(b - x),$$

что противоречит предположению $J = [x_0, b]$. Таким образом (6.1) выполняется при $a \leqslant x \leqslant b$. Вновь применяя теорему о среднем и учитывая (6.1), получаем

$$f(x) - g(x, c) = g(x, y(x)) - g(x, c) = g'_y(x, \xi)(y(x) - c) \geqslant (\delta m/M)(b - x),$$

где $\xi \in (c, y(x))$. Лемма доказана. □

7. Единственность экстремали теоремы 2

Пусть область D удовлетворяет условиям теоремы и не является вращением области Δ_{R,ρ_0} вокруг начала. Предположим, что $R(D_{r_0}, 0) = R(\Delta_{r_0,\rho_0}, 0)$ при некотором r_0, $\rho_0 < r_0 < R$. Тогда из уже доказанного неравенства (1.12) вытекает, что

$$R(D_r, 0) \equiv R(\Delta_{r,\rho_0}, 0) \quad \text{при} \quad r_0 \leqslant r \leqslant R. \tag{7.1}$$

Действительно, допустим, что существует $r' : r_0 < r' < R$ такое, что $R(D_{r'}, 0) > R(\Delta_{r',\rho_0}, 0)$. Тогда найдется ρ', $\rho_0 < \rho' < R$ такое, что $R(D_{r'}, 0) > R(\Delta_{r',\rho'}, 0)$. Применяя неравенство (1.12) к областям $D_{r'}$ и $\Delta_{r',\rho'}$, заключаем, что

$$R(D_r, 0) \geqslant R(\Delta_{r,\rho'}, 0) > R(\Delta_{r,\rho_0}, 0) \tag{7.2}$$

при всех r, $\rho' \leqslant r \leqslant r'$. Очевидно, (7.2) противоречит предположению $R(D_{r_0}, 0) = R(\Delta_{r_0,\rho_0}, 0)$, поэтому (7.1) выполняется.

Так как область D не является вращением области Δ_{R,ρ_0}, то, не ограничивая общности, можем считать, что найдутся точки $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_0}$, $0 < r_1, r_2 < R$, $0 < \theta_0 \leqslant \pi$, не принадлежащие области D.

Зафиксируем достаточно малое $\delta_0 > 0$. Из теоремы Каратеодори о сходимости к ядру следует, что найдется полигональная область $\Omega \subset \Delta_R \setminus \{z_1, z_2\}$ такая, что

$$\log R(D_r, 0) = \log R(\Omega_r, 0) + \delta_1(r), \tag{7.3}$$

где $\delta_1(R) = 0$ и $|\delta_1(r)| \leqslant \delta_0$ при всех r, $\rho_0 < r < R$.

Так как неравенство (1.12) уже доказано, то

$$\log R(\Omega_r, 0) \geqslant \log R(\Delta_{r,\rho_0}, 0)$$

при всех r, $\rho_0 \leqslant r \leqslant R$. Поэтому существует непрерывная неубывающая функция $\rho(r)$, определяемая условием

$$R(\Omega_r, 0) = R(\Delta_{r,\rho(r)}, 0). \tag{7.4}$$

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$. При всех r, $r_3 \leqslant r \leqslant R$, где $r_3 = R - \varepsilon_0$, области Ω_r и $\Delta_{r,\rho(r)}$ удовлетворяют условиям леммы 2, поэтому найдется постоянное число $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{d}{dr}\log R(\Omega_r,0)\bigg|_{r=r'-0} \leqslant \frac{d}{dr}\log R(\Delta_{r,\rho(r')},0)\bigg|_{r=r'} - 2\delta \tag{7.5}$$

при всех r', $r_3 \leqslant r' \leqslant R$. Таким образом, функции $\log R(\Omega_r,0)$ и $\log R(\Delta_{r,\rho},0)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Поэтому при всех $r \in [r_3,R]$ выполняется неравенство

$$\log R(\Omega_r,0) \geqslant \log R(\Delta_{r,\rho_0},0) + (R-r)\,C, \tag{7.6}$$

где $C > 0$ не зависит от области Ω, множеств $S(r)$ и параметра $r \in [r_3,R]$.

Считая, что выбранное выше $\delta_0 > 0$ удовлетворяет соотношению $\delta_0 < C_1 := (C\varepsilon_0)/2$, из (7.3) и (7.6) получаем неравенство

$$\log R(D_{r_3},0) \geqslant \log R(\Delta_{r_3,\rho_0},0) + C_1,$$

противоречащее соотношению (7.1). Следовательно, предположение $R(D_{r_0},0) = R(\Delta_{r_0,\rho_0},0)$ неверно и требуемое утверждение доказано. $\square$

8. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем $r > 1/4$. При всех $R > r$ очевидно соотношение $(D_R)_r = D_r$. Поэтому из теоремы 2, примененной к области $D_R \subset \Delta_R$, вытекает неравенство

$$R(D_r,0) \geqslant R(\Delta_{r,\rho(R)},0), \tag{8.1}$$

где $\rho(R)$ – решение уравнения

$$R(D_R,0) = R(\Delta_{R,\rho},0). \tag{8.2}$$

Из теоремы сходимости Каратеодори следует, что $R(D_R,0) \to 1$ при $R \to \infty$. Последнее соотношение вместе с (8.1) доказывает неравенство (1.7).

Докажем утверждение о случаях равенства в (1.7). Допустим, что $R(D_{r_1},0) = R(\Delta_{r_1,1/4},0)$ для некоторой допустимой области D, не являющейся вращением области Кебе, и некоторого $r_1 > 1/4$. Тогда, как показывает рассуждение, приведенное в начале предыдущего пункта, $R(D_r,0) = R(\Delta_{r,1/4},0)$ при всех

r, $r_1 \leqslant r < \infty$. Так как D не является вращением области Кебе, то и область D_R при всех $R > 1/4$ не является вращением области $\Delta_{r_1,1/4}$. Применяя утверждение о случаях равенства теоремы 2 к областям D_R и $\Delta_{R,1/4}$ при произвольном $R > r_1$ и учитывая соотношения $D_{r_1} = (D_R)_{r_1}$, $\Delta_{r_1,1/4} = (\Delta_{R,1/4})_{r_1}$, получаем неравенство $R(D_{r_1}, 0) > R(\Delta_{r_1,1/4}, 0)$, противоречащее сделанному выше предположению. Теорема доказана. $\square$

9. Двусвязные области

Постановка задачи (1.2), (1.3) естественным образом обобщается на двусвязные области $D \subset \mathbb{C}$, лежащие во внешности единичного круга и имеющие окружность $\mathbb{T}$ в качестве граничной компоненты. Пусть $\mathcal{D}$ – множество всех таких областей. Если $D \in \mathcal{D}$ и $r > 1$, то пересечение $D \cap \Delta_r$ содержит едиственную двусвязную компоненту, обозначаемую далее через D_r. Очевидно, $D_r \in \mathcal{D}$.

Как известно [1, с. 205], каждая двусвязная область с невырожденными граничными компонентами может быть отображена конформно и однолистно на круговое кольцо $K(r_1, r_2) := \{\zeta : r_1 < |\zeta| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$; при этом величина

$$\operatorname{mod}(D) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1},$$

называемая модулем области D (относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты), является конформным инвариантом.

Зафиксировав параметры $r > 1$ и $M > 0$, рассмотрим следующую задачу:

$$\operatorname{mod}(D_r) \to \min \tag{9.1}$$

при условиях

$$D \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \operatorname{mod}(D) = M. \tag{9.2}$$

Эта задача, как и задача (1.2), (1.3), может быть переформулирована в терминах емкости.

Пусть E – континуум на гиперболической плоскости, реализованной как круг Δ, снабженный метрикой

$$\rho(z_1, z_2) = (1/2) \log \frac{1 - h(z_1, z_2)}{1 + h(z_1, z_2)}, \quad \text{где} \quad h(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Через $E_{h,\varepsilon}(a)$ обозначаем *гиперболическое ε-раздутие* континуума E в точке $a \in E$, т.е. $E_{h,\varepsilon}(a) = E \cup \overline{\Delta}_{h,\varepsilon}(a)$, где $\Delta_{h,\varepsilon}(a) = \{z \in \Delta : \rho(z,a) < \varepsilon\}$. Задача (9.1), (9.2) эквивалентна следующей: при фиксированных значениях параметров $\varepsilon > 0$ и d, $0 < d < 1$, найти

$$\operatorname{cap}_{h,1}(E_{h,\varepsilon}(a)) \to \max \tag{9.3}$$

при условиях $a \in E \subset \Delta$ и $\operatorname{cap}_{h,1}(E) = d$.

По форме приведенные выше задачи (9.1),(9.2) и (9.3) еще более близки к задаче Кожевникова–Гайера, чем рассмотренные во введении задача (1.2),(1.3) и задача (1.6).

Экстремальными конфигурациями задач (9.3) и (9.1) служат кольца Гретша $R_G(\rho) = \Delta \setminus [0,\rho]$ и $R'_G(1/\rho) = \{z : 1/z \in R_G(\rho)\}$, $0 < \rho < 1$. Функция $\operatorname{mod}(R'_G(t))$ строго возрастает от 0 до ∞ на интервале $1 < t < \infty$. Поэтому для каждого $M > 0$ существует единственное значение $t = t(M)$ такое, что $\operatorname{mod}(R'_G(t)) = M$. Аналогично, для каждого значения d, $0 < d < 1$, существует число $\rho(d)$, $0 < \rho(d) < 1$, такое, что $\operatorname{cap}_{h,1}(I(\rho(d))) = d$, где $I(\rho) := [0,\rho]$.

Приведем формулировки утверждений, решающих задачи (9.1) и (9.3).

Теорема 3. *Пусть $M > 0$ и $r > t(M)$ – фиксированные числа. Если $D \in \mathcal{D}$ и $\operatorname{mod}(D) = M$, то*

$$\operatorname{mod}(D_r) \geqslant \operatorname{mod}(R'_{G,r}(t(M))). \tag{9.4}$$

где $R'_{G,r}(t) := R'_G(t) \cap \Delta_t$.

Равенство в (9.4) достигается только для областей $D = e^{i\alpha} R'_G(t(M))$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Следствие 2. *Пусть E – континуум в Δ такой, что $\operatorname{cap}(E) = d$, где d – фиксированное число, $0 < d < 1$. Тогда для всех $a \in E$ и всех $\varepsilon > 0$*

$$\operatorname{cap}_{h,1}(E_{h,\varepsilon}(a)) \leqslant \operatorname{cap}_{h,1}(I(d,\varepsilon)), \tag{9.5}$$

где $I(d,\varepsilon) = I(\rho(d)) \cup \overline{\Delta}_{h,\varepsilon}(0)$ – гиперболическое ε-раздутие отрезка $I(\rho(d))$ в точке $z = 0$.

Равенство в (9.5) достигается тогда и только тогда, когда E – гиперболический отрезок, а точка a – один из его концов.

Доказательство теоремы 3 и ее следствия будут опубликованы позднее в одной из наших следующих работ. Методически эти доказательства повторяют доказательство теорем 1 и 2, только вместо базовых результатов п. 2 в них используются новые теоремы о граничном искажении при отображении двусвязных областей.

10. Другие обобщения

Вместо круговых срезок D_r области D, изучающихся в данной работе, можно рассматривать срезки этой области вдоль других регулярных семейств кривых; например, вдоль семейства прямых $L_t := \{z : \Re z = -t\}$, $t > 0$. Такие срезки по прямым уже рассматривались в работах [8, 4] при решении еще одной задачи Д. Гайера. На этом пути возникает задача о минимизации конформного радиуса $R(D^t, 0)$ области $D^t := D \cap \{z : \Re z < -t\}$ при прежнем условии $R(D, 0) = 1$. Методика данной работы применима и при решении этой задачи. Отметим еще одно возможное обобщение: в теореме 2 вместо "объемлющего" круга Δ_R можно взять произвольную область Ω, кругосимметричную относительно луча $[0, -\infty)$, а в качестве срезок D_r области $D \subset \Omega$ рассматривать соответствующие компоненты пересечения D с множествами $\{z : g_\Omega(z, 0) > r\}$, где $r > 0$, а $g_\Omega(z, 0)$ – функция Грина области Ω с полюсом $z = 0$. Используя известные свойства однолистных функций, отображающих Δ на кругосимметричные области, можно показать, что эта формально более общая задача сводится к задаче (1.2), (1.11).

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. М., 1966.
2. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
3. D. Gaier, W. Hayman, *On the computation of modules of a long quadrilaterals,* Constr. Approx. **7** (1991), 453–467.
4. R. Laugesen, *Extremal problems involving logarithmic and Green capacity,* Duke Math. J. **70** (1993), 445–480.
5. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory,* Tokyo, 1959.
6. В. О. Кузнецов, *О максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 105–118.
7. R. Kühnau, *Über ein Modul-Kapazitätsproblem von D. Gaier,* Mitt. Math. Semin. Giessen **198** (1990), 85–119.
8. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и изменение модуля при расширении двусвязной области,* Зап. научн. семин. ПОМИ **201** (1992), 157–163.
9. В. К. Хейман, *Многолистные функции,* М., 1960.

10. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 115–142.
11. М. Шиффер, *Некоторые новые результаты в теории конформных отображений,* Приложение к кн.: Курант Р. *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, с. 234–301, М., 1953.
12. A. Yu. Solynin, *Extremal problems on conformal moduli and estimates for harmonic measures,* J. Analyse Math. **74** (1998), 1–49.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 30 сентября 1998 г.