Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Е. П. Голубева

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ – целочисленная примитивная квадратичная форма и $n \in \mathbb{Z}$. Вопросы о количестве целочисленных решений уравнения

$$f(x_1, x_2, x_3) = n \qquad (1)$$

и о законах распределения этих решений на поверхности (1) при $n \to \infty$ долгие годы привлекал самое пристальное внимание.

Значительных успехов в этой проблематике достиг Ю. В. Линник, который создал специальный метод для изучения уравнения (1), впоследствии названный эргодическим.

Позже Иванец [1] получил нетривиальную оценку коэффициентов Фурье автоморфных форм полуцелого веса и после работы Дьюка [2] представлялось, что оба вопроса решены.

В случае, когда f – положительно определенная форма, задачу действительно можно считать в принципе решенной, хотя остаточные члены в соответствующих асимптотических формулах далеки от ожидаемых, что ограничивает их применение к решению других диофантовых задач.

Такова же ситуация в случае, когда поверхность (1) является двуполостным гиперболоидом простейшего вида

$$b^2 - ac = D \qquad (D < 0). \qquad (2)$$

Из всех форм данной сигнатуры эта представляется самой интересной, поскольку уравнение (2) естественным образом связано с распределением положительно определенных бинарных квадратичных форм дискриминанта D. Насколько известно автору, в случае двуполостных гиперболоидов общего вида никто не рассматривал обсуждаемую задачу с точки зрения результатов или техники работ [1, 2].

Основная цель настоящей работы – показать, что даже в случае простейшего однополостного гиперболоида

$$b^2 - ac = D \qquad (D > 0) \tag{3}$$

из результатов работ [1, 2] невозможно вывести закон распределения целочисленных решений этого уравнения.

Заметим, что из всех типов уравнений (1) однополостный гиперболоид (3) доставил наибольшие трудности и при применении метода Ю. В. Линника.

Эти трудности были преодолены Б. Ф. Скубенко в работе [3]. Основной результат последней работы можно сформулировать следующим образом. Пусть Ω – достаточно хорошая (например, выпуклая) область на поверхности

$$b_1^2 - a_1 c_1 = 1. \tag{4}$$

Через $Q(\Omega)$ обозначим число целых решений уравнения (3) таких, что

$$(a/\sqrt{D},\, b/\sqrt{D},\, c/\sqrt{D}) = (a_1, b_1, c_1) \in \Omega.$$

Тогда для любых Ω_1 и Ω_2 имеем при $D \to \infty$

$$\frac{Q(\Omega_1)}{Q(\Omega_2)} \sim \frac{\mu(\Omega_1)}{\mu(\Omega_2)}, \tag{5}$$

где

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega'} \frac{da_1 db_1}{|a_1|}$$

и Ω' – проекция Ω на плоскость (a_1, b_1). Заметим, что величина $\mu(\Omega)$ пропорциональна площади Лобачевского области Ω.

Следует отметить, что на D были наложены некоторые дополнительные условия (см. ниже) и что асимптотическое значение $Q(\Omega)$ найдено не было.

Это значение было найдено в работе [4] на основании предположения (до сих пор не доказанного) о том, что асимптотическое равенство (5) имеет место со степенной оценкой остаточного члена. Таким образом, был решен интересный вопрос – найдено гипотетически асимптотическое значение числа приведенных неопределенных бинарных форм дискриминанта D. В работе [5] этот вопрос был решен без привлечения каких-либо гипотез для всех тех D, для которых имеет место соотношение (4).

Как уже упоминалось выше, при доказательстве асимптотического равенства (5) в работе [3] на D накладывалось дополнительное условие: предполагалось, что $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ при некотором фиксированном простом p. (Если мы возьмем, например, $p = 5$, то $D \equiv \pm 1 \pmod 5$.) Это условие никак не связано с существом рассматриваемой задачи и привносится за счет особенностей эргодического метода Ю. В. Линника. Его можно заменить на предположение об отсутствии нулей в окрестности точки $s = 1$ у $L_D(s)$ – L-функции Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{4D}{\cdot}\right)$.

В работе [5] аналог соотношения (5) был получен в следующей форме

$$Q(\Omega) = C\sqrt{D}\, L_D(1)\mu(\Omega)(1 + O(\log^{-\eta} D)), \tag{6}$$

где $C > 0$ (точное значение C см. в [5]), $\eta > 0$ – постоянная. Этот результат был доказан комбинированием тонких решетных соображений, относящихся к суммированию значений мультипликативных функций, с некоторыми геометрическими соображениями.

К сожалению, он обладает сходным недостатком: при его выводе использовалось предположение об отсутствии нулей $L_D(s)$ в некоторой окрестности точки $s = 1$.

Заметим, что в [6] $Q(\Omega)$ вычислено, грубо говоря, для любой квадратичной формы и, в частности, для любых двуполостных гиперболоидов.

Другой возможный подход к рассматриваемой задаче связан с попытками доказать равномерность распределения решений сравнения $b^2 \equiv D \pmod a$ в интервалах $0 \leqslant b \leqslant a$ в среднем по a при фиксированном D, что напрямую сводит последний вопрос к задаче об оценке суммы сумм Салье. Этот подход был рассмотрен в работе [7], где было, в частности, показано, что из любой нетривиальной оценки суммы

$$\sum_{\substack{a \leqslant x \\ a \equiv a_0 \pmod 4, (a,m)}} \frac{S(D, m^2, a)}{\sqrt{a}}, \tag{7}$$

где

$$S(D, m, a) = \sum_{\substack{t \pmod a \\ tt' \equiv 1 \pmod a}} \left(\frac{t}{a}\right) \exp\left(\frac{2\pi i(Dt + mt')}{a}\right),$$

вытекает результат типа (5). В работе [8] был получен обратный результат, то есть доказано, что из асимптотического равенства типа (5) или (6) прямо следует оценка суммы (7), зависящая от оценки остатка в этом асимптотическом равенстве.

Однако в [7] оценка суммы (7) была получена лишь в среднем по D, так что и равенство типа (5) доказано лишь в среднем по D. Количество тех $L_D(s)$, которые возможно имеют нули в окрестности точки $s = 1$, невелико, поэтому равенство (6) верно в среднем по D, пробегающим достаточно редкие последовательности (например, если $D_k \asymp k^M$ для любого фиксированного M).

Заметим, что в работе [1] фундаментальную роль также играют оценки некоторых усреднений сумм Салье. Но эти усреднения имеют другой характер нежели (7) и, как показывает результат настоящей работы, вряд ли они могут быть приведены к нужному виду.

2. Напомним теперь основные понятия, связанные с неопределенными бинарными квадратичными формами и квадратичными иррациональностями. Для простоты мы будем рассматривать только формы фундаментального дискриминанта $4D$, где $D \equiv 2, 3 \pmod 4$. Это ограничение можно снять, но при его наличии упрощаются выкладки.

Пусть $\varphi(x_1, x_2) = ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ и $b^2 - ac = D$. Этой форме ставятся в соответствие две квадратичные иррациональности $\xi_1 = (b + \sqrt{D})/a$ и $\xi_2 = (b - \sqrt{D})/a$, называемые ее корнями.

Если две формы собственно или несобственно эквивалентны, то их корни попарно собственно или соответственно несобственно эквивалентны.

Пусть $b \geqslant 0$ и $a > 0$. Квадратичная иррациональность $\xi = (b + \sqrt{D})/a$ называется приведенной, если разложение ξ в обыкновенную непрерывную дробь является чисто периодическим:

$$\xi = [\overline{q_2, q_2, \ldots, q_{2k}}]. \tag{8}$$

Соответствующая форма φ также называется приведенной. Заметим, что четность длины разложения (8) следует из того, что $D \equiv 2, 3 \pmod 4$.

В силу классических результатов, условия приведенности для нашего случая можно записать следующим образом:

$$0 \leqslant b < \sqrt{D}, \quad a + b > \sqrt{D}, \quad a - b < \sqrt{D}.$$

Как известно, любая форма эквивалентна (собственно или несобственно) приведенной форме того же дискриминанта.

Пусть H – комплексная верхняя полуплоскость, $H = \{z = x + iy,\ y > 0\}$ и $F = PSL_2(\mathbb{Z})/H$. Всюду в дальнейшем F выбирается стандартным образом: в замыкании F

$$|z| \geqslant 1, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}.$$

Каждой иррациональности $\xi = (b + \sqrt{D})/a$ можно сопоставить две геодезические на H: γ_ξ – полуокружность с концами в точках ξ и $\xi^* = (b - \sqrt{D})/a$ и γ_ξ^- – полуокружность с концами в точках $-\xi$ и $-\xi^*$. Очевидно, γ_ξ и γ_ξ^- имеют одинаковые радиусы $r = \sqrt{D}/|a|$, расположены симметрично относительно мнимой оси и их центры находятся в точках $\alpha = b/a$ и $-\alpha$ соответственно.

Эти геодезические естественным образом индуцируют геодезические на F. Если ξ_1 и ξ_2 собственно эквивалентны, то порожденные ими геодезические на F, очевидно, совпадают. Если ξ_1 и ξ_2 несобственно эквивалентны, то они также совпадают, поскольку в этом случае иррациональность ξ_1 собственно эквивалентна $-\xi_2^*$. Множество таких геодезических мы обозначим через Λ_D.

Введем теперь на $\{\xi\}$ функцию $N(\alpha, r)$ – плотность распределения. Напомним, что через r мы обозначили радиус полуокружности γ_ξ, а через α – ее центр.

Разобьем полуплоскость (α, r), $r \geqslant 0$, на квадраты Δ_i так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Стороны квадратов имеют порядок $D^{-\lambda_i}$, где $\lambda_i > 0$ и достаточно мало (точная граница для λ_i будет указана ниже).

2. Сначала осуществляется дробление полосы $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, далее оно продолжается четным образом на полосу $-1/2 < \alpha \leqslant 1/2$, а далее по закону $\alpha \to \alpha + 1$ на всю полуплоскость.

Каждой области Ω на полуплоскости (α, r) однозначно соответствует область на той части гиперболоида (4), где $a_1 \geqslant 0$. Эту область обозначим так же, поскольку это не может привести к путанице. Для любой точки $(\alpha, r) \in \Delta_i$ положим $N(\alpha, r) = Q(\Delta_i)/S(\Delta_i)$, где $S(\Delta_i)$ – площадь (лебегова) квадрата Δ_i.

Введенная таким образом функция $N(\alpha, r)$ обладает следующими свойствами:

1. $N(\alpha + 1, r) = N(\alpha, r)$, поскольку при фиксированном $r = \sqrt{D}/a$, $\alpha = b/a$ и $b^2 \equiv D \pmod{a}$. Следовательно, $\alpha + 1 = (b + a)/a$

и $(b+a)^2 \equiv D \pmod a$.

2. $N(\alpha, r)$ – функция, четная по α, поскольку $-\alpha = -b/a$ и $(-b)^2 \equiv D \pmod a$.

3. Существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что при любых r_1 и r_2

$$\int\limits_0^1 d\alpha \int\limits_{r_1}^{r_2} N(\alpha, r)dr = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\mathcal{L}(D) + O(D^{1/2-\varkappa}), \tag{9}$$

где $\mathcal{L}(D) = \frac{6}{\pi^2}\sqrt{D}L_D(1)$. Это равенство было доказано в работе [5] в несколько другой форме. Для того, чтобы прояснить его происхождение, заметим что его левая часть совпадает с точностью до соответствующего остатка с суммой

$$\sum_{\substack{\xi \\ \frac{1}{r_2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{r_1} \\ b \pmod a}} 1 = \sum_{\frac{1}{r_2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{r_1}} \sigma(a),$$

где $\sigma(a)$ – число решений сравнения $b^2 \equiv D \pmod a$ и b пробегает полную систему вычетов $\pmod a$. Последняя сумма вычисляется стандартными в теории L-функций методами с привлечением оценки Берджесса для L-функций в критической полосе. Постоянная $\varkappa$ в остатке зависит от λ.

4. Имеет место оценка

$$N(\alpha, r) = O\left(\frac{1}{r^2}\mathcal{L}(D)\right). \tag{10}$$

В отличие от предыдущих это ограничение не вытекает естественным образом из постановки задачи. Оно введено для технических упрощений доказательств и в случае положительного решения рассматриваемого в работе вопроса (т.е. если бы из результатов работы [2] можно было бы найти функцию $N(\alpha, r)$) мы не имели бы права его накладывать.

Заметим, что это ограничение согласуется с равенством (9) и с гипотетическим значением $N(\alpha, r)$:

$$N(\alpha, r) \sim \frac{\mathcal{L}(D)}{r^2} \qquad (D \to \infty), \tag{11}$$

которое, в свою очередь, согласуется с соотношениями (5)и (6).

5. Существует постоянная $\nu > 0$ такая, что для любой достаточно хорошей области Ω

$$Q(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} N(\alpha, r) d\alpha dr + O(\mathcal{L}(D) D^{-\nu}).$$

Это соотношение сразу же следует из оценки (10).

Замечание 1. Мы не вдаемся здесь в подробности, связанные с допустимым видом области Ω, поскольку это выходит за рамки интересов настоящей работы.

Кроме того, мы не прибегаем к обычной для такого рода задач процедуре сглаживания функции $N(\alpha, r)$, поскольку единственное требование (в смысле гладкости), предъявляемое к ней, состоит в том, что она должна раскладываться в ряд Фурье по α.

Замечание 2. Как уже упоминалось выше, основная цель настоящей работы – показать, что перечисленных выше свойств функции $N(\alpha, r)$ вместе с дополнительной информацией о ней, вытекающей из результатов работы [2] (см. леммы 5 и 6 ниже), недостаточно для того, чтобы однозначно определить функцию $N(\alpha, r)$ (точнее, ее главную часть при $D \to \infty$).

Замечание 3. В работе [9] было доказано (при тех условиях, о которых шла речь в п. 1), что плотность распределения целых точек на поверхности (3) инвариантна (асимптотически) относительно вращений этого гиперболоида вокруг оси симметрии $b = 0$, $a = c$. Это оказалось достаточно, чтобы найти главную часть $N(\alpha, r)$ (при $D \to \infty$).

В заключение этого пункта перечислим факты, относящиеся к законам распределения целых точек на однополостном гиперболоиде (3) при большом фиксированном D, полученные без привлечения каких-либо недоказанных утверждений.

1. В работе [3] доказано асимптотическое равенство (5) для D, удовлетворяющих условию $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, где p – фиксированное простое.

2. В работе [5] доказано асимптотическое равенство

$$Q(\Omega) = \mathcal{L}(D)\mu(\Omega) + O(D^{\frac{1}{2}-\nu}),$$

где $\nu > 0$ и Ω – область, заданная неравенствами $A_1 D^{1/2} \leqslant a \leqslant A_2 D^{1/2}$, $0 \leqslant b < a$.

3. В качестве следствия имеем для D таких же, как в п. 1,

$$Q(\Omega) \sim \mathcal{L}(D)\mu(\Omega).$$

В частности, если Ω_0 – классическая область приведения, то

$$Q(\Omega_0) \sim 4\log 2\mathcal{L}(D).$$

4. Для остальных D имеют место оценки (см. [5])

$$\frac{7}{3}\mathcal{L}(D) + O(D^{\frac{1}{2}-\nu}) < Q(\Omega_0) < \frac{10}{3}\,\mathcal{L}(D) + O(D^{\frac{1}{2}-\nu}), \quad \nu > 0.$$

5. Разложим сглаженную плотность распределения $N_1(\alpha, r)$ в ряд Фурье по α:

$$N_1(\alpha, r) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(r)\cos 2\pi m\alpha.$$

Существует постоянная $\nu > 0$ такая, что

$$\varphi_0(r) \sim \frac{\mathcal{L}(D)}{r^2},$$

а для всех остальных m имеем

$$\int_y^{\infty} \frac{r\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}\,\varphi_m(r)}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr = O(\mathcal{L}(D)D^{-\nu}),$$

где $\nu > 0$.

Эти соотношения получены в настоящей работе (см. лемму 6 ниже) на основании результатов работы [2].

3. Сформулируем теперь основной результат работы [2], относящийся к рассматриваемому случаю.

Пусть $\Omega \subset F$ – достаточно хорошая область (например, выпуклая) и $m(\Omega)$ – ее площадь,

$$m(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{y^2}.$$

Пусть γ – кривая на H, $l(\gamma)$ – ее длина (неевклидова) и

$$\Sigma_{\Omega} = \sum_{\gamma \in \Lambda_D} l(\gamma \cap \Omega).$$

Предложение 1 (Дьюк, [2]). *Существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\frac{\Sigma_\Omega}{\Sigma_F} = \frac{m(\Omega)}{m(F)} + O(D^{-\delta}).$$

Известно, что Σ_F выражается через число классов и регулятор поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Если произвести соответствующие выкладки, то последнее соотношение приобретает следующий вид:

$$\Sigma_\Omega = \pi m(\Omega)\mathcal{L}(D)\,(1 + O(D^{-\delta})).$$

Замечание 4. В дальнейшем мы используем это предложение в случае, когда область меняется вместе с ростом D. Точнее, когда она является прямоугольником с бесконечно малыми при $D \to \infty$ сторонами. Формально, мы не имеем право это делать. С другой стороны, из доказательства, приведенного в работе [2], видно, что получение результата в такой форме не вызывает затруднений.

Отметим также, что при таком выборе областей не происходит потери информации, кроме ухудшения остаточных членов, которые нас не интересуют.

Пусть Π – прямоугольник на верхней полуплоскости:

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + A, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + B,$$

$\Pi \subset F$ и $A = D^{-\lambda_1}$, $B = D^{-\lambda_2}$, где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Лемма 1. *Существует постоянная $\eta > 0$ такая, что*

$$\Sigma_\Pi = \frac{AB\pi}{y_0^2}\,\mathcal{L}(D) + O(D^{\frac{1}{2}-\eta}). \tag{12}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из предложения 1(с учетом замечания 4) и того факта, что

$$m(\Pi) = \frac{AB}{y_0^2}\,(1 + O(B)).$$

Для того, чтобы сформулировать основной результат настоящей работы нам понадобятся еще несколько определений.

Пусть F_n получается из F с помощью параллельного переноса $x \to x + n$ и

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n.$$

Пусть для любой иррациональности ξ

$$\tilde{\gamma}_\xi = \mathcal{F} \cap \gamma_\xi.$$

В лемме 2 (см. ниже) показано, что все геодезические на F совпадают с образами $\tilde{\gamma}_\xi$ при отображении $H \to T/H$, где T верхняя треугольная подгруппа $PSL_2(\mathbb{Z}) : T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$, когда ξ пробегает множество всех приведенных иррациональностей ξ. При этом геодезические, порожденные различными ξ, не совпадают.

Это дает возможность явно записать Σ_Π из (12) в терминах $N(\alpha, r)$. Сравнивая полученное в лемме 4 выражение для Σ_Π с (12), мы получаем интегральное уравнение (приближенное) для $N(\alpha, r)$ (см. лемму 5 ниже). Это уравнение имеет бесконечно много существенно различных решений, и все они обладают свойствами плотности $N(\alpha, r)$, перечисленными в п. 2.

Это приводит нас к основному результату настоящей работы.

Пусть в области приведения (при $a > 0$)

$$0 < b < \sqrt{D}, \quad b + a > \sqrt{D}, \quad a - b < \sqrt{D}, \tag{13}$$

на плоскости (a, b) задан набор точек в целыми a и b. Пусть $r = \sqrt{D}/a$, $\alpha = b/a$, $\xi = (b + \sqrt{D})/a$, $\xi^* = (b - \sqrt{D})/a$; γ_ξ, γ_ξ^-, $\tilde{\gamma}_\xi$ обозначает то же, что и раньше.

Отметим, что дискриминант квадратичной иррациональности ξ делит $4Da^2$.

На каждом из наборов определим функцию $N(\alpha, r)$ так же, как мы это делали раньше.

Предложение 2. *Существует бесконечно много наборов таких, что для каждого из них плотность $N(\alpha, r)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на плотность в п. 2, и $\{\tilde{\gamma}_\xi\}$ распределено равномерно на F в смысле предложения 1.*

Доказательство этого утверждения будет дано в п. 4.

4. В этом пункте мы приведем узловые моменты доказательства предложения 2. Все вспомогательные утверждения будут доказаны в следующем пункте.

Лемма 2. *Множество Λ_D состоит из образов $\tilde{\gamma}_\xi$ при отображении $H \to T/H$, когда ξ пробегает множество всех приведенных иррациональностей. Если ξ_1 и ξ_2 различны, то и образы $\tilde{\gamma}_{\xi_1}$, $\tilde{\gamma}_{\xi_2}$ не совпадают на F.*

Замечание 5. Если a и b таковы, что $D < a^2 - ab + b^2$, то $\tilde{\gamma}_\xi = \varnothing$. Таким образом, такие ξ не участвуют в формировании множества Λ_D, хотя их количество имеет порядок $\mathcal{L}(D)$ (см. [5]).

Замечание 6. Поскольку результат леммы 2 представляет самостоятельный интерес, дадим замкнутое описание множества Λ_D.

Рассмотрим пары целых a и b таких, что

$$b^2 \equiv D \pmod a, \quad 0 < b < \sqrt{D}, \quad a + b > \sqrt{D}, \quad a^2 - ab + b^2 \leqslant D.$$

Проведем полуокружность γ_ξ с концами в точках

$$\xi = \frac{b + \sqrt{D}}{a} \quad \text{и} \quad \xi^* = \frac{b - \sqrt{D}}{a}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ является объединением всех сдвигов F на целое число и $\tilde{\gamma}_\xi = \mathcal{F} \cap \gamma_\xi$, тогда Λ_D состоит из сдвигов на все целые числа $\tilde{\gamma}_\xi$ на F.

Лемма 4. *Пусть $K = D^{-\lambda}$, где $\lambda > 0$ – постоянная, входящая в определение $N(\alpha, r)$ (см. п. 2). Пусть $B = K^{1/2}$ и $A = B^{1/2}$, тогда в обозначениях леммы 1 имеем:*

$$\Sigma_\Pi = \frac{B}{2y_0}\Bigg(\int\limits_{y_0}^{\infty} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - y_0^2}}\Bigg(\int\limits_{x-\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x+A-\sqrt{r^2-y_0^2}} N(\alpha, r)d\alpha + \int\limits_{x+\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x+A+\sqrt{r^2-y_0^2}} N(\alpha, r)d\alpha\Bigg) + O(D^{1/2}A^4\log^2 D).$$

Сравнивая значения Σ_Π, доказанные в леммах 1 и 4, получаем интегральное уравнение, которому удовлетворяет плотность $N(\alpha, r)$.

Лемма 5. *Для любых x и y из $\mathcal{F}$ имеем при надлежащем выборе λ:*

$$\int\limits_y^\infty \frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} \left(\int\limits_{x-\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A-\sqrt{r^2-y^2}} N(\alpha,r)d\alpha + \int\limits_{x+\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A+\sqrt{r^2-y^2}} N(\alpha,r)d\alpha \right)$$

$$= \frac{\pi A\mathcal{L}(D)}{y}(1+O(D^{-\lambda_3})), \tag{15}$$

где $\lambda_3 > 0$ – постоянная.

Так как плотность $N(\alpha,r)$ периодична по α и является четной функцией, то ее можно разложить в ряд Фурье вида

$$N(\alpha,r) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(r)\cos 2\pi m\alpha \tag{16}$$

(см. п. 2). Для $\varphi_0(r)$ имеем

$$\varphi_0(r) = \int\limits_0^1 N(\alpha,r)d\alpha$$

и в силу (9)

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \varphi_0(r)dr = \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\mathcal{L}(D) + O(D^{\frac{1}{2}-\varkappa}).$$

Если $N(\alpha,r)$ предварительно сгладить, то отсюда сразу же следует, что $\varphi_0(r) \sim \mathcal{L}(D)/r^2$.

Подставляя разложение в (16) с учетом значения $\varphi_0(r)$, мы получаем следующие соотношения для остальных $\varphi_m(r)$.

Лемма 6. *Для сглаженной функции $N(\alpha,r)$ коэффициенты $\varphi_m(r)$ разложения, соответствующего (16) при $m > 0$, удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_y^\infty \frac{\varphi_m(r)r\,\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr = O(\mathcal{L}(D)D^{-\nu}),$$

где $\nu > 0$.

В п. 5 будут приведены наводящие соображения, позволяющие доказать эту лемму.

Доказательство предложения 2. Рассмотрим функцию

$$N(\alpha, r) = \mathcal{L}(D)\left(\frac{1}{r^2} + K\frac{J_\nu(r)}{r^\nu}\cos 2\pi\alpha\right),$$

где $\nu \geqslant 2$ – вещественное число. Если K достаточно мало, то в силу известных оценок для функций Бесселя (см., например, [10]) функция $N(\alpha, r)$ положительная для всех α и r. Кроме того, она обладает всеми свойствами плотности $N(\alpha, r)$, перечисленными в п. 2.

Функция $\varphi_1(r) = J_\nu(r)/r^\nu$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_y^\infty \frac{\varphi_1(r) r\cos 2\pi\sqrt{r^2-y^2}}{r^2-y^2}\,dr = 0,$$

поскольку после замены $t = \sqrt{r^2-y^2}$ имеем

$$\int\limits_y^\infty \frac{J_\nu(r)\cos 2\pi\sqrt{r^2-y^2}}{r^{\nu-1}\sqrt{r^2-y^2}}\,dr = \int\limits_0^\infty \frac{J_\nu(\sqrt{t^2+y^2})\cos 2\pi t}{(t^2+y^2)^{\nu/2}}\,dt = 0$$

(см. [11], стр. 58). Таким образом, $N(\alpha, r)$ удовлетворяет уравнению (15) (см. п. 5).

Для завершения доказательства нам осталось только подобрать точки ξ с целыми a и b так, чтобы функция $N(\alpha, r)$ задавала плотность их распределения.

Рассмотрим дробление полуплоскости (α, r), $r \geqslant 0$ такое же как в п. 2. Область приведения (16) в координатах (α, r) задается неравенствами

$$0 < \alpha < 1, \quad \alpha + 1 > r, \quad 1 - \alpha < r.$$

Пусть для каждого Δ_i, входящего в область приведения,

$$Q_1(\Delta_i) = \iint\limits_{\Delta_i} N(\alpha, r)\,d\alpha\,dr,$$

тогда

$$Q_1(\Delta_i) \asymp \mathcal{L}(D)S(\Delta_i) = O(D^{1/2-2\lambda}\log D).$$

С другой стороны, число пар (a,b) с целыми a и b таких, что $(a/\sqrt{D}, b/\sqrt{D}) \in \Delta_i$, имеет порядок $D^{1-2\lambda}$ и мы можем выбрать любые $Q(\Delta_i) = [Q_1(\Delta_i)]$ из них (напомним, что мы одинаково обозначаем область на плоскости (α, r) и соответствующие им области на гиперболоиде (4)).

Поскольку полоса вдоль границы области приведения, в которую квадраты Δ_i входят не полностью, имеет ширину порядка $O(D^{-\lambda})$, то она не влияет на закон распределения точек ξ при больших D.

5. В этом пункте мы приводим вспомогательные факты, опущенные в предыдущих пунктах.

Доказательство леммы 2. Легко показать, что γ_ξ (соответственно, γ_ξ^-) имеет не более двух точек пересечения с границей $\mathcal{F}$, которую мы обозначим через $\partial\mathcal{F}$.

Покажем прежде всего, что $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда

$$a^2 - ab + b^2 \leqslant D. \tag{17}$$

Уравнение γ_ξ имеет вид

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{D}{a^2}. \tag{18}$$

Возьмем $x = 1/2$. Тогда $y^2 = D/a^2 - 1/4 + b/a - b^2/a^2$. Если условие (17) выполнено, то $y^2 \geqslant 3/4$. Таким образом, в этом случае $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$, поскольку эллиптическая вершина F: $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ лежит ниже γ_ξ.

Пусть теперь $a^2 - ab + b^2 > D$. Можно показать, что в пересечении области приведения (13) с внешностью эллипса $a^2 - ab + b^2 = D$ выполнено условие $a > \sqrt{D}$. Следовательно, $r = \sqrt{D}/a < 1$ и $\alpha = b/a < 1$. Таким образом, $\xi = r + \alpha < 2$, а по условиям приведения число ξ^* всегда удовлетворяет неравенству $-1 < \xi^* < 0$. Предположим, что при этом $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$. Поскольку неравенство (17) не выполняется, то γ_ξ проходит ниже точки $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, значит, обе точки пересечения γ_ξ с $\partial\mathcal{F}$ лежат по одну сторону от прямой $x = \frac{1}{2}$. Обозначим вещественные части этих точек через x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Поскольку две полуокружности (γ_ξ и одна из тех, части которых составляют $\partial\mathcal{F}$), симметричные относительно мнимой оси, не могут иметь две точки перечения при $y > 0$, то либо $-1 < x_1 < -1/2$, $-1/2 \leqslant x_2 < 1/2$, либо $1/2 < x_1 \leqslant 3/2$, $3/2 < x_2 < 2$.

В первом случае при $x = -\frac{1}{2}$ γ_ξ лежит выше $\partial\mathcal{F}$ и мы имеем

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3}{4} < \frac{D}{a^2},$$

то есть $a^2 + ab + b^2 < D$. Последнее неравенство противоречит неравенству $a^2 - ab + b^2 > D$, поскольку $ab > 0$.

Во втором случае при $x = 3/2$ полуокружность γ_ξ лежит выше $\partial\mathcal{F}$ и, следовательно,

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3}{4} < \frac{D}{a^2}.$$

Последнее неравенство можно записать в виде $3a^2 - 3ab + b^2 < D$. Оно так же противоречит неравенству $a^2 - ab + b^2 > D$, поскольку $a > b$.

Таким образом, если $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$, то $a^2 - ab + b^2 \leqslant D$.

Перейдем теперь к непосредственному изучению структуры Λ_D.

Каждая иррациональность ξ эквивалентна приведенной, так что мы будем рассматривать только приведенные иррациональности. Пусть ξ – приведенная иррациональность. Все приведенные иррациональности ξ_i, эквивалентные ξ (собственно или несобственно), содержатся в цикле

$$\xi = \xi_0 \to \xi_1 \to \ldots \to \xi_{2k-1} \to \xi_0, \tag{19}$$

где ξ_i последовательно возникают при разложении ξ в обыкновенную непрерывную дробь (8). При этом

$$\xi_i = q_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}, \quad \text{где} \quad q_i = [\xi_i].$$

Заметим, что ξ_i и ξ_{i+1} эквивалентны несобственно.

Покажем, что если $\tilde{\gamma}_\xi = \varnothing$, то $\tilde{\gamma}_{\xi_1} \neq \varnothing$. Действительно, пусть

$$\xi = \frac{b + \sqrt{D}}{a}, \quad \xi_1 = \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1},$$

тогда $b_1 = q_1 a - b$, $a_1 = (D - b_1^2)/a$. Если $\tilde{\gamma}_\xi = \varnothing$, то $a > \sqrt{D}$ (см. выше) и, значит, $a_1 < \sqrt{D}$. Следовательно, $r_{\xi_1} = \sqrt{D}/a_1 > 1$ и $\tilde{\gamma}_{\xi_1} \neq \varnothing$.

Таким образом, мы можем считать, что $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$. В противном случае мы начинаем цикл с ξ_1.

Пусть $z_\xi = x_\xi + iy_\xi$ – правая точка пересечения γ_ξ с $\partial\mathcal{F}$. Покажем, что возможны два случая: $-1/2 \leqslant x_\xi - q_1 \leqslant 1/2$ или $1/2 < x_\xi - q_1 < 1$. Для этого нам достаточно показать, что $x_\xi > q_1 - 1/2$. Пусть сначала $r = r_\xi > 1$. Найдем на γ_ξ точку, в которой $x = q_1 - 1/2$. Из (18) имеем

$$y^2 = \frac{D}{a^2} - \left(q_1 - \frac{1}{2} - \frac{b}{a}\right)^2. \tag{20}$$

Поскольку

$$\frac{b+\sqrt{D}}{a} > q_1 > \frac{b+\sqrt{D}}{a} - 1,$$

то

$$\frac{\sqrt{D}}{a} - \frac{1}{2} > q_1 - \frac{b}{a} - \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{D}}{a} - \frac{3}{2} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Если $r \geqslant 3/2$, то из (18) имеем

$$y^2 > \frac{D}{a^2} - \left(\frac{\sqrt{D}}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{D}}{a} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{5}{4}.$$

Если же $1 < r < 3/2$, то

$$y^2 > \frac{D}{a^2} - \left(\frac{\sqrt{D}}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{3}{4}$$

или

$$y^2 > \frac{D}{a^2} - \frac{1}{4} > \frac{3}{4}.$$

В любом случае $y > \frac{\sqrt{3}}{2}$ и точка $z = q_1 - 1/2 + i\sqrt{3}/2$ лежит ниже γ_ξ. Значит, z_ξ находится правее точки z.

Если же $r_\xi < 1$, то

$$q_1 = \left[\frac{b+\sqrt{D}}{a}\right] \leqslant \left[\frac{2\sqrt{D}}{a}\right] = [2r] < 2.$$

Таким образом, $q_1 = 1$. Поскольку $\tilde{\gamma}_\xi \neq \varnothing$, то точка $1/2 + i\sqrt{3}/2$ лежит ниже $\partial\mathcal{F}$ (см. первую часть доказательства), значит, $x_\xi > 1/2$.

Числу ξ мы ставим в соответствие отрезки геодезических на F, которые совпадают с $T/\tilde{\gamma}_\xi$ или $T/\tilde{\gamma}_\xi^-$. (Напомним, что T – группа сдвигов H на целое число.)

При преобразовании

$$z \to -\frac{1}{z - q_1} \tag{21}$$

имеем: $\xi \to -\xi_1$, $\xi^* \to -\xi_1^*$.

Если $q_1 - 1/2 < x_\xi \leqslant q_1 + 1/2$, то точка $z_\xi - q_1$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$, причем $-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$. При преобразовании (21) эта точка остается на той же окружности. Таким образом, в этом случае $\tilde{\gamma}_\xi^- \neq \varnothing$, и мы ставим в соответствие ξ_1 отрезки геодезических $T/\tilde{\gamma}_{\xi_1}$ и $T/\tilde{\gamma}_{\xi_1}^-$ и так далее.

Этот процесс продолжается до тех пор пока или мы снова получим ξ, или же на каком-то шаге нам встретится случай, когда

$$q_{i+1} + \frac{1}{2} < x_{\xi_i} < q_{i+1} + 1. \tag{22}$$

В первом случае пара геодезических на F, соответствующая классу несобственно эквивалентных иррациональностей, которому принадлежит ξ, совпадают с

$$\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant 2k-1} (T/\tilde{\gamma}_\xi \bigcup T/\tilde{\gamma}_\xi^-). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть, для определенности, неравенство (22) выполняется на первом же шаге. Покажем прежде всего, что тогда $\tilde{\gamma}_{\xi_1} = \varnothing$. Из (22) следует, что точка $q_1 + 1/2 + i\sqrt{3}/2$ лежит ниже $\tilde{\gamma}_\xi$.

Таким образом, подставляя значения $x = q_1 + 1/2$, $y = \sqrt{3}/2$ в левую часть (18), имеем

$$\left(q_1 + \frac{1}{2} - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3}{4} < \frac{D}{a^2}.$$

Заменяя $\alpha = b/a$, $r = \sqrt{D}/a$, получаем

$$(2q_1 + 1 - 2\alpha)^2 + 3 < 4r^2.$$

Поскольку $2r = \xi - \xi^*$ и $2\alpha = \xi + \xi^*$, после преобразований получаем

$$3 < (\xi - \xi^*)^2 - (2q_1 + 1 - \xi - \xi^*)^2 = (2q_1 + 1 - 2\xi^*)$$
$$\times(2\xi - 2q_1 - 1) = \left(1 - \frac{2}{\xi_1^*}\right)\left(\frac{2}{\xi_1} - 1\right).$$

Это неравенство можно записать в следующей форме:

$$2 < \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_1^*} - \frac{2}{\xi_1 \xi_1^*}. \tag{24}$$

С другой стороны, в начале доказательства этой леммы мы показали, что $\tilde{\gamma}_{\xi_1} = \varnothing$, если

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)^2 + \frac{3}{4} > r_1^2,$$

где α_1 и r_1 – центр и радиус полуокружности γ_{ξ_1} соответственно. Последнее неравенство запишем в виде

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_1 + \xi_1^*}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \left(\frac{\xi_1 - \xi_1^*}{2}\right)^2.$$

После преобразований имеем

$$3 > (\xi_1 - \xi_1^*)^2 - (1 - \xi_1 - \xi_1^*)^2 = (1 - 2\xi_1^*)(2\xi_1 - 1),$$

то есть,

$$2 > \xi_1^* + \xi_1 - 2\xi_1 \xi_1^*.$$

Последнее неравенство совпадает с (24), поскольку $\xi_1 \xi_1^* < 0$. Таким образом, $\tilde{\gamma}_{\xi_1} = \varnothing$.

Как мы показали выше, отсюда следует, что $r_1 < 1$, $q_2 = 1$. Значит, $\xi_1 = 1 + 1/\xi_2$. Выразим ξ_2 через ξ. Имеем

$$1 + \frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\xi - q_1},$$

откуда

$$\xi_2 = \frac{1}{q_1 + 1 - \xi} - 1. \tag{25}$$

Как было показано выше, если $\tilde{\gamma}_{\xi_1} = \varnothing$, то $\tilde{\gamma}_{\xi_2} \neq \varnothing$. Иррациональность $\xi_2 + 1$ эквивалентна ξ_2 и $T/\tilde{\gamma}_{\xi_2} = T/\tilde{\gamma}_{\xi_2+1}$.

Рассмотрим преобразование

$$z \to \frac{1}{q_1 + 1 - z}.$$

Это преобразование, в силу (25), переводит ξ в ξ_2+1 и точку z_ξ в точку z на окружности $x^2+y^2=1$ при $-1/2 < x \leqslant 1/2$. Последнее утверждение следует из того, что $-1/2 < x_\xi - q_1 - 1 < 0$. Точка z лежит на γ_{ξ_2+1} и на $\mathcal{DF}$. Таким образом, она является левым концом $\tilde\gamma_{\xi_2+1}$ (левым, поскольку на правом конце $x_{\xi_2} > 1/2$).

Иррациональности ξ_2 мы ставим в соответствие отрезок геодезической $T/\tilde\gamma_{\xi_2}$ на F. Далее мы переходим к ξ_3 или к ξ_4 в зависимости от того, $\tilde\gamma_{\xi_3} \neq \varnothing$ или $\tilde\gamma_{\xi_4} = \varnothing$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не закончится цикл (19).

Таким образом, утверждение (23) имеет место в любом случае. Для завершения доказательства леммы нам осталось выяснить, какие отрезки $\tilde\gamma_\xi$ и $\tilde\gamma_\xi^-$ совпадают на F при различных ξ.

Если $T/\tilde\gamma_{\xi_1}$ и $T/\tilde\gamma_{\xi_2}$ или $T/\tilde\gamma_{\xi_1}$ и $T/\tilde\gamma_{\xi_2}^-$ совпадают по какой-либо дуге, то $\gamma_{\xi_1} = \gamma_{\xi_2} + n$ или $\gamma_{\xi_1} = \gamma_{\xi_2}^- + n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Равенство $\xi_1 = \xi_2 + n$ невозможно для приведенных ξ_1 и ξ_2. Равенство $\xi_1 = -\xi_2^* + n$ выполнено тогда и только тогда, когда при

$$\xi_1 = \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a}, \quad \xi_2 = \frac{b_2 + \sqrt{D}}{a}$$

имеет место условие $b_1 \equiv -b_2 \pmod a$. Поскольку в области приведения при фиксированном $a < \sqrt{D}$ и фиксированном b_1 это сравнение имеет ровно одно решение, то каждому ξ_1 соответствует единственное ξ_2 такое, что $T/\tilde\gamma_{\xi_1} = T/\tilde\gamma_{\xi_2}^-$ и в этом случае каждому ξ_1 соответствует единственное ξ_2 такое, что $T/\tilde\gamma_{\xi_1} = T/\tilde\gamma_{\xi_2}$, и лемма доказана.

Пусть Π – прямоугольник на H, заданный условиями $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + A$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + B$. Обозначим через l_ξ длину (неевклидову) дуги $\gamma_\xi \cap \Pi$.

Лемма 3. *Пусть $B = A^2$. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что*

1.

$$l_\xi = \frac{rB}{y_0\sqrt{r^2-y^2}}\left(1 + O\left(\frac{B}{r^2 - y_0^2}\right)\right),$$

если $r > y_0 + C_1 B$ *и*

$$x_0 - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} \leqslant \alpha \leqslant x_0 + A - \sqrt{r^2 - y_0^2} \tag{26}$$

или

$$x_0 + \sqrt{r^2 - y_0^2} \leqslant \alpha \leqslant x_0 + A + \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}. \tag{27}$$

2.

$$l_\xi = O\left(\frac{rB}{\sqrt{r^2 - y_0^2}}\right) \tag{28}$$

если $r > y_0 + C_1 B$ *и*

$$x_0 - \sqrt{r^2 - y_0^2} \leqslant \alpha < x_0 - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} \tag{29}$$

или

$$x_0 + A - \sqrt{r^2 - y_0^2} \leqslant \alpha \leqslant x_0 + A - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}, \tag{30}$$

или

$$x_0 + A + \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} < \alpha \leqslant x_0 + A + \sqrt{r^2 - y_0^2}, \tag{31}$$

или

$$x_0 + \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} \leqslant \alpha < x_0 + \sqrt{r^2 - y_0^2}. \tag{32}$$

3.

$$l_\xi = 0,$$

если $r > y_0 + C_1 B$ *и*

$$\alpha < x_0 - \sqrt{r^2 - y_0^2} \tag{33}$$

или

$$x_0 + A - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} < \alpha < x_0 + \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}, \tag{34}$$

или

$$x_0 + A + \sqrt{r^2 - y_0^2} < \alpha. \tag{35}$$

4.

$$l_\xi = 0,$$

если $r < y_0$ *или если* $y_0 \leqslant r \leqslant y_0 + C_1 B$ *и*

$$\alpha < x_0 - C_2 A,$$

или

$$\alpha > x_0 + C_2 A.$$

5.

$$l_\xi = O(A),$$

если $y_0 \leqslant r \leqslant y_0 + C_1 B$ *и*

$$|x_0 - \alpha| \leqslant C_2 A.$$

Доказательство. Пусть $r \geqslant y_0 + C_1 B$, где $C_1 \geqslant 1$. Найдем x_1 и x_2 – координаты точек пересечения дуги γ_ξ с прямыми $y = y_0$ и $y = y_0 + B$, соответственно. Уравнение γ_ξ (см. (18)) имеет вид

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = r^2,$$

откуда

$$x_1^{(1)} = \alpha + \sqrt{r^2 - y_0^2}, \quad x_1^{(2)} = \alpha - \sqrt{r^2 - y_0^2} \tag{36}$$

и

$$x_2^{(1)} = \alpha + \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}, \quad x_2^{(2)} = \alpha - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}. \tag{37}$$

Очевидно,

$$x_2^{(1)} - x_2^{(2)} = 2\sqrt{r^2 - (y_0+B)^2} > 2\sqrt{y_0}\,\sqrt{C_1 B} > 2A$$

при надлежащем выборе C_1.

Таким образом, из двух дуг, возникающих при пересечении γ_ξ с полосой $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + B$, пересекаться с Π может только одна из них.

Обозначим через d евклидово расстояние между точками (x_1, y_0) и $(x_2, y_0 + B)$. В силу (36) и (37), имеем

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\sqrt{r^2 - y_0^2} - \sqrt{r^2 - (y_0+B)^2}\right)^2 + B^2 \\ &= \frac{r^2 B^2}{r^2 - y_0^2}\left(1 + O\left(\frac{B}{r^2 - y_0^2}\right)\right) \end{aligned}$$

и

$$d = \frac{rB}{\sqrt{r^2 - y_0^2}}\left(1 + O\left(\frac{B}{r^2 - y_0^2}\right)\right). \tag{38}$$

Если упомянутая выше дуга полностью лежит в Π, то

$$l_\xi = \frac{d}{y_0}\left(1 + O\left(\frac{B^2}{r^2 - y_0^2}\right)\right) = \frac{rB}{y_0}\left(1 + O\left(\frac{B}{r^2 - y_0^2}\right)\right).$$

Пусть имеет место неравенство (26), тогда $x_0 \leqslant x_2^{(2)} < x_1^{(1)} \leqslant x_0 + A$ и последнее условие выполнено. Если же α удовлетворяет неравенству (27), то $x_0 \leqslant x_1^{(2)} < x_2^{(2)} \leqslant x_0 + A$ и l_ξ также вычисляется по формуле (38). Таким образом, п. 1 леммы доказан.

Если α удовлетворяет неравенству (29), то $x_2^{(1)} < x \leqslant x_1^{(1)}$. Таким образом, $\gamma_\xi \cap \Pi \neq \varnothing$ и $l_\xi = O(d)$, если y_0 отделено от нуля.

Такова же ситуация в случаях, когда α удовлетворяет неравенствам (30)–(32), и п. 2 леммы доказан.

Если α удовлетворяет условиям (33)–(35), то $\gamma_\xi \cap \Pi = \varnothing$ и п. 3 леммы доказан.

Рассмотрим теперь случай, когда $r \leqslant y_0 + C_1 B$. Из (36) имеем $x_1^{(1)} = \alpha + O(A)$ и $x_1^{(2)} = \alpha + O(A)$. Таким образом, существует $C_2 > 0$ такое, что при $\alpha < x_0 - C_2 A$ и $\alpha > x_0 + C_2 A$ прямоугольник Π не имеет общих точек с γ_ξ и п. 4 леммы доказан.

Если же $x_0 - C_2 A \leqslant \alpha \leqslant x_0 + C_2 A$, то $l_\xi = O(A)$. Последняя оценка имеет место всегда, поскольку $B = O(A)$.

Таким образом, лемма доказана полностью.

Доказательство леммы 4. Пусть ξ_1 и ξ_2 принадлежат Δ_i, тогда в силу формул, приведенных в лемме 3,

$$l_{\xi_1} = l_{\xi_2} + O(K),$$

поскольку $K = B^2$.

Основой для дальнейших вычислений являются результаты леммы 2. При этом вместо того, чтобы сносить $\tilde{\gamma}_\xi$ на F, мы рассматриваем объединение всех Π_n на $\mathcal{F}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\Pi_n = \Pi + n$.

Далее мы пользуемся тем, что плотность $N(\alpha, r)$ периодична по α: $N(\alpha, r) = N(\alpha + 1, r)$ (см. п. 2 настоящей работы). Кроме того, нам удобнее вместе с $\tilde{\gamma}_\xi$ учитывать и $\tilde{\gamma}_\xi^-$. При этом Σ_Π удваивается, поскольку каждая геодезическая участвует в суммировании дважды. Эти соображения позволяют нам вместо объединения Π_n рассматривать только Π, а с ξ снять условие приведенности.

Таким образом, пользуясь результатом леммы 3, имеем:

$$2\Sigma_\Pi = \int\limits_{y_0}^{\infty} dr \int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y^2}-K}^{x_0+A-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}+K} (l_\xi + O(K))N(\alpha, r)d\alpha$$

$$+\int\limits_{y_0}^{\infty} dr \int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}-K}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}+K} (l_\xi + O(K))N(\alpha, r)d\alpha$$

$$= \int\limits_{y_0}^{\infty} dr \int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}-K}^{x_0+A-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}+K} l_\xi N(\alpha, r)d\alpha$$

$$+\int\limits_{y_0}^{\infty} \int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}-K}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}+K} l_\xi N(\alpha, r)d\alpha$$

$$+O\left(\mathcal{L}(D)K\int\limits_{y_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\left(A+\frac{B}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\right)\right).$$

В процессе преобразований мы воспользовались свойством 4 плотности $N(\alpha, r)$ и тем обстоятельством, что

$$\sqrt{r^2-y_0^2}-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2} = O\left(\frac{B}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\right). \qquad (39)$$

Очевидно, остаточный член допускает оценку $O(D^{1/2}KA\log D)$.

Для выделения из Σ_Π главной части подставим в последнюю формулу значения l_ξ, найденные в лемме 3. Тогда имеем:

$$2\Sigma_\Pi = \frac{B}{y_0}\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A-\sqrt{r^2-y_0^2}} N(\alpha, r)d\alpha$$

$$+\frac{B}{y_0}\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}}N(\alpha,r)d\alpha$$

$$+O\left(B\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}-K}^{x_0-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}+K}N(\alpha,r)d\alpha\right.$$

$$+B\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0+A-\sqrt{r^2-y_0^2}-K}^{x_0+A-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}+K}N(\alpha,r)d\alpha$$

$$+B\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}-K}^{x_0+\sqrt{r^2-y_0^2}+K}N(\alpha,r)d\alpha$$

$$\left.+B\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\int\limits_{x_0+A+\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}-K}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}+K}\right)$$

$$+O\left(B^2\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{r}(r-y_0)^{3/2}}\int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}-K}^{x_0+A-\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}+K}\right.$$

$$\left.+B^2\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{r}(r-y_0)^{3/2}}\int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-(y_0+B)^2}-K}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}+K}\right)$$

$$+O\left(A\int\limits_{y_0}^{y_0+C_1B+K}dr\int\limits_{x_0-C_2A-K}^{x_0+C_2A+K}N(d,r)d\alpha\right)+O(D^{1/2}KA\log D).$$

Снова пользуясь соотношениями (39) и (10), для суммы всех остаточных членов в последнем выражении имеем оценку

$$O\left(B\mathcal{L}(D)\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-y_0^2}}\left(K+\frac{B}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\right)\right)$$

$$+O\left(B^2\mathcal{L}(D)\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{r(r^2-y_0^2)^{3/2}}\left(A+K+\frac{B}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\right)\right)$$

$$=O\left(\mathcal{L}(D)\left(BK+B^2\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{r^2-y_0^2}+AB^2\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{(r-y_0)^{3/2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+B^3\int\limits_{y_0+C_1B}^{\infty}\frac{dr}{(r-y_0)^2}+A^2B\right)\right)=O(D^{\frac{1}{2}}\log^2 D(B^2+AB^{\frac{3}{2}}))$$

$$=O(D^{\frac{1}{2}}A^4\log^2 D).$$

Подставляя эту оценку в выражение для Σ_Π, получаем

$$2\Sigma_\Pi=\frac{B}{y_0}\left[\int\limits_{y_0}^{\infty}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y_0^2}}\left(\int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A-\sqrt{r^2-y_0^2}}N(\alpha,r)d\alpha\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}}N(\alpha,r)d\alpha\right)\right]$$

$$+O\left(B\int\limits_{y_0}^{y_0+C_1B}\frac{r\,dr}{r^2-y_0^2}\left(\int\limits_{x_0-\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A-\sqrt{r^2-y_0^2}}N(\alpha,r)d\alpha\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{x_0+\sqrt{r^2-y_0^2}}^{x_0+A+\sqrt{r^2-y_0^2}}N(\alpha,r)d\alpha\right)\right)+O(D^{1/2}A^4\log^2 D).$$

Среднее слагаемое допускает оценку $O(D^{\frac{1}{2}}\log D\,AB\sqrt{B})$ $=O(D^{\frac{1}{2}}A^4\log D)$. Лемма доказана.

Замечание 7. При доказательстве этой леммы вместо утверждений, следующих из леммы 2, можно было воспользоваться результатами Зигеля из [12].

Доказательство леммы 5. Сравнивая выражения для Σ_{Π}, полученные в леммах 1 и 4, имеем

$$\int_y^\infty \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}} \left(\int_{x-\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A-\sqrt{r^2-y^2}} N(\alpha,r)d\alpha + \int_{x+\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A+\sqrt{r^2-y^2}} N(\alpha,r)d\alpha \right)$$
$$= \frac{A\mathcal{L}(D)}{y} + O(D^{\frac{1}{2}-\eta}B^{-1}) + O(D^{\frac{1}{2}}A^2\log^2 D).$$

Положим $A = D^{-\eta/4}$. Тогда остатки в правой части этого соотношения приобретают вид $O(D^{1/2-\eta/2}\log^2 D)$ и в качестве λ_3 можно выбрать любую постоянную, удовлетворяющую условиям $0 < \lambda_3 < \eta/4$.

В заключение приведем наводящие соображения, относящиеся к доказательству леммы 6. По причинам, о которых говорилось выше, мы выполняем все выкладки формально, не занимаясь вопросами сходимости, законности предельных переходов и т.п.

Положим $N_1(\alpha,r) = N(\alpha,r)/\mathcal{L}(D)$. В силу свойств функции $N(\alpha,r)$ имеем

$$N_1(\alpha,r) = \sum_{m=0}^\infty \varphi_m(r)\cos 2\pi m\alpha.$$

Коэффициент $\varphi_0(r)$ вычисляется на основании равенства (9), $\varphi_0(r) \sim 1/r^2$. В силу результата леммы 5, функция $N_1(\alpha,r)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_y^\infty \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}} \left(\int_{x-\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A-\sqrt{r^2-y^2}} N_1(\alpha,r)d\alpha + \int_{x+\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A+\sqrt{r^2-y^2}} N_1(\alpha,r)d\alpha \right)$$
$$= \frac{A\pi}{y}\left(1+O(D^{-\lambda_3})\right).$$

Вычислим левую часть этого равенства, заменив $N_1(\alpha,r)$ на главную часть $\varphi_0(r)$. Имеем

$$2A\int_y^\infty \frac{r\,dr}{r\sqrt{r^2-y^2}} = 2A\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+y^2} = \frac{A\pi}{y}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{y}^{\infty}\frac{\varphi_m(r)r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\left(\int\limits_{x-\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A-\sqrt{r^2-y^2}}\cos 2\pi m\alpha d\alpha\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x+\sqrt{r^2-y^2}}^{x+A+\sqrt{r^2-y^2}}\cos 2\pi m\alpha d\alpha\right)=O(AD^{-\lambda_4}),\qquad(40)$$

где $\lambda_4>0$. Вычисляя выражение в скобке, получаем

$$\frac{1}{2\pi m}(\sin 2\pi m(x+A-\sqrt{r^2-y^2})-\sin 2\pi m(x-\sqrt{r^2-y^2})$$

$$+\sin 2\pi m(x+A+\sqrt{r^2-y^2})-\sin 2\pi m(x+\sqrt{r^2-y^2}))$$

$$=\frac{1}{\pi m}(\sin 2\pi m(x+A)\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}-\sin 2\pi mx\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}).$$

Если $mA=o(1)$, то последнее выражение преобразуется к виду

$$A\cos 2\pi nm\sqrt{r^2-y^2}(\cos 2\pi mx+O(A)).$$

Подставляя это значение в (40) получаем оценку для ряда Фурье, справедливую для всех x и y из $\mathcal{F}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\cos 2\pi mx\int\limits_{y}^{\infty}\frac{\varphi_m(r)r\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr=O(D^{-\lambda_4}).$$

Коэффициенты этого ряда удовлетворяют равномерной оценке

$$\int\limits_{y}^{\infty}\frac{\varphi_m(r)r\cos 2\pi m\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr=O(D^{-\lambda_4}),$$

что и утверждалось в лемме 6.

Литература

1. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half integral weight,* Invent. math. **87** (1987), 385–401.
2. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms,* Invent. math. **92** (1988), 73–90.
3. Б. Ф. Скубенко, *Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы,* Изв. АН СССР, сер. матем. **26**, No. 5 (1962), 721–752.
4. Л. А. Тахтаджян, *Асимптотическая формула для суммы длин периодов квадратичных иррациональностей дискриминанта D,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 134–144.
5. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
6. Е. П. Голубева, *Представление больших чисел тернарными квадратичными формами,* Мат. сб. **129**, No. 1 (1986), 40–54.
7. А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян, *Об асимптотиках Линника–Скубенко,* Докл. АН СССР **253**, No. 4 (1980), 777–780.
8. Е. П. Голубева, *Связь суммы сумм Салье с распределением целых точек на гиперболоидах,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 56–62.
9. Е. П. Голубева, *Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперболоидах специального вида,* Мат. сб. **123**, No. 4 (1984), 510–533.
10. Э. Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа,* т. II, гл. 17, М., 1963.
11. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований,* т. I, М., 1969.
12. C. L. Siegel, *The average measure of quadratic forms with given determinant and signature,* Ann. Math. **45** (1944), 667–685.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 3 ноября 1998 г.