Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

В. Л. Винников, С. И. Федоров

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕВАНЛИННЫ–ПИКА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

1. Введение

Классическая интерполяционная задача Неванлинны–Пика (NPIP)[1)] состоит в том, чтобы выяснить, *можно ли для* N *заданных различных точек* $z_1, \dots, z_N$ *в области* Ω *и* N *значений* $w_1, \dots, w_N$ *найти функцию* f, *аналитическую в* Ω *с*

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \le A, \quad A > 0,$$

такую, что

$$f(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, N. \tag{1}$$

В дальнейшем мы используем обозначения $\mathbf{Z} = \{z_j\}_{j=1}^N$ и $\mathbf{W} = \{w_j\}_{j=1}^N$, а соответствующую задачу Неванлинны–Пика обозначаем NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega, A)$.

В случае единичного круга, когда $\Omega = D \stackrel{\text{def}}{=} \{z : |z| < 1\}$, решение задачи Неванлинны–Пика хорошо известно и дается следующей теоремой (см., например, [1–3]).

Теорема A. *Задача NPIP* $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, D, A)$ (1) *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица Пика*

$$M = \left\{ \frac{A^2 - w_i \bar{w}_j}{1 - \bar{z}_i z_j} \right\}_{i,j=1}^N$$

положительно полуопределена, т.е. $\langle x, Mx \rangle \ge 0$ *для всех* $x \in \mathbb{C}^N$. *Решение* f *единственно (с точностью до постоянного множителя,*

Первый автор пользовался поддержкой Graham and Rhona Beck career development chair, Weizmann Institute, второй автор пользовался финансовой поддержкой Marsden Fund grant 96-UOA-MIS-0098.

[1)] В данной работе мы не касаемся более широкой постановки NPIP, связанной с параметрическим описанием всех возможных решений этой проблемы.

равного по модулю единице) тогда и только тогда, когда $\det M = 0$. *В этом случае*

$$A = \|f\|_\infty = \inf_{g \in H_\infty, g(z_j)=w_j} \|g\|_\infty$$

и функция f *– конечное произведение Бляшке.*

Теоретико-операторный подход предлагает красивое доказательство теоремы A, основанное на следующем факте (см., например, [2, 4]). Построим конечное произведение Бляшке $B_{\mathbf{Z}}$ с множеством нулей $\mathbf{Z}$:

$$B_{\mathbf{Z}}(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Рассмотрим пространство

$$K_{\mathbf{Z}} = H_2(D) \ominus B_{\mathbf{Z}} H_2(D),$$

это – N-мерное коинвариантное подпространство оператора сдвига, порожденное множеством воспроизводящих ядер из $H_2(D)$ в точках множества $\mathbf{Z}$,

$$K_{\mathbf{Z}} = \bigvee_{j=1}^{N} \{k(z, z_j)\}, \quad k(z,t) = \frac{1}{1 - \bar{t} z}.$$

Для функции $f \in H_\infty(D)$ на пространстве $K_{\mathbf{Z}}$ рассмотрим оператор M_f:

$$M_f \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_+ f P_{K_{\mathbf{Z}}},$$

где $P_+ \colon L_2(\mathbb{T}) \to H_2$ и $P_{K_Z} \colon L_2(\mathbb{T}) \to K_{\mathbf{Z}}$ – ортогональные проекторы, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Напомним, что если $f, g \in H_\infty(D)$ таковы, что $f|_{\mathbf{Z}} = g|_{\mathbf{Z}}$, то $M_f = M_g$, и

$$|M_f| = \inf_{h \in H_\infty} \|f + B_{\mathbf{Z}} h\|_\infty. \tag{2}$$

Таким образом, мы видим, что норма оператора M_f равна инфимуму L_∞-норм в семействе всех функций из $H_\infty(D)$, удовлетворяющих интерполяционным условиям (1). Поэтому вместо первоначальной постановки NPIP мы можем рассматривать (именно это мы и сделаем в дальнейшем для нашего случая) модифицированную проблему нахождения для фиксированных множеств $\mathbf{W}$ и

$\mathbf{Z} \subset D$ нормы соответствующего оператора M_f. Таким образом, в силу (2), обычная NPIP будет иметь решения тогда и только тогда, когда $A \geq |M_f|$.

В случае NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega, A)$ в n-связной плоской области Ω, ограниченной n непересекающимися простыми аналитическими кривыми, соответствующий результат был получен Абрахамсом [5].

Теорема Б (Абрахамс). *Задача NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega, A)$ в n-связной области Ω имеет решение тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$ матрица Пика*

$$M^\lambda = \left\{(A^2 - w_i \bar{w}_j) k(z_j, z_i, \lambda)\right\}_{i,j=1}^N$$

положительно полуопределена, т.е. $\langle x, M^\lambda x\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{C}^N$. Решение единственно тогда и только тогда, когда $\det M^\lambda = 0$ *для некоторого λ. В этом случае*

$$A = ||f||_\infty = \inf_{g \in H_\infty, g(z_j) = w_j} ||g||_\infty,$$

а функция f – конечное произведение Бляшке. Здесь $k(z, t, \lambda)$, z, $t \in \Omega$,– воспроизводящее ядро относительно точки t в характер-автоморфном пространстве Харди $H^2_{+,\lambda}$. (Строгие определения см. в следующем параграфе или в [3, 5–7].*)*

В своей работе [5] Абрахамс поставил вопрос об описании тех подмножеств $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$, которые являются достаточными для теоремы Б, т.е. тех Λ, для которых разрешимость задачи NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega, A)$ эквивалентна неотрицательности матриц $\left\{(A^2 - w_i \bar{w}_j) k(z_j, z_i, \lambda)\right\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Он привел пример одноточечного множества Λ, не обладающего требуемым свойством, и сформулировал гипотезу, что множество Λ должно быть плотным в $\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$, т.е. если Λ выпускает непустое открытое множество из $\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$, то теорема неверна.

Дж. Болл и К. Кланси [7, §4] проверили справедливость гипотезы Абрахамса в случае двусвязной области Ω ($n = 2$) для $N = 2$: они показали, что для любого открытого подмножества $V \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ существуют интерполяционные данные $\mathbf{Z}, \mathbf{W}$ такие, что V не является достаточным множеством для теоремы Б.

В настоящей работе, используя прямой аналог соотношения (2) для случая конечносвязной области, мы показываем, что для любых фиксированных интерполяционных данных $\mathbf{Z}, \mathbf{W}$ существует "экстремальный" параметр (характер) $\lambda^* = \lambda^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$, являющийся, быть может, не единственным, но достаточным для теоремы Б. К сожалению, на данный момент отсутствует явное выражение для λ^*, а возможный способ его определения путем решения системы уравнений, содержащих тета-функцию Римана, вероятно, не лучше, чем предложенный Абрахамсом перебор по всем $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$. Основная цель настоящей работы – сведение поиска экстремального характера со всего $(n-1)$-мерного тора $\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$ к его части (хорошо определяемой в терминах интерполяционных данных), возможно, размерности меньшей, чем $n-1$. В противоположность упомянутым выше примерам Абрахамса и Болла–Кланси, которые имели дело с множествами в $\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$, достаточными (или недостаточными) для теоремы Б для всех интерполяционных данных, мы принимаем во внимание множество интерполяционных точек $\mathbf{Z}$ и описываем множество $S(\mathbf{Z})$, содержащее по крайней мере по одному экстремальному характеру $\lambda^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$ (следовательно, достаточное для теоремы Б) для всех NPIP с данным интерполяционным множеством $\mathbf{Z}$. Оказывается, что с этой точки зрения поиск экстремального характера в вышеупомянутом случае, рассмотренном в [7], достаточно прост. Мы покажем, что, с одной стороны, в случае двусвязной области множество $S(\mathbf{Z})$ состоит из двух явно определенных через $\mathbf{Z}$ точек, а, с другой стороны, для любой двуточечной ($N = 2$) NPIP множество $S(\mathbf{Z})$ состоит из 2^{n-1} точек (также явно определенных). В заключение мы покажем, что если n четно, то поиск экстремального характера может быть сведен к явно определенному вещественному аналитическому подмногообразию в $\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$ размерности $n-2$.

Хотя в данной работе мы рассматриваем NPIP для однозначных функций в конечносвязной плоской области, наши результаты непосредственно распространяются на NPIP для характер-автоморфных функций на конечной римановой поверхности с краем. Полученные результаты также распространяются на случай более общих интерполяционных проблем, содержащих интерполяционные условия на производные, к которым относится задача Каратеодори–Фейера.

2. Начальные сведения

Для дальнейшего нам потребуются определения основных объектов и формулировки основных утверждений, связанных с теорией характер-автоморфных пространств Харди функций, определенных в многосвязной области (или, более точно, на дубле плоской области).

2.1. Пусть Ω – $(g+1)$-связная плоская область, ограниченная $g+1$ непересекающимися положительно ориентированными кусочно-аналитическими кривыми $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{g+1}$.[2)]

Обозначение $\widehat{\Omega}$ будет использоваться для дубля компактной римановой поверхности с краем $\Omega \cup \partial\Omega$. $\widehat{\Omega}$ топологически получается из двух копий Ω_+ и Ω_- области Ω отождествлением точек границы $\partial\Omega_\pm \overset{\text{def}}{=} \Gamma$ (приклеиванием второй копии Ω_- области Ω к Ω_+ вдоль $\partial\Omega_+$) и комплексная структура получается "отражением" комплексной структуры из $\Omega_+ \cup \partial\Omega_+$ на Ω_-. Инволюция $J\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \widehat{\Omega}$, оставляющая на месте точки Γ и переставляющая местами одинаковые точки Ω_+ и Ω_-, является антиголоморфной.

Зафиксируем точку $P_0 \in \Gamma_{g+1}$ и проведем ориентированные разрезы $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ из точки P_0 к граничным компонентам $\Gamma_1, \dots, \Gamma_g$, соответственно, которые, за исключением своих концов, полностью лежат в Ω_+ и пересекают друг друга лишь в точке P_0. Мы задаем гомологический базис на компактной римановой поверхности $\widehat{\Omega}$ рода g следующим образом: b-циклы это просто граничные компоненты, $b_j = \Gamma_j$, $j = 1, \dots, g$, а a-циклы строятся из разрезов γ_j и их антиголоморфных отражений $J(\gamma_j)$ на Ω_-, $a_j = \gamma_j - J(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, g$. Рассмотрим g-мерное векторное пространство $\mathfrak{N}$ голоморфных дифференциалов на $\widehat{\Omega}$ и зафиксируем его нормализованный базис $\omega_1, \dots, \omega_g$, двойственный к выбранному базису гомологий:

$$\int_{a_j} \omega_k = \delta_{j,k},$$

[2)]Это ограничение на граничные кривые (кусочная аналитичность) не является существенным, поскольку основные рассматриваемые объекты являются конформно инвариантными и любая конечно-связная область с невырожденными граничными компонентами конформно эквивалентна области с указанными выше свойствами.

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Дифференциалы ω_j являются чисто мнимыми на Γ и антисимметричны по отношению к антиголоморфной инволюции J,

$$J^*\omega \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\omega_j(J(z))} = -\omega_j(z),$$

поэтому матрица b-периодов $\tau = \left\{\int_{b_j}\omega_k\right\}_{j,k=1}^{g}$ представима в виде $\tau = iP$, где P – вещественная положительно определенная матрица. Полная риманова $g\times 2g$ -матрица периодов представима в виде

$$\left[\int\limits_{a_1}\vec{\omega},\ldots,\int\limits_{a_g}\vec{\omega} : \int\limits_{b_1}\vec{\omega},\ldots,\int\limits_{b_g}\vec{\omega}\right] = \left[I_g : \tau\right],$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1,\ldots,\omega_g)^t$ и I^g – единичная $g\times g$-матрица.

Пусть $P, Q \in \widehat{\Omega}$, $P \neq Q$. Обозначим через $d\eta_{P,Q}$ нормализованный дифференциал третьего рода с единственными простыми полюсами в точках P, Q с вычетами $\frac{1}{2\pi i}$ и $\frac{-1}{2\pi i}$ цответственно, $\int_{a_j} d\eta_{P,Q} = 0$, $j = 1,\ldots,g$. Билинейные соотношения между дифференциалами первого и третьего родов дают нам следующие выражения для b-периодов $d\eta_{P,Q}$

$$\int\limits_{b_j} d\eta_{P,Q} = \int\limits_{Q}^{P}\omega_j, \; j = 1,\ldots,g, \tag{3}$$

где путь интегрирования не пересекает a- и b-циклов. Для точки $P\in\Omega_+$ сужение дифференциала $d\eta_{P,J(P)}$ на Γ определяет положительную меру – так называемую гармоническую меру в точке P, которая определяет линейный функционал на пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных функций на Γ:

$$\int\limits_{\Gamma} f d\eta_{P,J(P)} = \tilde{f}(P),$$

где $\tilde{f}$ – гармоническое расширение функции f внутрь области Ω_+.

Мы будем записывать дивизоры на $\widehat{\Omega}$ в аддитивной форме:

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j, \quad n_j\in\mathbb{Z}, \quad P_j\in\widehat{\Omega},$$

используя стандартные обозначения: $\mathfrak{a}$ положителен, $\mathfrak{a} \geq 0$, если $n_j \geq 0$ при всех j,

$$\operatorname{ord}(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Дивизор мероморфной на $\widehat{\Omega}$ функции f называется главным дивизором и обозначается через (f). Очевидно, $\operatorname{ord}(f) = 0$.

Дивизоры $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ называются эквивалентными ($\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), если их разность является главным дивизором.

Дивизор мероморфного дифференциала ω на $\widehat{\Omega}$ также обозначается через (ω) и называется каноническим. Любые два канонических дивизора эквивалентны и порядок любого канонического дивизора равен $2g - 2$. Действие антиголоморфной инволюции J очевидным образом распространяется на дивизоры.

2.2. Решетка периодов голоморфных дифференциалов есть решетка $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ ин $\mathbb{C}^g$. Комплексный тор

$$\operatorname{Jac}(\widehat{\Omega}) = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$$

называется якобианом (якобиевым многообразием) римановой поверхности $\widehat{\Omega}$. Преобразование Абеля–Якоби с начальной точкой P_0 (напомним, что мы выбрали P_0 на $\Gamma_{g+1} = b_0$) определяется формулой

$$\varphi(P) = \int_{P0}^{P} \vec{\omega}, \ \ P \in \widehat{\Omega}.$$

Отображение $\varphi\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}^g$ многозначно, следовательно, не является корректно определенным, но оно корректно определено как отображение из $\widehat{\Omega}$ в $\operatorname{Jac}(\widehat{\Omega})$. Отображение φ – однолистное конформное отображение из $\widehat{\Omega}$ на его образ в $\operatorname{Jac}(\widehat{\Omega})$. Под $\varphi_0(P)$ мы будем понимать то значение $\varphi(P)$, для которого путь интегрирования от P_0 до P не пересекает a- и b-циклов. Отображение φ (а так же и $\varphi_0(P)$) может быть продолжено по линейности на $D_0(\widehat{\Omega})$ – дивизоры порядка 0 на $\widehat{\Omega}$. Если

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j, \qquad \operatorname{ord}\mathfrak{a} = 0,$$

то мы полагаем

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{k} n_j \varphi(P_j).$$

Если мы определяем действие антиголоморфной инволюции $\mathbf{J}$ на $\mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$ формулой $\mathbf{J}[z] = -[\bar{z}]$, где $[z]$ – класс эквивалентности z в $\mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$, то

$$\varphi \circ J = \mathbf{J} \circ \varphi.$$

Дивизор нулей дифференциала $d\eta_{P,J(P)}$[3)] имеет порядок $2g$, симметричен по отношению к J и имеет вид $Z^* + J(Z^*)$, где $Z^* \subset \Omega_+$, $Z^* = z_1^* + \cdots + z_g^*$, $z_1^*, \ldots, z_g^*$ – критические точки функции Грина $G(z,P)$. Поэтому дивизор $Z^* = Z^*(P)$ часто называют критическим дивизором Грина. φ-образ дивизора $Z^* - gP_0$ на $\mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$ достаточно явно определен в терминах тета-функций Римана на $\mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$ (см. [8, 9]).

2.3. Для любого дивизора $\mathfrak{a}$ порядка 0, $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} Q_j - \sum_{j=1}^{k} P_j$, и любого вектора $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_g) \in \mathbb{C}^g$ функция

$$f_{\mathfrak{a},\vec{c}} = \exp\left(2\pi i \int_{P0}^{P} \omega(\mathfrak{a},\vec{c})\right), \qquad \omega(\mathfrak{a},\vec{c}) = \sum_{j=1}^{k} d\eta_{Q_j,P_j} + \sum_{l=1}^{g} c_l \omega_l \quad (4)$$

является так называемой мультипликативной мероморфной функцией на $\widehat{\Omega}$, сответствующей дивизору $\mathfrak{a}$ и вектору $\vec{c} \in \mathbb{C}^g$. А именно, $f_{\mathfrak{a},\vec{c}}(P)$ – локально мероморфная многозначная функция на $\widehat{\Omega}$, чей характер многозначности определяется $2g$-мерным вектором

$$\chi = (\int_{a_1} \omega(\mathfrak{a},\vec{c}), \ldots, \int_{a_g} \omega(\mathfrak{a},\vec{c}) : \int_{b_1} \omega(\mathfrak{a},\vec{c}), \ldots, \int_{b_g} \omega(\mathfrak{a},\vec{c}))$$

a- и b-периодов дифференциала $\omega(\mathfrak{a},\vec{c})$, который, в силу (3), равен $(\vec{c} : \tau\vec{c} + \varphi_0(\mathfrak{a}))$. Значения f_1, f_2 функции $f_{\mathfrak{a},\vec{c}}$ в точке P, соответствующие двум различным путям интегрирования l_1, l_2 из P_0 в P, для которых цикл $l = l_2 - l_1$ гомологичен $\sum_{j=1}^{g} n_j a_j + \sum_{j=1}^{g} m_j b_j$,

3) С этого момента дифференциал $d\eta_{P,J(P)}$ будет называться гармонической мерой в точке P и обозначаться через $d\eta_P$.

связаны между собой равенствами $f_2 = e^{2\pi i \langle \chi, \vec{\mathbf{n}}_l \rangle} f_1$, где

$$\langle \chi, \vec{\mathbf{n}}_l \rangle = \sum_{j=1}^{g} n_j \chi_j + \sum_{j=1}^{g} m_j \chi_{g+j}.$$

Обратное тоже верно (см., например, [10]), всякая мультипликативная мероморфная функция на $\widehat{\Omega}$ имеет вид (4).

2.4. Мы будем рассматривать векторное пространство $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, функций f, локально аналитических в Ω_+, имеющих там однозначный модуль и таких, что аналитическое продолжение любого функционального элемента f вдоль замкнутого пути, гомологичного $\sum_{j=1}^{g} m_j b_j$, приводит к умножению начального значения на унимодулярный постоянный множитель (характер)

$$\exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_j \lambda_j\right), \qquad \vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_g).$$

Функции из пространства $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ называются *модуль-автоморфными* или *характер-автоморфными* функциями, *соответствующими характеру* $\vec{\lambda}$, или просто $\vec{\lambda}$-*автоморфными* (мы используем аддитивную запись для характеров). Эти функции можно рассматривать как однозначные аналитические функции f в односвязной области $\Omega'_+ = \Omega_+ \setminus \bigcup_{j=1}^{g} \gamma_j$ с непрерывным модулем $|f|$ в Ω_+, такие что пределы $f(P\pm) = \lim_{z\to P\pm} f(z)$ существуют на $\bigcup_{j=1}^{g} \gamma_j \cap \Omega_+$ и удовлетворяют сотношению

$$f(P+) = e^{2\pi i \lambda_j} f(P-),\ \ P \in \gamma_j,\ \ j = 1, \dots, g,$$

где пределы при $z \to P+$ и $z \to P-$ на γ_j понимаются как пределы с левой и с правой стороны от γ_j, соответственно.

Пусть $H^\infty_{+,\vec{\lambda}}$ – пространство функций $f \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, для которых

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega_+} |f(z)| < \infty.$$

Зафиксировав точку $a \in \Omega_+$, обозначим через $L^2(\Gamma, d\eta_a) = L^2(\Gamma)$ пространство функций, квадратично суммируемых на Γ по гармонической мере $d\eta_a$. Пространство $H^2_{+,\vec{\lambda}}$ есть пространство тех функций f из $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, для которых однозначная субгармоническая функция $|f|^2$ имеет гармоническую мажоранту. Все функции из $H^2_{+,\vec{\lambda}}$ имеют некасательные предельные граничные значения на Γ п.в. по мере $d\eta_a$, принадлежащие $L^2(\Gamma)$. Это пространство – замкнутое подпространство $L^2(\Gamma)$ и называется характер-автоморфным пространством Харди, отвечающим характеру $\vec{\lambda}$ ($\vec{\lambda}$-автоморфное пространство Харди).

Мультипликативные мероморфные функции на $\widehat{\Omega}$ вида (4) с

$$P_j = J(Q_j), \quad Q_j \in \Omega_+, \quad j = 1, \dots, k, \quad \operatorname{Re} c_l = 0, \quad l = 1, \dots, g,$$

при точке P и пути интегрирования из P_0 в P, содержащихся в $\overline{\Omega_+}$, являются важным примером характер-автоморфных функций. Так, функция

$$b_Q \stackrel{\text{def}}{=} f_{Q-J(Q),\vec{\mathbf{0}}}, \ Q \in \Omega_+ \tag{4'}$$

является характер-автоморфной функцией с характером $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_Q = \operatorname{Re} \varphi(Q - J(Q))$, сжимающей в Ω_+, унимодулярной на Γ, с единственным простым нулем в точке Q (и единственным полюсом в $J(Q)$). Эту функцию мы будем называть элементарным фактором Бляшке с нулем в точке Q. Под характер-автоморфным произведением Бляшке мы будем понимать произведение (конечное или бесконечное) элементарных факторов Бляшке (относительно условий на множество нулей факторов Бляшке, необходимых и достаточных для равномерной сходимости произведения Бляшке см., например, [6]). Положим

$$H^2_{-,\vec{\lambda}} = \left\{ \bar{f} : f \in H^2_{+,-\vec{\lambda}}, f(a) = 0 \right\}.$$

Пространства $H^2_{+,\vec{\lambda}}$ и $H^2_{-,\vec{\lambda}}$ ортогональны, поскольку

$$\langle f, \bar{g} \rangle = \int\limits_{\Gamma} f g \, d\eta_a = f(a) g(a)$$

для любых $f \in H^2_{+,\vec{\lambda}}$, $g \in H^2_{+,-\vec{\lambda}}$. Пространство $H^2_{-,\vec{\lambda}}$ может рассматриваться как пространство Харди на втором “листе” Ω_- дубля $\widehat{\Omega}$. Пространство $H^2_{+,\vec{\lambda}}$ является функциональным гильбертовым пространством, и для всякой точки $t \in \Omega_+$ существует воспроизводящее ядро – $k(\cdot, t, \vec{\lambda}) = k_t^{\vec{\lambda}}$, $\langle f, k_t^{\vec{\lambda}} \rangle = f(t)$ для всех $f \in H^2_{+,\vec{\lambda}}$.

(Выражение для $k_t^{\vec\lambda}$ в терминах тета-функции Римана на $\mathrm{Jac}(\widehat\Omega)$ можно найти в [7].)

3. Операторная интерпретация задачи NPIP. Существование экстремального характера

Пусть B_Z – конечное характер-автоморфное произведение Бляшке в Ω_+, соответствующее дивизору нулей $Z=\sum_{j=1}^N z_j$, и пусть $\vec\kappa(Z)$ – соответствующий этой функции характер:

$$B_Z=\prod_{j=1}^N b_{z_j},\ \ \vec\kappa(Z)=2\operatorname{Re}\varphi(Z-NP_0)$$

Для любого $\vec\lambda\in\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ рассмотрим коинвариантное подпространство

$$K_Z^{\vec\lambda}=H^2_{+,\vec\lambda}\ominus B_Z H^2_{+,\vec\lambda-\vec\kappa},$$

натянутое на воспроизводящие ядра в точках z_j, $j=1,\dots,N$.

Для критического дивизора Грина $Z^*=z_1^*+\dots+z_g^*$ рассмотрим g-мерное пространство

$$K_{Z^*}^{\vec\lambda}=H^2_{+,\vec\lambda}\ominus B_{Z^*}H^2_{+,\vec\lambda-\vec\kappa^*},\qquad \vec\kappa^*=\vec\kappa(Z^*)=\operatorname{Re}\varphi(Z^*-J(Z^*)).$$

Следующие два предложения доказаны в [11].

Предложение 3.1.

$$H^2_{+,\vec\lambda}=\sum_{j=0}^{\infty}{}^{\oplus}(B_{Z^*})^j K_{Z^*}^{\vec\lambda-j\vec\kappa^*},$$

$$L^2(\Gamma)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}^{\oplus}(B_{Z^*})^j K_{Z^*}^{\vec\lambda-j\vec\kappa^*},$$

$$L^2(\Gamma)=H^2_{-,\vec\lambda}\oplus\frac{1}{B_{Z^*}}K_{Z^*}^{\vec\lambda+j\vec\kappa^*}\oplus H^2_{+,\vec\lambda}.$$

Предложение 3.2. *Функция k принадлежит $K_Z^{\vec\lambda}$ для некоторого $\vec\lambda\in\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ тогда и только тогда, когда k – мультипликативная мероморфная функция на $\widehat\Omega$ вида (4), $k=f_{\mathfrak{a},\vec c}$, $\vec c\in\mathbb{Z}^g$, с дивизором*

$$(k)=\mathfrak{a}\geq J(a)-J(Z)-J(Z^*),\ \ \varphi_0(\mathfrak{a})+\tau\vec c=\operatorname{Re}\varphi(\mathfrak{a})=\vec\lambda.$$

Для фиксированной функции $f \in H^\infty(\Omega_+)$ рассмотрим оператор

$$M_f^{\vec{\lambda}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{K_Z^{\vec{\lambda}}} f P_{K_Z^{\vec{\lambda}}}.$$

Теорема 3.1. *Имеют место равенства*

$$\sup_{\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g} |M_f^{\vec{\lambda}}| = \max_{\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g} |M_f^{\vec{\lambda}}| \\ = \inf_{h\in H^\infty_{+,-\vec{\kappa}(Z)}} \| f + B_Z h \|_\infty = \min_{h\in H^\infty_{+,-\vec{\kappa}(Z)}} \| f + B_Z h \|_\infty . \quad (6)$$

Если λ^* – экстремальный характер, для которого достигается максимум в левой части равенства (6), то найдутся две функции $k_1, k_2 \in K^{\lambda^*}$ такие, что функция $\theta \stackrel{\text{def}}{=} k_1/k_2$ принадлежит H^∞, является конечным произведением Бляшке и для функции $|M_f^{\lambda^*}|\theta$ в правой части равенства (6) достигается минимум.

По поводу доказательства этой теоремы см. теорему 6.2 и следствие 6.2 из [11], которые являются следствиями более общего результата о характер-автоморфных операторах Ганкеля. Доказательство в действительности основывается на идеях, предложенных Д. Сарасоном [4] для доказательства соответствующего (более общего) результата в случае единичного круга, и затем использованных Абрахамсом в доказательстве его результата о NPIP в многосвязной области. Следует отметить, что цепочка равенств (6) (за исключением первого равенства в (6)) в неявной форме содержалась уже в работе Абрахамса [5]; по поводу различных обобщений см. также работы Болла [12], Купина и Юдитского [14].

Следствие 3.1. *Задача* NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ *имеет решение f с $\|f\|_\infty \le A$ тогда и только тогда, когда*

$$A \ge |M_f^{\lambda^*}|, \; f \in H^\infty(\Gamma), \; f \big|_{\mathbf{Z}} = \mathbf{W},$$

или, что тоже самое тогда итолько тогда, когда условие Абрахамса выполняется для $\lambda = \lambda^*$.

Доказательство. Первое утверждение следствия непосредственно следует из теоремы 3.1, поскольку $|M_f^{\lambda^*}|$ минимизирует L^∞ норму в семействе всех функций $f \in H^\infty(\Gamma)$, $f \big|_{\mathbf{Z}} = \mathbf{W}$. Для доказательства утверждения об условии Абрахамса вспомним, что

$K_Z^{\lambda^*} = \bigvee_{j=1}^{N} \left\{k_{z_j}^{\lambda^*}\right\}$ и для любого $k \in K_Z^{\lambda^*}$ имеем $k = \sum_{j=1}^N c_j k_{z_j}^{\lambda^*}$. Поэтому условие

$$\sup_{k \in K_Z^{\lambda^*}} \| \left(M_f^{\lambda^*}\right)^* k\|_2 = | \left(M_f^{\lambda^*}\right)^* | \cdot \|k\|_2 \leq A\, \|k\|_2$$

можно переписать в следующей форме:

$$\left\langle P_+^{\lambda^*} \bar{f} \sum_{j=1}^N c_j k_{z_j}^{\lambda^*}, P_+^{\lambda^*} \bar{f} \sum_{j=1}^N c_j k_{z_j}^{\lambda^*} \right\rangle \leq A^2 \left\langle \sum_{j=1}^N c_j k_{z_j}^{\lambda^*}, \sum_{j=1}^N c_j k_{z_j}^{\lambda^*} \right\rangle.$$

для любого вектора $(c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N$. По свойству воспроизводящих ядер $P_+^{\lambda} \bar{f} k_t^{\lambda} = \overline{f(t)} k_t^{\lambda}$ это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sum_{k,j=1}^N w_j \bar{w}_k \bar{c_j} c_k k_{z_k}^{\lambda^*}(z_j) \leq A^2 \sum_{k,j=1}^N \bar{c_j} c_k k_{z_k}^{\lambda^*}(z_j),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неотрицательности матрицы Пика для экстремального характера $\lambda = \lambda^*$.

Следствие 3.2. *Если для некоторого характера $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ существует функция $k \in K_Z^{\vec{\lambda}}$ такая, что $\frac{1}{\theta} k \in K_Z^{\vec{\lambda}}$ для конечного произведения Бляшке θ из теоремы 3.1, то $\vec{\lambda}$ – экстремальный характер,*

$$| \left(M_f^{\vec{\lambda}}\right)^* | = A_{f,\mathbf{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{h \in H^\infty} \|f + B_Z h\|_\infty.$$

Доказательство. Поскольку $\left(M_f^{\vec{\lambda}}\right)^* k = P_+^{\vec{\lambda}} \bar{f} k = P_+^{\vec{\lambda}} A_{f,\mathbf{Z}} \bar{\theta} k$, то

$$A_{f,\mathbf{Z}} \|k\|_2 = \|A_{f,\mathbf{Z}} \bar{\theta} k\|_2 = \|P_+^{\vec{\lambda}} A_{f,\mathbf{Z}} \bar{\theta} k\|_2 \leq | \left(M_f^{\vec{\lambda}}\right)^* | \cdot \|k\|_2$$

По теореме 3.1, $A_{f,\mathbf{Z}} \geq | \left(M_f^{\vec{\lambda}}\right)^* |$. Поэтому $A_{f,\mathbf{Z}} = | \left(M_f^{\vec{\lambda}}\right)^* |$ и $\vec{\lambda}$ – экстремальный характер.

4. Охота за экстремальным характером

4.1. В предыдущем параграфе мы показали, что для проблемы NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ достаточно проверить неотрицательность матрицы Пика только для экстремального характера $\lambda^* = \lambda^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$.

Отметим, что экстремальный характер может быть не единственным, но, по теореме 3.1, достаточно найти хотя бы один из них. Цель этого параграфа – показать, что при фиксированном множестве $\mathbf{Z}$ существует явно определяемое в терминах $\mathbf{Z}$ вещественное аналитическое подмногообразие $S(\mathbf{Z})$ вещественной части $\mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$ размерности не более $2[g/2]$ (как обычно, $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x) такое, что для всех NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ с данным множеством $\mathbf{Z}$ один из экстремальных характеров этой проблемы лежит в $S(\mathbf{Z})$.

Через $L(\widehat{\Omega})$ обозначаем поле мероморфных функций на $\widehat{\Omega}$, через $L(\mathfrak{a})$ – векторное пространство

$$L(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L(\widehat{\Omega}) : (f) \geq -\mathfrak{a} \right\}, \quad r(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim L(\mathfrak{a}).$$

Векторное пространство мероморфных дифференциалов на $\widehat{\Omega}$ будет обозначаться через $\mathfrak{N}(\widehat{\Omega})$,

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \omega \in \mathfrak{N}(\widehat{\Omega}) : (\omega) \geq \mathfrak{a} \right\}, \quad i(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

В дальнейшем нам потребуется теорема Римана–Роха, которая утверждает, что

$$r(\mathfrak{a}) = \mathrm{ord}(\mathfrak{a}) - g + 1 + i(\mathfrak{a}).$$

Для частей дивизора $\mathfrak{a}$, содержащихся соответственно в Ω_+, Γ и Ω_-, мы используем следующие обозначения $\mathfrak{a}|_{\Omega_+} = \mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{a}|_{\Omega_-} = \mathfrak{a}_-$ и $\mathfrak{a}|_\Gamma = \mathfrak{a}_\Gamma$.

4.2. Используя эти обозначения, для конечного однозначного произведения Бляшке θ из теоремы 3.1, мы обозначаем дивизор его нулей через $(\theta)_+$. Тогда $(\theta) = (\theta)_+ - J((\theta)_+)$. Поскольку θ – однозначная внутренняя функция, то она по меньшей мере $(g+1)$-листна, т.е. имеет как минимум $g+1$ нулей в Ω_+ (см., например, [3, 6]). Поэтому $\mathrm{ord}(\theta)_+ \geq g+1$.

Рассмотрим функцию $k^* = k^{\lambda^*} \in K_Z^{\lambda^*}$ из теоремы 3.1, на которой оператор $\left(M_f^{\lambda^*}\right)^*$ достигает своей нормы,

$$\| \left(M_f^{\lambda^*}\right)^* k^* \|_2 = | \left(M_f^{\lambda^*}\right)^* | \| k^* \|_2,$$

и для которой $\frac{1}{\theta}k^* \in K_Z^{\lambda^*}$. По предложению 3.2, $(k^*) \geq J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*)$, и поэтому

$$(k^*) = Q + J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*)$$

для некоторого положительного дивизора Q на $\widehat{\Omega}$, $Q \geq (\theta)_+$, $\operatorname{ord} Q = N + g - 1$. Более того, k^* – λ^*-автоморфная функция, а с другой (см. предложение 3.2) – мультипликативная мероморфная функция на $\widehat{\Omega}$ вида (4), $k^* = f_{(k^*),\vec{c}}$, $\vec{c} \in \mathbb{Z}^g$, и экстремальный характер удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\lambda^* = \varphi_0((k^*)) + \tau\vec{c} = \operatorname{Re}\varphi((k^*)) = \operatorname{Re}\varphi(Q + J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*)) = \\ = \operatorname{Re}\varphi(Q - (N+g-1)P_0) + \operatorname{Re}\varphi(J(\mathbf{Z}) + J(Z^*) - a - (N+g-1)P_0).\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь мы использовали то свойство преобразования Абеля, что $\varphi \circ J = \mathbf{J} \circ \varphi$. Выражение (7) означает, что экстремальный характер однозначно определяется положительным дивизором Q, который мы будем записывать в форме $Q = Q' + (\theta)_+$, где Q'– положительный дивизор,

$$\operatorname{ord} Q' = N + g - 1 - \operatorname{ord}(\theta)_+ \leq N - 2.$$

Положим $m = \operatorname{ord}(\theta)_+$ и $m' = \operatorname{ord} Q'$, $m + m' = N + g - 1$. Заметим, что поскольку θ – однозначная мероморфная функция на $\widehat{\Omega}$, то

$$\begin{aligned}\varphi((\theta)) = \varphi((\theta)_+ - J((\theta)_+)) = \operatorname{Re}\varphi((\theta)_+ - mP_0) - \operatorname{Re}\varphi(J((\theta)_+) - mP_0) \\ = 2\operatorname{Re}\varphi((\theta)_+ - mP_0) = 0 \pmod{\mathbb{Z}^g}\end{aligned}$$

и потому

$$\operatorname{Re}\varphi((\theta)_+ - mP_0) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g.$$

Поэтому мы можем переписать (7) в виде

$$\begin{aligned}\lambda^* = \operatorname{Re}\varphi(Q' - m'P_0) - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi((\theta)_+ - mP_0) \\ + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0)\end{aligned}$$

или

$$\lambda^* \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g + \operatorname{Re}\varphi(Q\prime - m'P_0) - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0). \tag{7'}$$

Рассмотрим задачу NPIP с двумя интерполяционными точками, $\mathbf{Z} = (z_1, z_2)$. В этом случае $\operatorname{ord} Q' = m' = 0$ и поэтому $Q = (\theta)_+$. Используя (7′), мы немедленно получаем следующий результат.

Предложение 4.1. *В случае NPIP с двумя интерполяционными точками $\mathbf{Z} = (z_1, z_2)$ экстремальный характер $\lambda^* = \lambda^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$ при любом выборе $\mathbf{W} = (w_1, w_2)$ принадлежит множеству, состоящему из 2^g точек, явно определяемых множеством $\mathbf{Z}$:*

$$\lambda^* \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0).$$

4.3. В общем случае при $N \geq 2$ единственными неизвестными проблемы отыскания λ^* являются точки $Q_1, \dots, Q_{m'}$, $Q' = \sum_{j=1}^{m'} Q_j$.

Из выражения $(7')$ видно, что утверждение последнего предложения сохраняет силу даже в случае $N > 2$, если $\operatorname{ord} Q' = m' = 0$ или, что тоже самое, если дивизор Q совпадает с $(\theta)_+$ – дивизором нулей функции θ.

С другой стороны, если $m' = \operatorname{ord} Q' > g - 1$, то $m = \operatorname{ord}(\theta)_+ < N$. Поэтому при любом $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$

$$\dim K_\theta^{\vec{\lambda}} = m < \dim K_Z^{\vec{\lambda}} = N,$$

где $K_\theta^{\vec{\lambda}} = H^2_{+,\vec{\lambda}} \ominus \theta H^2_{+,\vec{\lambda}}$. Следовательно, проекция $P_{K_\theta^{\vec{\lambda}}} \mid K_Z^{\vec{\lambda}}$ – ограниченный линейный оператор из N-мерного пространства $K_Z^{\vec{\lambda}}$ в пространство $K_\theta^{\vec{\lambda}}$ меньшей размерности и $\operatorname{Ker} P_{K_\theta^{\vec{\lambda}}} \mid K_Z^{\vec{\lambda}}$ содержит ненулевой элемент k, $P_{K_\theta^{\vec{\lambda}}} k = 0$ и, таким образом, $k \in \theta H^2_{+,\vec{\lambda}}$. Это дает нам соотношение $P_+^{\vec{\lambda}} \bar{\theta} k = \dfrac{1}{\theta} k \in K_Z^{\vec{\lambda}}$. По следствию 3.2, это означает, что $\vec{\lambda}$ – экстремальный характер. Поэтому если $\operatorname{ord} Q' > g - 1$, то любой характер является экстремальным.

Пусть $\widehat{\Omega}^p$, $p \in \mathbb{N}$, – симметрическое произведение порядка поверхности $\widehat{\Omega}$ на себя, то есть фактор прямого произведения $\overbrace{\widehat{\Omega} \times \dots \times \widehat{\Omega}}^{p \text{ раз}}$ по естественному действию симметрической группы на p символах; элементы $\widehat{\Omega}^{(p)}$ могут быть отождествлены с положительными дивизорами порядка p на $\widehat{\Omega}$ и преобразование Абеля–Якоби φ, а также φ_0, распространяются по линейности на $\widehat{\Omega}^{(p)}$. При $p < g$ образ $\varphi(\widehat{\Omega}^p)$ – p-мерное комплексно-аналитическое подмногообразие $\operatorname{Jac}(\widehat{\Omega})$, а множество $\operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^p)$ вещественных частей его точек (точнее, множество $\operatorname{Re}\varphi_0(\widehat{\Omega}^p)$) является вещественно-аналитическим подмногообразием $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ размерности $\leqslant \min(g, 2p)$.

Используя $(7')$ и принимая во внимание вышеупомянутое неравенство $\operatorname{ord} Q' \le N-2$, на данном этапе мы можем суммировать наши наблюдения в виде следующего предложения.

Предложение 4.2. *Для любой задачи NPIP* $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ *существует экстремальный характер* $\vec{\lambda}^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$, *лежащий в множестве*

$$S(\mathbf{Z}) = \operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^{\min(N-2,g-1)}) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) \\ + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0). \quad (8)$$

Следствие 4.1. *Если* $2N-4 < g$, *то поиск экстремального характера может быть сведен к вещественному подмногообразию вида* (8) *размерности не более* $g-1$. *В частности, если* $N=3$, *то размерность подмногообразия* (8) *равна* 2 *при любом* $g \ge 2$.

Замечание 4.1. Неизвестный дивизор Q', определяющий экстремальный характер λ^*, может быть разложен, в свою очередь, в сумму двух неотрицательных дивизоров:

$$Q' = Q'_\pm + Q'_\Gamma, \ \ Q'_\pm \stackrel{\text{def}}{=} Q'_+ + Q'_-,$$

где

$$Q'_\pm = \sum_{j=1}^{m_\pm} Q_j, \quad Q'_\Gamma = \sum_{j=1}^{m_\Gamma} P_j, \quad P_j \in \Gamma.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\varphi(P - P_0) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g$ при любом $P \in \Gamma$, то и $\operatorname{Re}\varphi(Q'_\Gamma - m_\Gamma P_0) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g$. Следовательно,

$$\lambda^* \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g + \operatorname{Re}\varphi(Q'_\pm - m_\pm P_0) - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) \\ + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0), \quad (8')$$

и потому подмногообразие $S(\mathbf{Z})$ может быть сведено к $2m_\pm$-мерному вещественному аналитическому подмногообразию

$$\operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^{m_\pm}) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g + \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0).$$

В случае двусвязной области ($g=1$) предложение 4.2 приводит нас к законченному и довольно неожиданному результату.

Предложение 4.3. *Для NPIP* $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ *в двусвязной области* Ω_+ *достаточно проверить неотрицательность матрицы Пика лишь в двух точках* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$\lambda_1 = \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - a - N \cdot P_0)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - a - N \cdot P_0)$$

Для дальнейшего анализа экстремальных характеров нам нужна следующая лемма.

Лемма 4.1.
(1) *Для всякого* $k \in K_Z^{\vec{\lambda}}$ *дифференциал* $k(z)\overline{k(J(z))}d\eta_a$ – *симметричный дифференциал третьего рода* ω_Z *на* $\widehat{\Omega}$, $J^*\omega_Z = \omega_Z$, *положительный на* Γ, *с дивизором* $(\omega_Z) \geq -\mathbf{Z} - J(\mathbf{Z})$.
(2) *Обратно, для любого симметричного положительного на* Γ *дифференциала третьего рода* ω_Z *с дивизором* $(\omega_Z) \geq -\mathbf{Z} - J(\mathbf{Z})$ *существует* $\lambda \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ *такое, что*

$$\omega_Z = k(z)\overline{k(J(z))}d\eta_a$$

для некоторого $k \in K_Z^{\vec{\lambda}}$. *Более того,*

$$(\omega_Z) = D_+ + J(D_+) - \mathbf{Z} - J(\mathbf{Z})$$

для некоторого положительного дивизора $D_+ \subset \bar{\Omega}_+$,

$$\operatorname{ord} D_+ = g + N - 1, \quad \operatorname{Im}\varphi_0(D_+ + a - \mathbf{Z} - Z^*) = i\tau\vec{c}$$

при некотором векторе $\vec{c} \in \mathbb{Z}^g$. *Функция* k *может быть выбрана в виде* (4):

$$k = f_{(k),\vec{0}} \exp\left(2\pi i \int_{P_0}^{P} \omega((k), \vec{0})\right) \tag{9}$$

с дивизором

$$(k) = D_+ + J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*)$$

и характером

$$\vec{\lambda} = \operatorname{Re}\varphi(D_+ + J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*)).$$

Доказательство. Утверждение п. (1) очевидно. Для доказательства п. (2) заметим, что ω_Z и $d\eta_a$ – симметричные дифференциалы на $\widehat{\Omega}$, положительные на Γ, $(\omega_Z) = D + J(D)$, $D = D_+ - J(\mathbf{Z})$, для некоторого положительного дивизора $D_+ \subset \bar{\Omega}_+$, а $(d\eta_a) = D_a + J(D_a)$, $D_a = Z^* - a$. Поэтому (см. [8, 13])

$$\varphi(D) + [\Delta_0] \in T_0, \quad \varphi(D_a) + [\Delta_0] \in T_0,$$

где Δ_0 – вектор констант Римана, зависящий только от выбора базовой точки P_0 и гомологического базиса, а $T_0 \subset \mathrm{Jac}(\widehat{\Omega})$ – g-мерный вещественный тор,

$$T_0 = \{[z] \in \mathrm{Jac}(\widehat{\Omega}) \ : \ z = \mu + \tau\nu, \ \mu \in \mathbb{R}^g, \ \nu \in \mathbb{Z}^g\}.$$

Поэтому $\varphi(D - D_a) \in T_0$ и, окончательно, $\operatorname{Im}\varphi_0(D - J(D_a)) = i\tau\vec{c}$ для некоторого вектора $\vec{c} \in \mathbb{Z}^g$. Для окончания доказательства достаточно рассмотреть мультипликативную мероморфную функцию

$$k = f_{D-J(D_a),\vec{c}} = \exp\left(2\pi i \int\limits_{P_0}^{P} \omega(D - J(D_a), \vec{c})\right),$$

являющуюся характер-автоморфной с характером

$$\vec{\lambda} = \operatorname{Re}\varphi(D - J(D_a)) = \operatorname{Re}\varphi(D_+ + J(a) - J(\mathbf{Z}) - J(Z^*))$$

и, по предложению 3.2, принадлежащую $K_Z^{\vec{\lambda}}$.

Замечание 4.2. Если λ^* – экстремальный характер для проблемы NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ и функция $k \in K_Z^{\lambda^*}$, $\frac{1}{\theta}k \in K_Z^{\lambda^*}$, то $\omega_Z = k(z)\overline{k(J(z))}d\eta_a$ – положительный на Γ дифференциал,

$$(\omega_Z) = Q + J(Q) - \mathbf{Z} - J(\mathbf{Z}), \quad Q \subset \overline{\Omega_+}, \quad Q \geq (\theta)_+.$$

Из леммы 4.1 и следствия 3.2 мы заключаем, что если $\tilde{\omega}_Z$ – другой дифференциал, положительный на Γ и такой, что

$$(\tilde{\omega}_Z) = \tilde{Q} + J(\tilde{Q}) - \mathbf{Z} - J(\mathbf{Z}), \quad \tilde{Q} \subset \overline{\Omega_+}, \quad \tilde{Q} \geq (\theta)_+,$$

то характер $\tilde{\lambda} = \varphi(\tilde{Q} + J(a) - J(Z^*) - J(\mathbf{Z}))$ тоже является экстремальным,

$$(\tilde{\omega}_Z) = \tilde{k}\overline{\tilde{k} \circ J}, \quad (\tilde{k}) = \tilde{Q} + J(a) - J(Z^*) - J(\mathbf{Z}), \quad \tilde{k} \in K_Z^{\tilde{\lambda}}, \quad \frac{1}{\theta}\tilde{k} \in K_Z^{\tilde{\lambda}}.$$

Отметим, что это дает следующее описание всех экстремальных характеров в терминах преобразования Абеля–Якоби: экстремальный характер найдется во всяком конечном множестве вида (7′), где Q' – произвольный положительный дивизор порядка m', удовлетворяющий соотношению

$$\varphi(Q') + J\varphi(Q') + \varphi((\theta)_+) + J\varphi((\theta)_+) - \varphi(\mathbf{Z}) - J\varphi(\mathbf{Z}) = \varphi(k),$$

где k – канонический дивизор на $\widehat{\Omega}$.

Предложение 4.4. *Для любой задачи NPIP $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \Omega_+, A)$ существует экстремальный характер $\vec{\lambda}^*(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$, лежащий в $2\,[g/2]$-мерном вещественном подмногообразии*

$$S(\mathbf{Z}) = \operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^{2[g/2]}) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0). \tag{10}$$

В частности, если g – нечетное, то $\widehat{\Omega}^{2[g/2]}$, $\operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^{2[g/2]})$ и, следовательно, $S(\mathbf{Z})$ – вещественные аналитические подмногообразия размерности не более $g-1$.

Доказательство. Вспомним, что для экстремального характера λ^* мы разложили неизвестный дивизор Q в сумму $Q = (\theta)_+ + Q'_\Gamma + Q'_\pm$, где $Q'_\Gamma \subset \overline{\Omega_+}$ и по (8′)

$$\lambda^* \in \operatorname{Re}\varphi(\widehat{\Omega}^{m_\pm}) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g - \operatorname{Re}\varphi(a - P_0) + \operatorname{Re}\varphi(\mathbf{Z} + Z^* - (N+g)P_0),$$

и $m_\pm = \operatorname{ord} Q'_\pm \le g-1$.

Теперь мы готовы показать, что, если $m_\pm > g/2$, то для той же самой задачи NPIP существует другой экстремальный характер $\tilde{\lambda}$ и другая функция $\tilde{k} \in K_Z^{\tilde{\lambda}}$,

$$\frac{1}{\theta}\tilde{k} \in K_Z^{\tilde{\lambda}}, \quad (\tilde{k}) = \tilde{Q} + J(a) - J(Z^*) - J(\mathbf{Z}), \quad \tilde{Q} = (\theta)_+ + \tilde{Q}'_\Gamma + \tilde{Q}'_\pm,$$

такие, что $\tilde{m}_\pm = \operatorname{ord}\tilde{Q}'_\pm \le g/2$.

Допустим, что λ^* – экстремальный характер, для которого порядок $m_\pm$ дивизора $Q'_\pm$ больше $g/2$. Тогда неотрицательный на Γ симметричный дифференциал $k \cdot \overline{k \circ J} d\eta_a = \omega_Z$ принадлежит $\mathfrak{N}(\mathfrak{n})$,

$$\mathfrak{n} = (\theta)_+ + J(\theta)_+ + 2Q'_\Gamma - \mathbf{Z} - J(\mathbf{Z}).$$

По теореме Римана–Роха

$$0 \le r(-\mathfrak{n}) = \operatorname{ord}\mathfrak{n} - g + 1 + i(\mathfrak{n}).$$

Но поскольку

$$m_\pm = \operatorname{ord} Q'_\pm > \frac{g}{2}, \qquad \text{и } \operatorname{ord}((\theta)_+ + Q'_\Gamma + Q'_\pm) = N + g - 1,$$

то мы видим, что $\operatorname{ord}\mathfrak{n} = 2g - 2 - 2m_\pm < g - 2$. Поэтому

$$0 \le r(-\mathfrak{n}) = g - 1 - 2m_\pm + i(\mathfrak{n}) < i(\mathfrak{n}) - 1.$$

Это означает, что $i(\mathfrak{n}) \ge 2$ и, следовательно, наряду с дифференциалом ω_Z существует другой дифференциал $\omega' \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})$. Без ограничения общности, мы можем считать, что ω' – симметричный и потому вещественный на Γ, поскольку иначе по крайней мере один из двух вещественных на Γ дифференциалов $\omega' + J*\omega'$, $i(\omega' - J*\omega') \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})$ линейно независим от ω_Z. Теперь для вещественного параметра c рассмотрим параметрическое семейство вещественных дифференциалов

$$\omega_c = \omega_Z + c\omega' \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n}).$$

Легко видеть, что для достаточно малых по абсолютной величине значений c дифференциалы ω_c неотрицательны на Γ и при некотором достаточно большом значении c (положительном или отрицательном) дифференциал ω_c меняет на Γ знак. Следовательно, в силу непрерывной зависимости дифференциала ω_c от параметра c, существует значение c^* такое, что ω_{c^*} – неотрицателен на Γ, а при любом $c = c^* + \operatorname{sign}(c)\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, дифференциал ω_c меняет знак на Γ. Это означает, что либо дифференциал ω_{c^*} имеет по крайней мере один двойной нуль в некоторой точке $P \in \Gamma$, $P \notin Q'_\Gamma$, либо в некоторых точках дивизора Q'_Γ он имеет нуль порядка, большего по крайней мере на два, чем порядок нуля ω_Z в этой самой же точке.

По лемме 4.1, $\omega_{c^*} = k^\lambda \cdot \overline{k^\lambda \circ J} d\eta_a$ при некотором характере λ и некотором $k^\lambda \in K_Z^\lambda$ вида (9). Поэтому $(k^\lambda) \ge (\theta)_+$ и, следовательно, $\dfrac{1}{\theta} k^\lambda \in K_Z^\lambda$. Теперь, по следствию 3.2, λ – экстремальный характер для той же самой NPIP. Более того, в соответствии с конструкцией дифференциала ω_{c^*}, порядок $m_\pm$ дивизора $Q'_\pm$ для этой функции k^λ по крайней мере на два меньше, чем порядок соответствующего дивизора для первоначального экстремального характера λ^*. Если $m_\pm \le g/2$, то мы нашли желаемый характер, в противном же случае мы можем применить предыдущие рассуждения к дифференциалу ω_{c^*} вместо начального дифференциала ω_Z и затем повторять этот процесс пока не получим, что $m_\pm \le g/2$. Поэтому, в силу замечания 4.1, мы закончили доказательство.

Теперь мы можем суммировать результаты данной работы в виде теоремы, которая усиливает результат Абрахамса.

Теорема 4.1. *Интерполяционная задача Неванлинны–Пика* (1) *в* $(g+1)$*-связной области* Ω_+ *имеет решение* $f \in H^\infty(\Omega_+)$ *с* $\|f\|_\infty \le A$, $A > 0$, *тогда и только тогда, когда для всех*

$$\lambda \in S(\mathbf{Z}) \subset \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g,$$

где $S(\mathbf{Z})$ *определяется выражением* (10), *матрица Пика*

$$M^\lambda = \left\{(A^2 - w_i\bar{w}_j)k^\lambda_{z_i}(z_j)\right\}_{i,j=1}^N$$

положительно полуопределена.

Замечание 4.3. Наши результаты довольно просто распространяются на случай интерполяционной задачи Неванлинны–Пика для характер-автоморфных (а не только однозначных) аналитических функций в Ω с заданным характером $\varkappa$. В этом случае произведение Бляшке θ из теоремы 3.1 и следствия 3.2 будет $\varkappa$-автоморфным, поэтому

$$\varphi_0((\theta)) = 2\mathrm{Re}\,\varphi((\theta)_+ - mP_0) = \varkappa \pmod{\mathbf{Z}^q},$$

правая часть (7′) и все последующие формулы получают дополнительное слагаемое $\varkappa_0/2$, где $\varkappa_0$ – фиксированное поднятие $\varkappa$ с $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ на $\mathbb{R}^g$. Поэтому характер-автоморфная внутренняя функция может иметь любое число нулей в Ω_+, оценки $\mathrm{ord}((\theta)_+ \geqslant g+1$, $\mathrm{ord}\,Q' \leqslant N-2$, а потому и предложения 4.1, 4.2 и следствие 4.1, более не выполняются. Однако аналоги предложений 4.3, 4.4 и теоремы 1 имеют место и в этом случае.

Полученные результаты также непосредственно обобщаются на случай, когда Ω – компактная риманова поверхность с краем, а не плоская область, как было выше. Единственное техническое усложнение связано с необходимостью использовать явные выражения для вещественной части якобиана $\mathrm{Jac}\,(\widehat{\Omega})$ и антиголоморфной инволюции J, см. [8, глава 6]. Наконец, наши результаты практически без изменений переносятся на смешанную интерполяционную задачу Неванлинны–Пика–Каратеодори–Фейера, в которой фиксируются значения функции и заданного числа ее производных в фиксированных точках, что соответствует выбору дивизора нулей $\mathbf{Z}$ произвольных порядков.

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-е изд., М., 1966.
2. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М., 1980.
3. S. D. Fisher, *Function Theory on Planar Domains.* J. Wiley & Sons., 1983.
4. D. Sarason, *Generalized interpolation in H^∞,* Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179–203.
5. M. B. Abrahamse, *The Pick interpolation theorem for finitely connected domains,* Michigan Math. J. **26** (1979), 195–203.
6. С. И. Федоров, *Гармонический анализ в многосвязной области.* I, II, Мат. сб. **181** (1990), 833–864; 867–909.
7. J. A. Ball, K. F. Clancey, *Reproducing kernels for Hardy spaces on multiply connected domains,* Integral Equations and Operator Theory **25** (1996), 35–57.
8. J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces,* Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, New York **352** (1973).
9. K. F. Clancey, *Representing measures on multiply connected domains,* Illinois J. Math. **35** (1991), 286–311.
10. I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian groups.* Math. Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972. Русский перевод: И. Кра, Автоморфные формы и клейновы группы, М., 1975.
11. С. И. Федоров, *О гармоническом анализе в многосвязной области и характер-автоморфных пространствах Харди,* Алгебра и анализ **9**, вып. 2 (1997), 192–240.
12. J. A. Ball, *A lifting theorem for operator models of finite rank on multiply connected domains,* J. of Operator Theory **1** (1979), 3–25.
13. K. F. Clancey, *Toeplitz operators on multiply connected domains and theta functions,* Operator Theory: Advances and Applications **35** (1988), 311–355.
14. S. Kupin, P. Yuditskii, *Analogs of Nehari and Sarason theorems in the class of character-automorphic functions and some related questions,* Operator Theory: Advances and Applications (в печати).

Department of Theor. Mathematics,
Weizmann Institute,
Pexobot 761000, Israel P.O.B. 26
Department of Mathematics,
University of Auckland,
Private Bag 92019, Auckland, New Zealand

Поступило 10 апреля 1997г.