Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 253, 1999 г.

Г. И. Петрашень, В. В. Решетников

РАЗРАБОТКА ИНЖЕНЕРНЫХ ПОДХОДОВ К ИЗУЧЕНИЮ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ, ВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ В ПАЧКАХ ТОНКИХ УПРУГИХ СЛОЕВ. (I). (ПОСТРОЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ТИПА SV И ОБСУЖДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИХ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ.)

От авторов

Настоящая статья является первой частью большого исследования, посвященного разработке методов количественного изучения интерференционных волновых полей в тонкослоистых упругих средах. В ней приводятся постановки задач для простейших тонкослоистых сред, содержащих тонкий упругий слой (контактирующий с одним упругим полупространством, а также – слой, контактирующий с двумя различными упругими полупространствами), даются точные математические их решения в форме повторных интегралов типа Фурье (в вещественной и комплексной областях) и подробно обсуждаются проблемы, касающиеся методов количественной оценки волновых полей в достаточно низкочастотной полосе их спектра Фурье. При этом вследствие принципиальной (неустранимой и существенно возрастающей при обращении к пачкам тонких слоев) громоздкости и плохой обозримости аналитических решений задач, при их количественных оценках совершен отказ от чисто аналитических методов исследования, при замене их на аналитико-алгоритмические методы, ориентированные на всестороннее применение настольных компьютеров.

Разработанные в статье подходы к постановкам задач на исследование и оценки волновых полей позволяют получать исчерпывающе полные характеристики полей волн всевозможных ти-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект No. 95-01-00480

пов и представлять их в предельно наглядной форме, существенно облегчающей необходимую физическую их интерпретацию. Полученные здесь многочисленные результаты обладают несомненной новизной и оригинальностью.

К сожалению, вследствие ряда формальных соображений и причин пришлось подразделить все исследование на две части, причем численные оценки полей и иллюстративный материал – отнести ко второй из них. Это придает настоящему исследованию некоторый налет сухости, однако не затрагивает интересов читателей, так как вторая часть исследования (увязанная с первой его частью соответствующими ссылками) помещена в этом же томе журнала. В ней, помимо указанного материала, дается фактически еще и обобщение развитых нами подходов и методов на случаи сред, содержащих произвольную слоистую пачку, состоящую из любого числа тонких слоев.

Содержание первой части

§1. Постановка задач и структура интегральных представлений волновых полей в случаях нормальных воздействий

1. Первая из рассматриваемых здесь задач относится к упругой среде (задаваемой в декартовой $\{x, y, z; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ или в цилиндрической $\{r, \theta, z; \vec{r}_1, \vec{\theta}_1, \vec{k}_1\}$ системах координат с общими началом O и осью OZ), состоящей из поверхностного слоя $0 < z < h$, $(\nu = 1)$, находящегося в жестком контакте с подстилающим полупространством $z > h$, $(\nu = 2)$, характеризуемых материальными постоянными

$$\mu_\nu, \quad v_{p_\nu} = \sqrt{\frac{\lambda_\nu + 2\mu_\nu}{\rho_\nu}}, \quad v_{s_\nu} = \sqrt{\frac{\mu_\nu}{\rho_\nu}}. \tag{1.1}$$

Предполагается, что в момент $t = 0$ к свободной границе $z = 0$ такой среды, находившейся в покое при $t < 0$, прикладывается нормальное воздействие, определяемое (сингулярной) плотностью силы

$$\vec{F}_1 = \delta(x) f(t) \vec{k},$$

или

$$\vec{F}_2 = \frac{\delta(r)}{\pi r} f(t) \vec{k}, \tag{1.2}$$

в плоском или в осесимметрическом случаях. При этом под $\delta(x)$ и $\delta(r)/\pi r$ здесь подразумеваются символы сосредоточенности воздействий, допускающие (предельные) интегральные представления

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \Phi_0(k\varepsilon) dk,$$

$$\frac{\delta(r)}{\pi r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) \Phi_0(k\varepsilon) dk, \tag{1.3}$$

в которых положено

$$\Phi_0(k\varepsilon) = \frac{1}{1 + k^2 \varepsilon^2}.$$

А относительно низкочастотной функции $f(t)$ включаемой при $t = 0$, предполагается, что она представима интегралом Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds, \quad (\sigma > 0). \tag{1.4}$$

Ради краткости, такая задача именуется далее "задачей для двухслойной среды".

Математическое ее решение рассмотрено в п. 8 §2 монографии [1], причем поля в средах конструировались там в форме продольных φ_ν и поперечных ψ_ν потенциалов, представляемых в плоском случае в виде повторных интегралов Фурье и Меллина

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(z,t,k)\cos kx\\ \Psi_\nu(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\}\Phi_0\,dk,\ \ (\nu(1,2), \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\left.\begin{matrix}\Phi_1\\ \Psi_1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}[X_1^+e^{z\tilde{\alpha}_1} + X_1^-e^{-z\tilde{\alpha}_1}]\\ [Y_1^+e^{z\tilde{\beta}_1} + Y_1^-e^{-z\tilde{\beta}_2}]\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}\,ds\\ \left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}[X_2^-e^{-(z-h)\tilde{\alpha}_2}\\ [Y_2^-e^{-(z-h)\tilde{\beta}_2}\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}\,ds,\end{gathered} \tag{1.6}$$

где обозначения Φ_ν и Ψ_ν введены здесь вместо сомволов R_ν и S_ν из [1]. При этом составляющие поля смещений $\vec{u} = u\vec{i} + w\vec{k}$ определялись через потенциалы φ и ψ выражениями

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

В случае же задачи с осевой симметрией при воздействии из (1.2) представления полей потенциалов из (1.5) заменялись интегралами Фурье–Бесселя вида

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(z,t,k)J_0(kr)\\ \Psi_\nu(z,t,k)J_1(kr)\end{matrix}\right\} k\Phi_0\,dk, \tag{1.7}$$

при сохранении представлений (1.6) для подинтегральных функций Φ_ν и Ψ_ν. При этом отмечалось, что составляющие полей смещений $\vec{u} = q\vec{r} + w\vec{k}$ выражаются теперь через потенциалы φ и ψ формулами

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r},$$

а также – что при построении полей смещений для подинтегральных функций Φ_ν и Ψ_ν из (1.7) получается в точности такая же задача, как и для определения функций Φ_ν и Ψ_ν из (1.5) в плоском случае. Таким образом, результаты рассмотрения плоской задачи (1.2), (1.5) и (1.6) оказываются вполне достаточными для получения подобных же результатов и в случае возбуждения полей нормальным источником с осевой симметрией из (1.2). Именно это обстоятельство и является одной из причин целесообразности рассмотрения плоских задач на распространение волн в сейсмологии и сейсморазведке.

При выборе в (1.6) значений $\tilde\alpha_\nu$ и $\tilde\beta_\nu$ из (1.11) уравнения движения для потенциалов φ_ν и ψ_ν удовлетворяются. Подстановка же выражений (1.5) и (1.6) в граничные условия задачи

$$\vec{t}_z^{(1)}\Big|_{z=0} = -\vec{F}_1(x,t); \quad (\vec{u}_1-\vec{u}_2)\Big|_{z=h} = 0, \quad (\vec{t}_z^{(1)}-\vec{t}_z^{(2)})\Big|_{z=h} = 0, \qquad (1.8)$$

при использовании соответствующих интегральных представлений для плотности силы $\vec{F}_1(x,t)$ из (1.2), (1.3), (1.4) (см. [2, §12]), приводит к системе алгебраических уравнений для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из (1.6)

$$\begin{gathered}
-2\mu_1 k\tilde\alpha_1(X_1^+ - X_1^-) - \mu_1\tilde g_1(Y_1^+ + Y_1^-) = 0,\\
\mu_1\tilde g_1(X_1^+ + X_1^-) + 2\mu_1 k\tilde\beta_1(Y_1^+ - Y_1^-) = -1,\\
k(X_1^+e^a + X_1^-e^{-a}) + \tilde\beta_1(Y_1^+e^b - Y_1^-e^{-b}) - kX_2^- + \tilde\beta_2 Y_2^- = 0,\\
\tilde\alpha_1(X_1^+e^a - X_1^-e^{-a}) + k(Y_1^+e^b + Y_1^-e^{-b}) + \tilde\alpha_2 X_2^- - -kY_2^- = 0,\\
2\mu_1 k\tilde\alpha_1(X_1^+e^a - X_1^-e^{-a}) + \mu_1\tilde g_1(Y_1 + e^b + Y_1^-e^{-b}) +\\
+\mu_2(2k\tilde\alpha_2 X_2^- - \tilde g_2 Y_2^-) = 0, \qquad (1.9)\\
\mu_1\tilde g_1(X_1^+e^a + X_1^-e^{-a}) + 2\mu_1 k\tilde\beta_1(Y_1^+e^b - Y_1^-e^{-b}) - \mu_2(\tilde g_2 X_2^- - 2k\tilde\beta_2 Y_2^-) = 0,
\end{gathered}$$

в которой положено

$$a = h\tilde\alpha_1, \quad b = h\tilde\beta_1$$

ради краткости записи, и использованы обозначения

$$\begin{gathered}
\tilde\alpha = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{v_{p_\nu}^2}}, \quad \tilde\beta_\nu = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{v_{s_\nu}^2}},\\
g_\nu = 2k^2 + \frac{s^2}{v^2 s_\nu}, \quad k > 0.
\end{gathered} \qquad (1.10)$$

При этом ветви радикалов фиксированы условиями

$$\arg\tilde{\alpha}_\nu = \arg\tilde{\beta}_\nu = 0 \text{ при } s > 0 \tag{1.11}$$

на основном листе плоскости (s), разрезанной, например, вдоль мнимой оси между точками

$$s = -ikv_{p\nu} \text{ и } s = ikv_{p\nu}.$$

2. Система уравнений (1.9)–(1.11) разрешима аналитически, что приводит к точному решению задачи (в потенциалах), удовлетворяющему уравнениям движения упругих сред, граничным условиям (1.8) и нулевым начальным данным. Такое аналитическое решение задачи как раз и приведено в п.8 и 9 §2 монографии [1].

Однако, несмотря на предельную простоту рассматриваемой задачи (из класса обсуждаемых интерференционных задач), аналитическое ее решение оказалось весьма сложным, вследствие громоздкости аналитических выражений для коэффициентов $X_\nu^\pm \equiv X_\nu^\pm(k,s)$ и $Y_\nu^\pm \equiv Y_\nu^\pm(k,s)$ из (1.6). Они оказались уже практически необозримыми, вследствие чего вычислительная ценность таких выражений представлялась сомнительной. В частности, неоправданно сложным казался процесс аналитического изучения корней дисперсионного уравнения $\Delta(\zeta,\varkappa) = 0$ на основе аналитических представлений из (2.73), (2.74) из [1] его левой части ... Тем более, что следовало ожидать еще гораздо более сложных ситуаций при переходе к задачам для многослойных пачек тонких слоев ... Поэтому было решено отказаться от чисто аналитического подхода к проблеме количественного изучения волновых полей и заменить его аналитико-алгоритмическим подходом, который и развивается в нижеследующем. Указанный подход, естественно, приводит и к изменению взгляда на форму окончательного математического решения рассматриваемых задач на распространение волн в тонкослоистых упругих средах. Окончательные аналитические выражения их решений нет смысла выписывать полностью! Достаточно приводить лишь интегральные их представления, хотя бы в форме потенциалов (1.5) и (1.6) и выписывать систему уравнений вида (1.9), из которой неизвестные коэффициенты $X_\nu^\pm$ и $X_\nu^\pm$ из (1.6) однозначно определяются.

При этом интегральные аналитические выражения целесообразно приводить сначала в первичных представлениях метода контурных интегралов, как это сделано в (1.5) и (1.6). Это наиболее оправдано математически, а кроме того из таких представлений удается извлекать сразу же некоторые общие сведения о полях, полезные для выполнения дальнейших оценок волновых полей разрабатываемыми методами. Затем же следует переходить к представлениям полей в форме метода Лемба, в рамках которого наиболее физически оправдано и наиболее выгодно в математико-вычислительном отношении проводить количественные исследования интерференционых волновых полей.

Подобный переход осуществляется, как известно (см. [2, §5] или [1, §2]), на основе перестановок порядка интегрирования в повторных интегралах (1.5) и (1.6) при одновременном введении новых переменных интегрирования по формулам

$$s = i\omega, \quad k = \frac{\omega}{v_{s1}}\zeta, \quad \omega > 0. \tag{1.12}$$

При этом необходимо учитывать свойства симметрии вида

$$X(\bar{s}) = \overline{X(s)}$$

(где черточка сверху – знак комплексного сопряжения), а также – четности и нечетности по переменной "k" функций $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из (1.6), вытекающие из структуры системы уравнений типа (1.9)–(1.11).

В результате, представления потенциалов φ_ν, ψ_ν из (1.5) и (1.6) плоской задачи из п. 1 в форме метода Лемба сводятся к повторным интегралам

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\,\frac{v_{s1}}{\pi h^2}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(\tilde{x},\tilde{z},\omega)\\ \Psi_\nu(\tilde{x},\tilde{z},\omega)\end{matrix}\right\} F\left(i\frac{v_{s1}}{h}\varkappa\right)\varkappa e^{i\varkappa\tau}\,d\varkappa, \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}\left.\begin{matrix}\Phi_1\\ \Psi_1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_1^+ e^{+\varkappa\tilde{z}\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa\tilde{z}\alpha_1}\\ i[Y_1^+ e^{+\varkappa\tilde{z}\beta_1} + Y_1^- e^{-\varkappa\tilde{z}\beta_1}]\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa\tilde{x}\zeta}\,d\zeta,\\ \left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(\tilde{z}-1)\alpha_2}\\ iY_2^- e^{-\varkappa(\tilde{z}-1)\beta_2}\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa\tilde{x}\zeta}\,d\zeta,\end{gathered} \tag{1.14}$$

в которых уже совершен переход при $\varepsilon \to 0$ и $\Phi_0(k\varepsilon) \to 1$, к сосредоточенному источнику из (1.2). (То же предполагается и во всех последующих окончательных интегральных представлениях §1).

В формулах (1.15), равно как и во всех аналогичных формулах в последующем, полагается

$$\begin{gathered}
\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2, \\
\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{s\nu}}, \quad \varkappa = \frac{\omega h}{v_{s1}}, \quad (\nu = 0, 1, 2), \\
\tau = \frac{v_{s1}}{h} t, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{h},
\end{gathered} \tag{1.15}$$

причем под $\tau, \tilde{x}$ и $\tilde{z}$ подразумеваются безразмерные время и координаты декартовой системы. При этом ветви введенных радикалов α_ν и β_ν на основном листе плоскости (ζ) определены условиями

$$\arg \alpha_\nu(\zeta) = \arg \beta_\nu(\zeta) = \frac{\pi}{2} \ (\text{при } \zeta = 0) \tag{1.16}$$

при проведении разрезов на плоскости (ζ) от точек ветвления на бесконечность вдоль вещественной оси, без пересечения мнимой оси. А под путем интегрирования λ сначала можно подразумевать прямую

$$\zeta = k \exp(i\chi_0), \ (-\infty < k < \infty),$$

идущую из бесконечности 3-го квадранта плоскости (ζ) на бесконечность 1-го квадранта под достаточно малым углом $\chi_0 > 0$ к вещественной оси. В последующем выбор контура λ несколько уточняется.

Что же касается функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ из (1.14), то они определяются из системы уравнений, получающейся из системы (1.10) в результате перехода к переменным из (1.12) метода Лемба.

Нетрудно видеть, что такая система может быть записана в матричной форме

$$(\Delta_2) \times X = b_0 \tag{1.17}$$

с квадратной матрицей

$$(\Delta_2) =$$

$$
= \begin{pmatrix}
-2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 & 0 & 0 \\
\mu_1 g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 & 0 & 0 \\
\zeta e_1^- & -\beta_1 e_2^- & \zeta e_1^+ & \beta_1 e_2^+ & -\zeta & \beta_2 \\
-\alpha_1 e_1^- & \zeta e_2^- & \alpha_1 e_1^+ & \zeta e_2^+ & \alpha_2 & -\zeta \\
-2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^- & \mu_1 g_1 e_2^- & 2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^+ & \mu_1 g_1 e_2^+ & 2\mu_2\zeta\alpha_2 & -\mu_2 g_2 \\
\mu_1 g_1 e_1^- & -2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^- & \mu_1 g_1 e_1^+ & 2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^+ & -\mu_2 g_1 & 2\mu_2\zeta\beta_2
\end{pmatrix}, \tag{1.18}
$$

в которой ради компактности записи использованы обозначения

$$
e_1^- = e^{-\varkappa\alpha_1}, \quad e_2^- = e^{-\varkappa\beta_1}, \quad e_1^+ = e^{\varkappa\alpha_1}, \quad e_2^+ = e^{\varkappa\beta_1}, \tag{1.18$'$}
$$

и с матрицами-столбцами X и b_0, представленными здесь в форме транспонированных матриц-строк

$$
X = (X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_2^-, Y_2^-)^+,
$$

$$
b_0 = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0\right)^+.
$$

При этом отвечающее системе (1.17) дисперсионное уравнение (задачи для двухслойной среды) имеет, очевидно, вид

$$
\Delta_2(\zeta, \varkappa) = 0, \tag{1.19}
$$

где $\Delta_2(\zeta, \varkappa)$ – определитель матрицы (1.18).

3. Чтобы завершить рассмотрение задач п. 1 остается сделать небольшое замечание относительно приведения к форме метода Лемба осесимметричного волнового поля потенциалов из (1.7), (1.6), возбуждаемого в двухслойной упругой среде из п. 1 воздействием (1.2), (1.4). Подобный вопрос освещен в [1] (§2 п. 3). Там указано, что последовательность действий при таком приведении сводится примерно к следующему:

1) К предварительному представлению внутренних интегралов из (1.6) в виде

$$
\left.\begin{matrix}\Phi_\nu \\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}[X]_\nu \\ [Y]_\nu\end{matrix}\right\} F(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{1.6$'$}
$$

2) К перестановке порядка интегрирования по ω и по k в (1.7) и (1.6$'$), что сводит проблему к преобразованию (новых внутренних) интегралов вида

$$
I_p = \int\limits_0^\infty f_p(k)J_p(kr)\,dk, \quad (p = 0, 1), \tag{1.20}
$$

где $f_0(k) = k[X]$ – нечетная, а $f_1(k) = k[Y]$ – четная функции от k.

3) Такие преобразования производятся на основе известной формулы $2J_p(kr) = H_p^{(1)}(kr) + H_p^{(2)}(kr)$ с использованием соотношений обхода

$$H_p^{(1)}(kre^{i\pi}) = -e^{-ip\pi} H_p^{(2)}(kr)$$

для функций Ханкеля, позволяющих получить следующую цепочку равенств,

$$\int_0^\infty f_p(k) H_p^{(1)}(kr)dk = -\int_0^{-\infty} f_p(-k) H_p^{(1)}(kre^{i\pi})dk =$$

$$= \int_{-\infty}^0 f_p(-k)[-e^{-ip\pi}] H_p^{(2)}(kr)dk = \int_{-\infty}^0 f_p(-k) H^{(2)}(kr)dk,$$

(где $\arg k = -\pi$). При ее учете, равно как и при учете ветвления функций Ханкеля в начале координат $k = 0$, для интеграла из (1.20) получается нужное нам представление

$$I_p = \frac{1}{2}\int_0^\infty f_p(k) H_p^{(2)}(kr)dk + \frac{1}{2}\int_0^\infty f_p(k) H_p^{(1)}(kr)dk =$$

$$= \frac{1}{2} \fint_{-\infty}^{\infty} f_p(k) H_p^{(2)}(kr)dk.$$

Здесь интегрирование производится вдоль вещественной оси плоскости (k) с обходом точки $k = 0$ ветвления функций Ханкеля по нижней бесконечно-малой полуокружности.

В результате такого рода преобразований, а также – перехода к переменным интегрирования из (1.12) метода Лемба, аналитическое представление потенциалов φ_ν и ψ_ν осесимметричного поля смещений задачи из п. 1 (в случае возбуждения среды воздействием (1.2), (1.4)) может быть представлено прежними же интегралами Фурье (1.13), подинтегральные функции Φ_ν и Ψ_ν

которых имеют теперь следующие значения

$$\left.\begin{matrix}\Phi_1\\ \Psi_1\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left\{\begin{matrix}[X_1^+ e^{\varkappa\tilde z\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa\tilde z\alpha_1}]H_0^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\\ [Y_1^+ e^{\varkappa\tilde z\beta_1} + Y_1^- e^{-\varkappa\tilde z\beta_1}]H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta,$$
$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left\{\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-1)\alpha_2}H_0^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\\ Y_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-1)\beta_2}H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta. \tag{1.21}$$

Величины $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ здесь определяются из решения системы уравнений (1.18), а величины α_ν, β_ν и др. имеют значения из (1.15) и (1.16). Наконец, путь интегрирования λ отличается от контура λ из (1.14) только тем, что он обходит точку $\zeta = 0$ (точку ветвления функций Ханкеля из (1.21)) по нижней бесконечно малой полуокружности.

4. Следующей по физической сложности здесь рассматривается задача (называемая далее, ради краткости "задачей для трехслойной среды") для тонкого упругого слоя $H < z < H + h$, $(\nu = 1)$, находящегося в жестком контакте с двумя упругими полупространствами: $z < H$, $(\nu = 0)$ и $z > H + h$, $(\nu = 2)$, характеризуемыми вещественными параметрами из (1.1) при индексах $\nu = 0, 1$ и 2. При этом предполагается, что среда возбуждается источником, включаемым в точке 0 $(x = z = 0)$ при $t = 0$ либо: 1) типа нормальной плоской или осесимметричной плотности силы вида (1.2)

$$\vec F_1 = \delta(x)\delta(z)f(t)\vec k_1, \tag{1.22}$$

$$\vec F_2 = \frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(z)f(t)\vec k_1, \tag{1.23}$$

или же 2) – типа пространственно-сосредоточенной плотности силы

$$\vec F_3 = \frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(z)f(t)\vec i, \tag{1.24}$$

параллельной границам раздела слоев среды, приложенными в точке $x = y = z = 0$ среды $(\nu = 0)$, т.е. в начале координат рассматриваемой координатной системы. Интерференционные же поля изучаются, например, на профилях $z = 0$ и $z = 2H + h$ как в отраженных, так и в проходящих волнах.

Поставленные задачи не затрагивались в [1] вследствие чрезвычайной громоздкости (и необозримости) их решений в аналитической форме. Однако в обсуждаемой здесь аналитико-алгоритмической форме их решения в плоском и осесимметрическом случаях строятся вполне аналогично задаче из [1], (§2, п. 8), которой мы уже воспользовались выше. Поэтому в таких случаях (сводящихся, как уже указывалось, к случаю плоского воздействия (1.22)) искомое аналитико-алгоритмическое решение задачи достаточно будет лишь выписать с небольшими пояснениями. Вот случай касательного воздействия из (1.24), недостаточно полно освещенный в литературе, целесообразно обсудить более подробно. Этому посвящен весь §2.

5. В плоской задаче для рассматриваемой трехслойной среды составляющие полей смещений

$$u_x^{(\nu)} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial z}, \quad u_z^{(\nu)} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x} \tag{1.25}$$

определяются через посредство потенциалов φ_ν, ψ_ν, представляемых формулами (1.5) при индексах $\nu = 0, 1$ и 2. Подинтегральные же функции Φ_ν и Ψ_ν таких интегралов строятся теперь в форме несколько-измененных интегралов Меллина

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu \\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}[X_\nu^+ e^{(z-H)\tilde\alpha_\nu} + X_\nu^- e^{-(z-H)\tilde\alpha_\nu}] \\ [Y_\nu^+ e^{(z-H)\tilde\beta_\nu} + Y_\nu^- e^{-(z-H)\tilde\beta_\nu}]\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}ds, \; (\nu = 0, 1) \tag{1.26}$$

в средах с индексами $\nu = 0$ и $\nu = 1$, и – интегралов

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2 \\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-(z-H-h)\tilde\alpha_2} \\ Y_2^- e^{-(z-H-h)\tilde\beta_2}\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}ds, \tag{1.27}$$

в среде с индексом $\nu = 2$, где падающие на слой $\nu = 1$ волны отсутствуют. При этом здесь предполагается, что радикалы $\tilde\alpha_\nu$, $\tilde\beta_\nu$ определяются соотношениями (1.10), (1.11), а составляющие потенциалов из (1.5), (1.26) при $\nu = 0$, содержащие функциональные коэффициенты X_0^- и Y_0^-, определяют первичные p- и s-волны, возбуждаемые источником (1.22), (1.4).

Элементарная задача на возбуждение указанным источником поля смещений в (однородной безграничной упругой) среде ($\nu =$

0) рассмотрена, например, в книге [3], (§13, п. 8)*). Используя ее решение, для коэффициентов X_0^- и Y_0^- из (1.26) (определяющих в форме (1.5), (1.26) потенциалы φ_0^-, ψ_0^- падающих из среды $\nu = 0$ на слой $\nu = 1$ волн) получаются следующие выражения

$$X_0^- = \frac{-v_{s0}^2}{2\mu_0 s^2}\, e^{-H\tilde{\alpha}_0}, \quad Y_0^- = \frac{-v_{s0}^2 k}{2\mu_0 s^2 \tilde{\beta}_0}\, e^{-H\tilde{\beta}_0}. \tag{1.28}$$

При выбранных в виде (1.5), (1.26) и (1.27) представлений для потенциалов полей смещений из (1.25), уравнения движения слоев упругой среды удовлетворяются. Удовлетворяются и нулевые начальные данные, как выясняется после элементарного анализа системы уравнений для коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из (1.26) и (1.27). Сами же такие коэффициенты должны определяться из учета граничных условий

$$\begin{aligned} &[\vec{u}_0 - \vec{u}_1]_{z=H} = 0, \qquad [\vec{t}_z^{(0)} - \vec{t}_z^{(1)}]_{z=H} = 0, \\ &[\vec{u}_1 - \vec{u}_2]_{z=H+h} = 0, \quad [\vec{t}_z^{(1)} - \vec{t}_z^{(2)}]_{z=H+h} = 0, \end{aligned} \tag{1.29}$$

выражающих требование жесткости контакта между соседними слоями среды.

Нетрудно видеть, что подстановка выражений φ_ν, ψ_ν из (1.5), (1.26) и (1.27) в условия (1.29) приводит для коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ к следующей системе алгебраических уравнений

$$-kX_0^+ - \tilde{\beta}_0 Y_0^+ + k(X_1^+ + X_1^-) + \tilde{\beta}_1(Y_1^+ - Y_1^-) = b_1,$$

$$-\tilde{\alpha}_0 X_0^+ - kY_0^+ + \tilde{\alpha}_1(X_1^+ - X_1^-) + k(Y_1^+ + Y_1^-) = b_2,$$

$$-\mu_0[2k\tilde{\alpha}_0 X_0^+ + \tilde{g}_0 Y_0^+] + \mu_1[2k\tilde{\alpha}_1(X_1^+ - X_1^-) + g_1(Y_1^+ + Y_1^-) = b_3,$$

---

*) Она сводится к контактной задаче для безграничной среды $\nu = 0$, мысленно разделенной на два полупространства $z < 0$ $(\nu = -1)$, $z > 0$ $(\nu = 0)$ поверхностью $z = 0$, в точках которой выполняются условия контакта

$$\vec{u}_{-1} = \vec{u}_0, \quad [\vec{t}_z^{(0)} - \vec{t}_z^{(-1)}] = -\vec{F}_1(x,t), \ (z = 0)$$

при значении $\vec{F}_1$ из (1.2). Составляющие вектора напряжения $\vec{t}_z^{(\nu)} = t_{zx}^{(\nu)}\vec{i} + t_{zz}^{(\nu)}\vec{k}$ здесь определяются выражениями

$$t_{zx} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right], \ t_{zz} = \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}.$$

$$-\mu_0[\tilde{g}_0 X_0^+ + 2k\tilde{\beta}_0 Y_0^+] + \mu_1[\tilde{g}_1(X_1^+ + X_1^-) + 2k\tilde{\beta}_1(Y_1^+ - Y_1^-) = b_4,$$

$$+k(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} + X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + \tilde{\beta}_1(Y_1^+ e^{h\tilde{\beta}_1} - Y_1^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) - kX_2^- + \tilde{\beta}_2 Y_2^- = 0, \tag{1.30}$$

$$\tilde{\alpha}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} - X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + k(Y_1^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_1^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) + \tilde{\alpha}_2 X_2^- - kY_2^- = 0,$$

$$\mu_1[2k\tilde{\alpha}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} - X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) +$$

$$+\tilde{g}_1(Y_1^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_1^- e^{-h\tilde{\beta}_1})] + \mu_2[2k\tilde{\alpha}_2 X_2^- - \tilde{g}_2 Y_1^-] = 0,$$

$$\mu_1[\tilde{g}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} + X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) +$$

$$+2k\tilde{\beta}_1(Y_1^+ e^{h\tilde{\beta}_1} - Y_1^- e^{-h\tilde{\beta}_1})] - \mu_2[\tilde{g}_2 X_2^- - 2k\tilde{\beta}_2 Y_2^-] = 0.$$

Здесь использованы обозначения из (1.10), (1.11) при индексах $\nu = 0, 1$ и 2. Правые же части $\tilde{b}_q$ из (1.30) определяются равенствами

$$\begin{aligned} &\tilde{b}_1 = kX_0^- - \tilde{\beta}_0 Y_0^-, \quad \tilde{b}_2 = -\tilde{\alpha}_0 X_0^- + kY_0^-, \\ &\tilde{b}_3 = -\mu_0(2k\tilde{\alpha}_0 X_0^- - \tilde{g}_0 Y_0^-), \quad \tilde{b}_4 = -\mu_0(2k\tilde{\beta}_0 Y_0^- - \tilde{g}_0 X_0^-) \end{aligned} \tag{1.31}$$

при значениях X_0^- и Y_0^- из (1.28).

6. Приведенная система уравнений решает задачу для трехслойной среды в представлениях потенциалов в форме (1.5), (1.26) и (1.27) метода контурных интегралов в первичной его форме. Переход к представлениям этого метода в канонической его форме осуществляется в выражениях (1.26), (1.27) и (1.30) тривиальной заменой переменной интегрирования s по формуле

$$s = kv_{s1}\eta(k), \quad (k > 0). \tag{1.32}$$

При этом радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$ из (1.10) преобразуются (как $\tilde{\alpha}_\nu = k\overset{\circ}{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu = k\overset{\circ}{\beta}_\nu$) в новые радикалы

$$\overset{\circ}{\alpha}_\nu = \sqrt{1 + \gamma_\nu^2 \eta_2}, \ \overset{\circ}{\beta}_\nu = \sqrt{1 + \delta_\nu^2 \eta_2}, \ \left(\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p\nu}}, \delta_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{s\nu}}\right), \tag{1.33}$$

ветви которых на основном листе плоскости (η) определены условиями

$$\arg \overset{\circ}{\alpha}_\nu = \arg \overset{\circ}{\beta}_\nu = 0, \quad (\eta > 0) \tag{1.34}$$

при проведении разрезов вдоль мнимой оси между точками ветвления $\eta = -i/\gamma_\nu$ и $\eta = i/\gamma_\nu$. Переход же к представлению потенциалов в форме метода Лемба осуществляется в точности так же, как это изложено в п. 2 в связи с формулами (1.12)–(1.16) применительно к задаче для двухслойной среды. В результате, для представления потенциалов получаются интегралы (1.13) типа Фурье (при $\nu = 0, 1$ и 2), функции Φ_ν и Ψ_ν которых представляются контурными интегралами

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}[X_\nu^+ e^{\varkappa(\tilde z-\tilde H)\alpha_\nu} + X_\nu^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H)\alpha_\nu}]\\ i[Y_\nu^+ e^{\varkappa(\tilde z-\tilde H)\beta_\nu} + Y_\nu^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H)\beta_\nu}]\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa\tilde x\zeta}\,d\zeta,\\
&\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\alpha_2}\\ iY_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\beta_2}\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa\tilde x\zeta}\,d\zeta.
\end{aligned}\tag{1.35}$$

такого же типа, как и интегралы из (1.14). Здесь применены обозначения из (1.15) при учете условий (1.16) для выбора ветвей радикалов на основном листе плоскости (ζ).

Что касается системы уравнений для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ в форме метода Лемба, получаемой из системы уравнений (1.30) в результате замен составных частей коэффициентов системы по схеме

$$k \to \zeta;\quad \tilde\alpha_\nu \to \alpha_\nu;\quad \tilde\beta_\nu \to \beta_\nu;\quad \tilde g_\nu \to g_\nu,$$
$$h\tilde\alpha_\nu \to \varkappa\alpha_\nu;\quad h\tilde\beta_\nu \to \varkappa\beta_\nu,$$

то ее целесообразно записать в матричной форме

$$(\Delta_3) \times (X) = (b), \tag{1.36}$$

чтобы уже сейчас иметь наглядное представление о левой части дисперсионного уравнения

$$|\Delta_3| \equiv \Delta_3(\zeta, \varkappa) = 0 \tag{1.37}$$

(типа SV) рассматриваемой задачи для трехслойной среды.

Величины (X) и (b) в уравнении (1.36) представляют собой матрицы-столбцы

$$\begin{aligned}
(X) &= (X_0^+, Y_0^+, X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_2^-, Y_2^-)^+,\\
(b) &= (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, 0, 0, 0)^+
\end{aligned}\tag{1.38}$$

записанные в форме транспонированных матриц строк, причем элементы b_k имеют значения

$$b_1 = \zeta X_0^- - \beta_0 Y_0^-; \quad b_2 = -\alpha_0 X_0^- + \zeta Y_0^-,$$
$$b_3 = -\mu_0(2\zeta\alpha_0 X_0^- - g_0 Y_0^-); \quad b_4 = \mu_0(g_0 X_0^- - 2\zeta\beta_0 Y_0^-), \tag{1.39}$$
$$\left.\begin{matrix} X_0^- \\ Y_0^- \end{matrix}\right\} = \frac{h^2}{2\mu_0\delta_0^2\varkappa^2\beta_0} \left.\begin{matrix} \beta_0 e^{-\varkappa H\alpha_0} \\ \zeta e^{-\varkappa H\beta_0} \end{matrix}\right\}$$

в соответствии с (1.31) и (1.28). Что же касается восьмирядной квадратичной матрицы $\Delta_3(\zeta,\varkappa)$ из (1.36), то она определяется таблицей (1.40):

$$\Delta_3(\zeta,\varkappa) =$$
$$\begin{array}{llllllll}
-\zeta & -\beta_0 & \zeta & -\beta_1 & \zeta & \beta_1 & 0 & 0 \\
-\alpha_0 & -\zeta & -\alpha_1 & \zeta & \alpha_1 & \zeta & 0 & 0 \\
-2\mu_0\zeta\alpha_0 & -\mu_0 g_0 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 & 0 & 0 \\
-\mu_0 g_0 & -2\mu_0\zeta\beta_0 & \mu_1 g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \zeta e_1^- & -\beta_1 e_2^- & \zeta e_1^+ & \beta_1 e_2^+ & -\zeta & \beta_2 \\
0 & 0 & -\alpha_1 e_1^- & \zeta e_2^- & \alpha_1 e_1^+ & \zeta e_2^+ & \alpha_2 & -\zeta \\
0 & 0 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^- & \mu_1 g_1 e_2^- & 2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^+ & \mu_1 g_1 e_2^+ & 2\mu_2\zeta\alpha_1 & -\mu_2 g_2 \\
0 & 0 & \mu_1 g_1 e_1^- & -2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^- & \mu_1 g_1 e_1^+ & 2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^+ & -\mu_2 g_2 & 2\mu_2\zeta\beta_2
\end{array}$$

(1.40)

в которой использованы обозначения из (1.18′). При этом левая часть дисперсионного уравнения (1.37) совпадает с детерминантом матрицы (Δ_3) из (1.38).

7. Остается привести представления для потенциалов φ_ν, ψ_ν, $(\nu = 0, 1, 2)$ поля смещений

$$\vec{u}_\nu = q_\nu(\bar{r}, \bar{z}, t)\vec{r}_1 + w_\nu(\tilde{r}, \bar{z}, t)\vec{k},$$
$$q_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial r} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial z}, \quad w_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial\psi_\nu}{\partial r} + \frac{\psi_\nu}{r}, \tag{1.41}$$

в трехслойной среде из п. 4, возбуждаемой осесимметрическим воздействием (1.23), (1.4).

Также, как и в случае двухслойной среды из п. 3, потенциалы φ_ν, ψ_ν допускают представления в виде интегралов Фурье из (1.13) (где только теперь $\nu = 0, 1, 2$). Для подинтегральных же их функций Φ_ν и Ψ_ν получаются интегральные представления

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu \\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h} \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}[X_\nu^+ e^{\varkappa(\tilde z-\tilde H)\alpha_\nu} + X_\nu^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H)\alpha_\nu}]H_0^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta) \\ [Y_\nu^+ e^{\varkappa(\tilde z-\tilde H)\beta_\nu} + Y_\nu^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H)\beta_\nu}]H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta,$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2 \\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h} \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\alpha_2} H_0^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta) \\ Y_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\beta_2} H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta,\ \ (\nu = 0, 1) \tag{1.42}$$

такой же структуры, что и интегралы из (1.21).

Что же касается функциональных коэффициентов $(X_\nu^\pm, Y_\nu^\pm)$ из (1.42), (как и во всех задачах для слоисто-однородных сред с плоско-параллельными границами раздела $\tilde z = \mathrm{const}$) для них получается задача, в точности совпадающая с задачей определения таких же коэффициентов в (рассмотренной) плоской задаче для трехслойной среды. Таким образом, коэффициенты $(X_\nu^\pm, Y_\nu^\pm)$ из (1.42) определяются из системы уравнений (1.36)–(1.40) с матрицей из (1.38).

8. Как указано в конце п. 4, нам предстоит рассмотреть еще задачи на возбуждение волновых полей сосредоточенными касательными воздействиями в двухслойной и в трехслойной средах. При таком воздействии в слоистых упругих средах (с плоско-параллельными границами раздела) возбуждаются, как известно, поля смещения смешанного типа, содержащие как SV составляющие, так и составляющие поля смещений типа SH.

Чтобы глубже воспринять это обстоятельство при ознакомлении с материалом §2, где обсуждаются случаи касательного воздействия целесообразно уже здесь привести краткое описание полей смещений типа SH, возбуждаемых в рассматриваемых слоистых средах каноническими (для волн типа SH) воздействиями. Таковыми, как известно, являются, во-первых, осесимметрическое вращательное воздействие с (сингулярной) плотностью силы

$$\vec F_1^0 = \frac{\delta(r)}{\pi r^2}\,\delta(z) f(t)\vec\theta_1, \tag{1.43}$$

где $\vec\theta_1$ – орт цилиндрической координатной системы, и, во-вторых, плоское касательное воздействие вида

$$\vec{F}_2^0 = \delta(x)\delta(z)f(x)\vec{j}, \tag{1.44}$$

где $\vec{j}$ – орт оси Oy декартовой системы координат.

Подобные воздействия возбуждают в слоисто-однородных упругих средах с границами раздела $z = \mathrm{const}$ волновые поля смещений соответственно структуры

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_1(r,z,t)\vec{\theta}_1, \\ \vec{u}_2 &= u_2(x,z,t)\vec{j}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

удовлетворяющие в слоях среды соответственно уравнениям движения

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v_s^2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{1}{v_s^2}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{1.46}$$

При этом такие поля смещений характеризуются следующими векторами напряжений

$$\vec{t}_z^{(1)} = \mu\frac{\partial u_1}{\partial z}\,\vec{\theta}_1, \quad \vec{t}_z^{(2)} = \mu\frac{\partial u_2}{\partial z}\,\vec{j} \tag{1.47}$$

на площадках среды с нормалью $\vec{n} = \vec{k}$.

9. Задачи на возбуждение в слоистых средах волн типа SH ставятся и решаются аналогично подобным же задачам для волн типа SV. При этом их решения оказываются значительно более простыми (и менее громоздкими), а случаи плоской и осесимметрической задач отличаются друг от друга только тем, что интеграл Фурье по функциям $\cos kx$ в плоской задаче заменяется на интеграл Фурье–Бесселя по функциям $J_1(kr)$ в соответствующей осесимметрической задаче. Что же касается схем решения, то как по исходным данным, так и по выкладкам они оказываются практически одинаковыми. Нашей же цели: "сопоставления с решениями задач из §2", лучше отвечает случай вращательного воздействия, который здесь и рассматривается, причем предельно кратко.

Задача 1. Пусть к границе $z = 0$ двухслойной среды из п. 1 в момент $t = 0$ прикладывается вращательное воздействие

$$\mu_1\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{\delta(r)}{\pi r^2}\,f(t)\vec{\theta}_1. \tag{1.48}$$

Пользуясь известным представлением для сингулярной части воздействия

$$\frac{\delta(r)}{\pi r^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty k^2 J_1(kr)\Phi_0(k\varepsilon)dk, \tag{1.49}$$

где фактор улучшения сходимости $\Phi_0(k\varepsilon)$ имеет значение из (1.3), а также – представлением (1.4) для зависимости от времени включаемого воздействия, требуется построить поля $\vec{u}_\nu = u_\nu(r,z,t)\vec{\theta}_1$ в слое $0 < z < h$, $(\nu = 1)$ и в полупространстве $z > h$, $(\nu = 2)$, удовлетворяющие уравнениям движения, нулевым начальным данным и граничным условиям: условию (1.48) на свободной границе $z = 0$ слоя $\nu = 1$ и условиям

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z} \tag{1.50}$$

жесткости контакта на границе $z = h$ раздела сред.

В соответствии с уравнением движения из (1.46) и представлением (1.49) сингулярной части воздействия, решение такой задачи следует строить в виде повторных интегралов

$$u_\nu = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty U_\nu k^2 J_1(kr)\Phi_0(k\varepsilon)dk,\ (\nu = 1,2), \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma--\infty}^{\sigma+i\infty}[Y_1^+ e^{z\tilde{\beta}_1} + Y_1^- e^{-z\tilde{\beta}_1}]F(s)e^{st}\,ds,\\ U_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2^- e^{-(z-h)\tilde{\beta}_2}F(s)e^{st}\,ds, \end{aligned} \tag{1.52}$$

где величины $\tilde{\beta}_\nu$ имеют значения из (1.11).

Неизвестные функциональные коэффициенты $Y_1^\pm$ и Y_2^- должны определяться из учета граничных условий (1.48) и (1.50). Нетрудно видеть, что последние сводятся к системе уравнений

$$\begin{aligned} &-\mu_1\tilde{\beta}_1 Y_1^- + \mu_1\tilde{\beta}_1 Y_1^+ + 0.Y_2^- = -1,\ (b = h\tilde{\beta}_1)\\ &e^{-b}Y_1^- + e^b Y_1^+ - 1.Y_2^- = 0,\\ &-\mu_1\tilde{\beta}_1 e^{-b}Y_1^- + \mu_1\tilde{\beta}_1 e^b Y_1^- + \mu_2\tilde{\beta}_2 Y_2^- = 0, \end{aligned}$$

переписываемой, после перехода к переменным из (1.12) метода Лемба, в следующем матричном виде

$$(D_2) \times (Y) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \mu_1\beta_1, & -\mu_1\beta_1, & 0 \\ \mu_1\beta_1 e^{-b}, & -\mu_1\beta_1 e^{b}, & -\mu_2\beta_2 \\ -e^{-b}, & -e^{b}, & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1^- \\ Y_1^+ \\ Y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Здесь положено $b = \varkappa\beta_1$ и использованы обозначения из (1.15). При этом подстановка решения такой системы под знаки интегралов Меллина из (1.52) без труда позволяет доказать, что функции u_ν из (1.51) удовлетворяют всем условиям задачи.

10. В задаче 2 для трехслойной среды из п. 4 предполагается, что исходное поле возбуждается источником, помещенным в точку O $(r = 0,\ z = 0)$ полупространства $z < H$, $(\nu = 0)$. Такое поле при падении его на слой $H < z < H + h$, $(\nu = 1)$ возбуждает суммарное интерференционное поле. Поэтому теперь, когда нас интересует не все (несложное) поле SH в среде, а лишь некоторые его элементы, достаточно будет считать, что в представлении искомого поля формулами вида (1.51), (1.54) функциональный коэффициент $Y_0^-(s,k)$ из (1.54), ответственный за упомянутую падающую волну, заранее задан каким-либо образом.

При этом полное поле смещений в трехслойной среде также представляется интегралом Фурье–Бесселя (1.51), но уже при $(\nu = 0, 1, 2)$. Внутренние же интегралы Меллина для функций U_ν строятся теперь в виде

$$U_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [Y_\nu^+ e^{(z-H)\tilde\beta_1} + Y_\nu^- e^{-(z-H)\tilde\beta_1}]F(s)e^{st}\,ds,\ (\nu = 0, 1)$$

$$U_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2^- e^{-(z-H-h)\tilde\beta} F(s)e^{st}\,ds, \tag{1.54}$$

в предположении, что значение коэффициента $Y_0^- \equiv Y_0^-(s,k)$ известно. А все остальные функциональные коэффициенты должны определяться из учета условий жесткости контакта сред на границе раздела $z = H$ и на границе $z = H + h$ (на которой это условие имеет вид (1.50)). Указанный учет, очевидно, приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&- Y_0^+ + Y_1^- + Y_1^+ = +Y_0^-,\\
&- \mu_0\tilde{\beta}_0 Y_0^+ - \mu_1\tilde{\beta}_1 Y_1^- + \mu_1\tilde{\beta}_1 Y_1^+ = -\mu_0\tilde{\beta}_0 Y_0^-,\\
&- e^{-b}Y_1^- - e^{b}Y_1^+ + Y_2^- = 0,\\
&\mu_1\tilde{\beta}_1 e^{-b}Y_1^- - \mu_1\tilde{\beta}_1 e^{b}Y_1^+ - \mu_2\tilde{\beta}_2 Y_2^- = 0,
\end{aligned} \tag{1.55}$$

в правую часть которой помещены величины, содержащие коэффициент Y_0^-, определяющий падающую волну, порождающую интерференционные волны в трехслойной среде. В матричной форме представлений метода Лемба такая система может быть записана в следующем виде

$$(D_3)(Y) \equiv \begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 & 0\\ -\mu_0\beta_0, & -\mu_1\beta_1, & \mu_1\beta_1, & 0\\ 0, & -e^{-b}, & -e^{b}, & 1\\ 0, & \mu_1\beta_1 e^{-b}, & -\mu_1\beta_1 e^{b}, & -\mu_2\beta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_0^+\\ Y_1^-\\ Y_1^+\\ Y_2^- \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_0^-\\ -\mu_0\beta_0 Y_0^-\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Изложенного уже достаточно для целей сопоставления с результатами п. 5 и п. 7–8 §2.

Только уже здесь полезно подчеркнуть, что правые части систем уравнений (1.53) и (1.56) естественно связывать с причиной появления в среде интерференционных волн типа SH, отвечающих по (1.51) и (1.54) возбуждаемому полю в слоистой среде. В соответствии с этим, на основании системы уравнений (1.56) следует заключить, что здесь интерференционные поля смещений типа SH появляются в среде за счет падающих волн также типа SH (что, конечно, тривиально, так как волны других типов в среде отсутствуют). В общем же случае полей из §2, содержащих как элементы полей типа SV, так и типа SH, ситуация оказывается несколько иной. В образовании “вторичных волн” типа SH основную роль играют не образовавшиеся уже волны типа SH, а образовавшиеся в слоях среды волны типа SV.

§2. Структура интегральных представлений волновых полей, возбуждаемых касательными сосредоточенными воздействиями

Нормальные осесимметрические воздействия типа (1.2) или (1.23) возбуждают в упругих слоисто-однородных средах с границами раздела $z = \text{const}$ чистые поля типа SV, не содержащие элементов полей типа SH. В случаях же касательных воздействий вида (1.24), встречающихся в приложениях весьма часто, в слоистых средах возбуждаются поля обеих упомянутых типов. Поэтому рассмотрение задач на возбуждение касательными воздействиями волн в слоистых упругих средах представляет как физический, так и математический интерес. Вследствие же того обстоятельства, что методы решения таких задач недостаточно еще освещены в литературе, было решено уделить таким задачам особое внимание.

В настоящем параграфе излагается общая схема построения точных решений таких задач в форме повторных интегралов и приводятся решения задач для двухслойной и трехслойной упругих сред, аналогичных задачам из §1. Устанавливается структура систем алгебраических уравнений для функциональных коэффициентов интегральных представлений волновых полей; выясняется вид их дисперсионных уравнений (левые части которых совпадают с детерминантами упомянутых систем), и показывается, что уравнения расщепляются на произведение дисперсионных уравнений для волн типа SV и волн типа SH.

1. При касательных воздействиях из (1.24), (1.4) вида

$$\vec{F}_3 = \frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(r)f(t)\vec{i} \tag{2.1}$$

описание слоисто-однородных упругих сред с границами раздела $z = \text{const}$ производится в декартовой $\{x, y, z; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и в цилиндрической $\{r, \theta, z; \vec{r}_1, \vec{\theta}_1, \vec{k}\}$ системах координат с общим началом O.

Поле смещений в каждом слое среды, как и обычно, определяется через продольный φ и поперечный $\vec{\psi}$ потенциалы

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi(r, \theta, z, t) + \operatorname{rot}\vec{\psi}(r, \theta, z, t). \tag{2.2}$$

Но в отличие от случаев осевой симметрии потенциал $\vec{\psi}$ целесообразно представлять теперь в форме

$$\vec{\psi} = \psi_1(r,\theta,z,t)\vec{j} + \psi_2(r,\theta,z,t)\vec{k}_1, \tag{2.3}$$

содержащей декартовы составляющие ψ_1 и ψ_2, рассматриваемые как функции цилиндрических координат, в которых декартовы орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ определяются формулами

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{r}_1 - \sin\theta\vec{\theta}_1, \quad \vec{j} = \sin\theta\vec{r}_1 + \cos\theta\vec{\theta}_1. \tag{2.4}$$

Потенциалы в каждом слое среды удовлетворяют своим волновым уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2\psi_q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_q}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi_q}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_q}{\partial z^2} = \frac{1}{v_s^2}\,\frac{\partial^2\psi_q}{\partial t^2},\ (q=1,2).\end{gathered} \tag{2.5}$$

А если воспользоваться известными выражениями для дифференциальных операций grad, div и rot в цилиндрической координатной системе, то для составляющих вектора смещений в слое

$$\vec{u} = u_r\vec{r}_1 + u_\theta\vec{\theta}_1 + u_z\vec{k}_1, \tag{2.6}$$

в соответствии с (2.2), будем иметь

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta},\\ u_\theta &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r},\\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

При учете же известного выражения

$$\vec{t}_n = \vec{n}\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} + 2\mu\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + \frac{1}{2}[\vec{n}\times\mathrm{rot}\,\vec{u}]\right)$$

для вектора напряжения на площадке с нормалью $\vec{n}$, определяющего при $\vec{n} = \vec{k}_1$ вектор напряжений

$$\vec{t}_z = t_{zr}\vec{r}_1 + t_{z\theta}\vec{\theta}_1 + t_{zz}\vec{k}_1 \tag{2.8}$$

на границах раздела $z = \mathrm{const}$, для его составляющих получаются следующие выражения

$$
\begin{aligned}
t_{zr} &= \mu\Big\{2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta\partial z} + \cos\theta\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}\right) + \\
&\quad + \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial r}\right)\Big\}, \\
t_{z\theta} &= \mu\Big\{\frac{2}{r}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial r\partial z} + \frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \\
&\quad + \sin\theta\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}\right)\Big\}, \\
t_{zz} &= \frac{\lambda}{v_p^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \cos\theta\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial z} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

При этом слагаемое $v_p^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2$ здесь выписано ради краткости вместо левой части первого из уравнений (2.5).

2. Воспользуемся выражением орта $\vec{i}$ из (2.4), а также известным интегральным представлением для сингулярной части воздействия (2.1)

$$
\frac{\delta(r)}{\pi r} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty kJ_0(kr)\Phi_0(k\varepsilon)dk, \tag{2.10}
$$

в котором множитель улучшения сходимости

$$
\Phi_0(k\varepsilon) = \frac{1}{1 + k^2\varepsilon^2}
$$

введен под знак интеграла лишь для того, чтобы все применяемые далее промежуточные интегральные преобразования имели классический смысл. {В окончательных же представлениях полей под знаками интегралов везде полагается $\varepsilon \to 0$ и $\Phi_0(k\varepsilon) \to 1$, что соответствует переходу к сосредоточенному воздействию.}

Тогда для потенциалов поля смещений в слоях среды естественно воспользоваться следующими интегральными представлениями

$$\left.\begin{matrix}\varphi\\ \psi_2\end{matrix}\right\} = \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos\theta\Phi(z,t,k)\\ \sin\theta\Psi_2(z,t,k)\end{matrix}\right\} J_1(kr)k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,$$
$$\psi_1 = -\int\limits_0^\infty \Psi_1(z,t,k)J_0(kr)k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk. \tag{2.11}$$

Такие потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям (2.5), если оказывается

$$\frac{\partial^2\Phi}{dz^2} - k^2\Phi = \frac{1}{v_p^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},$$
$$\frac{d^2\Psi_q}{dz^2} - k^2\Psi_q = \frac{1}{v_s^2}\,\frac{\partial^2\Psi_q}{\partial t^2}, \quad (q = 1, 2). \tag{2.12}$$

Подстановка же их в (2.7) и (2.9) приводит для составляющих векторов смещений и напряжений к (несколько необычным для теории интегралов Фурье–Бесселя) представлениям. К представлениям

$$u_r = \cos\theta\int\limits_0^\infty \left[\varkappa_1 J_0(kr) - \varkappa_2\frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,$$
$$u_\theta = -\sin\theta\int\limits_0^\infty \left[\varkappa_3 J_0(kr) + \varkappa_2\frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk, \tag{2.13}$$
$$u_z = \cos\theta\int\limits_0^\infty Z\,J_1(kr)k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,$$

для составляющих поля смещений, в которых оказывается

$$\varkappa_1 = k\Phi + \frac{d\Psi_1}{dz}, \quad \varkappa_3 = k\Psi_2 + \frac{d\Psi_1}{dz},$$
$$\varkappa_2 = k(\Phi - \Psi_2), \quad Z = \frac{d\Phi}{dz} + k\Psi_1, \tag{2.14}$$

причем

$$\varkappa_2 \equiv \varkappa_1 - \varkappa_3.$$

И к представлениям для составляющих вектора напряжений

$$
\begin{aligned}
t_{zz} &= \cos\theta \int\limits_0^\infty \left[K_1 J_0(kr) - K_2 \frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk, \\
t_{z\theta} &= -\sin\theta \int\limits_0^\infty \left[K_3 J_0(kr) + K_2 \frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk, \\
t_{zz} &= \cos\theta \int\limits_0^\infty T\, J_1(kr) k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

в которых

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \mu\left(2k\frac{\partial\Phi}{\partial z} + k^2\Psi_1 + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}\right), \\
K_3 &= \mu\left(k\frac{\partial\Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}\right), \\
K_2 &= \mu\left(2k\frac{\partial\Phi}{\partial z} - k\frac{\partial\Psi_2}{\partial z} + k^2\Psi_1\right), \\
T &= \frac{\lambda}{v_p^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + 2\mu k\frac{\partial\Psi_1}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

и также оказывается

$$
K_2 \equiv K_1 - K_3. \tag{2.17}
$$

Третьи составляющие таких векторов даются обычными интегралами Фурье–Бесселя (по функции $J_1(kr)$), подинтегральные выражения которых обращаются в нуль, если равны нулю сами интегралы. Такое свойство применяемых интегральных преобразований играет весьма существенную роль при построении решений граничных задач. Но структура интегралов, представляющих первые две компоненты векторов $\vec{u}$ и $\vec{t}_z$, необычна для интегралов Фурье–Бесселя. Поэтому не ясно, обладает ли она упомянутым свойством.

3. С целью выяснения такого вопроса рассмотрим сначала, например, соотношения

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \left[K_1 J_0(kr) - K_2 \frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\Phi_0(k\varepsilon) dk = a(r,z,t), \\ &\int\limits_0^\infty \left[K_3 J_0(kr) + K_2 \frac{J_1(kr)}{kr}\right] k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon) dk = b(r,z,t), \end{aligned} \tag{2.18}$$

в которых под K_q, в такой же мере, можно подразумевать и выражения $\varkappa_q$ из (2.13).

Сумма интегралов из (2.18) сводится к обычному интегралу Фурье–Бесселя

$$\int\limits_0^\infty (K_1 + K_3) J_0(kr) k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon) dk = a + b,$$

из которого выражение $(K_1 + K_3)$ однозначно определяется, если известно разложение

$$a + b = \int\limits_0^\infty A(k) J_0(kr) k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon) dk. \tag{2.19}$$

При этом оказывается

$$K_1 + K_3 = A(k), \tag{2.20}$$

где $A(k) = 0$, если $a + b = 0$.

Для разности же интегралов, в силу тождества (2.17) и использования очевидных соотношений

$$J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} = \frac{dJ_1(kr)}{d(kr)},$$

и

$$\begin{aligned} J_0(kr) - 2\frac{J_1(kr)}{kr} &= \frac{1}{r}\,\frac{dJ_1(kr)}{dk} - \frac{1}{r}\,\frac{J_1(kr)}{k} = \\ &= \frac{k}{r}\,\frac{d}{dk}\left[\frac{J_1(kr)}{kr}\right], \end{aligned}$$

после интегрирования по частям получается равенство

$$\int\limits_0^\infty K_2 k\tilde{\Phi}_0 \left[J_0(kr) - 2\frac{J_1(kr)}{kr}\right] dk =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{d}{dk}[K_2 k^2 \tilde{\Phi}_0] \frac{J_1(kr)}{kr}\, dk = a - b.$$

Отсюда, при $a - b = 0$ следует

$$\frac{d}{dk}[K_2 k^2 \tilde{\Phi}_0] = 0, \quad (0 < k < \infty),$$

т.е. $K_2 k^2 \tilde{\Phi}_0 = c_0 = \mathrm{const}$, где $c_0 = 0$ (что видно при $k = 0$). Вследствие этого оказывается

$$K_2 \equiv K_1 - K_3 = 0. \tag{2.21}$$

Таким образом, при условии

$$a = b$$

с необходимостью следует равенство (2.21). А при условии $a = b = 0$, вследствие (2.20), кроме того оказывается $K_1 + K_3 = 0$ и, следовательно, все коэффициенты K_q из (2.18) равны нулю, если сами интегралы a и b из (2.18) равны нулю.

Итак, выясняется, что представления (2.13) и (2.15) для составляющих векторов $\vec{u}$ и $\vec{t}_z$ обладают желанным свойством. Поэтому из условий $\vec{u} = 0$ и $\vec{t}_z = 0$, или из условий

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{и} \quad \vec{t}_z^{(1)} = \vec{t}_z^{(2)},$$

выполняющихся при некотором значении $z = z_0$, следуют (в силу соотношений (2.13) и (2.15)) равенства $\varkappa_q = 0$, $Z = 0$ и $K_q = 0$, $T = 0$, или равенства

$$\varkappa_q^{(1)} = \varkappa_q^{(2)},\ \ Z_1 = Z_2 \quad \text{и} \quad K_q^{(1)} = K_q^{(2)},\ \ T_1 = T_2, \tag{2.22}$$

при том же значении $z = z_0$. Указанное свойство играет основную роль при учете условий контакта сред на границах раздела $z = z_0$ слоев среды с некоторыми индексами $\nu = 1$ и $\nu = 2$.

При приложении же касательного силового воздействия к границе того или иного слоя среды, например, посредством граничного условия

$$\vec{t}_z\big|_{z=0} = -\vec{F}_3 \equiv -\vec{i}\frac{\delta(r)}{\pi r}\, f(t), \tag{2.23}$$

приходится пользоваться, в силу (2.4) и (2.10), следующим представлением

$$\vec{F}_3 = (\cos\theta\vec{r}_1 - \sin\theta\vec{\theta}_1)f(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty kJ_0(kr)\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk. \tag{2.24}$$

Подстановка такой плотности силы одновременно с составляющими из (2.15) вектора напряжения $\vec{t}_z$ в соотношение (2.23), очевидно, приводит (после приравнивания соответственных компонент векторов), во-первых, к равенству

$$T\big|_{z=0} = 0 \tag{2.25}$$

для величины T из (2.16) и, во-вторых, к соотношениям вида (2.18), в которых оказывается

$$a = b = \frac{-f(t)}{\mu\pi}\int\limits_0^\infty kJ_0(kr)\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,$$

учитывающих касательные составляющие условия (2.23). Поэтому, кроме равенства (2.25), условие (2.23) требует выполнения еще следующих двух соотношений

$$(K_1 + K_3)_{z=0} = 2K_1\big|_{z=0} = -\frac{1}{\mu\pi}f(t) \quad \text{и} \quad K_2\big|_{z=0} = 0. \tag{2.26}$$

Приведенных пояснений, по-видимому, уже достаточно, чтобы в рассматриваемых далее задачах на распространение волн граничные условия (в их первичной интегральной форме) сводить к соответствующим соотношениям между функциональными коэффициентами подинтегральных выражений.

Здесь остается лишь подчеркнуть, что во всем предыдущем речь шла о слоях среды вообще, без указания конкретных их индексов ν. Поэтому при ссылках на результаты п. 1–3 требуемые индексы ν слоев среды приходится мысленно приписывать величинам, относящимся к рассматриваемому конкретному слою.

4. В соответствии с §1, первой следует рассмотреть задачу на возбуждение касательным сосредоточенным источником вида (2.1) двухслойной среды, состоящей из упругих (тонкого) слоя $0 < z < h$, $(\nu = 1)$ и полупространства $z > h$, $(\nu = 2)$, находящихся в жестком контакте друг с другом и характеризуемых параметрами из (1.1). Предполагается, что при $t < 0$ в среде царил покой, а при $t = 0$ к свободной границе слоя $\nu = 1$ прикладывается воздействие, вызывающее (поверхностное) напряжение

$$\vec{t}_z^{(1)}\big|_{z=0} = -\frac{\delta(r)}{\pi r}\,\vec{i} f(t), \tag{2.27}$$

где функция $f(t)$ задана интегралом (1.4).

Требуется определить потенциалы поля смещений $\vec{u}^{(\nu)}(r,\theta,z,t)$ в слоях ($\nu = 1,2$) среды при дополнительном условии, что на границе $z = h$ раздела сред выполняются соотношения

$$(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}\big|_{z=h} = 0, \quad (\vec{t}_z^{(1)} - \vec{t}_z^{(2)})\big|_{z=h} = 0. \tag{2.28}$$

В соответствии с п. 1 и 2, потенциалы поля смещения $\vec{u}^{(\nu)}$ в средах строятся в форме интегральных представлений (2.11), т.е.

$$\begin{gathered}\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_{2\nu}\end{matrix}\right\} = \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos\theta\Phi_\nu(z,t,k)\\ \sin\theta\Psi_{2\nu}(z,t,k)\end{matrix}\right\} J_1(kr)k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,\\ \Psi_{1\nu} = -\int\limits_0^\infty \Psi_{1\nu}(z,t,k)J_0(kr)k\tilde{\Phi}_0(k\varepsilon)dk,\end{gathered} \tag{2.29}$$

которые удовлетворяют уравнениям движения среды, если функции Φ_ν, $\Psi_{2\nu}$ и $\Psi_{1\nu}$ удовлетворяют уравнениям (2.12) в соответствующих средах ν. Общий интеграл таких уравнений может быть представлен в форме интегралов Меллина

$$\begin{gathered}\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_{q\nu}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}[X_\nu^+ e^{(z-H)\tilde{\alpha}_\nu} + X_\nu^- e^{-(z-H)\tilde{\alpha}_\nu}]\\ [Y_{q\nu}^+ e^{(z-H)\tilde{\beta}_\nu} + Y_{q\nu}^- e^{-(z-H)\tilde{\beta}_\nu}]\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}ds,\\ \left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_{q2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-(z-H-h)\tilde{\alpha}_2}\\ Y_{q2}^- e^{-(z-H-h)\tilde{\beta}_2}\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}ds,\ (q=1,2),\end{gathered} \tag{2.30}$$

в которых радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$ и $\tilde{\beta}_\nu$ определяются по (1.11) величина $F(s)$ – является подинтегральной функцией из представления (1.4) функции $f(t)$ интегралом Меллина, причем в задаче из п. 4 полагается $\nu = 1$ и $H = 0$. {Формулы (2.30) применяются также и в задаче из п. 6, где оказывается $\nu = 0$ и 1, а $H \gg h$}.

Коэффициенты $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ из (2.30) должны определяться из учета граничных условий (2.27) и (2.28). Последние же сначала сводятся, как следует из заключительной части п. 3, к временным соотношениям. Во-первых, к соотношениям (2.25) и (2.26), в выражениях T, K_1 и K_2 из (2.16) которых нужно приписать (снизу) индекс $\nu = 1$ к величине μ, а также к функциям Φ, Ψ_1 и Ψ_2. И, во-вторых, к соотношениям непрерывности (2.22) при $z = h$ выражений из (2.14) и (2.16)

$$\begin{aligned} &Z_1 = Z_2, \quad \varkappa_{11} = \varkappa_{12}, \quad \varkappa_{21} = \varkappa_{22} \\ &T_1 = T_2, \quad K_{11} = K_{12}, \quad K_{21} = K_{22}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

к величинам μ, Φ, Ψ_1 и Ψ_2, в которых следует приписать соответствующие индексы $\nu = 1$ и 2. Затем же в соотношениях (2.25), (2.26) и (2.31) следует перейти от (временных) функций $f(t)$, Φ_ν, $\Psi_{1\nu}$ и $\Psi_{2\nu}$ к их интегральным представлениям (1.4) и (2.30), и приравнять соответствующие подинтегральные выражения.

В результате, как нетрудно убедиться, учет граничных условий сведется к следующей системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} 2\mu_1 k\tilde{\alpha}_1(X_1^+ - X_1^-) + \mu_1\tilde{g}_1(Y_{11}^+ + Y_{11}^-) = -1, \\ \mu_1\tilde{g}_1(X_1^+ + X_1^-) + 2\mu_1 k\tilde{\beta}_1(Y_{11}^+ - Y_{11}^-) = 0, \\ k(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} + X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + \tilde{\beta}_1(Y_{11}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} - Y_{11}^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) = kX_2^- - \tilde{\beta}_2 Y_{12}^-, \\ \tilde{\alpha}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} - X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + k(Y_{11}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_{11}^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) = -\tilde{\alpha}_2 X_2^- + kY_{12}^-, \\ \mu_1[2k\tilde{\alpha}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} - X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + \tilde{g}_1(Y_{11}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_{11}^- e^{-h\tilde{\beta}_1})] = \\ = \mu_2[-2k\tilde{\alpha}_2 X_2^- + \tilde{g}_2 Y_{12}^-], \end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\begin{gathered} \mu_1[g_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} + X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) + 2k\tilde{\beta}_1(Y_{11}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} - Y_{11}^- e^{-h\tilde{\beta}_1})] = \\ = \mu_2[\tilde{g}_2 X_2^- - 2k\tilde{\beta}_2 Y_{12}^-], \\ 2\mu_1\tilde{\alpha}_1(X_1^+ - X_1^-) - \mu_1\tilde{\beta}_1(Y_{21}^+ - Y_{21}^-) + \mu_1 k(Y_{11}^+ + Y_{11}^-) = 0, \\ \mu_1[2\tilde{\alpha}_1(X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} - X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1}) - \tilde{\beta}_1(Y_{21}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} - Y_{21}^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) + \\ + k(Y_{11}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_{11}^- e^{-h\tilde{\beta}_1})] = \mu_2[-2\tilde{\alpha}_2 X_2^- + \tilde{\beta}_2 Y_{22}^- + kY_{12}^-], \end{gathered}$$

$$X_1^+ e^{h\tilde{\alpha}_1} + X_1^- e^{-h\tilde{\alpha}_1} - (Y_{21}^+ e^{h\tilde{\beta}_1} + Y_{21}^- e^{-h\tilde{\beta}_1}) = X_2^- - Y_{22}^-.$$

Заметим, что уравнения из (2.32) выписаны в определенном порядке их следования. (При этом уравнения: 1-ое, 2-ое и 7-ое учитывают условия (2.27), а остальные – условия (2.28)). Выбранная последовательность учета уравнений (2.32), находящая свое отражение в структуре следующей далее матрицы (2.38) рабочей системы уравнений (2.37) (записанной в форме метода Лемба), оказывается наиболее удобной для описания взаимодействия волн типа SV и волн типа SH, возбуждающихся в среде при воздействии (2.27).

5. Система уравнений (2.32) однозначно разрешима, причем подстановка ее решения $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ в формулы (2.30) приводит к точному решению задачи из п. 4 в первичном представлении вида (2.29) и (2.30) метода контурных интегралов. Однако количественные исследования решений задач интерференционного типа много удобнее производить при представлении решений в форме метода Лемба.

Переход к такой форме представления потенциалов из (2.29), (2.30) производится в точности так же, как указано в п. 3 §1. {С той только формальной разницей, что теперь роль функции Φ_ν (функции Ψ_ν) из п. 3 §1 играет, очевидно, функция $\Psi_{1\nu}$ (играют функции Φ_ν и $\Psi_{2\nu}$) из (2.29) и (2.30)}. Поэтому здесь можно прямо воспользоваться результатами п. 3 §1 и писать:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_\nu \\ \psi_{2\nu} \end{matrix}\right\} = \operatorname{Re} \frac{v_{s1}}{\pi h^2} \int_0^\infty \left.\begin{matrix} \cos\theta \Phi_\nu(\tilde{z}, \tilde{r}, \varkappa) \\ \sin\theta \Psi_{2\nu}(\tilde{z}, \tilde{r}, \varkappa) \end{matrix}\right\} F\left(i\frac{v_{s1}}{h}\varkappa\right) \varkappa e^{i\varkappa\tau} d\varkappa,$$
$$\psi_{1\nu} = \operatorname{Re} \frac{v_{s1}}{\pi h^2} \int_0^\infty \Psi_{1\nu}(\tilde{z}, \tilde{r}, \varkappa) F\left(i\frac{v_{s1}}{h}\varkappa\right) \varkappa e^{i\varkappa\tau} d\varkappa, \tag{2.33}$$

$$\left.\begin{matrix} \Phi_\nu \\ \Psi_{2\nu} \\ \Psi_{1\nu} \end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h} \oint_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} [X_\nu^+ e^{\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\alpha_\nu} + X_\nu^- e^{-\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\alpha_\nu}] H_1^{(2)}(\varkappa\tilde{r}\zeta) \\ [Y_{2\nu}^+ e^{\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\beta_\nu} + Y_{2\nu}^- e^{-\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\beta_\nu}] H_1^{(2)}(\varkappa\tilde{r}\zeta) \\ -[Y_{1\nu}^+ e^{\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\beta_\nu} + Y_{1\nu}^- e^{-\varkappa(\tilde{z}-\tilde{H})\beta_\nu}] H_0^{(2)}(\varkappa\tilde{r}\zeta) \end{matrix}\right\} \zeta\, d\zeta, \tag{2.34}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_2\\ \\ \Psi_{22}\\ \\ \Psi_{12}\end{array}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\oint\limits_{(\lambda)} \left.\begin{array}{c} X_2^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\alpha_2}.H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\\ \\ Y_{22}^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\beta_2}.H_1^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\\ \\ -Y_{12}^- e^{-\varkappa(\tilde z-\tilde H-1)\beta_2}.H_0^{(2)}(\varkappa\tilde r\zeta)\end{array}\right\}\zeta\, d\zeta. \tag{2.35}$$

Такие представления применимы, в равной мере, и в задаче для трехслойной среды из п. 6. Однако в случае двухслойной среды из п. 4 в формулах (2.33) индекс ν принимает значения $\nu = 1$ и 2, а в формулах (2.34) – значение $\nu = 1$.

В формулах (2.33) и (2.34) уже совершен переход к безразмерным переменным

$$\tau = \frac{v_{s1}}{h}\,t, \quad \tilde r = \frac{r}{h}, \quad \tilde z = \frac{z}{h}, \quad \tilde H = \frac{H}{h} \tag{2.36}$$

и использованы обозначения из (1.15). При этом путь интегрирования λ (в них) определяется в точности так же, как и в формулах (1.21).

В задаче из п. 4 в (2.34) следует полагать $\nu = 1$ и $\tilde H = 0$, а под величинами $X_\nu^\pm$, $Y_{1\nu}^\pm$ и $Y_{2\nu}^\pm$ понимать решение системы алгебраических уравнений, получаемых из системы (2.32) переходом к лембовским переменным интегрирования по (1.13).

В матричной форме такая система определяется равенством

$$(L^{(2)}) \times (X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-, Y_{21}^-, Y_{21}^+, Y_{22}^-)^+ =$$

$$= \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)^+, \tag{2.37}$$

где основная матрица $(L^{(2)})$ представлена таблицей (2.38) (см. стр. 34), а вместо матриц-столбцов (искомых коэффициентов и значений их правой части) использованы, ради удобства, транспонированные матрицы-строки.

$$(L^{(2)}) =$$

$$
= \left[\begin{array}{cccc}
-2\mu_1\zeta\alpha_1 1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 \\
\mu_1 g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 \\
\zeta e_1^- & -\beta_1 e_2^- & \zeta e_1^+ & \beta_1 e_2^+ \\
-\alpha_1 e_2^- & \zeta e_2^- & \alpha_1 e_1^+ & \zeta e_2^+ \\
-2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^- & \mu_1 g_1 e_2^- & & \\
\mu_1 g_1 e_1^- & -2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^- & -\mu_1 g_1 e_1^+ & 2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^+ \\
-2\mu_1\alpha_1 & \mu_1\zeta & 2\mu_1\alpha_1 & \mu_1\zeta \\
-2\mu_1\alpha_1 e_1^- & \mu_1\zeta e_2^- & 2\mu_1\alpha_1 e_1^+ & \mu_1\zeta e_2^+ \\
e_1^- & 0 & e_1^+ & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\zeta & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & -\zeta & 0 & 0 & 0 \\
(\,2\mu_2\zeta\alpha_2 & -\mu_2 g_2 & 0 & 0 & 0 \\
-\mu_2 g_2 & 2\mu_2\zeta\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu_1\beta_1 & -\mu_1\beta_1 & 0 \\
2\mu_2\alpha_2 & -\mu_2\zeta & \mu_1\beta_1 e_2^- & -\mu_1\beta_1 e_2^+ & -\mu_2\beta_2 \\
-1 & 0 & -e_2^- & -e_2^+ & 1
\end{array}\right] \qquad (2.38)
$$

Здесь использованы обозначения из $(1.18')$: $e_1^{\pm} = e^{\pm\varkappa\alpha_1}$, $e_2^{\pm} = e^{\pm\varkappa\beta_1}$.

Из структуры матрицы (2.38) ясно, что система (2.37) расщепляется на две системы уравнений. Во-первых, на независимую систему шести уравнений типа SV

$$
(\Delta_2) \times (X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-)^+ = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0\right)^+, \qquad (2.39)
$$

отличающуюся от системы уравнений из (1.17) лишь правой частью (что является следствием иной теперь поляризации внешнего воздействия над средой). И, во-вторых, – на последние три уравнения из (2.37), имеющие структуру неоднородной системы алгебраических уравнений для трех функциональных коэффициентов $Y_{21}^{\pm}$ и Y_{22}^-, определяющих по (2.33) и (2.34) потенциалы $\psi_{2\nu}$ поля смещений части SH волнового поля. Такую систему здесь можно выписать в виде

$$
(D_2) \times (Y_2) \equiv
$$

$$
\equiv \begin{pmatrix} \mu_1\beta_1, & -\mu_1\beta_1, & 0 \\ \mu_1\beta_1 e^{-b}, & -\mu_1\beta_1 e^{b}, & -\mu_2\beta_2 \\ -e^{-b}, & -e^{b}, & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{21}^- \\ Y_{21}^+ \\ Y_{22}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.40)
$$

при следующих значениях величин l_q из правой ее части

$$
\begin{aligned}
&l_1 = 2\mu_1\alpha_1(X_1^+ - X_1^-) + \mu_1\zeta(Y_{11}^+ + Y_{11}^-),\\
&l_2 = 2\mu_1\alpha_1(X_1^+e^a - X_1^-e^{-a}) + \mu_1\zeta(Y_{11}^+e^b + Y_{11}^-e^{-b}) +\\
&\quad + 2\mu_2\alpha_2X_2^- - \mu_2\zeta Y_{12}^-,\\
&l_3 = X_1^+e^a + X_1^-e^{-a} - X_2^-.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Левая часть такой системы в точности совпадает с левой частью системы уравнений (1.53) для чистых волн типа SH, возбуждаемых в двухслойной среде каноническим вращательным воздействием. Элементы же l_q из правой ее части образованы теперь линейными комбинациями функциональных коэффициентов

$$X_1 \equiv X_1^-,\ X_2 \equiv Y_{11}^-,\ X_3 \equiv X_1^+,\ X_4 \equiv Y_{11}^+,\ X_5 \equiv X_2^-,\ X_6 \equiv Y_{12}^- \tag{2.42}$$

из (2.34) потенциалов φ_ν и $\psi_{1\nu}$ волн типа SV, определяемых из независимой системы уравнений (2.39). Таким образом оказывается, что (сопутствующее) поле типа SH в среде, определяемое потенциалами $\psi_{2\nu}$ из (2.33) и (2.34) через посредство решений

$$Y_1 \equiv Y_{21}^-,\ Y_2 \equiv Y_{21}^+,\ Y_3 \equiv Y_{22}^- \tag{2.43}$$

системы уравнений (2.40), порождается независимым полем (потенциалов) типа SV, возбудившихся уже в среде, составляющие которого из (2.42) образуют правую часть (2.41) системы уравнений (2.40).

Заметим, что указанное обстоятельство находит свое отражение и в общей структуре волнового поля. Действительно, как решения системы уравнений (2.39), функциональные коэффициенты (2.42) потенциалов φ_ν, $\psi_{1\nu}$ волн типа SV, имеют структуру

$$X_k = \frac{a_k(\zeta,\varkappa)}{\Delta_2(\zeta,\varkappa)} \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \tag{2.44}$$

вытекающую из теоремы Крамера. Такие коэффициенты, кроме точек ветвления радикалов, имеют еще особенности – полюсы (обычно, 1-го порядка) в счетном множестве корней дисперсионного уравнения

$$\Delta_2(\zeta,\varkappa) = 0 \tag{2.45}$$

системы уравнений (2.39), что естественно сказывается и на подходах к вычислению интегралов из (2.34), отвечающих функциям

Φ_ν и $\Psi_{1\nu}$. Структура же функциональных коэффициентов (2.43) волн типа SH, удовлетворяющих системе уравнений (2.40), оказывается более сложной. Согласно Крамеру коэффициенты представляются линейными формами вида

$$Y_p = \frac{1}{D_2}\sum_{k=1}^{6} b_{pk}X_k, \quad (p=1,2,3) \tag{2.46}$$

через функциональные коэффициенты X_k из (2.42), и (2.44). Вследствие этого такие коэффициенты имеют полюсы не только в корнях дисперсионного уравнения

$$D_2(\zeta,\varkappa) \equiv -2\mu_1\beta_1[\mu_1\beta_1 \mathrm{sh}\varkappa\beta_1 + \mu_2\beta_2 \mathrm{ch}\varkappa\beta_1] = 0, \tag{2.47}$$

отвечающего системе уравнений (2.40), но также и во всех корнях дисперсионных уравнений (2.45) для волн типа SV.

Что же касается численного изучения волновых полей, то здесь следует считаться с двумя возможностями. Во-первых, все функциональные коэффициенты, входящие в систему уравнений (2.37), могут быть определены в результате решения этой системы по общим алгоритмам, как и в случае плоской задачи для двухслойной среды из §1. Разница состоит только в том, что теперь, вместо алгебраической системы уравнений 6-го порядка, приходится рассматривать систему уравнений (2.37) 9-го порядка с детерминантом, равным произведению детерминантов систем (2.39) и (2.40).

Во-вторых, вследствие расщепления системы (2.37) на указанные две системы, построение ее решения можно базировать на последовательном (раздельном) рассмотрении систем уравнением (2.39) и (2.40). При таком подходе 1-ый шаг в решении задачи, связанный с системой (2.39), несомненно, оказывается более простым. Он определяет часть SV суммарного поля, причем продольная составляющая этого поля в точности совпадает с продольной частью суммарного волнового поля (и потому она имеет физический смысл). К сожалению поперечная часть поля SV еще не имеет самостоятельного физического смысла (так как она не отделима экспериментально от поперечного поля волн типа SH, которое предстоит еще определить). Для определения недостающей еще части (SH) поперечного поля как раз и приходится строить решение неоднородного уравнения (2.40).

Здесь уместно еще подчеркнуть, что, независимо от всего прочего, из факта расщепления системы уравнений (2.37) на системы уравнений (2.39) и (2.40) следует, что все функциональные коэффициенты SV из (2.42) не зависят от корней дисперсионного уравнения (2.47). Это полезно иметь в виду далее при оценке волновых полей методами контурного интегрирования.

6. Обращаясь к задаче из п. 4 §1 на возбуждение касательным воздействием (2.1) (приложенным в точке O $(r = 0,\ z = 0)$ в момент времени $t = 0$) интерференционных волн в трехслойной упругой среде, состоящей из (тонкого) слоя $H < z < H + h$, $(\nu = 1)$, находящегося в жестком контакте с полупространствами $z < H$, $(\nu = 0)$ и $z > H + h$, $(\nu = 2)$, начинать приходится с определения первичных полей, порождаемых источником в безграничной упругой среде.

Как известно, (см. [3, §13]) подобная задача может быть сведена к контактной задаче для двух одинаковых полупространств: $z > 0$, $(\nu = 0)$ и $z < 0$, $(\nu = 1)$, характеризуемых тождественными параметрами μ_0, v_{p0} и v_{s0}: “Определить в полупространствах $\nu = 0$ и $\nu = 1$ потенциалы полей смещений так, чтобы: 1) они удовлетворяли уравнениям движения. 2) В точках плоскости $z = 0$ – удовлетворяли соотношениям контакта

$$\vec{u}_0 - \vec{u}_1 = 0, \quad \vec{t}_z^{(0)} - \vec{t}_z^{(-1)} = -\frac{\delta(r)}{\pi r} f(t)\,\vec{i} \tag{2.48}$$

при функции $f(t)$ из (1.4), подчиненной условию $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$. И 3), чтобы они удовлетворяли нулевым начальным данным.”

В соответствии с результатами п. 2 и 3, а также – с представлениями воздействия в форме (2.24) и (1.4), потенциалы искомого поля следует представить в виде интегралов

$$\left.\begin{matrix} \varphi_\nu \\ \psi_{2\nu} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left.\begin{matrix} \cos\theta\Phi_\nu(z,t,k) \\ \sin\theta\Psi_{2\nu}(z,t,k) \end{matrix}\right\} kJ_1(kr)\Phi_0(kr)dk \tag{2.49}$$

$$\psi_{1\nu} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Psi_{1\nu}(z,t,k)kJ_0(kr)\Phi_0(kr)dk, \quad (\nu = 0, -1).$$

При этом, если положить

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_{q\nu}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left.\begin{matrix}X_\nu(z,k,s)\\ Y_{q\nu}(z,k,s)\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}ds, \tag{2.50}$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= \overset{0}{X}{}_0^- e^{-z\tilde{\alpha}_0}, \quad X_1 = \overset{0}{X}{}_1^+ e^{z\tilde{\alpha}_0},\\ Y_{q0} &= \overset{0}{Y}{}_{q0}^- e^{-z\tilde{\beta}_0}, \quad Y_{q1} = \overset{0}{Y}{}_{q1}^+ e^{z\tilde{\beta}_0}, \ (q=1,2), \end{aligned} \tag{2.51}$$

причем $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\beta}_0$ определены по (1.10) и (1.11), то уравнения движения среды и нулевые начальные условия окажутся выполненными. Неизвестные же коэффициенты $\overset{0}{X}{}_\nu^\pm$ и $\overset{0}{Y}{}_{q\nu}^\pm$ из (2.51) должны определяться из граничных условий (2.48).

Первая группа таких условий выражает требование непрерывности при переходе через фиктивную границу $z = 0$ (раздела) кинематических величин

$$Z_0 = Z_1, \quad \varkappa_q^{(0)} = \varkappa_q^{(1)}, \quad (q=1,2), \tag{2.52}$$

из (2.14), относящихся к полупространствам $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Вторая же группа – сводится к непрерывности динамических величин

$$T_0 = T_1, \quad K_2^{(0)} = K_2^{(1)} \tag{2.53}$$

из (2.16) (в которых параметры $\mu_0 = \mu_1$ одинаковы), а также – к “силовому соотношению”

$$[K_1^{(0)} + K_3^{(0)} - (K_1^{(1)} + K_3^{(1)})]_{z=0} = -\frac{1}{\pi}f(t),$$

записывающемуся в виде

$$[K_1^{(0)} - K_1^{(1)}]_{z=0} = -\frac{1}{2\pi}f(t) \tag{2.54}$$

вследствие (2.17) и второго равенства из (2.53), учитывающего факт приложения воздействия из (2.48) к фиктивной границе $z = 0$ раздела полупространств. При этом, в соответствии с (2.49) и (2.50), следует полагать, что в перечисленные граничные условия (2.52)–(2.54) вместо функций Φ_ν, $\Psi_{q\nu}$ и $f(t)$ подставлены их представления (2.50) и (1.4) интегралами Меллина.

Производя указанную подстановку и выполняя соответствующие выкладки, для коэффициентов $\overset{0}{X}{}_0^-$, $\overset{0}{Y}{}_{q0}^-$, $\overset{0}{X}{}_1^+$ и $\overset{0}{Y}{}_{q1}^+$ из (2.51) получаются следующие значения

$$\overset{0}{X}{}_0^- = \overset{0}{X}{}_1^+ = -\frac{k}{\tilde{\alpha}_0}\overset{0}{Y}{}_{10}^-; \quad \overset{0}{Y}{}_{20}^- = \overset{0}{Y}{}_{21}^+ = -\frac{k}{\tilde{\beta}_0}\overset{0}{Y}{}_{10}^-,$$

$$\overset{0}{Y}{}_{10}^- = -\overset{0}{Y}{}_{11}^+ = \frac{v_{s0}^2}{4\pi\mu_0 s^2}. \tag{2.55}$$

Теперь уже можно перейти и к решению интерференционной задачи из п. 6 для трехслойной упругой среды.

7. Потенциалы поля смещений в слоях $\nu = 0, 1, 2$ стрехслойной среды из п. 6 целесообразно строить в форме интегралов (2.29) и (2.30), при условии, что в выражении (2.30) индекс ν принимает теперь значения $\nu = 0$ и $\nu = 1$. При этом роль источника (2.1) в процессе возбуждения такого поля окажется учтенной, если под значениями коэффициентов X_0^-, и Y_0^- из подинтегральных функций представлений (2.30) при $\nu = 0$ понимать выражения из (2.51)

$$X_0^- = \overset{\circ}{X}{}_0^- e^{-H\tilde{\alpha}_0}, \quad Y_{q0}^- = \overset{\circ}{Y}{}_{q0}^- e^{-H\tilde{\beta}_0}, \quad (q = 1, 2) \tag{2.56}$$

при значения $\overset{\circ}{X}{}_0^-$ и $\overset{\circ}{Y}{}_{q0}^-$ из (2.55).

Остальные же двенадцать функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_{q\nu}^\pm$ из (2.30) должны определяться из граничных условий при $z = H$ и $z = H + h$, выражающих требование жесткости контакта слоев рассматриваемой среды. В соответствии с (2.22) (при учете тождеств типа (2.17)) это сводится к требованию непрерывности выражений

$$Z_\nu \equiv \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial z} + k\Psi_{1\nu}; \quad \varkappa_1 \equiv k\Phi_\nu + \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial z}; \quad \varkappa_2 \equiv k(\Phi_\nu - \Psi_{2\nu}),$$

$$T_\nu \equiv \frac{\lambda_\nu}{v_{p\nu}^2}\frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial t^2} + 2\mu_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial z^2} + 2\mu_\nu k \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial z},$$

$$K_1^{(\nu)} \equiv \mu_\nu \left(2k\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial z} + k^2\Psi_{1\nu} + \frac{\partial^2 \Psi_{1\nu}}{\partial z^2}\right), \tag{2.57}$$

$$K_2^{(\nu)} \equiv \mu_\nu \left(2k\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial z} + k^2\Psi_{1\nu} - k\frac{\partial \Psi_{2\nu}}{\partial z}\right)$$

при переходе через границы раздела $z = H$ и $z = H + h$ слоев среды.

Подставляя в такие условия выражения Φ_ν, $\Psi_{1\nu}$ и $\Psi_{2\nu}$ из (2.30) (и пользуясь тривиальным свойством интегралов Меллина) получаем для искомых функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_{1\nu}^\pm$ и $Y_{2\nu}^\pm$ из (2.30) систему уравнений типа (2.32). Такую систему целесообразно сразу же выписать в представлении метода Лемба, для чего следует перейти в ней к лембовским переменным интегрирования ω и ζ по формулам (1.12). Тогда указанная система представится в матричной форме следующим образом

$$(L^{(3)}) \times (X) = (b). \tag{2.58}$$

Здесь (X) и (b) – двенадцатирядные матрицы-столбцы

$$(X) \equiv (X_0^+, Y_{10}^+, X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-, Y_{20}^+, Y_{21}^-, Y_{21}^+, Y_{22}^-)^+,$$

$$(b) \equiv (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, 0, 0, 0, b_9, b_{10}, 0, 0)^+, \tag{2.59}$$

выписанные, ради удобства, в виде транспонированных матриц-строк. При этом элементы матрицы (b) определены равенствами

$$b_1 = \zeta X_0^- - \beta_0 Y_{10}^-; \quad b_2 = -\alpha_0 X_0^- + \zeta Y_{10}^-,$$

$$b_3 = \mu_0[-2\zeta\alpha_0 X_0^- + g_0 Y_{10}^-]; \; b_4 = \mu_0[g_0 X_0^- - 2\zeta\beta_0 Y_{10}^-], \tag{2.60}$$

$$b_9 = -X_0^- + Y_{20}^-; \; b_{10} = \mu_0[2\alpha_0 X_0^- - \zeta Y_{10}^- - \beta_0 Y_{20}^-],$$

в которых величины X_0^- и Y_{q0}^- имеют значения из (2.56). Сама же матрица $(L^{(3)})$ рассматриваемой трехслойной среды определяется таблицей из (2.61).

Одновременно с переходом к форме метода Лемба в системе уравнений (2.58)–(2.61) для коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_{q\nu}^\pm$ из (2.30), следует производить переход к форме метода Лемба и в представлениях (2.29), (2.30) для потенциалов поля смещений в трехслойной среде. Такой переход производится в точности так же, как и в случае двухслойной среды из п. 4, и он приводит к таким же окончательным формулам (2.33), (2.34), в которых только индекс ν принимает теперь значения $\nu = 0$, 1 и 2, а $\tilde{z}$ заменено на

$(\tilde{z}-\tilde{H})$. На пояснениях здесь, по-видимому, нет необходимости задерживаться.

$$(L^{(3)}) =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}
-\zeta & \beta_0 & \zeta & -\beta_1 & \zeta & \beta_1 \\
-\alpha_0 & -\zeta & -\alpha_1 & \zeta & \alpha_1 & \zeta \\
-2\mu\zeta\alpha_0 & -\mu_0 g_0 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 & \mu_1 2\zeta\alpha_1 & \mu_1 g_1 \\
-\mu_0 g_0 & -2\mu_0\zeta\beta_0 & \mu_1 g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 \\
0 & 0 & \zeta e_1^- & -\beta_1 e_2^- & \zeta e_1^+ & \beta_1 e_2^+ \\
0 & 0 & -\alpha_1 e_1^- & \zeta e_2^- & \alpha_1 e_1^+ & \zeta e_2^+ \\
0 & 0 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^- & \mu_1 g_1 e_2^- & 2\mu_1\zeta\alpha_1 e_1^+ & \mu_1 g_1 e_2^+ \\
0 & 0 & \mu_1 g_1 e_1^- & -2\mu_1\zeta\beta_1 e_2^- & \mu_1 g_1 e_1^+ & 2\mu_2\zeta\beta_1 e_2^+ \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\mu_0 2\zeta\alpha_0 & \mu_0\zeta^2 & 2\mu_1\alpha_1 & -\mu_1\zeta & & \\
0 & 0 & e_1^- & 0 & e_1^+ & 0 \\
0 & 0 & -2\mu_1\alpha_1 e_1^- & -\mu_1\zeta e_2^- & 2\mu_1\alpha_1 e_1^+ & \mu_1\zeta e_2^+
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\zeta & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & -\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\mu_2\zeta\alpha_2 & -\mu_2 g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mu_2 g_2 & 2\mu_2\zeta\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\mu_0\beta_0 & -\mu_1\beta_1 & \mu_1\beta_1 & 0 \\
-1 & & 0 & -e_2^- & -e_2^+ & 1 \\
2\mu_2\alpha_2 & -\mu_2\zeta & 0 & \mu_1\beta_1 e_2^- & -\mu_1\beta_1 e_2^+ & -\mu_2\beta_2
\end{array}\right] \qquad (2.61)$$

Обозначено: $e^{\pm} = e_1^{\pm\varkappa\alpha_1}$, $e^{\pm} = e_2^{\pm\varkappa\beta_1}$.

8. Как и в случае (2.37) двухслойной среды, система уравнений (2.58) расщепляется на две подсистемы. Во-первых, на независимую систему уравнений типа SV

$$(\Delta_3)\times(X_0^+, Y_{10}^+, X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-)^+ = (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, 0, 0, 0)^+, \qquad (2.62)$$

в правую часть которой входят первые четыре величины b_p из (2.60), а восьмирядная квадратная матрица (Δ_3) совпадает с “главным минором” матрицы (2.61). И, во-вторых, на связанную с нею систему уравнений типа SH

$$(D_3)\times(Y) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -1, & 1, & 1, & 0 \\ -\mu_0\beta_0, & -\mu_1\alpha_1, & \mu_1\beta_1, & 0 \\ 0, & -e^{-b}, & -e^{b}, & 1 \\ 0, & \mu_1\beta_1 e^{-b}, & -\mu_1\beta_1 e^{b}, & -\mu_2\beta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

в которой обозначено

$$Y_1 \equiv Y_{21}^{+},\ Y_2 \equiv Y_{21}^{-},\ Y_3 \equiv Y_{21}^{+},\ Y_4 \equiv Y_{22}^{-}, \tag{2.64}$$

а элементы c_p матрицы-столбца из правой части имеют значения

$$\begin{aligned} &c_1 = b_9 - X_0^{+} + X_1^{-} + X_1^{+}, \\ &c_2 = b_{10} - 2\mu_0\alpha_0 X_0^{+} - \mu_0\zeta Y_{10}^{+} - 2\mu_1\alpha_1(X_1^{-} - X_1^{+}) + \\ &\quad + \mu_1\zeta(Y_{11}^{-} + Y_{11}^{+}), \\ &c_3 = -e^{-a}X_1^{-} - e^{a}X_1^{+} + X_2^{-}, \\ &c_4 = 2\mu_1\alpha_1(e^{-a}X_1^{-} - e^{a}X_1^{+}) + \mu_1\zeta(e^{-b}Y_{11}^{-} + e^{b}Y_{11}^{+}) - \\ &\quad - 2\mu_2\alpha_2 X_2^{-} + \mu_2\zeta Y_{12}^{-}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

при величинах b_9 и b_{10} из (2.60).

Независимая система уравнений (2.62) (типа SV) в точности совпадает с системой уравнений (1.33) для функциональных коэффициентов $X_\nu^{\pm}$, $Y_{1\nu}^{\pm}$ из (1.35) задачи для трехслойной среды из §1 в плоском или осесимметрическом случаях ее возбуждения. При этом структура ее решения может быть охарактеризована также выражениями типа (2.44), если только под $\Delta_2(\zeta, \varkappa)$ понимать теперь детерминант $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ системы уравнений (2.62) для трехслойной среды (в случае возбуждения ее рассматриваемым касательным воздействием).

Относительно системы уравнений (2.63) для функциональных коэффициентов $Y_{2\nu}^{\pm}$ из (2.64) потенциала $\Psi_{2\nu}$ из (2.33), (2.34), определяющего часть SH возбудившегося волнового поля, можно заметить практически то же, что и относительно системы уравнений (2.40) в случае двухслойной среды. В правую часть такой системы входят значения функциональных коэффициентов

$$\begin{gathered} X_1 \equiv X_0^{+},\ X_2 \equiv Y_{10}^{+},\ X_3 \equiv X_1^{-},\ X_4 \equiv Y_{11}^{-},\ X_5 \equiv X_1^{+}, \\ X_6 \equiv Y_{11}^{+},\ X_7 \equiv X_2^{-},\ X_8 = Y_{12}^{-}, \end{gathered} \tag{2.66}$$

определяемых из системы уравнений (2.62) и имеющих структуру

$$X_k = \frac{a_k(\zeta, \varkappa)}{\Delta_3(\zeta, \varkappa)}, \tag{2.67}$$

вытекающую из теоремы Крамера. Числители $a_k(\zeta, \varkappa)$ здесь – регулярные функции, имеющие точки ветвления радикалов α_ν и β_ν из (1.15). Коэффициенты же X_k из (2.67) имеют еще и полюсы в корнях дисперсионного уравнения

$$\Delta_3(\zeta, \varkappa) = 0 \tag{2.68}$$

системы уравнений (2.62). При оценке интегралов из (2.34), отвечающих коэффициентам X_k из (2.66), (2.67), только такие полюсы и следует принимать во внимание.

При оценке же интегралов (2.34), содержащих функциональные коэффициенты $Y_p \equiv Y_{2\nu}^{\pm}$ из (2.64), приходится учитывать две системы полюсов в корнях дисперсионного уравнения (2.68), а также – в корнях дисперсионного уравнения

$$\begin{aligned} D_3(\zeta, \varkappa) \equiv 2\{\mu_1\beta_1(\mu_2\beta_2 + \mu_0\beta_0)\mathrm{ch}\varkappa\beta_1 + \\ + (\mu_2\beta_2\mu_0\beta_0 + \mu_1^2\beta_1^2)\mathrm{sh}\varkappa\beta_1\} = 0 \end{aligned} \tag{2.69}$$

системы уравнений (2.63) “типа SH”. Последнее является следствием того обстоятельства, что решение системы уравнений (2.63) представляется (по Крамеру) выражениями вида (2.46), т.е.

$$Y_p = \frac{1}{D_3(\zeta, \varkappa)} \sum_{k=1}^{8} d_{pk} X_k, \quad (p = 1, 2, 3, 4), \tag{2.70}$$

через функциональные коэффициенты из (2.66), (2.67), определяющие потенциалы φ_ν и $\psi_{1\nu}$ волнового поля в рассматриваемой трехслойной среде.

§3. Об аналитико-алгоритмическом подходе к количественному изучению волновых полей в низкочастотной полосе спектра Фурье

Из приведенных в §1 и 2 интерференционных волновых полей случаи плоских воздействий обладают некоторым преимуществом простоты, вследствие содержания под знаком внутренних интегралов экспоненциальных функций вида $\exp(ikx)$ от пространственной переменной x вместо функций Бесселя от kr. Поэтому представляется оправданным излагать основные вехи применяемых подходов к количественным исследованиям интерференционных волновых полей на примере плоских задач для двухслойной и трехслойной сред, возбуждаемых источником типа $\vec{F}_1(x,t)$ из (1.2) и (1.4).

1. В соответствии с этим далее целесообразно полагать, что изучается поле, например, какого-либо из потенциалов, представленное усеченным интегралом Фурье

$$\varphi = \operatorname{Re}\int\limits_0^{\varkappa_0} \Phi(x,z,\varkappa)F\left(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h}\right)e^{i\varkappa\tau}\,d\varkappa, \tag{3.1}$$

типа интегралов из (1.14), (1.35), в котором функция $\Phi(x,z,\varkappa)$ дается лембовским контурным интегралом

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} X_n(\zeta,\varkappa)e^{-\varkappa\psi(\zeta,x)}d\zeta, \tag{3.2}$$

содержащим ту, или иную фазовую функцию, например, отраженной или проходящей p-волны

$$\begin{aligned} &\psi \equiv \psi_0 = ix\zeta + 2H\sqrt{\zeta^2-\gamma_0^2},\\ &\psi \equiv \psi_2 = ix\zeta + H\sqrt{\zeta^2-\gamma_0^2} + H_1\sqrt{\zeta^2-\delta_2^2}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

в которых полагается

$$H \gg 1, \quad \text{или} \quad H_1 \gg 1.$$

Величины τ, x, H и H_1 здесь уже безразмерны, а точки наблюдения поля выбраны на удалениях H и H_1 от слоя.

Что же касается функций $X_n(\zeta,\varkappa)$ из (3.2), то под ними подразумевается соответствующее решение системы уравнений (1.30), переписанной в виде (1.36)–(1.40), учитывающей контактные условия (1.29) для трехслойной среды из п. 5, §1. При обсуждении теоретических проблем такую систему целесообразной записывать в следующем символическом виде

$$\sum_{n=1}^{m} a_{nm}X_m = b_n, \quad (n \leqslant m) \tag{3.4}$$

и учитывать, что ее решение

$$X_n = \frac{\tilde{\Delta}_n(\zeta, \varkappa)}{\Delta_0(\zeta, \varkappa)}, \quad (\Delta_0(\zeta, \varkappa)) \equiv |a_{ik}|, \tag{3.5}$$

в явной (весьма громоздкой) аналитической форме вытекает из теоремы Крамера.

Применение представления (3.5) оказывается удобным при теоретическом обсуждении подходов к количественному изучению волновых полей. Практическое же его применение при вычислениях затруднено громоздкостью (и плохой обозримостью) выражений числителя и знаменателя из (3.5). Поэтому в основу определения подинтегральных функций при численной оценке значений функций $\Phi(x, z, \varkappa)$ в (3.2) обычно выгоднее полагать прямое решение системы уравнений (3.4) численными методами.

Наконец, в качестве верхнего предела интегрирования в (3.1) выбрано число

$$\varkappa_0 = \frac{\omega_0 h}{v_{s1}},$$

определяемое по предельному значению ω_0 угловой частоты, при которой еще выполняется неравенство вида

$$\frac{\lambda_0}{h} = \frac{2\pi v_p}{\omega_0 h} = 2\pi \frac{v_p}{v_s} \varkappa_0^{-1} > 2,$$

где под λ_0 можно понимать доминирующую (или среднюю) длину волны возмущения, падающего на тонкий слой. Приведенное неравенство обеспечивает хотя бы минимальное наложение друг на друга отраженных (границами слоя) волн, распространяющихся в областях среды, характеризуемых не слишком еще большими эпицентральными расстояниями. Оно указывает на целесообразность в (3.1) полагать

$$0 < \varkappa \equiv \frac{\omega h}{v_{s1}} < \varkappa_0 \lesssim 2q\pi, \tag{3.6}$$

где q имеет значение в несколько единиц. В случае же бóльших значений $\varkappa_0$ отраженные волны получают возможность проходить слой практически без интерференции друг с другом. Вследствие этого их оказывается значительно выгоднее оценивать простейшими математическими методами оценки объемных (неинтерференционных) волновых полей (см. [2] и [3]).

Таким образом, ссылки на поле (3.1), (3.2) в последующем следует считать равнозначными ссылками на поле (1.14), (1.35), а ссылки на систему уравнений (3.4) – эквивалентными ссылкам на систему уравнений (1.36)–(1.40).

2. Подинтегральные функции из (3.2) имеют (полюсные) особенности в корнях $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения задачи

$$\Delta_0(\zeta, \varkappa) \equiv |a_{mn}| = 0, \tag{3.7}$$

а также в точках ветвления радикалов

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2} \quad \text{и} \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2} \tag{3.8}$$

с индексами $\nu = 0$ и $\nu = 2$, отвечающих полупространствам $z < H$, $(\nu = 0)$ и $z > H + h$, $(\nu = 2)$.

Наиболее же быстро изменяющейся частью подинтегральной функции из (3.2) оказывается фазовый множитель

$$\exp[-\varkappa\psi(\zeta, x)], \tag{3.9}$$

сильно осциллирующий на контуре λ (что крайне затрудняет оценки поля методами численного интегрирования), если путь интегрирования в (3.2) не совпадает со стационарной линией λ_0 наибыстрейшего подъема фазовой функции $\psi(\zeta, x)$. Поэтому приходится стремиться совместить путь интегрирования λ из (3.2) с упомянутым стационарным контуром, что должно производиться путем непрерывной деформации контура λ в рамках методов контурного интегрирования. Однако последнему могут мешать корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения... Чтобы избежать подобных помех и провести контурное интегрирование рациональным образом необходимо иметь достаточно точное представление о расположении (и о перемещении при изменении параметра $\varkappa > 0$) корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения в рассматриваемой рабочей частотной полосе (3.6).

Вот, мы и приходим к двум основным вспомогательным проблемам, решение которых должно предшествовать непосредственным численным оценкам выбираемых волновых полей вида (3.1) и (3.2). Это, во-первых, проблема о расположении на плоскости (ζ) корней дисперсионного уравнения при изменении параметра $\varkappa$ в рабочей частотной полосе (3.6). И, во-вторых, проблема выбора стационарных контуров λ_0 фазовой функции, в которые исходный путь интегрирования λ из (3.2) должен деформироваться, чтобы избежать сильной осцилляции подинтегрального выражения.

Третья же вспомогательная проблема связана непосредственно со случаями пересечения контуром λ (при его непрерывной деформации) простых полюсов подинтегральной функции в корнях $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения. Такие пересечения требуют, как известно, учета вычетов подинтегрального выражения из (3.2) в корнях дисперсионного уравнения, подвергнувшихся упомянутому пересечению. Если подинтегральная функция определена аналитически в соответствии с теоремой Крамера, как в (3.5), то вычет в полюсе (1-го порядка) в точке $\zeta = \zeta_0$ вычисляется по формуле

$$a_{-1} = \frac{\Delta_1(\zeta_0, \varkappa)}{\Delta_0'(\zeta_0, \varkappa)} e^{-\varkappa\psi(\zeta_0, x)}, \tag{3.10}$$

где

$$\Delta_0'(\zeta, \varkappa) = \left.\frac{\partial \Delta_0(\zeta, \varkappa)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}.$$

Но такой способ вычисления заставляет обращаться к весьма громоздким аналитическим выражениям для числителя и знаменателя в (3.5), обращение к которым желательно было бы свести к минимуму. Поэтому возникает вопрос о том, какими способами можно пытаться вычислять значения требующихся вычетов, если подинтегральная функция в (3.2) вычисляется на основе численного решения системы уравнений (3.4)? Обсуждение подобных вопросов как раз и составляет содержание третьей нашей вспомогательной проблемы.

К детальному количественному обсуждению вопросов, относящихся к перечисленным вспомогательным проблемам, мы обратимся в следующих разделах статьи. Здесь же уместно сделать по их поводу некоторые предварительтельные замечания, а также задержаться на общей идее развиваемого подхода к количественным исследованиям интерференционных полей сейсмологии и сейсморазведки.

3. Что касается подходов к изучению интерференционных явлений в слоистых упругих средах, то в их основу полагается принципиальная низкочастотность волновых полей, участвующих в интерференции.

Как известно, точное решение любой задачи на распространение волн в пачках тонких однородных, плоско-параллельных упругих слоев допускает представление в двух эквивалентных формах. Или – в форме повторных интегралов интерференционного типа (как в §1 и 2), когда подинтегральная функция внутреннего интеграла строится при учете условий контакта для полных волновых полей в слоях (например, как в (1.29)) на всех границах раздела слоев среды. Или же – в форме наложения соответствующего (огромного и все возрастающего во времени) множества кратных волн, при рассмотрении которых граничные условия учитываются для каждого типа кратных волн по отдельности. Описание суммарного волнового поля в таких формах математически эквивалентно, что легко доказывается простым, хотя и весьма громоздким, строгим способом. Однако в физическом отношении такие формы описания далеко не всегда эквивалентны... Так, например, представление отдельной отраженно-преломленной (объемной) волны, распространяющейся в некотором "толстом" слое среды, при помощи интерференционных повторных интегралов (сводящихся к наложению бесконечного множества интерференционных мод), физически – явная бессмыслица, несмотря на математическую эквивалентность (в некотором временном промежутке) такого представления – прямому ее представлению в форме простого неинтерференционного повторного интеграла ...

Вследствие этого следует считать оправданным (и даже необходимым) интерференционные представления волновых полей применять только в таких пространственно-временных областях слоистой среды, в которой отраженно-преломленные волны действительно интерферируют друг с другом. При этом естественно полагать, что факт наличия (или отсутствия) интерференции в рассматриваемых волновых полях может быть установлен качественно на основе примитивно-лучевого (прикидочного) описания процессов прохождения объемными волнами тонких слоев среды.

На основании такого качественного рассмотрения процессов прохождения отраженно-преломленными волнами упругого слоя ($\nu = 1$) задачи для трехслойной среды из §1 выясняется, что в областях умеренных эпицентральных расстояний (не превышающих нескольких удвоенных расстояний источника и приемника от слоя) отраженные волны интерферируют в слое только в случае достаточной низкочастотности падающей на слой первичной волны (или – в случае достаточно малой толщины h слоя), когда выполняются условия типа (3.6). В случае низкоскоростного слоя ($\nu = 1$) условие (3.6) сохраняет смысл и на любых эпицентральных расстояниях. В случае же высокоскоростного, даже совсем не тонкого, слоя (для которого условие (3.6) не выполняется) отраженные границами слоя волны все же начинают интерферировать друг с другом на достаточно больших эпицентральных расстояниях. Однако это можно рассматривать скорее как "исключение из правила".

Таким образом, соотношения типа (3.6), выражающие условие достаточной низкочастотности волновых полей, участвующих в интерференции, является основным критерием необходимости описания волновых процессов в рамках интерференционных повторных интегралов из §1 и 2. Поэтому к количественному изучению таких интегралов следует обращаться только в случае достаточной низкочастотности волнового поля, в смысле условия вида (3.6).

4. Вследствие принципиальной низкочастотности (в смысле изложенного) волновых полей, порождающих интерференционные явления в слоистых средах, возникает четкое представление об относительной гладкости и "медленности изменения" (при изменении аргументов ζ и $\varkappa$) наиболее сложного по конструкции (и наиболее громоздкого) члена вида (3.5) подинтегральной функции интеграла из (3.2). В этом убеждают, в частности, представления знаменателя $\Delta_0(\zeta, \varkappa)$ из (3.5) (являющегося левой частью дисперсионного уравнения задачи), приведенные в п. 2 из §4.

На основании же гладкости таких функций, равно как и их составных частей (см. представления (4.15)–(4.22) из §4) можно утверждать, что наиболее трудоемкая (и громоздкая) операция вычисления производных по ζ от детерминантов, входящих в решения задач рассматриваемого типа, могут выполняться методами прямого численного дифференцирования. Последняя операция, как известно, неустойчива и к ней не рекомендуется прибегать при вычислениях. Однако такое заключение относится к случаям быстроизменяющихся (негладких) функций притом таких, производные которых требуется знать с высокой степенью точности. В интерференционных же задачах обсуждаемого типа высоко-точные значения производных по ζ от детерминантов вовсе и не требуются. Действительно, значение производной

$$\frac{\partial \Delta_0(\zeta, \varkappa)}{\partial \zeta}$$

необходимо знать: во-первых, при вычислении по (3.10) вычета подинтегральной функции из (3.2) в корне уравнения (3.7), пересекаемом контуром λ при деформации его в стационарную линию фазовой функции $\psi(\zeta, x)$. И, во-вторых, при продолжении значения $\zeta = \zeta_0$ корня $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, известного в некоторой начальной точке $\varkappa = \varkappa_0$ его линии l_n корней, вдоль выбранного отрезка этой линии. В обоих случаях здесь достаточно располагать значениями производной лишь с двумя-тремя значащими цифрами. В 1-ом случае – потому, что производная входит в результирующее (стационарное) поле сейсмической задачи, в которой погрешность в 1–2% в решении – несбыточная мечта в сейсмической практике. Во втором же случае особо точное значение производной, очевидно, не требуется, если продолжение значений корня в область $\varkappa > \varkappa_0$ (или $\varkappa < \varkappa_0$) осуществляется численно (например, по Ньютону) в рамках схемы, предусматривающей проверку точности (и требующихся уточнений) в значении корня на каждом шаге его определения, или же – после (короткой) серии таких шагов.

5. Основной и наиболее сложной из вспомогательных проблем является, конечно, изучение корней дисперсионного уравнения (3.7). Левая часть такого уравнения – регулярная функция переменных ζ и $\varkappa$, определенная на шестнадцати-листной римановой поверхности (ζ), построенной на точках ветвления 4-х радикалов α_ν и β_ν из (1.15) или (3.8) при индексах $\nu = 0$ и $\nu = 2$, отвечающих полупространствам 3-х слойной среды из §1. На каждом таком листе корни уравнения (3.7) могут быть подразделены на два класса. На класс особых корней, содержащий конечное (и относительно небольшое) число корней, располагающихся, в основном, на конечных расстояниях от начала координат $\zeta = 0$ и удовлетворяющих при $\varkappa = 0$ алгебраическому уравнению

$$\Delta_0(\zeta, 0) = 0, \tag{3.11}$$

которое получается из уравнения (3.7), если в нем положить $\varkappa = 0$. И – на класс бесконечного (счетного) множества неособых корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varkappa\zeta_n(\varkappa) \to k_n h \neq 0$$

при $\varkappa \to 0$, для которых могут быть получены асимптотические представления при $\varkappa \to 0$ и $\zeta \to \infty$ или некоторые другие представления, позволяющие определять “начальное” положение каждого неособого корня $\zeta = \zeta_n$ при некотором значении $\varkappa = \varkappa_n$. Если же начальные значения $(\zeta_n, \varkappa_n)$ неособых корней, или значения $(\overset{\circ}{\zeta}_k, \varkappa = 0)$ особых корней определены, то последующие значения корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, как функций параметра $\varkappa$, могут быть эффективно определены методом “продолжения по параметру $\varkappa$” значений $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ корня уравнения (3.7). Такой метод уже применялся с успехом в задачах из [4].

Таким образом, в случаях интерференционных волновых полей, дисперсионное уравнение типа (3.7) которых определено на римановой поверхности (ζ), состоящей из небольшого числа (2–4) листов, а особые корни уравнения вида (3.7) которых легко определяются, еще можно применять подход, когда корни дисперсионного уравнения изучаются, как бы “впрок”, еще до учета требований, связанных с деформацией пути интегрирования λ из (3.2) в стационарные контуры фазовой функции из (3.3). Именно так проводилось изучение интерференционных волновых полей в (несложных) задачах из [4]. При этом существенно использовался факт, что неособые корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения задачи (как уравнения – в регулярных функциях) располагаются на плоскости (ζ) дискретно, и потому они так же дискретно, т.е. последовательно по $\varkappa > 0$ (через инетрвалы $\Delta\varkappa \sim \pi$) приходят из бесконечности в области (B), пересекаемые контуром λ из (3.2) при его непрерывной деформации в стационарные пути интегрирования...

В случае же рассматриваемой здесь задачи для трехслойной среды из §1 (отчасти и задачи для двухслойной среды) такой подход практически неоправдан, вследствие трудностей определения особых корней из уравнения (3.11), его громоздкости и крайней неэффективности. При его проведении приходится выполнять множество излишней вычислительной работы, так как лишь малая часть всех корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, располагающихся на различных листах римановой поверхности (ζ), заходит в области (B), пересекаемые контуром (λ) при его непрерывной деформации. При этом предугадать заранее, какие корни дисперсионного уравнения из различных листов римановой поверхности (ζ) заходят в области (B), а какие не заходят, нет другого пути, кроме прямой проверки этого факта. А такая проверка требует прямого контроля, т.е. – слежения за каждым корнем $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, входящим в область (B) и выходящим из нее. При этом ясно, что аналогичный контроль необходим и при любом подходе к проблеме корней, так как для учета вклада в волновое поле от вычетов подинтегральных выражений из (3.2) в корнях дисперсионного уравнения, пересекаемых контуром λ при его деформации, необходимо располагать достоверными сведениями обо всех параметрах корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, попадающих в области (B).

6. Вследствие изложенного, в проблеме количественной оценки волновых полей вида (3.2) возникает идея отказа от полного изучения расположения (и перемещения) на плоскости (ζ) всех корней дисперсионного уравнения, при замене этого вопроса на изучение только таких корней, которые действительно заходят в упоминавшиеся области (B). Реализация такой идеи, естественно, требует, прежде всего, выяснения вопроса об областях (B), в которых нужно знать расположение корней дисперсионного уравнения, а также – вопроса о выборе рационального алгоритма контроля за корнями, посещающими такие области (B). При этом первый вопрос оказывается связанным с выяснением расположения на плоскости (ζ) (точнее, – на основном ее листе и на листах, непосредственно к нему прилегающих) стационарных линий наибыстрейшего возрастания вещественной части функции $\psi(\zeta, x)$ из (3.2) и (3.3), а также – с установлением областей плоскости (ζ), в которой экспоненциальный множитель из (3.9), (3.3) уже допустимо считать исчезающе-малым.

Вопрос же об алгоритме контроля за посещением областей (B) корнями $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, естественно, должен быть связан, так или иначе, с теоремами Коши или Руше о числе корней, или полюсов регулярной функции внутри замкнутого контура l, заданного на комплексной плокости (ζ).

7. В свете изложенного следует несколько пересмотреть и прикладное значение решения второй вспомогательной проблемы из п. 2, связанной с выбором стационарных контуров фазовой функции $\psi(\zeta, x)$ из (3.3) в общей проблеме количественного изучения интерференционных волновых полей вида (3.2), (3.1). Это значение, очевидно, не сводится только к борьбе с "неоправданной осцилляцией" подинтегральной функции из (3.2) на пути интегрирования λ. Сведения о расположении таких контуров на плоскости (ζ), получаемые элементарно уже на начальных стадиях изучения интеграла (3.2), дают четкое представление об областях многолистной плоскости (ζ), которые контуру λ предстоит пересекать при непрерывной его деформации в упоминавшиеся стационарные линии. В результате этого становятся известными и области (B) плоскости (ζ), в которых следует определять корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, необходимые для оценки волновых полей типа (3.1) и (3.2) предлагаемыми методами.

Помимо же указанного стационарные линии фазовой функции $\psi(\zeta, x)$ из (3.2) играют существенную роль и в (правильном) физическом толковании результатов вычисления (оценки) полей (3.1), (3.2).

Действительно, стационарные линии λ_0 фазовых функций вида (3.3) широко применялись (см. [5, 6]) при количественных (асимптотически-высокочастотных) оценках объемных неинтерференционных волновых полей. Такие поля представляются повторными интегралами вида (3.1), (3.2) (или, чаще, подобными же интегралами, но представленными в форме метода контурных интегралов), в которых функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ из внутренних интегралов оказываются алгебраическими функциями, не имеющими множества (интерференционных) полюсов на комплексной плоскости (ζ), и убывающими на бесконечности достаточно быстро. При их изучении ставилось целью получить оценки полей в окрестности волновых фронтов, рассматриваемых, как поверхности разрывов, или квазиразрывов поля, или его производных. А это, как известно, сводится к оценке внутреннего интеграла типа (3.2) при больших значениях частотного параметра $\varkappa$ (асимптотически при $\varkappa \to \infty$). Аналитические приближенные оценки таких интегралов наиболее эффективно производятся в рамках метода перевала, в котором исходный путь интегрирования сводится (непрерывной деформацией) к стационарным линиям фазовой функции из (3.2), вдоль которых фазовой множитель (3.9) не осциллирует, и изменяется по модулю наиболее быстро. Последнее же свойство с дополнительным предположением о большой величине параметра $\varkappa$ как раз и позволяет получать количественные оценки интегралов вида (3.2) аналитическими методами (с точностью, тем более высокой, чем больше величина $\varkappa > 0$). При этом метод перевала приводит не только к оценке интегралов, распространенных по стационарным контурам, но и устанавливает физический смысл таких оценок...

Так вот, заимствование из метода перевала идеи перехода в интерференционных интегралах типа (3.2), (3.5) к интегрированию по стационарным контурам фазовой функции (с целью борьбы с осцилляционными затруднениями при вычислении интегралов численно), автоматически приводит и к заимствованию (точнее – к экстраполяции в низкочастотную область) и физического смысла результатов вычисления таких интегралов. Различия остаются лишь в том, что в (классических) высокочастотных исследованиях оценки интегралов производятся аналитически, а окончательные результаты толкуются физически в терминах, близких к лучевому описанию полей. В случае же низкочастотных интерференционных полей оценки интегралов (по стационарным контурам) приходится выполнять численно, а окончательные результаты определяют поле в неизученной еще области, в которой, в какой-то мере, сохраняются еще некоторые черты лучевого описания волновых полей. В какой мере? это как раз и предстоит выяснять и оценивать ...

Остается отметить, что с оценками неинтерференционных волновых полей в прифронтовых их зонах по методу перевала можно ознакомиться по серии публикаций за 1950–1970 гг. в специальном журнале "Вопросы динамической теории распространения волн", издаваемом Лен. отделением Математического Института АН СССР, а также по книге [3]. Вследствие этого по поводу рационального выбора стационарных контуров фазовых функций из (3.3) достаточно ограничиться здесь лишь небольшим общим замечанием.

8. Стационарная линия $\zeta = \zeta(p)$ наибыстрейшего возрастания аналитической функции $\psi(\zeta, x)$, проходящая через заданную точку $\zeta = \zeta_0$, определяется, как известно, условиями

$$\operatorname{Im}\psi(\zeta, x) = \operatorname{Im}\psi(\zeta_0, x), \quad \operatorname{Re}[\psi(\zeta, x) - \psi(\zeta_0, x)] > 0, \tag{3.12}$$

или – как решение следующей задачи Коши

$$\frac{d\zeta}{dp} = \left[\frac{\partial\psi(\zeta, x)}{\partial\zeta}\right]^{-1}, \quad (dp > 0); \quad \zeta\big|_{p=p_0} = \zeta_0. \tag{3.13}$$

В случае фазовой функции $\psi = \psi_0(\zeta, x)$ из (3.3) выбор требующихся стационарных контуров тривиален. Функция $\psi_0(\zeta, x)$ имеет седловую точку

$$\zeta_0 = \gamma_0 \frac{x}{R}, \quad (R = \sqrt{x^2 + 4H^2}). \tag{3.14}$$

определяемую из условия $\psi'_\zeta(\zeta, x) = 0$, через которую проходит (под углом $\varphi = \pi/4$ к вещественной оси) стационарная линия λ_0 наибыстрейшего возрастания функции $\operatorname{Re}\psi_0(\zeta, x)$. Эта линия начинается на бесконечности 3-го квадранта основного листа плоскости (ζ), проходит через точки

$$\zeta_1 = -i\gamma_0 \frac{x}{2H}, \quad \zeta = \zeta_0, \quad \zeta = \zeta_2 = \gamma_0 \frac{R}{x}$$

осей координат; в точке $\zeta = \zeta_2$ она пересекает разрез и уходит на бесконечность в 4-ом квадранте 2-го листа комплексной плоскости (ζ). Если подинтегральная функция $X_n(\zeta, x)$ из (3.2) имеет еще точки ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$, удовлетворяющие неравенствам $\gamma < \zeta_0$ и $\delta > \zeta_2$, то разрезы с вершинами в точках $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ (проведенные первоначально вдоль положительной части вещественной оси) следует деформировать в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$ до совмещения со стационарными линиями l_γ и l_δ фазовой функции $\psi_0(\zeta, x)$, выходящими из точек $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$. В результате, рациональная деформация исходного пути интегрирования λ из (3.2) должна производиться в стационарный контур λ_0 (проходящий через седловую точку), а также – в петли Γ_γ и Γ_δ, охватывающие продеформированные разрезы l_γ и l_δ. (См. рис. 1, где стрелки обозначают направления наибыстрейшего возрастания функции $\operatorname{Re}\psi_0(\zeta, x)$.

Несколько более сложным оказывается случай фазовой функции $\psi_2(\zeta, x)$ из (3.3), в котором, ради определенности полагается

$$\gamma_0 < \delta_2. \tag{3.15}$$

При его обсуждении наряду с $\psi_2(\zeta, x)$ удобно рассматривать и усеченную фазовую функцию

$$\psi = ix\zeta + H_1\sqrt{\zeta^2 - \delta_2^2}, \tag{3.16}$$

имеющую производную и седловую точку

$$\psi'_\zeta = ix + H_1 \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \delta_2^2}} \equiv ib(\zeta); \quad \hat{\zeta}_0 = \delta_2 \frac{x}{R_2}, \quad (R_2 = \sqrt{x^2 + H_1^2}),$$

для которых справедливо: $b(\zeta) > 0$, если $0 < \zeta < \hat{\zeta}_0$ и $b(\zeta) < 0$, если оказывается $\hat{\zeta}_0 < \zeta < \delta_2$.

Седловые точки фазовой функции $\psi_2(\zeta, x)$ определяются из уравнения

$$\psi_2' \equiv ix + H\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \gamma_0^2}} + H_1\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \delta_2^2}} = 0, \tag{3.17}$$

в котором разрезы от точек ветвления $\zeta = \gamma_0$ и $\zeta = \delta_2$ радикалов целесообразно деформировать в полуплоскость $\mathrm{Im}\zeta < 0$ и совмещать со стационарными линиями l_{γ_0} и l_{δ_2} наибыстрейшего возрастания функции $\mathrm{Re}\,\psi_2(\zeta, x)$, выходящими из точек $\zeta = \gamma_0$ и $\zeta = \delta_2$.

Легко видеть, что при любых значениях $x > 0$ уравнение (3.16) имеет (основную) седловую точку

$$\zeta = \zeta_0(x) < \gamma_0, \tag{3.18}$$

расположенную в промежутке $(0, \gamma_0)$ и такую, что $\zeta_0(x) \to \gamma_0$ при $x \to \infty$. Значение седловой точки определяется численно, равно как и расположение стационарной линии $\lambda_0 = \lambda_0(x)$ наибыстрейшего возрастания функции $\mathrm{Re}\,\psi_2(\zeta, x)$, проходящей через эту точку. Линия λ_0 начинается на бесконечности 3-го квадранта основного листа плоскости (ζ); затем она проходит через 3-ий и 4-ый квадранта к седловой точке из (3.18). В точке $\zeta = \zeta_0(x)$ она пересекает вещественную ось под углом $\chi = \pi/4$ и выходит в 1-ый квадрант, где дальнейшее ее расположение зависит от параметров задачи.

Если оказывается

$$\hat{\zeta}_0 = \delta_2\frac{x}{R_2} < \gamma_0 \qquad \left(\text{т.е. } x < x_0 = \frac{\gamma_0}{\delta_2}\frac{H}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0}{\delta_2}\right)^2}}\right), \tag{3.19}$$

где $\hat{\zeta}_0$ – седловая точка усеченной фазовой функции из (3.16), то участок контура λ_0 в 1-ом квадранте имеет вид дуги, обходящей точки $\zeta = \gamma_0$ и $\zeta = \delta_2$ сверху. При этом линия λ_0 пересекает вещественную ось вторично в некоторой точке $\zeta = \zeta_2 > \delta_2$ и уходит на бесконечность в 4-ом квадранте 3-его листа плоскости (ζ), “раскрывшегося” после указанного выше поворота разреза

(δ_2, ∞) до совпадения его со стационарной линией l_{δ_2}. Здесь ситуация оказывается схожей со случаем фазовой функции $\psi_0(\zeta, x)$, вследствие чего и проблема рациональной деформации исходного пути интегрирования λ их (3.2) решается так же, как и выше.

При дальнейшем возрастании значения $x > x_0$ (когда оказывается $\hat{\zeta}_0 > \gamma_0$ и контур λ_0 получает "потенциальную" возможность пересекать промежуток $(\gamma_0, \hat{\zeta}_0) \in (\gamma_0, \delta_2)$ сверху вниз) выпуклый участок линии λ_0 над промежутком (γ_0, δ_2) начинает прогибаться в сторону области $\operatorname{Im}\zeta < 0$. А при достижении параметром x некоторого предельного значения $\hat{x}$ (т.е. при $x = \hat{x}+0$) расположение линии λ_0 на ее участке от окрестностей точек $\zeta = \gamma_0$ и $\zeta = \delta_2$ до бесконечности (в 4-ом квадранте) изменяется скачком. При значениях $x > \hat{x}$ эта линия перестает обходить (сверху) точку ветвления $\zeta = \delta_2$, а сразу после обхода точки $\zeta = \gamma_0$ направляется на бесконечность в полосе между продевормированными разрезами (γ_0, ∞) и (δ_2, ∞). Такое поведение стационарных линий регулярных функций в областях, не содержащих их особых точек, возможно только при условии, что стационарный контур λ_0 фазовой функции $\psi_2(\zeta, x)$ встречает при $x = \hat{x}$ в упомянутой полосе вторую седловую точку фазовой функции $\psi = \psi_2(\zeta, x)$. Поэтому, если обнаруживается подобный эффект, то следует определить (тем или иным способом) вторую седловую точку (в указанной полосе) и построить стационарный контур $\lambda_0^{(2)}$ наибыстрейшего возрастания функции $\operatorname{Re}\psi_2(\zeta, x)$, проходящей через нее. В результате, при предельном значении $x = \hat{x}$ получается картина расположения стационарных линий λ_0 и $\lambda_0^{(2)}$, изображенная (сугубо качественно) на рис. 2 жирными кривыми, проходящими через седловые точки $\zeta = \zeta_0$ и $\zeta = \zeta_0^{(2)}$. (На этом же рис. 2 тонкой линией изображен контур λ_0 при значении $x < \hat{x}$, а прерывистой линией – контур λ_0 при значении $x > \hat{x}$. Зависимость от x седловой точки $\zeta = \zeta_0^{(2)}$ и вида контура $\lambda_0^{(2)}$ в качественном отношении не имеет существенного значения. Поэтому она на рис. 2 не иллюстрируется.)

Для решения вопроса о рациональной деформации исходного пути интегрирования λ интеграла из (3.2) необходимо учитывать еще и расположение остающихся двух точек ветвления $\zeta = \gamma_2$ и $\zeta = \delta_0$ функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ из (3.2). Если эти точки остаются неохваченными (сверху на плоскости (ζ)) стационарными конту-

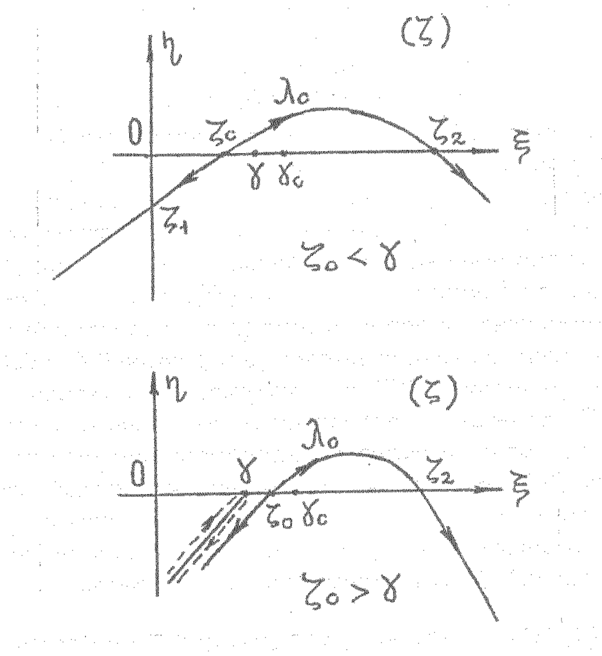

Рис. 1.

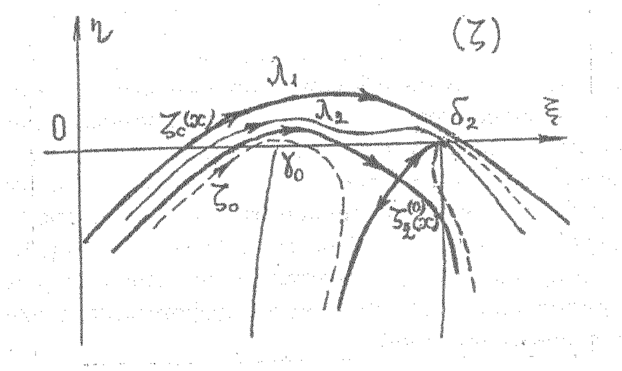

Рис. 2.

рами λ_0 и $\lambda_0^{(2)}$, то принадлежащие им разрезы (γ_2, ∞) и (δ_0, ∞) деформируются в линии l_{γ_2} и l_{δ_0} наибыстрейшего возрастания функции $\mathrm{Re}\,\psi_2(\zeta, x)$. После этого исходный путь интегрирования λ из (3.2) деформируется в последовательно обходимые стационарные линии $\lambda_0 + \lambda_0^{(2)}$, а также в петли Γ_{γ_2} и Γ_{δ_0}, охватывающие продеформированные разрезы l_{γ_2} и l_{δ_0}. Совершенно так же поступают и в случае, когда неохваченная контурами λ_0 и $\lambda_0^{(2)}$ точка ветвления располагается в промежутке (γ_0, δ_2)...

Здесь остается лишь присовокупить, во-первых, что по описанным качественно деформациям исходного пути интегрирования λ из (3.2) в стационарные линии фазовой функции $\psi(\zeta, x)$ как раз и определяется "кусочная" область (B), в которой необходимо знать расположение и перемещение (при возрастании параметра $\varkappa > 0$ в рабочей частотной полосе (3.6)) корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7) рассматриваемой задачи. При этом область (B) должна определяться (качественно) в самом начале подготовительного этапа к количественной оценке волновых полей типа (3.1) и (3.2). И, во-вторых, что подобные вопросы обсуждаются в [7] (т.е. – во второй части настоящего исследования) на количественном уровне в случаях конкретно заданных фазовых функций $\psi(\zeta, x)$ рассматриваемых задач.

§4. Проблемы количественного изучения корней дисперсионных уравнений

В §3 приведены соображения, устанавливающие роль корней дисперсионных уравнений рассматриваемых задач в процессе количественного изучения построенных в них волновых полей. Поэтому теперь необходимо обсудить возможные способы исследования полученных (независимых) дисперсионных уравнений с тем, чтобы выбрать наиболее эффективные подходы к построению и к оценке их корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, как функций частотного параметра $\varkappa > 0$. При этом интересоваться следует, прежде всего, корнями, расположенными в областях (B) плоскости (ζ), которые пересекаются путем интегрирования (λ) внутренних (спектральных) интегралов метода Лемба при его деформации в стационарные линии фазовых функций.

Что же касается независимых дисперсионных уравнений, то таковых оказалось четыре. Во-первых, уравнение (1.19) с матрицей (1.18) и уравнение (1.37) с матрицей (1.38) соответственно для полей типа SV в двухслойной и в трехслойной средах, возбуждаемых плоским или осесимметрическим воздействием вида

(1.2), (1.4). В точности такие же уравнения оказались и основной составной частью дисперсионных уравнений задач из §2, отвечающих возбуждению двухслойной и трехслойной упругих сред касательным воздействием вида (2.1), (1.4). И, во-вторых, – два простых уравнения из (2.47) и (2.69) для волн типа SH, возбуждающихся в слоистых средах наряду с волнами типа SV при касательных воздействиях (2.1), (1.4) над средой.

Последние уравнения мы выпишем здесь в двух эквивалентных формах

$$\tilde{D}_2(\zeta,\varkappa) \equiv \mu_1\beta_1 \mathrm{sh}\varkappa\beta_1 + \mu_2\beta_2 \mathrm{ch}\varkappa\beta_1 = 0,$$

или

$$e^{2\varkappa\beta_1} = a_2(\zeta) \equiv \frac{\mu_1\beta_1 - \mu_2\beta_2}{\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2}, \tag{4.1}$$

в случае двухслойной среды, и в формах

$$\tilde{D}_3(\zeta,\varkappa) \equiv \mu_1\beta_1(\mu_2\beta_2 + \mu_0\beta_0)\mathrm{ch}\varkappa\beta_1 + (\mu_2\beta_2\mu_0\beta_0 + \mu_1^2\beta_1^2)\mathrm{sh}\varkappa\beta_1 = 0$$

или

$$e^{2\varkappa\beta_1} = a_3(\zeta) \equiv \frac{\mu_1\beta_1 - \mu_0\beta_0}{\mu_1\beta_1 + \mu_0\beta_0} \cdot \frac{\mu_1\beta_1 - \mu_2\beta_2}{\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2}, \tag{4.2}$$

в случае трехслойной среды. При этом заметим, что такие уравнения, относящиеся к типу простейших дисперсионных уравнений, рассмотренных в [1] (§6 и 7), уже изучались в [1] и [4]. Поэтому все результаты, необхожимые для последующего, достаточно будет лишь кратко формулировать.

Иначе обстоит дело в случае дисперсионных уравнений (1.19) и (1.37) для волн типа SV. Такие уравнения, по-видимому, еще не подвергались обстоятельному изучению. А их аналитические представления настоялько сложны и громоздки, что в таком изучении едва ли можно расчитывать на получение иных результатов, кроме численных. Поэтому приходится испытывать все мыслимые подходы к проблеме изучения корней, причем начинать нужно с приведения уравнений к несколько более обозримому виду. Однако сначала здесь полезно напомнить (хотя бы на примере задачи для трехслойной среды из п. 5 §1) соотношения между левыми частями дисперсионных уравнений, записанных в форме метода контурных интегралов и метода Лемба. Такими соотношениями можно будет воспользоваться и в проблеме поиска корней упомянутых уравнений.

1. Потенциалы φ_ν и ψ_ν ($\nu = 0, 1$ и 2) поля смещений задачи из п. 5 §1 в первичной форме (s, k) метода контурных интегралов*) представлены формулами (1.5), (1.26), (1.27), восемь коэффициентов X_0^+, Y_0^+, $X_1^\pm$, $Y_1^\pm$, X_2^-, Y_2^- которых определяются из линейной неоднородной алгебраической системы уравнений (1.30), (1.31). Определитель такой системы $\tilde{\Delta}_0(s,k)$, который нет необходимости здесь выписывать, заведомо не имеет корней в полуплоскости

$$\operatorname{Re} s > 0$$

так, что корни дисперсионного уравнения

$$\tilde{\Delta}_0(s,k) = 0 \tag{4.3}$$

в первичной форме метода контурных интегралов могут располагаться лишь в области $\operatorname{Re} s \leqslant 0, (k > 0)$ комплексной переменной s.

При изучении волновых полей с целью получения физических следствий от представления полей в переменных (s, k), как уже упоминалось в п. 6 §1, переходят к их представлениям или в канонической форме метода контурных интегралов, или в форме метода Лемба. В первом случае такой переход осуществляется путем замены в (1.26), (1.27), (1.30) и (1.31) переменных интегрирования $(s, k) \to (\eta, k)$ по формулам

$$s = k v_{s1} \eta, \;\; \tilde{\alpha}_\nu = k \overset{0}{\alpha}_\nu, \;\; \tilde{\beta}_\nu = k \overset{0}{\beta}_\nu, (k > 0), \tag{4.4}$$

(в которых радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$ из (1.10), (1.11) выражаются через радикалы $\overset{0}{\alpha}_\nu$, $\overset{0}{\beta}_\nu$ из (1.33), (1.34)), приводящим к представлению дисперсионного уравнения в виде

$$\Delta_0^c(\eta, k) = k^{-12} \tilde{\Delta}_0(s,k) = 0. \tag{4.5}$$

Во втором же случае при переходе к представлениям полей в форме метода Лемба, производится замена переменных $(s, k) \to (\omega, \zeta)$ вида

$$s = i\omega, \;\; k = \frac{\omega}{v_{s1}} \zeta; \quad \tilde{\alpha}_\nu = \frac{\omega}{v_{s1}} \alpha_\nu, \;\; \tilde{\beta}_\nu = \frac{\omega}{v_{s1}} \beta_\nu, \;\; (\omega > 0), \tag{4.6}$$

*) В которой радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$ и $\tilde{\beta}_\nu$ из (1.10) определены на основном листе плоскости (s) условиями (1.11).

при которой радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$ из (1.10), (1.11) заменяются радикалами α_ν, β_ν из (1.15) с ветвями, определенными на основном листе плоскости (ζ) условиями (1.16). Такая замена приводит к представлению полей выражениями (1.13), (1.35) с дисперсионным уравнением (1.37), удовлетворяющим соотношению

$$\Delta_3(\zeta, \varkappa) = \left(\frac{\omega}{v_{s1}}\right)^{-12} \tilde{\Delta}_0(s,k) = 0, \quad \left(\varkappa = \frac{\omega}{v_{s1}}\, h\right). \tag{4.7}$$

При этом, очевидно, выясняется, что уравнение (4.5) не имеет корней в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\eta > 0$, а уравнение (4.7) не имеет корней, по крайней мере, в точках прямой линии

$$\zeta = k \exp(i\chi), \quad (-\infty < k < \infty) \tag{4.8}$$

на основном листе плоскости (ζ), где $\chi > 0$ достаточно мало. Именно такую прямую и следует выбирать в качестве начального расположения пути интегрирования в представлениях (1.35) метода Лемба.

Из соотношений (4.5) и (4.7) вытекают (существенные для последующего) равенства

$$\begin{gathered} \Delta_0^c(\eta, k) = \zeta^{-\mathcal{N}} \overset{0}{\Delta}_\nu(\zeta, \varkappa), \quad (\mathcal{N} = 12,\ \nu = 3) \\ \Delta_\nu(\zeta, \varkappa) = (-i\eta)^{-\mathcal{N}} \Delta_0^c(\eta, k), \end{gathered} \tag{4.9}$$

связывающие левые части дисперсионных уравнений задачи для трехслойной среды в представлениях $(\zeta, \varkappa)$ метода Лемба и в представлениях (η, k) метода контурных интегралов в его канонической форме. При этом связь между переменными таких представлений определяется равенствами

$$\begin{gathered} \varkappa = kh(-i\eta),\ kh = \varkappa\zeta,\ \zeta = \frac{1}{-i\eta},\ \left(\varkappa \equiv \frac{\omega}{v_{s1}}\, h\right), \\ \alpha_\nu(\zeta) = \zeta \overset{0}{\alpha}_\nu(\eta), \quad \beta_\nu(\zeta) = \zeta \overset{0}{\beta}_\nu(\eta), \end{gathered} \tag{4.10}$$

в которых третье – является следствием первых двух, а последние два соотношения устраняют неоднозначность при преобразовании радикалов α_ν и β_ν в радикалы $\overset{0}{\alpha}_\nu$ и $\overset{0}{\beta}_\nu$. Подобные же равенства имеют место и в случае двухслойной среды, если только в (4.9) полагать $\nu = 2$ и $\mathcal{N} = 10$.

2. С целью приведения дисперсионных уравнений к более обозримому виду целесообразно обратиться к символической записи встречающихся матричных соотношений.

Введем в рассмотрение в случае трехслойной среды символическую запись для следующих столбцов из 4-х функций

$$
\begin{gathered}
T_{01}^{+}=\begin{pmatrix} -\zeta \\ -\alpha_0 \\ -2\mu_0\zeta\alpha_0 \\ -\mu_0 g_0 \end{pmatrix}, \quad T_{02}^{+}=\begin{pmatrix} -\beta_0 \\ -\zeta \\ -\mu_0 g_0 \\ -2\mu_0\zeta\beta_0 \end{pmatrix}, \\
T_{21}^{-}=\begin{pmatrix} -\zeta \\ \alpha_2 \\ 2\mu_2\zeta\alpha_2 \\ -\mu_2 g_2 \end{pmatrix}, \quad T_{22}^{-}=\begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\zeta \\ -\mu_2 g_2 \\ 2\mu_2\zeta\beta_2 \end{pmatrix}, \\
T_{11}^{-}=\begin{pmatrix} \zeta \\ -\alpha_1 \\ -2\mu_1\zeta\alpha_1 \\ \mu_1 g_1 \end{pmatrix}, \quad T_{12}^{-}=\begin{pmatrix} -\beta_1 \\ \zeta \\ \mu_1 g_1 \\ -2\mu_1\zeta\beta_1 \end{pmatrix}, \\
T_{11}^{+}=\begin{pmatrix} \zeta \\ \alpha_1 \\ 2\mu_1\zeta\alpha_1 \\ \mu_1 g_1 \end{pmatrix}, \quad T_{12}^{+}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \zeta \\ \mu_1 g_1 \\ 2\mu_1\zeta\beta_1 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

Здесь 1-ая цифра снизу у символа T обозначает номер ν слоя трехслойной среды, к которому символ относится, а величины α_ν, β_ν и g_ν имеют значения из (1.15) и (1.16).

Продолжая символику, под выражениями

$$
\begin{gathered}
\tilde{T}_{11}^{-}=T_{11}^{-}e^{-\varkappa\alpha_1}, \quad \tilde{T}_{12}^{-}=T_{12}^{-}e^{-\varkappa\beta_1}, \\
\tilde{T}_{11}^{+}=T_{11}^{+}e^{\varkappa\alpha_1}, \quad \tilde{T}_{12}^{+}=T_{12}^{+}e^{\varkappa\beta_1}
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

будем понимать столбцы из двух нижних строк в (4.11), умноженные на соответствующую экспоненту. Наконец, под символом

$$
\left\{ \begin{matrix} T \\ \tilde{T} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} T_{01}^{+}, & T_{02}^{+}, & T_{11}^{-}, & T_{12}^{-}, & T_{11}^{+}, & T_{12}^{+}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \tilde{T}_{11}^{-}, & \tilde{T}_{12}^{-}, & \tilde{T}_{11}^{+}, & \tilde{T}_{12}^{+}, & T_{21}^{-}, & T_{22}^{-} \end{matrix} \right\}
\tag{4.13}
$$

будем понимать квадратную матрицу 8-го порядка, составленную из четырехстрочных столбцов (4.11) и (4.12), где символы 0 обозначают столбцы, состоящие из 4-х нулей.

Матрица (4.13) в точности совпадает с матрицей Δ_3 из (1.36), выписанной в (1.38) в явной форме. При этом уравнения (1.36) для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ из (1.35) запишутся теперь в виде

$$\left\{\begin{matrix} T_{01}^+, & T_{02}^+, & T_{11}^-, & T_{12}^-, & T_{11}^+, & T_{12}^+, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \tilde{T}_{11}^-, & \tilde{T}_{12}^-, & \tilde{T}_{11}^+, & \tilde{T}_{12}^+, & T_{21}^-, & T_{22}^- \end{matrix}\right\} \times (X) = (b), \tag{4.14}$$

где использованы матрицы-столбцы (X) и (b) из (1.39) и (1.40).

Что же касается детерминанта $\Delta_3(\zeta,\varkappa)$ матрицы (4.13), то его целесообразно представлять в форме разложения Лапласа (по последним четырем строкам)

$$\Delta_3(\zeta,\varkappa) = e^{-\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\mathcal{P}_1 Q_1 + e^{\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\mathcal{P}_2 Q_2 +$$
$$+ e^{-\varkappa(\alpha_1-\beta_1)}\mathcal{P}_3 Q_3 + e^{\varkappa(\alpha_1-\beta_1)}\mathcal{P}_4 Q_4 - \mathcal{P}_5 Q_5 - \mathcal{P}_6 Q_6, \tag{4.15}$$

содержащего детерминанты 4-го порядка $\mathcal{P}_q$ и Q_q, определяемые символами

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= |T_{11}^- T_{12}^- T_{21}^- T_{22}^-| \quad &;Q_1 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{11}^+ T_{12}^+|,\\
\mathcal{P}_2 &= |T_{11}^+ T_{12}^+ T_{21}^- T_{22}^-|; \quad &Q_2 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{11}^- T_{12}^-|,\\
\mathcal{P}_3 &= |T_{11}^- T_{12}^+ T_{21}^- T_{22}^-|; \quad &Q_3 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{12}^- T_{11}^+|,\\
\mathcal{P}_4 &= |T_{12}^- T_{11}^+ T_{21}^- T_{22}^-|; \quad &Q_4 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{11}^- T_{12}^+|,\\
\mathcal{P}_5 &= |T_{11}^- T_{11}^+ T_{21}^- T_{22}^-|; \quad &Q_5 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{12}^- T_{12}^+|,\\
\mathcal{P}_6 &= |T_{11}^- T_{12}^+ T_{21}^- T_{22}^-|; \quad &Q_6 &= |T_{01}^+ T_{02}^+ T_{11}^- T_{11}^+|.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

(Здесь использованы символы матриц-столбцов из (4.11) с последующим правилом конструирования из них матриц 4-го порядка и их детерминантов.) При этом выясняется, что представления определителей $\mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6, Q_5$ и Q_6 в развернутом виде приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}
\frac{-\mathcal{P}_5}{4\alpha_1\zeta} = \frac{\mathcal{P}_6}{4\beta_1\zeta} &= (\mu_1 g_1 - \mu_2 g_2)(\mu_1 2\zeta^2 - \mu_2 g_2) + \\
&+ 2\alpha_2\beta_2(\mu_1-\mu_2)(\mu_2 2\zeta^2 - \mu_1 g_1),\\
\frac{-Q_5}{4\beta_1\zeta} = \frac{Q_6}{4\alpha_1\zeta} &= (\mu_0 g_0 - \mu_1 g_1)(\mu_1 2\zeta^2 - \mu_0 g_0) + \\
&+ 2\alpha_0\beta_0(\mu_0-\mu_1)(\mu_0 2\zeta^2 - \mu_1 g_1),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

из которых, в частности, следует равенство

$$\mathcal{P}_5 Q_5 = \mathcal{P}_6 Q_6. \tag{4.18}$$

Такое равенство, естественно, нужно учитывать и в (4.15).

Основное достоинство представления левой части дисперсионного уравнения для трехслойной среды в форме (4.15) заключается в том, что в нем оказались выделенными в простой и явной форме все члены, содержащие частотную переменную $\varkappa$. Это облегчает организацию процесса вычисления значений детерминанта $\Delta_3(\zeta,\varkappa)$ в точках $(\zeta,\varkappa)$ и способствует выполнению дальнейших требующихся его преобразований.

3. Подобным же образом вводится аналогичная удобная символика в матричных соотношениях в случае двухслойной среды. В ней используются все символы (кроме T_{01}^{+} и T_{02}^{+}) столбцов из (4.11), символы столбцов из (4.12), а также – символы столбцов

$$\begin{gathered} h_{11}^{-} = \begin{pmatrix} -2\mu_1\zeta\alpha_1 \\ \mu_1 g_1 \end{pmatrix},\ h_{12}^{-} = \begin{pmatrix} \mu_1 g_1 \\ -2\mu_1\zeta\beta_1 \end{pmatrix}, \\ h_{11}^{+} = \begin{pmatrix} 2\mu_1\zeta\alpha_1 \\ \mu_1 g_1 \end{pmatrix},\ h_{12}^{+} = \begin{pmatrix} \mu_1 g_1 \\ 2\mu_1\zeta\beta_1 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{4.19}$$

состоящих из двух функций.

При этом система уравнений (1.18) для функциональных коэффициентов $X_\nu^{\pm}$, $Y_\nu^{\pm}$ из представлений (1.14) записывается теперь в виде

$$\left\{ \begin{matrix} h_{11}^{-}, & h_{12}^{-}, & h_{11}^{+}, & h_{12}^{+}, & 0, & 0 \\ \tilde{T}_{11}^{-}, & \tilde{T}_{12}^{-}, & \tilde{T}_{11}^{+}, & \tilde{T}_{12}^{+}, & T_{21}^{-}, & T_{22}^{-} \end{matrix} \right\} \times (X) = (b_0), \tag{4.20}$$

где положено

$$\begin{gathered} (X) = (X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_2^-, Y_2^-)^+, \\ (b_0) = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0\right)^+. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Ее детерминант $\Delta_2(\zeta,\varkappa)$, т.е. левая часть дисперсионного уравнения (1.19), допускает представление в форме разложения по Лапласу (по последним четырем строкам)

$$\begin{gathered} \Delta_2(\zeta,\varkappa) = e^{-\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\mathcal{P}_1 q_1 + e^{\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\mathcal{P}_2 q_2 + \\ + e^{-\varkappa(\alpha_1-\beta_1)}\mathcal{P}_3 q_3 + e^{\varkappa(\alpha_1-\beta_1)}\mathcal{P}_4 q_4 - \mathcal{P}_5 q_5 - \mathcal{P}_6 q_6. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Здесь детерминанты 4-го порядка $\mathcal{P}_k$ имеют значения из (4.16), а детерминанты 2-го порядка q_k вычисляются, и оказываются равными

$$q_1 = q_2 = 4\zeta^2\alpha_1\beta_1 - g_1^2;\ \ q_3 = -q_4 = 2\zeta^2\alpha_1\beta_1 + g_1^2, \\ q_5 = 4\zeta\beta_1 g_1;\ \ q_6 = 4\zeta\alpha_1 g_1. \tag{4.23}$$

4. Исследование дисперсионных уравнений и систем уравнений для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ спектральных подинтегральных функций в случае двухслойной и трехслойной сред производится вполне аналогично. Поэтому при изложении общих вопросов целесообразно отправляться от соотношений для трехслойной среды, а к двухслойной среде обращаться в тех случаях, когда при исследованиях желательно упростить ситуацию...

Нетрудно видеть, что из общей структуры системы уравнений (4.14), или системы (1.36), (1.39) и (1.40), легко вытекают перечисляемые свойства коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ подинтегральных функций из представлений (1.14), (1.35) изучаемых волновых полей.

а) Если функции $b_1(\zeta,\ldots)$ и $b_3(\zeta,\ldots)$ из (1.39), (1.40) нечетны относительно ζ, а функции $b_2(\zeta,\ldots)$ и $b_4(\zeta,\ldots)$ – четны, то функции $X_\nu^\pm(\zeta,\ldots)$ и функции $Y_\nu^\pm(\zeta,\ldots)$ из решения (X) системы уравнений (4.14) оказываются соответственно четными и нечетными функциями от ζ.

б) Из структуры определителя матрицы (1.38) системы уравнений (4.14) сразу усматривается, что точки ветвления радикалов α_ν, β_ν при $\nu = 0$ и 2 оказываются точками ветвления подинтегральных функций из (1.35). Напротив того, точки ветвления радикалов α_1 и β_1 не являются точками ветвления указанных функций, вследствие антисимметричного вхождения радикалов α_1 и β_1 соответственно в третий и пятый, а также – в четвертый и в шестой столбцы матрицы (1.38). Однако сам детерминант этой матрицы изменяет знак при обходе точек ветвления радикалов α_1 и β_1. {Заметим, что правильность таких утверждений полезно было бы подтвердить несложными доказательствами, что здесь опускается ради экономии места.}

в) Из (легко проверяемой) фактической зависимости детерминантов из (1.19) и (1.37) от ζ только через посредство ζ^2, вытекает (на любом листе римановой поверхности (ζ)) симметрия расположения корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнений (1.19) и (1.37) относительно начала координат $\zeta = 0$.

г) Из неоднородности системы уравнений (4.14), а также – из теоремы Крамера (3.4) и (3.5) следует, что основными особыми точками функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm \equiv X_\nu^\pm(\zeta, \varkappa, \ldots)$ и $Y_\nu^\pm \equiv Y_\nu^\pm(\zeta, \varkappa, \ldots)$ из (1.35) оказывается счетное множество (простых, вообще говоря) полюсов в корнях $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (4.7) или (1.37), левая часть $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ которого совпадает с детерминантом матрицы из (1.38) системы уравнений (4.14) или (1.36). Именно поэтому проблема расположения корней дисперсионного уравнения на плоскости (ζ) и приобретает важное значение в процессе изучения интерференционных волновых полей.

5. Корни дисперсионного уравнения (4.7) или (1.37) обсуждаемой задачи, решение которой мы условились представлять в символическом виде (3.1)–(3.5), входят в указанные формулы в виде функций $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ от вещественного аргумента $\varkappa > 0$. Однако при нахождении их значений аргументы $\varkappa$ корней удобно иногда считать комплексными.

Все множество корней дисперсионного уравнения (всегда) может быть подразделено на два класса: На особые корни, удовлетворяющие условию

$$\varkappa|\zeta_n(\varkappa)| \to 0, \quad (\text{при } \varkappa \to 0), \tag{4.24}$$

(или $\varkappa|\alpha_\nu| \to 0$ и $\varkappa|\beta_\nu| \to 0$ при $\varkappa \to 0$), и неособые корни, для которых при $\varkappa \to 0$ выполняются соотношения вида

$$\varkappa\zeta_n(\varkappa) \not\to 0. \tag{4.25}$$

Особые корни уравнения (4.7) или (1.37) могут оставаться конечными при $\varkappa \to 0$ (т.е. $|\zeta_n(\varkappa)| < \mathcal{N}$, когда $\varkappa \to 0$). При этом, на основании представления (4.15) ясно, что при $\varkappa = 0$ такие корни должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\Delta_3(\zeta, 0) = 0. \tag{4.26}$$

Однако особые корни могут и неограниченно возрастать при $\varkappa \to 0$, но не быстрее, чем $|\zeta| \sim \varkappa^{-1/2}$. Для выяснения наличия или отсутствия таких корней (а также – для определения первых членов их асимптотических представлений) при $\varkappa\zeta \to 0$ и $\zeta \to \infty$ можно было бы воспользоваться разложениями

$$\exp[\pm\varkappa(\alpha_1+\beta_1)] = 1 \pm 2\varkappa\zeta \mp \frac{\gamma_1^2+\delta_1^2}{2\zeta^2}\,\varkappa\zeta + \dots,$$
$$\exp[\pm\varkappa(\alpha_1-\beta_1)] = 1 \mp \frac{\gamma_1^2-\delta_1^2}{2\zeta^2}\,\varkappa\zeta + \dots,$$

позволяющими уравнение (4.26) переписать в виде

$$\Delta_3(\zeta,0) + (\mathcal{P}_2Q_2 - \mathcal{P}_1Q_1)2\varkappa\zeta + (\mathcal{P}Q)_0\frac{\varkappa\zeta}{2\zeta^2} + \dots = 0, \qquad (4.27)$$

где положено

$$(\mathcal{P}Q)_0 = (\mathcal{P}_1Q_1 - \mathcal{P}_2Q_2)(\gamma_1^2+\delta_1^2) - (\mathcal{P}_3Q_3 - \mathcal{P}_4Q_4)(\delta_1^2-\gamma_1^2),$$

и пренебрежено членами порядка малости $|\varkappa\zeta.\zeta^{-4}|$. При этом под $\mathcal{P}_q$ и Q_q здесь подразумеваются определители 4-го порядка из (4.16).

Аналитическое исследование такого уравнения очень громоздко, так как оно требует предварительного построения разложений по степеням ζ^{-1} всех определителей из (4.16). При численном же его решении достаточно построить при $\zeta \gg 1$ разложения вида

$$\begin{aligned}\Delta_3(\zeta,0) &= a_0\zeta^{n_0} + a_1\zeta^{n_0-1} + \dots,\\ (\mathcal{P}_2Q_2 - \mathcal{P}_1Q_1) &= b_0\zeta^{n_1} + b_1\zeta^{n_1-1} + \dots,\\ (\mathcal{P}Q)_0 &= c_0\zeta^{n_2} + c_1\zeta^{n_2-1} + \dots .\end{aligned} \qquad (4.28)$$

где численно определяемые коэффициенты a_0, b_0, c_0 и др. отличны от нуля. Тогда в 1-ом приближении оказывается

$$a_0\zeta^{n_0} + 2\varkappa b_0\zeta^{n_1+1} + \frac{\varkappa}{2}c_0\zeta^{n_2-1} = 0,$$

причем третьим слагаемым можно пренебречь, если $n_2 < n_1 + 2$. При этом для искомого (предполагаемого) корня получается представление

$$\zeta = \left[\frac{-a_0}{2b_0\varkappa}\right]^{\frac{1}{n_1-n_0+1}}, \qquad (4.29)$$

которое согласуется с (4.24) только, если выполняется неравенство $n_1 \geqslant n_0 + 1$...

Заметим, что указанный способ численной оценки первых членов асимптотического разложения "бесконечных при $\varkappa = 0$" особых корней дисперсионного уравнения, совместно с определением конечных по модулю особых корней из алгебраического уравнения (4.26), решает полностью проблему о множестве особых корней дисперсионного уравнения в случае трехслойной, а также – двухслойной среды. При этом выясняется, что определение всех особых корней дисперсионных уравнений, располагающихся на многолистных римановых поверхностях плоскости (ζ) и способных (в принципе) выходить на основной (рабочий) ее лист, оказывается в случае трехслойной среды непростой и очень громоздкой задачей, а в случае двухслойной среды просто громоздкой задачей. (См. п. 13.) При этом из множества определяемых корней в результате решения таких задач лишь малая их доля принадлежит, так или иначе основному листу плоскости (ζ), на котором производится численная оценка спектральных интегралов вида (3.2). Таким образом выясняется, что подход к проблеме особых корней в рамках стремления установить полную картину расположения (и перемещения) на плоскости (ζ) всех корней уравнения, с последующим отбором тех из них, которые существенны для численной оценки волновых полей, оказывается связанным с большим объемом излишней работы. Поэтому естественно было искать других подходов к проблеме корней дисперсионных уравнений.

6. Что касается счетного множества неособых корней уравнений (4.7) или (1.37), то они зарождаются при $\varkappa = 0$, в соответствии с (4.25), на бесконечности (в окрестности существенно особой точки $\zeta = \infty$ уравнения (4.7)), где корни не представляют практического интереса. С возрастанием параметра $\varkappa > 0$ эти корни один за другим последовательно по $\varkappa$ перемещаются в области плоскости (ζ), где их уже приходится принимать во внимание при оценках внутренних интегралов вида (3.2) из аналитического представления исследуемых волновых полей.

Таким образом, здесь возникает проблема определения какимлибо способом значений неособых корней (при некотором значении $\varkappa = \varkappa_0$), с последующим продолжением их в "существенные" области (B) плоскости (ζ) (пересекаемые контуром λ из (3.2) при его деформации в стационарные линии фазовой функции, в которых учет корней в количественных оценках интегралов вида (3.2) оказывается уже необходимым). При этом продолжение значений корней производится, как известно, (см. [1, §4]) в рамках решения (тем или иным способом) задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\varkappa} = \frac{-\Delta_\varkappa(\zeta,\varkappa)}{\Delta_\zeta(\zeta,\varkappa)}, \quad \zeta\big|_{\varkappa=\varkappa_0} = \zeta_0 \tag{4.30}$$

с вещественным параметром-аргументом $\varkappa > 0$.

Решение такой задачи, построенное на основе итерационного применения метода Ньютона, оказалось весьма эффективным. Вследствие этого в области низких и даже умеренных частот $\varkappa > 0$ любые необходимые в исследованиях продолжения значения корней перестают быть проблемой.

Что же касается начальных значений неособых корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения для последующего их продолжения в "существенные" области (B) комплексной плоскости (ζ), то получать их можно пытаться различными способами. Во-первых, области (B) можно оградить контрольными линиями l_k ("заставами") и следить за пересечением этих линий корнями, приходящими из бесконечности. Положение корня $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, проходящего через заставу, может быть "засечено" и уточнено по Ньютону. Его можно использовать в качестве начального данного в процессе продолжения корня по (4.30) в рабочую частотную полосу из (3.6).

Во-вторых, можно было бы пытаться установить асимптотику корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ на бесконечности $\zeta \to \infty$ при $\varkappa \to 0$, и полученные представления корней использовать в качестве начальных данных в задаче Коши из (4.30). Однако такой путь оказывается весьма трудоемким и громоздким, так как от требует определения первых (трех) членов разложений определителей из (4.15) и (4.22) в ряды по малым параметрам ζ^{-1} и $\varkappa \ll 1$. Поэтому мы не будем его испытывать тем более, что его прикладные возможности в нашей задаче заведомо перекрываются возможностями третьего подхода к проблеме, вытекающего из связи между корнями $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ и $\eta = \eta_n(k)$ дисперсионного уравнения, записанного в форме (4.7) метода Лемба и в форме (4.5) метода контурных интегралов в каноническом его представлении. Такой подход, по-видимому, не освещен еще в литературе, вследствие чего уместно задержаться на его обсуждении. Однако предварительно целесообразно остановиться на элементарном обобщении метода продолжения значений корня $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнения (4.7) вдоль вещественных линий $\varkappa_0 < \varkappa < \varkappa_1$, на случаи произвольных линий γ, расположенных на комплексной плоскости $(\varkappa)$.

7. Пусть функция $\Delta(\zeta, \varkappa)$, регулярная относительно каждой из своих переменных ζ и $\varkappa$, определена на полных листах комплексных плоскостей (ζ) и $(\varkappa)$.

Уравнение

$$\Delta(\zeta, \varkappa) = 0 \tag{4.31}$$

можно рассматривать как неявное определение функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$, или функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$-корней уравнения (4.31) по независимой комплексной переменной $\varkappa$ или ζ. Функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$ и $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ взаимно обратны, причем каждая из них оказывается функцией, регулярной по своей переменной (почти везде) в областях, где регулярность левой части уравнения (4.31) еще сохраняется.

Пусть γ – некоторая кусочно-гладкая линия $\varkappa = \varkappa(t)$ на комплексной плоскости $(\varkappa)$, а $t > 0$ – ее вещественный параметр. Точкам этой линии уравнение (4.31) приводит в соответствие точки $\zeta = \zeta[\varkappa(t)]$ "соответственной" линии l на плоскости (ζ) (где $\zeta = \zeta(\varkappa)$ – корень уравнения (4.31)).

Выбирая произвольную точку $\varkappa_0 = \varkappa(t_0)$ линии γ и отвечающую ей точку $\zeta_0 = \zeta[\varkappa(t_0)]$ линии l, рассмотрим бесконечно малые приращения $d\zeta = \zeta - \zeta_0$ и $d\varkappa = \varkappa - \varkappa_0$ точек соответственно вдоль линий l и γ, вызванные приращением dt аргумента $t = t_0$. По Тейлору, очевидно, имеем

$$\Delta(\zeta_0 + d\zeta, \varkappa_0 + d\varkappa) = \Delta(\zeta_0, \varkappa_0) + \Delta_\varkappa d\varkappa +$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta_{\zeta^2} d\zeta^2 + 2\Delta_{\zeta\varkappa} d\zeta d\varkappa + \Delta_{\zeta^2} d\varkappa^2) + \ldots = 0, \tag{4.32}$$

где обозначено

$$\Delta_\varkappa \equiv \frac{\partial \Delta(\zeta, \varkappa)}{\partial \varkappa}, \quad \Delta_\zeta \equiv \frac{\partial \Delta(\zeta, \varkappa)}{\partial \zeta} \text{ и т.д.}$$

Но так как $\Delta(\zeta_0, \varkappa_0) = 0$ (в соответствии с выбором начальных точек $\varkappa_0 = \varkappa(t_0)$ и $\zeta_0 = \zeta[\varkappa(t_0)]$), то в соответственных точках линий γ и l должно выполняться соотношение $\Delta_\varkappa d\varkappa + \Delta_\zeta d\zeta = 0$, из которого следует обыкновенное дифференциальное уравнение вида (4.30), связывающие точки линий γ и l на комплексных плоскостях $(\varkappa)$ и (ζ). При этом, если линия γ задана уравнением

$\varkappa = \varkappa(t)$, то для определения точек $\zeta = \zeta(t)$ линии l на плоскости (ζ) в (4.30) следует полагать

$$\varkappa = \varkappa(t), \quad d\varkappa = \varkappa'(t)dt,$$

а к уравнению добавлять начальное условие

$$\zeta\big|_{t=t_0} = \zeta_0.$$

Если же наборот линия l задана своими точками $\zeta = \zeta(t)$ на плоскости (ζ), то точки $\varkappa = \varkappa(t)$ отвечающей ей линии γ на плоскости $(\varkappa)$ должны определяться из уравнения

$$\frac{d\varkappa}{d\zeta} = \frac{-\Delta_\zeta(\zeta, \varkappa)}{\Delta_\varkappa(\zeta, \varkappa)} \tag{4.33}$$

(для обратной функции $\varkappa = \varkappa(t)$), в котором нужно полагать

$$\zeta = \zeta(t), \quad d\zeta = \zeta'(t)dt$$

и добавлять соответствующее начальное условие.

Уравнения (4.30) и (4.33) составляют базу для аналитического продолжения значений корня $\zeta = \zeta(\varkappa)$, или корня $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ уравнения (4.31) вдоль выбранной линии l или γ по заданному начальному его значению. При этом процесс продолжения оказывается однозначным во всей области регулярности правых частей уравнений (4.30) и (4.33). Он может прерваться, например, в случае уравнения (4.30), лишь при встрече линии γ с особой точкой функции из правой части уравнения, совпадающей или с особой точкой функции $\Delta(\zeta, \varkappa)$ из (4.31), или же с точкой $(\zeta, \varkappa)$, в которой наряду с (4.31) оказывается

$$\Delta_\zeta(\zeta, \varkappa) = 0, \tag{4.34}$$

и правая часть уравнения (4.30) теряет смысл обращаясь в бесконечность. Аналогично обстоит дело и в случае уравнения (4.33).

8. Следует отметить, что уравнения (4.30) и (4.33) можно рассматривать и как уравнения для регулярных (аналитических) функций $\zeta = \zeta(\varkappa)$ и $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ (фиксируемых заданием их начальных значений: $\zeta = \zeta_0$ при $\varkappa = \varkappa_0$, или $\varkappa = \varkappa_0$ при $\zeta = \zeta_0$), определяемых не вдоль линий γ и l,а в некоторых областях Q комплексной плоскости $(\varkappa)$ или (ζ), содержащей в себе точку $\varkappa = \varkappa_0$, или точку $\zeta = \zeta_0$. Подобные функции могут (в принципе) определяться в соответствующих областях Q из уравнения (4.30) или из уравнения (4.33) методом рядов, или же путем аналитического продолжения функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$, или функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$, построенных первоначально в точках упоминавшихся линий γ или l. При этом, если такие регулярные в области Q функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$ (или функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$) уже построены, то значения их в заданной точке $\varkappa = \varkappa_1$ области Q (в заданной точке $\zeta = \zeta_1$) можно определять также и путем продолжения по (4.30) начального значения $\zeta_0 = \zeta(\varkappa_0)$ корня вдоль подходяще выбранной линии γ, соединяющей в области Q начальную точку $\varkappa = \varkappa_0$ с точкой $\varkappa = \varkappa_1$, в которой значение функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$ требуется вычислить. Аналогично обстоит дело и в случае функций $\varkappa = \varkappa(\zeta)$, если иметь в виду уравнение (4.33).

Указанное продолжение вдоль линии γ исходного значения $\zeta_0 = \zeta(\varkappa_0)$ регулярной функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$ можно называть аналитическим ее продолжением в точку $\varkappa = \varkappa_1$ вдоль линии γ. Здесь необходимо только иметь в виду, что регулярные (продолженные) функции корней $\zeta = \zeta(\varkappa)$, или $\varkappa = \varkappa(\zeta)$, кроме особых точек функции $\Delta(\zeta, \varkappa)$ из (4.31), имеют еще ветвления в точках, определяемых из совместного рассмотрения равенства (4.31) и соответствующего равенства из (4.35)

$$\Delta_\zeta(\zeta, \varkappa) = 0, \quad \text{или} \quad \Delta_\varkappa(\zeta, \varkappa) = 0. \tag{4.35}$$

Действительно, если, например, в точке $\zeta_1 = \zeta(\varkappa_1)$ функции корня $\zeta = \zeta(\varkappa)$ оказывается

$$\Delta(\zeta_1, \varkappa_1) = 0, \quad \Delta_\zeta(\zeta_1, \varkappa_1) = 0,$$

но $\Delta_\varkappa(\zeta_1, \varkappa_1) \neq 0$ и $\Delta_{\zeta^2}(\zeta_1, \varkappa_1) \neq 0$, то согласно (4.32) в окрестности этой точки справедливо

$$\Delta_\varkappa \, d\varkappa + \frac{1}{2} \Delta_{\zeta^2} d\zeta^2 = 0$$

и, следовательно, функция $\zeta = \zeta(\varkappa)$ имеет структуру

$$\zeta - \zeta_1 = \sqrt{a_1(\varkappa - \varkappa_1)}, \quad \left(a_1 = \frac{2\Delta_\varkappa}{\Delta_{\zeta^2}} \right), \tag{4.36}$$

характерную для точки ветвления 2-го порядка. Аналогично обстоит дело и в случае обратной функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$. Поэтому при вычислении значения регулярной функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$ в точке $\varkappa = \varkappa_1 \in Q$ путем продолжения ее исходного значения $\zeta_0 = \zeta(\varkappa_0)$ вдоль выбранной линии γ (на плоскости $\varkappa$)) нужно считаться с тем обстоятельством, что результат продолжения функции может зависеть и от выбора линии γ, вдоль которой продолжение осуществляется.

В связи с изложенным уместно заметить, что вследствие вещественности внешних интегралов по переменным $\varkappa > 0$ и $k > 0$ соответственно в методе Лемба и в методе контурных интегралов, в практических задачах теории волн, обычно, требуется продолжать значения корней $\zeta = \zeta(\varkappa)$ и $\eta = \eta(k)$ дисперсионных уравнений (4.7) и (4.5) вдоль вещественных промежутков значений $\varkappa$ и k (т.е. вдоль промежутков вещественных осей плоскостей $(\varkappa)$ и (k)). При этом точки ветвления, определяемые соотношениями (4.31) и (4.35), допускают следующее геометрическое толкование: Точка $\zeta_1 = \zeta(\varkappa_1)$, в которой оказывается

$$\Delta = 0,\ \ \Delta_\zeta = 0;\ \ \Delta_\varkappa \neq 0,\ \ \Delta_{\zeta^2} \neq 0, \tag{4.37}$$

(т.е. точка ветвления функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$, в окрестности которой $\zeta = \zeta(\varkappa)$ имеет структуру (4.36)) является точкой нормального пересечения на плоскости (ζ) двух линий l_1 и l_2 корней $\zeta = \zeta_1(\varkappa)$ и $\zeta = \zeta_2(\varkappa)$ уравнения (4.31). Точка же, в которой оказывается

$$\Delta = 0, \quad \Delta_\varkappa = 0; \quad \Delta_\zeta \neq 0, \quad \Delta_{\varkappa^2} \neq 0 \tag{4.38}$$

(т.е. точка ветвления обратной функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ уравнения (4.31)) является точкой возврата функции $\zeta = \zeta(\varkappa)$, рассматриваемой как функция от вещественного аргумента $\varkappa > 0$. Соответствующие пояснения к таким высказываниям приведены в [1] (§4, п. 3 и 4).

9. Переходя к связи между представлениями корней дисперсионных уравнений

$$\Delta_0^c(\eta, k) = 0. \ \ (4.5) \ \ \text{и} \ \ \Delta_3(\zeta, \varkappa) = 0, \ \ (4.7),$$

записанных в канонической форме метода контурных интегралов и метода Лемба, обратимся к п. 1 и воспользуемся соотношениями (4.9) и (4.10), выписываемыми здесь, ради удобства, в форме

$$\Delta_0^c[\eta(k), k] = \zeta^{-12}\Delta_3(\zeta(\varkappa), \varkappa), \tag{4.39}$$

и

$$\varkappa = kh(-i\eta(k)), \quad kh = \varkappa\zeta(\varkappa); \quad \zeta(\varkappa) = \frac{1}{-i\eta(k)}, \quad \left(\varkappa \equiv \frac{\omega}{v_{s1}}\,h\right),$$

$$\alpha_\nu(\zeta) = \zeta \overset{0}{\alpha}_\nu(\eta), \quad \beta_\nu(\zeta)\overset{0}{\beta}_\nu(\eta). \tag{4.40}$$

Такие соотношения связывают друг с другом соответственно левые части уравнения (4.39), а также – переменные (η, k) и $(\zeta, \varkappa)$, в которых дисперсионные уравнения рассматриваются.

Соотношения связи (4.40) таковы, что по любым выбранным значениям $\varkappa$ и ζ однозначно определяются значения kh и η, и наоборот. Вследствие этого в силу соотношений (4.40) из условия, что kh и $\eta(k)$ удовлетворяют (на некотором листе θ плоскости (η)) дисперсионному уравнению (4.5) метода контурных интегралов, алгебраически однозначно следует удовлетворение величинами $\varkappa$ и $\zeta(\varkappa)$ (на соответствующем листе Z плоскости (ζ)) дисперсионному уравнению (4.7). (И наоборот). При этом соответствие листов θ и Z римановых поверхностей (η) и (ζ) устанавливается на основе последних двух соотношений из (4.40).

Таким образом, можно утверждать, что соотношения (4.40) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между полными множествами $\{\zeta\}$ и $\{\eta\}$ корней уравнений (4.7) и (4.5), являющихся регулярными функциями $\zeta = \zeta(\varkappa)$ и $\eta = \eta(k)$ своих аргументов. Если же учесть, что из предельных соотношений

$$kh \to 0 \quad \text{и} \quad kh(-i\eta(k)) \to 0, \tag{4.41}$$

в силу (4.40), следуют соотношения

$$\varkappa \to 0 \quad \text{и} \quad \varkappa\zeta(\varkappa) \to 0 \tag{4.42}$$

(и наоборот), то свойство равенств (4.40) устанавливать взаимно-однозначное соответствие между корнями $\zeta = \zeta(\varkappa)$ и $\eta = \eta(k)$ уравнений (4.7) и (4.5) распространится и на особые корни обсуждаемых уравнений.

Наконец, как следствие сформулированных положений, приходится утверждать, что соотношения (4.40) устанавливают взаимно-однозначное соответствие и между множествами $\{\zeta = \zeta_n(\varkappa)\}$ и $\{\eta = \eta_n(k)\}$ неособых корней уравнений (4.7) и (4.5), определяемых, в соответствии с п. 5, соотношениями вида (4.25), т.е.

$$\varkappa\zeta_n(\varkappa) \to hk_n \neq 0 \quad \text{при} \quad \varkappa \to 0, \tag{4.43}$$

и

$$kh[-i\eta_n(k)] \to \varkappa_n \neq 0, \quad \text{если} \quad k \to 0. \tag{4.44}$$

(Заметим, что в соответствии с (4.25) здесь следовало бы писать

$$\varkappa\zeta_n(\varkappa) \not\to 0 \quad \text{при} \quad \varkappa \to 0,$$

$$kh[-i\eta_n(k)] \not\to 0, \quad \text{если} \quad k \to 0.$$

Однако фактически выполняются более сильные соотношения, выписанные в (4.43) и (4.44).)

Указанное свойство соотношений (4.40) имеет и очевидный прикладной смысл, так как оно позволяет получать значения корня $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$, как решения уравнения (4.7), по известным значениям корней $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5) (и наоборот). Правда, здесь остается небольшое "осложнение", сводящееся к тому, что, например, корню-решению $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5), найденному лишь при вещественных значениях аргумента $k > 0$ может отвечать по (4.40) корень-решение

$$\zeta_n(\varkappa) = \frac{1}{-i\eta_n(k)}$$

уравнения (4.7), аргумент которого

$$\varkappa = kh[-i\eta_n(k)] \equiv x + iy$$

оказывается комплексным и пробегающим точки некоторой линии γ_0 на комплексной плоскости $(\varkappa)$. А для приложений требуются корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнения (4.7) при вещественных значениях $\varkappa > 0$.

Поэтому приходится еще воспользоваться известным фактом аналитичности функции $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ (значения которой определены только в точках комплексной линии γ_0) и продолжить аналитически ее значения вдоль выбранной другой линии γ до необходимых точек $\varkappa$ вещественной полуоси $\varkappa > 0$. Однако такая операция продолжения (требующая знания продолжаемого корня лишь в одной исходной точке $\varkappa = \varkappa_0$) не вызывает каких-либо затруднений.

10. Пусть $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ – произвольный неособый корень уравнения (4.7), а $\eta = \eta_n(k)$ – отвечающий ему неособый корень уравнения (4.5). Между такими корнями имеет место взаимно-однозначная связь $\zeta_n(\varkappa) \rightleftharpoons \eta_n(k)$, определяемая соотношениями (4.40).

Как неособый, корень $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5) удовлетворяет соотношению

$$kh[-i\eta_n(k)] = \varkappa \not\to 0, \quad (\text{при} \quad k \to 0), \tag{4.45}$$

из которого, в частности, следует $\eta_n(k) \to \infty$. Поэтому для соответственного по (4.40) корня $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнения (4.7) справедливо

$$\Delta_3[\zeta_n(\varkappa), \varkappa] = 0 \quad \text{и} \quad \zeta_n(\varkappa) \to 0, \ \text{при } (k \to 0),$$

откуда, вследствие регулярности $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ по ζ и по $\varkappa$, вытекает равенство

$$\Delta_3(0, \varkappa) \equiv \Delta_3(0, \varkappa_n) = 0.$$

А это означает, что при $k \to 0$ переменная $\varkappa$ из (4.45) имеет пределом один из корней $\varkappa_n$ уравнения

$$\Delta_3(0, \varkappa_n) = 0, \tag{4.46}$$

определяющего множество корней ($\zeta = 0$, $\varkappa = \varkappa_n$) уравнения (4.7), проходящих через точку $\zeta = 0$, как через комплексный узел.

Уравнение (4.46) относительно $\varkappa_n$ имеет (как уравнение в регулярных функциях) счетное множество корней, и допускает простое аналитическое представление их, разрешимое в явной форме. При этом все его корни оказываются простыми.

Чтобы в этом убедиться достаточно воспользоваться результатами п. 2 и 3 и преобразовать выражения детерминантов $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ и $\Delta_2(\zeta, \varkappa)$ из (1.37) и (1.19) к рациональному их виду.

Действительно, из представления детерминанта $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ в форме разложения (4.15) по Лапласу при учете, что при $\zeta = 0$ из (4.17) следует $Q_5 = Q_6$получается

$$\Delta_3(0, \varkappa) = e^{-\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\mathcal{P}_2 Q_2 \left\{ \frac{\mathcal{P}_3 Q_3}{\mathcal{P}_2 Q_2} \left[e^{2\varkappa\beta_1} + \frac{\mathcal{P}_1 Q_1}{\mathcal{P}_3 Q_3} \right] + \right.$$
$$\left. + e^{2\varkappa\alpha_1} \left[e^{2\varkappa\beta_1} + \frac{\mathcal{P}_4 Q_4}{\mathcal{P}_2 Q_2} \right] \right\}. \tag{4.47}$$

При этом вследствие отсутствия в выражении $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ точек ветвления при $\zeta = \gamma_1$ и $\zeta = \delta_1$ везде далее при $\zeta = 0$ можно полагать

$$\alpha_1 = i\gamma_1, \quad \beta_1 = i\delta_1.$$

Значения же $g_\nu(0)$, $\alpha_\nu(0)$ и $\beta_\nu(0)$ при индексах $\nu = 0$ и $\nu = 2$ следует определять равенствами

$$g_\nu = -\delta_\nu^2, \quad \alpha_\nu = i\gamma_\nu(-)^{a_\nu}, \quad \beta_\nu = i\delta_\nu(-)^{b_\nu}, \quad (\nu = 0, 2), \tag{4.48}$$

где комбинациями величин

$$a_\nu = \left\{\begin{matrix} 0, & \operatorname{Im}\alpha_\nu(0) > 0 \\ 1, & \operatorname{Im}\alpha_\nu(0) < 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad b_\nu = \left\{\begin{matrix} 0, & \operatorname{Im}\beta_\nu(0) > 0 \\ 1, & \operatorname{Im}\beta_\nu(0) < 0 \end{matrix}\right\} \tag{4.49}$$

определяется лист римановой поверхности (ζ), на котором в окрестности точки $\zeta = 0$ рассматриваются неособые корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$.

Определители $\mathcal{P}_r(\zeta)$, $Q_r(\zeta)$ из (4.16) легко вычисляются в точке $\zeta = 0$, что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(0) &= -(\beta_1 g_2\mu_2 - \beta_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_2\mu_2 - \alpha_2 g_1\mu_1),\\
\mathcal{P}_2(0) &= -(\beta_1 g_2\mu_2 - \beta_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_2\mu_2 + \alpha_2 g_1\mu_1),\\
\mathcal{P}_3(0) &= (\beta_1 g_2\mu_2 + \beta_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_2\mu_2 - \alpha_2 g_1\mu_1),\\
\mathcal{P}_4(0) &= (\beta_1 g_2\mu_2 - \beta_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_2\mu_2 + \alpha_2 g_1\mu_1),\\
Q_1(0) &= -(\beta_1 g_0\mu_0 - \beta_0 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 - \alpha_0 g_1\mu_1),\\
Q_2(0) &= -(\beta_1 g_0\mu_0 + \beta_0 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 + \alpha_0 g_1\mu_1),\\
Q_3(0) &= -(\beta_1 g_0\mu_0 + \beta_0 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 - \alpha_0 g_1\mu_1),\\
Q_4(0) &= -(\beta_1 g_0\mu_0 - \beta_0 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 + \alpha_0 g_1\mu_1),
\end{aligned}$$

в правые части которых нужно еще подставить значения $\zeta = 0$. При этом для отношений определителей из (4.47) получаются следующие выражения

$$\begin{aligned}
U_s(0) &= \frac{-\mathcal{P}_1 Q_1}{\mathcal{P}_3 Q_3} = \frac{-\mathcal{P}_4 Q_4}{\mathcal{P}_2 Q_2} = \frac{(\beta_1 g_2\mu_2 - \beta_2 g_1\mu_1)(\beta_1 g_0\mu_0 - \beta_0 g_1\mu_1)}{(\beta_1 g_2\mu_2 + \beta_2 g_1\mu_1)(\beta_1 g_0\mu_0 + \beta_0 g_1\mu_1)} =\\
&= \frac{(\delta_2\mu_2 - \delta_1\mu_1(-)^{b_2})(\delta_0\mu_0 - \delta_1\mu_1(-)^{b_0})}{(\delta_2\mu_2 + \delta_1\mu_1(-)^{b_2})(\delta_0\mu_0 + \delta_1\mu_1(-)^{b_0})},\\
U_p(0) &= -\frac{\mathcal{P}_3 Q_3}{\mathcal{P}_2 Q_2} == \frac{(\alpha_1 g_2\mu_2 - \alpha_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 - \alpha_0 g_1\mu_1)}{(\alpha_1 g_2\mu_2 + \alpha_2 g_1\mu_1)(\alpha_1 g_0\mu_0 + \alpha_0 g_1\mu_1)} =\\
&= \frac{(\gamma_1\delta_2^2\mu_2 - \gamma_2\delta_1^2\mu_1(-)^{a_2})(\gamma_1\delta_0^2\mu_0 - \gamma_0\delta_1^2\mu_1(-)^{a_0})}{(\gamma_1\delta_2^2\mu_2 + \gamma_2\delta_1^2\mu_1(-)^{a_2})(\gamma_1\delta_0^2\mu_0 + \gamma_0\delta_1^2\mu_1(-)^{a_0})},
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Наличие равенства

$$\frac{\mathcal{P}_1 Q_1}{\mathcal{P}_3 Q_3} = \frac{\mathcal{P}_4 Q_4}{\mathcal{P}_2 Q_2}$$

в (4.50) приводит к представлению фигурной скобки из (4.47) в форме произведения

$$\left[e^{i2\varkappa\delta_1} + \frac{\mathcal{P}_1 Q_1}{\mathcal{P}_3 Q_3}\right]\left[e^{i2\varkappa\gamma_1} + \frac{\mathcal{P}_3 Q_3}{\mathcal{P}_2 Q_2}\right].$$

Вследствие этого, при учете обозначений (4.50), дисперсионное уравнение (4.46) (т.е. уравнение (1.37) при $\zeta = 0$) допускает запись в виде

$$\Delta_3(0,\varkappa) \equiv Ce^{-i\varkappa(\gamma_1+\delta_1)} S_p(\varkappa) S_s(\varkappa) = 0, \tag{4.51}$$

где $C = \mathcal{P}_2(0)Q_2(0) = \mathrm{const}$, а функции $S_p(\varkappa)$ и $S_s(\varkappa)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} S_p(\varkappa) &= e^{i2\varkappa\gamma_1} - U_p(0), \\ S_s(\varkappa) &= e^{i2\varkappa\delta_1} - U_s(0). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Таким образом, при $\zeta = 0$ дисперсионное уравнение (1.37) (принимающее вид (4.46)), расщепляется на два независимых уравнения

$$S_p(0) = 0 \quad \text{и} \quad S_s(0) = 0,$$

полные множества решений которых представляются в виде

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= \frac{-i}{2\gamma_1}\ln|U_p(0)| + \frac{1}{2\gamma_1}[2n\pi + \arg U_p(0)], \\ \varkappa_m &= \frac{-i}{2\delta_1}\ln|U_s(0)| + \frac{1}{2\delta_1}[2m\pi + \arg U_s(0)], \end{aligned} \tag{4.53}$$

при целочисленных значениях n и m.

11. Вслучае же дисперсионного уравнения (1.19) задачи для двухслойной среды из п. 1 §1, для приведения уравнения (4.7) к рациональной форме следует воспользоваться формулами (4.22), (4.16) и (4.23) п. 3. Из них следует, что при $\zeta = 0$ левая часть дисперсионного уравнения (1.19)

$$\Delta_2(\zeta,\varkappa) = 0$$

может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Delta_2(0,\varkappa) = -\mu_1^2\delta_1^4\mathcal{P}_2 e^{-\varkappa(\alpha_1+\beta_1)}\Bigg\{\frac{\mathcal{P}_3}{\mathcal{P}_2}\left[e^{+2\varkappa\beta_1} - \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_3}\right] + \\ + e^{2\varkappa\alpha_1}\left[e^{2\varkappa\beta_1} + \frac{\mathcal{P}_4}{\mathcal{P}_2}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

где

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_3} = \frac{-\mathcal{P}_4}{\mathcal{P}_2} = \left.\frac{\beta_1 g_2 \mu_2 - \beta_2 g_1 \mu_1}{\beta_1 g_2 \mu_2 + \beta_2 g_1 \mu_1}\right|_{\zeta=0}, \\
&\frac{\mathcal{P}_3}{\mathcal{P}_2} = -\left.\frac{\alpha_1 g_2 \mu_2 - \alpha_2 g_1 \mu_1}{\alpha_1 g_2 \mu_2 + \alpha_2 g_1 \mu_1}\right|_{\zeta=0}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

При этом значения g_k, α_k и β_k при $\zeta = 0$ должны определяться по (4.48) и (4.49).

Таким образом, дисперсионное уравнение (1.19) для случая двухслойной среды при значении $\zeta = 0$ представляется в форме произведения

$$\Delta_2(0, \varkappa) = -\mu_1^2 \delta_1^4 \mathcal{P}_2(0) e^{-\varkappa(\alpha_1+\beta_1)} S_p(\varkappa) S_s(\varkappa) = 0, \tag{4.56}$$

в котором функции $S_p(\varkappa)$ и $S_s(\varkappa)$ определяются выражениями (4.52) при условии, что величины $U_p(0)$ и $U_s(0)$ имеют теперь значения

$$\begin{aligned}
U_p(0) &= \frac{\gamma_1 \delta_2^2 \mu_2 - \gamma_2 \delta_1^2 \mu_1 (-)^{a_2}}{\gamma_1 \delta_2^2 \mu_2 + \gamma_2 \delta_1^2 \mu_1 (-)^{a_2}}, \\
U_s(0) &= \frac{\delta_2 \mu_2 - \delta_1 \mu_1 (-)^{b_2}}{\delta_2 \mu_2 + \delta_1 \mu_1 (-)^{b_2}}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Полученные здесь (и в п. 10) результаты допускают дальнейшие приложения в следующих двух направлениях. Во-первых, в проблеме поиска неособых корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнения (4.7) при небольших их индексах $n \geqslant 0$ в рабочей частотной полосе из (3.6), путем аналитического продолжения найденных значений $\{\zeta = 0, \varkappa = \varkappa_n\}$ корней при комплексных значениях $\varkappa = \varkappa_n$ – в требующуюся область вещественных значений $\varkappa > 0$. Такая проблема, представляющая для наших исследований основной интерес, обсуждается в п. 12.

И, во-вторых, в побочной для нас здесь задаче на построение (на основном листе плоскости (η)) главных членов асимптотических представлений при $kh \to 0$, $\eta_n(n) \to \infty$ корней $\eta = \eta_n(k)$ дисперсионного уравнения (4.5), записанного в форме метода контурных интегралов. Решение такой задачи, составляющее основное содержание статьи [8], получается из результатов (4.45) и (4.46) тривиальным путем.

Действительно, на основании изложенного в связи с формулами (4.45) и (4.46), соотношение (4.45) может быть переписано в виде

$$kh[-i\eta_n(k)] = \varkappa \to \varkappa_n.$$

Отсюда сразу же следует соотношение

$$\eta_n(k) \approx \frac{i\varkappa_n}{kh}, \quad (kh \to 0), \tag{4.58}$$

в котором под $\varkappa_n$ нужно понимать выражения $\varkappa_n$ или $\varkappa_m$ из (4.53) при значениях $U_p(0)$ и $U_s(0)$ из (4.50), или из (4.57) соответственно в случаях трехслойной и двухслойной сред. В раскрытой форме из (4.58) получается соотношение

$$\eta_n(k) = \frac{1}{kh}\left\{\frac{1}{2\gamma_1}\ln|U_p(0)| + \frac{i}{2\gamma_1}[2n\pi + \arg U_p(0)]\right\} \tag{4.59}$$

(и аналогично для $\eta_m(k)$) для главного члена асимптотического представления корней уравнения (4.5) задачи для трехслойной (или двухслойной) среды. Такое представление в точности совпадает с асимптотическими представлениями для корней $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5), полученными в статье [8].

Остается отметить, что на основном листе плоскости (ζ) (когда в (4.48) $a_\nu = b_\nu = 0$) оказывается $|U_p(0)| < 1$. Вследствие этого корни $\eta = \eta_n(k)$ и $\eta = \eta_m(k)$ из (4.59) располагаются в полуплоскости

$$\operatorname{Re}\eta < 0$$

и представляют собой (при $-\infty < \left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} < \infty$) множества, симметричные относительно вещественной оси. На неосновных же листах плоскости (η) такие корни могут располагаться и в полуплоскости $\operatorname{Re}\eta > 0$.

12. Возвращаясь к проблеме корней $\zeta = \zeta_n(k)$ дисперсионного уравнения (4.7), проходящих через узловую точку $\zeta = 0$, обсудим сначала вопрос об отображении по (4.40) корней $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5) с основного листа плоскости (η) на комплексную плоскость (ζ). При этом будем полагать, что разрезы на плоскости (η) проводятся вдоль мнимой оси между точками ветвления $\eta = \pm i/\gamma_\nu$ и $\eta = \pm i/\delta_\nu$ и, что $\arg \overset{0}{\alpha}_\nu = \arg \overset{0}{\beta}_\nu = 0$ при $\eta > 0$.

На основании соотношения

$$\zeta(\varkappa) \equiv \frac{1}{-i\eta(k)} \tag{4.60}$$

из (4.40) нетрудно убедиться, что 2-ой и 3-ий квадранты основного листа плоскости (η) отображаются соответственно в 4-ый и в 3-ий квадратнты плоскости (ζ). Листы же римановой поверхности, отвечающие этим квадрантам, определяются на основании последних соотношений из (4.40), из которых следует

$$\arg \alpha_\nu = \arg \overset{0}{\alpha}_\nu + \arg \zeta$$

и аналогично для β_ν. Промежутки, в которых находятся значения $\arg \overset{0}{\alpha}$ и $\arg \zeta$, когда корень $\eta = \eta_n(k)$ располагается в указанных втором и третьем квадрантах, легко определяются и показывают, что выполняются неравенства

$$0 < \left\{ \begin{array}{c} \arg \alpha_\nu \\ \arg \beta_\nu \end{array} \right\} < \pi .$$

Таким образом оказывается, что отображение корней $\eta = \eta_n(k)$ на корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ осуществляется на основных листах плоскостей (η) и (ζ). (Вследствие же этого при использовании представлений (4.53) и (4.50), или (4.53) и (4.57) следует полагать $a_\nu = b_\nu = 0$ для величин из (4.48), входящих в выражения (4.50) и (4.57)).

Что же касается сути результатов, полученных в п. 10 и 11, то в основном они сводятся к следующим трем утверждениям:

1) Множества неособых корней $\eta = \eta_n(k)$ и $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионных уравнений (4.5) и (4.7) (в форме метода контурных интегралов и метода Лемба) находятся во взаимно-однозначном соответствии.

2) Множества неособых корней $\eta = \eta_n(k)$ уравнения (4.5) находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\{\varkappa_n\}$ решений $\varkappa = \varkappa_n$ уравнения (4.46) (в регулярных функциях). И, наконец, как следствие таких двух утверждений.

3) Множество всех неособых корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ уравнения (4.7) находится во взаимно однозначном соответствии со множеством корней уравнения (4.46), или, что то же, со множеством $\{\zeta = 0, \varkappa = \varkappa_n\}$ коренй уравнения (4.7), проходящих через комплексную узловую точку $\zeta = 0$.

Из этого следует, что любой неособый корень $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (4.7) при вещественном аргументе $\varkappa > 0$, может быть получен из соответственного корня $(\zeta = 0, \varkappa = \varkappa_n)$

путем аналитического его продолжения вдоль подходяще выбранной кривой γ на комплексной плоскости переменной $\varkappa$ (см. п. 6–8). В качестве последней можно, в частности, брать угловую линию γ, состоящую из участка

$$\varkappa = \overset{0}{\varkappa}_n + iy, \quad (0 \leqslant y \leqslant y_0), \tag{4.61}$$

параллельного мнимой оси, где, например,

$$\overset{0}{\varkappa}_n = \frac{1}{2\gamma_1}[2\pi n + \arg U_p(0)], \quad y_0 = -\frac{1}{2\gamma_1} \ln |U_p(0)| > 0, \tag{4.62}$$

и участка

$$\varkappa = \overset{0}{\varkappa}_n + k, \quad (k > 0 \text{ или } k < 0),$$

совпадающего с отрезком вещественной оси. Само же продолжение осуществляется на базе решения задачи Коши для уравнения (4.30) при соответствующих начальных данных, решаемой при помощи итерационного метода Ньютона.

13. Уже упоминалось, что проблема особых корней дисперсионных уравнений (1.19) и (1.37) для двухслойной и трехслойной сред оказывается задачей, доставляющей много хлопот, если ставить целью определение всего множества таких корней, расположенных на многолистных римановых поверхностях. На первом этапе своего решения она сводится к нахождению начальных значений $\zeta = \zeta_n(0)$ корней при их аргументе $\varkappa = 0$ из уравнений

$$\Delta_2(\zeta, 0) = 0, \quad \Delta_3(\zeta, 0) = 0,$$

левые части которых допускают существенные упрощения путем вычитания соответствующих строк определителей друг из друга, перестановкой некоторых столбцов с последующим применением теоремы Лапласа. В результате выясняется, что указанные уравнения приводятся соответственно к уравнению Релея

$$g_2^2 - 4\zeta^2 \alpha_2 \beta_2 = 0 \tag{4.63}$$

в случае двухслойной среды, и к уравнению

$$\Delta(\zeta, \mu_0, \mu_2) \equiv \begin{vmatrix} \zeta, & \beta_0, & \zeta, & -\beta_2 \\ \alpha_0, & \zeta, & -\alpha_2, & \zeta \\ 2\mu_0\zeta\alpha_0, & \mu_0 g_0, & -2\mu_2\zeta\alpha_a, & \mu_2 g_2 \\ \mu_0 g_0, & 2\mu_0\zeta\beta_0, & \mu_2 g_2, & -2\mu_2\zeta\beta_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.64}$$

в случае трехслойной среды.

Корни уравнения Релея, определенные на 4-х листной поверхности (ζ), легко находятся численными методами. Определение же корней уравнения (4.64) на его 16-ти листной римановой поверхности оказывается существенно более сложной задачей. Путем исключения радикалов, уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению 64-ой степени, не допускающему эффективного решения. Поэтому здесь целесообразно положить, например, $\mu_0 = \sigma\mu_2$ и перейти сначала к вспомогательному уравнению

$$\Delta(\zeta, \sigma\mu_2, \mu_2) \equiv \overset{0}{\Delta}(\zeta, \sigma) = 0, \tag{4.65}$$

обращающемуся в уравнение (4.64) при

$$\sigma = \sigma_0 \equiv \mu_0/\mu_2,$$

и – сводящемуся к элементарному уравнению

$$\overset{0}{\Delta}(\zeta, 0) \equiv -\mu_2^2(g_2^2 - 4\zeta^2\alpha_2\beta_2)(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) = 0 \tag{4.66}$$

при $\sigma = 0$.

Восемь корней $\zeta = \overset{0}{\zeta}_k(0)$ такого уравнения, располагающихся на 16-ти листной поверхности (ζ), легко определяются численно. Для получения решений уравнения (4.64) остается продолжить аналитически эти корни по параметру σ в промежуток $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 = \mu_0/\mu_2$ в рамках задачи Коши

$$\frac{d\overset{0}{\zeta}}{d\sigma} = -\frac{\overset{0}{\Delta}_\sigma(\zeta, d\sigma)}{\overset{0}{\Delta}_\zeta(\zeta, \sigma)}, \quad \zeta\big|_{\sigma=0} = \overset{0}{\zeta}_k$$

для вспомогательного уравнения (4.65). При этом приходится внимательно следить за переходами корней $\zeta = \overset{0}{\zeta}_k(\sigma)$ с листа на лист поверхности (ζ) (если такие переходы происходят).

На втором этапе решения проблемы особых корней дисперсионных уравнений (1.19) и (1.37) приходится продолжать аналитически в область значений $\varkappa > 0$ найденные решения уравнений (4.63) и (4.64). Это производится на базе решения задачи Коши для уравнения (4.30) при начальных условиях $\zeta = \zeta_k(0)$, когда

$\varkappa = 0$. При этом также следует внимательно следить за возможными переходами корней с одного листа римановой поверхности на другой.

Описанный способ определения особых корней дисперсионных уравнений (применимый буквально и в случае многослойных пачек тонких слоев) работает эффективно. Однако он приводит к трудно-обозримым результатам вследствие распределения корней на многолистной римановой поверхности (ζ), из которой только основной лист, а также части нескольких неосновных листов (примыкающих к нему), играют роль в количественной оценке волновых полей. Поэтому при этом подходе к проблеме большая часть работы идет фактически впустую. Это заставляет искать более эффективных подходов к проблеме.

14. При вынужденном отказе (упоминавшемся уже неоднократно) от попыток полного изучения поведения всех корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионных уравнений рассматриваемого типа на комплексной плоскости (ζ), локальные методы такого изучения приобретают особо важное значение. А из локальных подходов к проблеме корней упомянутых уравнений наиболее эффективными и широко применимыми оказываются подходы, основанные на двух классических теоремах Коши о корнях регулярных функций (относящихся к самым основам теории функций комплексного переменного).

Условия применения этих теорем могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть l – простой замкнутый контур, не пересекающий сам себя, ограничивающий область (B) комплексной плоскости (ζ). Если функция

$$f(\zeta) \equiv \Delta(\zeta, \varkappa), \quad (\varkappa = \text{const}) \tag{4.67}$$

регулярна в области (B) вплоть до l, и на контуре l удовлетворяет условию

$$|f(\zeta)| > 0, \quad (\zeta \in l),$$

то справедливы следующие две теоремы Коши:

Теорема 1. *Число корней уравнения* (4.67) *в области* (B) *определяется выражением*

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta\Big|_{(l)} \arg f(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta\Big|_{(l)} \arg \Delta(\zeta, \varkappa), \qquad (4.68)$$

где символ $\Delta\Big|_{(l)}$ *означает приращение (функции* $\arg f(\zeta)$*) при обходе контура* l *один раз в положительном направлении (т.е. – против часовой стрелки). При этом кратные корни учитываются в значении* N *столько раз, каковы их кратности.*

Теорема 2. *Если, кроме вышеуказанного, уравнение* (4.67) *имеет в области* (B) *только простые корни* $\zeta = \zeta_k$*, то сумма значений всех корней* $\Sigma\zeta_k$ *в области* (B) *определяется выражением*

$$\sum_{(B)} \zeta_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(l)} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta, \qquad (4.69)$$

где $f(\zeta)$ *имеет значение из* (4.67).

Приведенные теоремы находят ценные приложения в проблемах изучения и оценки корней дисперсионных уравнений рассматриваемых интерференционных задач. Несмотря на сложность функциональной зависимости от ζ левых частей дисперсионных уравнений (1.19) и (1.37) компьютер легко (и достаточно быстро) вычисляет интегралы из (4.68) и (4.69). При этом вследствие заведомой относительной медленности изменения по ζ детерминанта $\Delta(\zeta, \varkappa)$ и его составляющих, во всех интересующих нас случаях низкочастотных волновых полей при вычислении интегралов оказывается оправданным применение численного дифференцирования $\Delta(\zeta, \varkappa)$ по переменной ζ. В результате, вычислительные алгоритмы оценок появления, расположения и перемещения корней в исследуемой области (B) (ограниченной контуром l), основанные на формулах (4.68) и (4.69), дополненные аналитическим продолжением корней вдоль соответствующих промежутков значений $\varkappa$, оказываются весьма эффективными. Такие алгоритмы являются наиболее простым и надежным средством определения корней дисперсионных уравнений, пересекаемых контуром λ из (3.2) при его деформации в соответствующие стационарные линии фазовых функций. Именно они и были положены (в конце концов) в основу решения проблемы корней во второй части этого исследования.

Остается еще подчеркнуть, во-первых, что обсуждаемые алгоритмы снимают упоминавшиеся ранее затруднения в проблеме особых корней, так как они дают оценку всех корней (неособых и особых), действительно пересекаемых контуром λ при его рациональной деформации, (что и требуется!). И, во-вторых, что наличие нескольких независимых способов определения корней дисперсионных уравнений позволяет сопоставлять получаемые в них результаты и, тем самым усиливает аргументы в пользу правильности приводимых окончательных результатов.

Что же касается иллюстрированной стороны исследования, то ее оказалось целесообразным отнести ко второй части настоящей статьи [7], публикуемой в этом же томе журнала.

§5. О вычислении полей объемных и головных интерференционных волн. Представления полей интерференционных мод

При обсуждении проблем, связанных с вычислением волновых полей, возбуждаемых в рассматриваемых двухслойной и трехслойной средах, также целесообразно исходить сначала из символического представления суммарных волновых полей повторными интегралами типа (3.1) и (3.2). При этом, ради несколько бо́льшей простоты изложения, достаточно рассматривать только плоские волновые поля, хотя все изложенное далее практически без изменений применимо и к полям, обладающим осевой симметрией, равно как и к общему случаю низкочастотных волновых полей.

1. Как известно, количественное изучение интерференционных волновых полей в слоистых средах оптимальными методами требует постановок задач на исследование полей, учитывающих пространственно-временные области (RT), в которых поле изучается. Подинтегральные функции в интегралах типа (3.2) имеют явно выраженный осцилляционный характер, что вызывает известные затруднения при попытках численной оценки волновых полей. Преодолеть такие затруднения естественным путем удается, обычно, лишь в случаях, когда при постановке задачи на исследование полей в представлениях полей появляются некоторые относительно “большие” параметры. При этом в задачах рассматриваемого типа таковыми оказываются величины

$$\frac{\lambda_{\text{дом}}}{h}, \quad \frac{x}{h} \;\text{ и }\; \frac{H}{h}, \tag{5.1}$$

где $\lambda_{\text{дом}}$ – доминирующая длина волны регистрируемого поля, x – эпицентральное расстояние точки наблюдения поля и H – расстояние (вдоль нормали) от точки наблюдения поля до тонкого слоя.

Ограничение снизу величины $\lambda_{\text{дом}}/h > q^{-1}$, эквивалентное неравенству

$$\varkappa \equiv \frac{\omega h}{v_{s1}} < 2\pi q, \tag{5.2}$$

физически означает, что исследования производятся в низкочастотной полосе спектра Фурье. Если величина $q > 0$ из (5.2) мала, то при любых значениях $x > 0$ кратные отраженные волны в слое интерферируют друг с другом и, следовательно, применение интерференционного представления (3.1), (3.2) поля адекватно существу дела. Если же величина $q > 1$ возрастает, то кратные волны, наблюдаемые при малых значениях $x > 0$, перестают интерферировать в то время, как такие же волны в областях бóльших значений x остаются еще в зоне интерференции. Поэтому при относительно больших значениях q в (5.2) применение представления поля в форме интегралов (3.1) и (3.2) в случае достаточно больших значений x адекватно действительности, а применение их при малых значениях $x > 0$ физически уже не оправдано, вследствие чего оно должно (или может) приводить к вычислительным затруднениям. В таком случае следует пользоваться другим (точным) математическим представлением волнового поля, отвечающим учету множества кратных волн, приходящих к точке наблюдения поля последовательно друг за другом. Изложенные соображения всегда следует учитывать при численном изучении волновых полей, представленных интерференционными интегралами типа (3.1) и (3.2), и – особенно в случаях встречи с затруднениями при оценке полей.

Как указывалось в §3, при низкочастотности изучаемого волнового поля (достаточной для обеспечения физической интерференции оцениваемых полей) устранение осцилляционных затруднений в оценках поля достигается при появлении в фазовой функции больших параметров

$$\frac{x}{h} \gg 1 \quad \text{и} \quad \frac{H}{h} \gg 1, \tag{5.3}$$

позволяющих прибегать к эффективным методам контурного интегрирования, описанным в §3.

В случае неравенств

$$\frac{x}{h} \leqslant 1, \quad \frac{H}{h} \gg 1 \tag{5.4}$$

для оценки интегралов вида (3.2), распространенных по стационарным контурам, можно применять такие же методы. Однако вычеты в корнях дисперсионного уравнения, пересекаемых исходным путем интегрирования (λ) при его деформации в стационарные линии фазовой функции, оказываются лишенными быстро затухающего при больших значениях x множителя $\exp[-\varkappa\psi(\zeta, x)]$. Это приводит в случае больших значений q из (5.2) к необходимости учета очень большого числа интерференционных мод, которые при малых значениях $x > 0$ не малы по модулю и лишены самостоятельного физического смысла.

Если же оказывается

$$\frac{H}{h} \leqslant 1, \quad \frac{x}{h} \gg 1, \tag{5.5}$$

то наиболее рациональным способом оценки интегралов типа (3.2) является разложение их в ряды по вычетам в полюсах, совпадающих со всеми корнями дисперсионного уравнения (3.7), пересекаемых контуром λ при его деформации на бесконечность в полуплоскости

$$\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0.$$

При этом разрезы от точек ветвления $\zeta = \gamma_k$ и $\zeta = \delta_k$ следует деформировать в указанную полуплоскость и совмещать со стационарными линиями l_{γ_k} и l_{δ_k} наибыстрейшего возрастания реальной части фазовой функции, определяемыми уравнениями

$$\operatorname{Im}\psi(\zeta, x) = \operatorname{Im}\psi(\gamma_k, x) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\psi(\zeta, x) = \operatorname{Im}\psi(\delta_k, x)$$

и совпадающими практически с полупрямыми

$$\operatorname{Re}\zeta = \gamma_k \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\zeta = \delta_k \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0.$$

В результате такой деформации контур λ сводится к петлям Γ_{γ_k} и Γ_{δ_k}, охватывающими указанные разрезы. Пересекаемые же им корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения оказываются расположенными как на основном (исходном) листе комплексной плоскости (ζ), так и на участках побочных листов, находящихся справа от продеформированных разрезов. При этом в случае сильного выполнения неравенства $x/h \gg 1$ получающиеся ряды по вычетам оказываются быстросходящимися.

Наконец, в случае выполнения неравенств

$$\frac{x}{h} \leqslant 1, \quad \frac{H}{h} \leqslant 1 \tag{5.6}$$

никакая деформация исходного пути интегрирования λ не улучшает ситуацию, связанную с оценкой интеграла (3.2). Здесь следует отказаться от представления возбуждаемого в среде поля в форме интерференционных интегралов типа (3.2) и (3.1), и обратиться к рассмотрению этого же поля в форме наложения (бесконечного) множества кратных (неинтерференционных) многократно отраженных волн [10, 11]. В области значений из (5.6) интенсивности (или амплитуды) кратных волн быстро затухают при увеличении их кратностей. Поэтому в упомянутом наложении учету подлежит сравнительно небольшое число волн с наименьшими их кратностями $(n_p + m_s)$.

В приложениях наиболее часто встречается необходимость получения количественных оценок волновых полей из (3.1) и (3.2) в случаях выполнения неравенств (5.3)–(5.5). Поэтому в основу последующего можно положить случай неравенств (5.3), а результаты для случаев (5.4) и (5.5) – получать из него как "предельные" в смысле численной их реализации.

Здесь остается лишь отметить, что знак "много больше" в соотношениях (5.3)–(5.5) не следует понимать буквально. Входящие в них величины, например, h и H имеют смысл показателей меры осцилляции функций вида $\exp(i\varkappa h)$ и $\exp(i\varkappa H)$, характеризующих качественно возможную степень осцилляции функций $X_n(\zeta, \varkappa)$ (или $\Delta(\zeta, \varkappa)$) и $\exp[-\varkappa\psi(\zeta, x)]$, входящих под знак интеграла в (3.2). При таком смысле величин h и H уже при $H = 4h$ можно полагать, что выполняется неравенство $h \ll H$.

2. При обращении к количественной оценке волновых полей, представленных в форме повторных интегралов (3.1), (3.2) метода Лемба, можно рекомендовать придерживаться следующей последовательности действий.

1) В соответствии с областью (RT), где требуется произвести оценку волнового поля, заданного в форме интегралов (3.1) и (3.2), выбирается профиль (или профили) Ox с пикетными точками $x = x_p$ $(p = 1, 2, \ldots, N)$, в которых предполагается оценивать поле.

2) Для каждой точки $x = x_p$ профиля строится стационарная линия λ_0 наибыстрейшего возрастания реальной части фазовой

функции $\psi = \psi(\zeta, x, \dots)$ из (3.3), проходящая через ее седловую точку, а также – подобные же линии l_γ и l_δ с вершинами в возможных точках ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ подинтегральной функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ из (3.2), не охватываемых сверху контуром λ_0 (см. п. 8, §3). В результате определяется кусочная область (B), точки которой пересекаются исходным контуром λ из (3.2) при его деформации в стационарный контур λ_0 и в петли Γ_γ и Γ_δ, охватывающие продеформированные разрезы l_γ и l_δ. При этом для наглядности и удобства последующих оценок рекомендуется построенный стационарный контур λ_0, а также (возможно) и контуры l_γ и l_δ, снабжать реперными отметками $\rho = \rho_k$, $(\rho_k < \rho_{k+1})$, где

$$\rho_k = \operatorname{Re}\psi(\zeta_k, x), \quad (\zeta_k \in \lambda_0). \tag{5.7}$$

По реперным точкам $\zeta = \zeta_k$ контура λ_0 следует строить стационарные линии

$$\operatorname{Re}\psi(\zeta, x) = \rho_k > 0 \tag{5.8}$$

постоянства значений экспоненты

$$N(\zeta) \equiv |\exp[-\psi(\zeta, x)]\,| = \exp[-\operatorname{Re}\psi(\zeta_k, x)], \tag{5.9}$$

позволяющих легко оценивать порядок величин

$$|\exp[-\varkappa\psi(\zeta, x)]\,| \tag{5.10}$$

экспоненциальных множителей подинтегральных функций из (3.2). А это дает возможность оценивать порядки величин вычетов подинтегральных функций из (3.2) в корнях $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), и на основании этого отбрасывать корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, не существенные для оценки величины интеграла (3.2).

3) На участках областей (B) из п. 2) производится поиск корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7). Начинать здесь следует со случая особых корней, наличие (и значения) – или отсутствие которых на основном листе римановой поверхности (ζ) (а также – на участках побочных ее листов, прилегающих к основному –) устанавливается на основании теоремы No 2 Коши (см. п. 14, §4) с уточнением полученных значений $\zeta = \zeta_n$ по Ньютону. Найденные таким образом значения корней $\zeta = \mathring{\zeta}_k$ затем продолжаются аналитически по $\varkappa > 0$ во все точки $\varkappa$ рабочей частотной полосы (3.6).

Что же касается неособых корней $\zeta = \zeta(\varkappa)$ уравнения (3.7), находящихся при $\varkappa = 0$ на бесконечности, и приходящих в рассматриваемую часть области (B) при некоторых значениях $\varkappa > \overset{\circ}{\varkappa}$, то их также удобно определять по естественным алгоритмам, основанным на теоремах Коши (о корнях). При этом только теорему No 2 приходится применять при каждом значении $\varkappa = \overset{\circ}{\varkappa}_k$ из такой последовательности

$$\overset{\circ}{\varkappa}_1 < \overset{\circ}{\varkappa}_2 < \overset{\circ}{\varkappa}_3 < \ldots \tag{5.11}$$

значений $\overset{\circ}{\varkappa}_k > 0$, при которых в рассматриваемой части области (B) число корней изменяется на единицу при изменении на единицу индекса k у члена последовательности из (5.11).

Не касаясь деталей вполне очевидного алгоритма (сочетающего результаты применения теоремы No 2 при $\varkappa = \overset{\circ}{\varkappa}_k$ с аналитическим продолжением найденного корня $\zeta = \zeta_k(\overset{\circ}{\varkappa}_k)$ в область значений $\varkappa > \overset{\circ}{\varkappa}_k$ и с вычитанием вычисленного значения $\zeta_k(\overset{\circ}{\varkappa}_{k+1})$ из результата применения теорема No 2 при значении $\varkappa = \overset{\circ}{\varkappa}_{k+1}$) лишь отметим, что обсуждаемый способ построения корней в области (B) оказывается весьма эффективным. Он позволяет исчерпывающе полно определять значения корней дисперсионного уравнения (3.7), находящихся в области (B), или проходящих через нее, причем затраты машинного времени на его применение оказываются незначительными.

3. Однако определение корней дисперсионного уравнения в области (B) можно производить и при помощи алгоритма из п. 12, §4, основанного на аналитическом продолжении в рабочую частотную полосу (3.6) корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, проходящих в комплексные "моменты" $\varkappa = \varkappa_n$ и $\varkappa = \varkappa_m$ из (4.53), (4.50), или из (4.53), (4.57) через узловую точку $\zeta = 0$. Такие продолжения осуществляются вдоль (комплексных) линий $\varkappa = \gamma_p(y)$, $(0 < y < y_0)$ на плоскости $(\varkappa)$ до выхода точки $\varkappa = \gamma_p(y)$ на вещественную ось при некотором значении $\varkappa = \overset{\circ}{\varkappa}_p = \gamma_p(y_0)$. При этом по линии $\zeta = l_p^0(\varkappa)$ корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ на плоскости (ζ), отвечающей точкам комплексной линии $\varkappa = \gamma_p(y)$, устанавливается наличие или отсутствие переходов точек $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ (при $\varkappa = \gamma_p(y)$) на другие листы комплексной плоскости (ζ).

Что же касается вещественных значений $\varkappa = \overset{\circ}{\varkappa}_p$ с отвечающими им значениями $\overset{\circ}{\zeta}_p = \zeta_p(\overset{\circ}{\varkappa}_p)$ корней дисперсионного уравнения (3.7), то они используются в качестве начальных данных для аналитического продолжения корней в области $\varkappa < \varkappa_p^0$ и $\varkappa > \varkappa_p^0$ значений вещественного аргумента $\varkappa$ с целью выхода в рабочую частотную полосу (3.6).

Указанный способ определения корней дисперсионного уравнения (3.7) достаточно эффективен. Его целесообразно применять для контроля правильности результатов, полученных на основе применения теорем Коши.

К изложенному остается еще присовокупить, что в заключение изучения корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), располагающихся на тех или иных участках области (В) (определенной в разделе п. 2). или – проходящих через них, рекомендуется на рассматриваемых участках листов плоскости (ζ) строить линии $\tilde{l}_p$ корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.7), отвечающих значениям $\varkappa$ из рабочей частотной полосы (3.6). Такие линии следует снабжать реперными отметками значений аргумента $\varkappa$, отвечающего характерным их точкам. При этом рассмотрение линий корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ следует производить совместно со стационарными линиями из (5.8) (постоянства величин из (5.9)), чтобы на основании реперных отметок можно было судить о порядке величины экспоненциального множителя $|\exp[-\varkappa\psi(\zeta, x)]|$ из (5.10) в точках области (В). Такое рассмотрение предоставляет все необходимые основания для учета (или для исключения из учета) корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, попадающих в область (В), вычеты подинтегральных функций из (3.2) в которых следует (не следует) принимать во внимание при суммарной оценке волнового поля, представляемого интегралами (3.1) и (3.2).

4. Затронутые в п. 2 вопросы, составляющие содержание основной вспомогательной задачи исследования, оказались связанными с деформацией исходного пути интегрирования λ из (3.2) в стационарную линию λ_0 (наибыстрейшего возрастания $\mathrm{Re}\,\psi$) фазовой функции ψ, проходящую через седловую точку $\zeta = \zeta_0$, а также – в петли Γ_γ и Γ_δ, охватывающие разрезы l_γ и l_δ с вершинами в точках ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ “медленно изменяющейся” части $X_n(\zeta, \varkappa)$ подинтегральной функции, продеформированные в подобные же стационарные линии. В результате такой деформации спектральная функция Φ из (3.2) оказывается представлен-ной суммой

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\lambda_0+\Gamma_\gamma+\Gamma_\delta)} X_n(\zeta, \varkappa) e^{-\varkappa\psi(\zeta,x)} d\zeta - \sum_{(q)} I_q(x, \varkappa) \tag{5.12}$$

интегралов по трем стационарным контурам λ_0, Γ_γ и Γ_δ, а также – множества вычетов подинтегральной функции из (3.2) во всех корнях $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), пересеченных контуром λ при указанной его деформации. Подходы и методы изучения и оценки интегралов существенно отличаются от подходов к изучению полей интерференционных мод, отвечающих слагаемым $I_p(x, \varkappa)$ из (5.12). Вследствие этого их естественно и рассматривать раздельно.

Таким образом, дальнейшие исследования подразделяются на две независимые части, причем первая из них посвящена волновым полям объемных и головных интерференционных волн, связанных с изучением и оценкой интегралов, типа интегралов из (5.12).

5. Если петли Γ_γ и Γ_δ, охватывающие разрезы l_γ и l_δ, уже совмещены с берегами разрезов, то во всех точках ζ путей интегрирования в интегралах из (5.12) оказывается

$$\operatorname{Im} \psi(\zeta, x) = c_0(x) = \text{const} \tag{5.13}$$

при соответствующих значениях постоянной $c_0(x)$. Вследствие этого основной экспоненциальный множитель

$$\exp\big[-\varkappa\psi(\zeta, x)\big]$$

под знаком интегралов в (5.12) не осциллирует и монотонно убывает по модулю наибыстрейщим образом при удалении переменной точки ζ вдоль контуров λ_0, l_γ и l_δ соответственно от точек $\zeta = \zeta_0$, $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$. При этом подинтегральные функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ из (3.2) имеют полюсы (как правило, 1-го порядка) в корнях $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), которые могут выходить и на пути интегрирования λ_0, l_γ и l_δ.

Если при рассматриваемом значении $\varkappa$ (из рабочего частотного интервала (3.6)) ни один из корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.6) не пересекает точек $\zeta = \zeta_0$, $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$, то каждый из путей интегрирования целесообразно разбивать на две части

$$\lambda_0 = \lambda_0^+ + \lambda_0^-, \quad \Gamma_\gamma = l_\gamma^+ - l_\gamma^-, \quad \Gamma_\delta = l_\delta^+ - l_\delta^- \tag{5.14}$$

соответственно точками $\zeta = \zeta_0$, $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$, где значком $+$ (значком $-$) помечены участки стационарных контуров, обходимых от точек $\zeta = \zeta_0$, $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ на бесконечность в положительном (в отрицательном) направлении. Такими же значками $(+,-)$ помечаются и функции $X_n(\zeta,\varkappa)$ из (3.2) интегралов, распространенных на частичные пути интегрирования из (5.14). Наконец, в каждом из интегралов, распространенных по соответствующему частичному стационарному пути из (5.14), производится замена переменной интегрирования ζ на новую переменную

$$\rho \equiv \rho(\zeta) = \psi(\zeta, x) - ic_0(x) \equiv \operatorname{Re}\psi(\zeta, x) > 0, \tag{5.15}$$

между которыми существует (вследствие монотонности изменения функции $\rho(\zeta)$ при изменении ζ вдоль стационарного контура) очевидная взаимно-однозначная связь $\zeta \rightleftarrows \rho$ с соответствующей обратной функцией

$$\zeta = \zeta(\rho). \tag{5.16}$$

Производя указанные замены переменной интегрирования и учитывая формулу

$$d\zeta = \frac{d\rho}{\psi'_\zeta[\zeta(\rho), x]}, \tag{5.17}$$

в которой под $\zeta = \zeta(\rho)$ подразумевается функция (5.16), отвечающая рассматриваемому частичному пути интегрирования из (5.14), очевидно, получаем последовательно следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma \equiv & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Gamma_\gamma)} X_n(\zeta,\varkappa) e^{-\varkappa\psi(\zeta,x)} d\zeta = \\ = e^{-i\varkappa c_\gamma} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_\gamma^+} \left[\frac{X_n^+(\zeta,\varkappa) - X_n^-(\zeta,\varkappa)}{\psi'_\zeta(\zeta,x)}\right]_{\zeta=\zeta_\gamma(\rho)} e^{-\varkappa\rho}\, d\rho,\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\Phi_\delta \equiv & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Gamma_\delta)} X_n(\zeta,\varkappa) e^{-\varkappa\psi(\zeta,x)} d\zeta = \\ = e^{-i\varkappa c_\delta} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_\delta^+} \left[\frac{X_n^+(\zeta,\varkappa) - X_n^-(\zeta,\varkappa)}{\psi'_\zeta(\zeta,x)}\right]_{\zeta=\zeta_\delta(\rho)} e^{-\varkappa\rho}\, d\rho,\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\lambda_0)} X_n(\zeta, \varkappa) e^{-\varkappa\psi(\zeta,x)} d\zeta =$$

$$= e^{-i\varkappa c_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \left[\frac{X_n[\zeta^+(\rho), \varkappa]}{\psi'_\zeta[\zeta^+(\rho), x]} - \frac{X_n[\zeta^-(\rho), \varkappa]}{\psi'_\zeta(\zeta^-(\rho), x]} \right] e^{-\varkappa\rho}\, d\rho, \quad (5.20)$$

в которых обозначено

$$c_\gamma = \operatorname{Im}\psi(\gamma, x), \quad c_\delta = \operatorname{Im}\psi(\delta, x), \quad c_0 = \operatorname{Im}\psi(\zeta_0, x). \qquad (5.21)$$

Здесь l_γ^+ и l_δ^+ – правые берега разрезов l_γ и l_δ (совпадающих со стационарными линиями наибыстрейшего возрастания величины $\operatorname{Re}\psi(\zeta, x)$), идущих от точек ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ на бесконечность, а $\zeta = \zeta_\gamma(\rho)$ и $\zeta = \zeta_\delta(\rho)$ функции типа (5.16) для таких линий. Что же касается функций $\zeta = \zeta^+(\rho)$ и $\zeta = \zeta^-(\rho)$ из (5.20), то это функции типа (5.16) для полуконтуров λ_0^+ и $(-\lambda_0^-)$ из (5.14). При этом знаки $(-)$ перед функциями X_n^- в (5.18), (5.19) и перед функцией $X_n[\zeta^-(\rho), \varkappa]$ в (5.20) – следствие того обстоятельства, что положительные направления линий l_γ^-, l_δ^- и λ_0^- противоположным направлениям возрастания величин ρ из (5.15).

В интегралах (5.18) и (5.19) выражения

$$X_n^+(\zeta, \varkappa) - X_n^-(\zeta, \varkappa)$$

обозначают разность (в текущей точке $\zeta = \zeta(\rho)$) значений функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ с правого (положительного) и с левого (отрицательного) берегов разрезов l_γ и l_δ. При этом выражение

$$\psi'_\zeta \equiv \psi'_\zeta[\zeta(\rho), x] \qquad (5.22)$$

из знаменателя подинтегральных функций в (5.18) и (5.19) в нуль нигде не обращается, а интегрирование выполняется в бесконечных пределах $0 < \rho < \infty$.

Напротив того, выражение (5.22) обращается в нуль в седловой точке $\zeta = \zeta_0$, в окрестности которой справедливы разложения

$$\begin{gathered}
\psi'_\zeta(\zeta, x) = \psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)(\zeta - \zeta_0) + \ldots, \\
\rho \equiv \psi(\zeta, x) - ic_0(x) = \frac{1}{2}\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots, \qquad (5.23) \\
\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left|\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)\right|.
\end{gathered}$$

Второе из них устанавливает вид функций из (5.16) в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$

$$\left.\begin{matrix}\zeta^+ - \zeta_0 \\ \zeta^- - \zeta_0\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right\} \left|\frac{2}{\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)}\right|^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\rho} \tag{5.24}$$

для участков λ_0^+ и λ_0^- из (5.14) контура λ_0. Первое же соотношение из (5.23) (при учете равенств (5.24)) приводит к порядковым представлениям

$$\left.\begin{matrix}\psi'_\zeta(\zeta^+, x) \\ \psi'_\zeta(\zeta^-, x)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right\} \sqrt{2|\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)|}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\rho}, \tag{5.25}$$

справедливым в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$. На основании этого можно утверждать, что в окрестности точки $\rho = 0$ выражение в квадратных скобках под знаком интеграла в (5.20) представляется в следующей форме

$$\begin{gathered}[\quad] = \frac{a}{\sqrt{\rho}}\big(1 + O(\rho)\big), \\ a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{X_n(\zeta_0, \varkappa)}{\sqrt{|\psi''_{\zeta^2}(\zeta_0, x)|}}.\end{gathered} \tag{5.26}$$

Таким образом, особенность в точке $\rho = 0$ подинтегральной функции в (5.20) оказывается интегрируемой. Вследствие этого при вычислении значений функции Φ_0 можно пользоваться выражением (5.20), если нижний предел интегрирования (нуль) заменить на достаточно малое число $\varepsilon > 0$. (При этом абсолютная ошибка вычисления интеграла окажется величиной порядка $a\sqrt{\varepsilon}/2\pi$.) Однако для более точного вычисления интеграла (5.20) можно устранить его особенность в точке $\rho = 0$. Для этого достаточно произвести, например, почленное вычитание из подинтегральной функции интеграла (5.20) значения подинтегральной функции следующего табличного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{a}{\sqrt{\rho}} e^{-\varkappa\rho}\, d\rho = \frac{a}{2i\sqrt{\pi\varkappa}}. \tag{5.27}$$

В результате получится представление

$$\Phi_0(\varkappa, x) = \frac{a}{2i\sqrt{\pi\varkappa}} e^{-i\varkappa c_0(x,)} + \frac{e^{-i\varkappa c_0(x,)}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \left\{\left[\frac{X_n(\zeta^+(\rho),\varkappa)}{\psi'_\zeta(\zeta^+(\rho),x,)}-\frac{X_n(\zeta^-(\rho),\varkappa)}{\psi'_\zeta(\zeta^-(\rho),x,)}\right]-\frac{a}{\sqrt{\rho}}\right\}e^{-\varkappa\rho}d\rho, \qquad (5.28)$$

постоянная a в котором имеет значение из (5.26).

6. При получении выражений (5.18)–(5.20) и (5.28) предполагалось, что при рассматриваемом значении частотного параметра $\varkappa > 0$ ни один из корней дисперсионного уравнения (3.7) не совпадает с точками ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ "медленно изменяющейся" части $X_n(\zeta, \varkappa)$ подинтегральной функции из (3.2), а также – с седловой точкой $\zeta = \zeta_0$ фазовой функции $\psi(\zeta, x,)$. Помимо же этого считалось, что все интегралы из (5.12) существуют. Чтобы оценить зна́чимость таких предположений следует уточнить общий вопрос о смысле контурных интегралов от регулярных функций, когда на их путях интегрирования располагаются корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7).

Если учесть дискретность расположения корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости (ζ), а также – факт появления корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ на пути интегрирования l лишь путем "сближения" $(\zeta_p \to \zeta_0)$ корня $\zeta_p = \zeta_p(\varkappa)$ с некоторой точкой $\zeta_0 \in l$, принадлежащей контуру l_0, то становится очевидным, что выяснение поставленных вопросов сводится, в основной своей части, к свойствам интегралов типа Коши

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \frac{F(\zeta')}{\zeta'-\zeta}d\zeta' \qquad (5.29)$$

от регулярной функции $F(\zeta)$ при гладком (т.е. непрерывном с непервыми производными) пути интегрирования l. Достаточные для нашей цели его свойства сводятся к следующему.

Пусть l – гладкий направленный контур, соединяющий точки A и B комплексной плоскости (ζ) в области, где $F(\zeta)$ регулярна, и пусть $\zeta = \zeta_0$ – некоторая внутренняя точка этого контура. Назовем правой (левой) стороной контура l такую часть плоскости (ζ), которая остается справа (слева), если перемещаться вдоль l в положительном его направлении. Тогда, если точка $\zeta \to \zeta_0$ стремится к точке $\zeta_0 \in l$ (вдоль некасательного пути l_0), то функция $f(\zeta)$ из (5.29) стремится к пределу, равному

$$\lim_{\zeta_0\to\zeta_0} f(\zeta) = \mp\frac{F(\zeta_0)}{2} + PV\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)}\frac{F(\zeta')}{\zeta'-\zeta_0}d\zeta', \qquad (5.30)$$

в котором знак $(-)$ (знак $+$) соответствует стремлению $\zeta \to \zeta_0$ справа (слева) от l. При этом знак PV перед интегралом означает, что интеграл понимается в смысле главного значения (Коши).

Если же в концевой точке $\zeta = B = \gamma$ контура l функция $F(\zeta)$ обращается в нуль, например, как функция

$$F(\zeta) = \sqrt{\zeta - \gamma}\, F_1(\zeta), \tag{5.31}$$

где $F_1(\zeta)$ – регулярна в окрестности точки $\zeta = \gamma$, то при стремлении $(\zeta \to \gamma)$ точки ζ к точке $\zeta = \gamma$ вдоль некасательного пути интеграл (5.29), (5.31) стремится, очевидно, к пределу, равному несобственному интегралу

$$\lim_{\zeta \to \gamma} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^\gamma \frac{F_1(\zeta')}{\sqrt{\zeta' - \gamma}}\, d\zeta'. \tag{5.32}$$

К изложенному здесь следует присовокупить, во-первых, что при дальнейшем применении приведенных утверждений к интегралам из (5.12) (или к интегралам из (5.18)–(5.20)) существенным является лишь факт существования пределов, когда корень $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения приближается к той или иной точке $\zeta = \zeta_0$ пути интегрирования. Во-вторых же, что вторая часть утверждения, связанная с формулой (5.32), относится в рассматриваемых задачах лишь к случаям концевых точек $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$, являющихся вершинами разрезов, вдоль берегов которых (в противоположенных направлениях) производится интегрирование. Поэтому в окрестности вершины, например, $\zeta = \gamma$ подинтегральная функция (играющая здесь роль функции $F(\zeta)$ из (5.29)) представляется в виде

$$F(\zeta) = F_0(\zeta) + \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}\, F_1(\zeta), \tag{5.33}$$

где $F_0(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$ – регулярные функции. Вследствие отсутствия у функции $F_0(\zeta)$ ветвлений, интеграл вида (5.29), (5.33) вдоль берегов разреза сводится к интегралу вида

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^\gamma \frac{\sqrt{(\zeta')^2 - \gamma^2}}{\zeta' - \zeta} F_1(\zeta')\, d\zeta',$$

тождественного по структуре интегралу (5.29), (5.31). Таким образом, из наличия предела (5.32) следует существование пределов у интегралов вида (5.18) и (5.19) при стремлении корня $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ к вершинам $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ их разрезов.

7. Теперь уже можно обратиться к обсуждению вопросов, связанных с присутствием на путях интегрирования интегралов из (5.12), или из (5.18)–(5.20) корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7). В соответствии с §4 и §5, здесь следует различать два способа "выхода" корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ на стационарные пути интегрирования указанных интегралов. Первый из них соответствует деформации (при некотором значении $\varkappa = \varkappa_0$) исходного пути интегрирования λ из (3.2) в стационарные линии λ_0, Γ_γ и Γ_δ, обозначаемые суммарно как контур l_0. (Заметим, что здесь и далее предполагается, что петли Γ_γ и Γ_δ уже стянуты в берега разрезов l_γ и l_δ.) Второй же способ – отвечает случаю уже законченной при $\varkappa = \varkappa_0$ деформации контура λ в стационарный контур l_0 (т.е. в контуры λ_0, Γ_γ и Γ_δ), которые пересекаются корнями $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дополнительно вследствие перемещения последних по плоскости (ζ) при возрастающих значениях $\varkappa > \varkappa_0$ частотного параметра $\varkappa$.

В первом случае расположение продеформированного контура l_0 разделяет множество корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.7) на три группы: а) на группу R корней, уже пересеченных контуром λ при его деформации в контур l_0; в) на группу корней, не затронутых еще контуром λ. И, наконец, с) на возможную группу корней (состояшую, как правило, из одного корня), очутившихся на контуре l_0.

Корни 1-ой группы при пересечении их контуром λ интеграла (3.2) выделяют из поля $\Phi(x, \varkappa)$ сумму вычетов подинтегральной функции из (3.2) (с обратным знаком) во всех корнях группы R. Корни 2-ой группы в вычислении поля Φ не участвуют. Что же касается корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ третьей группы, то они могут выходить на контур l_0 (при некотором значении $\varkappa = \varkappa_0$) только из области значений ζ, расположенных справа от контура l_0 (на который наталкивается контур λ при деформации его в стационарный контур l_0). При этом появление в подинтегральной функции $X_n(\zeta, \varkappa)$ интеграла из (3.2) (при $\lambda = l_0$) корня $\zeta = \zeta_0$ уравнения (3.7) на пути интегрирования, связанное фактически с наличием у функции $X_n(\zeta,\varkappa)$ множителя, подобного множителю вида

$$\frac{F_n(\zeta,\varkappa)}{\zeta-\zeta_0}, \quad (\zeta\in l_0) \tag{5.34}$$

придает интегралу (3.2) значение, являющееся пределом при $\zeta_p(\varkappa)\to\zeta_0$ от интеграла (3.2), в котором у множителя из (5.34) в выражении $X_n(\zeta,\varkappa)$ значение ζ_0 заменено на значение корня $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$, расположенного справа от контура l_0 и стремящегося к точке $\zeta=\zeta_0$ как к практическому пределу (см. п. 6).

Во втором же случае, когда контур l_0 (т.е. какой-то из контуров λ_0, Γ_γ и Γ_δ) фиксирован, а выход корней $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.7) на контур l_0 осуществляется в результате перемещения корней по плоскости (ζ) при возрастании их аргумента $\varkappa>\varkappa_0$, следует различать подслучаи стремления корня $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$ к точке $\zeta=\zeta_0\in l_0$ с правой, или с левой стороны от контура l_0.

Если корень $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), находящийся справа от контура l_0, стремится к точке $\zeta=\zeta_0\in l_0$ (т.е. $\zeta_p\to\zeta_0$), то интеграл (3.2) при $\lambda=l_0$ с функцией $X_n(\zeta,\varkappa)$, содержащей множитель

$$\frac{F_0(\zeta,\varkappa)}{\zeta-\zeta_p(\varkappa)} \tag{5.35}$$

типа (5.34), стремится к пределу, который, как раз, и определяет значение интеграла (3.2) при $\lambda=l_0$ и $\zeta_0=\zeta_p(\varkappa)\in l_0$ (содержащего на своем пути интегрирования корень $\zeta=\zeta_0$ дисперсионного уравнения).

Если же корень $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.7), находящийся слева от контура l_0 и, следовательно, уже внесший свой вклад в спектральную функцию Φ (равный минус вычету $a_{-1}(\widetilde{\zeta_p})\equiv I_0(x,z,\varkappa)$ подинтегральной функции в корне $\zeta=\zeta_p(\varkappa)$), стремится к точке $\zeta_0\in l_0$, то значение интеграла (3.2) при $\lambda=l_0$ с функцией $X_n(\zeta,\varkappa)$, содержащей (фактически) множитель типа (5.35), минус значение $I_0(x,z,\varkappa)$ упомянутого вычета, стремятся совместно к пределу, который как раз и определяет значение интеграла (3.2) (при $\lambda=l_0$) и $\zeta_0=\zeta_p(\varkappa)\in l_0$. При этом указанные пределы при $\zeta_p(\varkappa)\to\zeta_0\in l_0$ справа и слева, как нетрудно видеть, одинаковы.

Таким образом, в случае появления корня $\zeta=\zeta_n(\varkappa)$ уравнения (3.2) в точке $\zeta_p(\varkappa)=\zeta_0\in l_0$ пути интегрирования $\lambda=l_0$ интеграла

(3.2), следует установить, каким путем корень $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.7) вышел в точку $\zeta_0 \in l_0$. После этого искомое значение интеграла (3.2) при $\lambda = l_0$ и $\zeta_p(\varkappa) = \zeta_0 \in l_0$ следует определять посредством практического предела, тип которого выбирается на основании вышеизложенного.

8. Обратимся, наконец, ко второй (независимой) части нашей проблемы, связанной с оценкой вкладов в суммарное волновое поле вычетов подинтегральной функции (исходного представления поля) из (3.2) в полюсах, совпадающих с корнями $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), пересекаемых контуром λ из (3.2) при его рациональной деформации. Поля, отвечающие таким вычетам, принадлежат к типу интерференционных мод, представляющих существенный прикладной интерес, так как они несут прямую информацию о внутреннем строении слоистой среды. Поэтому по поводу вычисления таких полей, равно как и некоторых их свойств, уместно сделать несколько замечаний, причем сначала – касающихся техники вычисления вычетов.

В аналитическом представлении интерференционных волновых полей в форме повторных интегралов вида (3.1), (3.2) метода Лемба, внутренние (спектральные) интегралы имеют структуру вида (3.2) с функциональными коэффициентами $X_n(\zeta, \varkappa)$, удовлетворяющими некоторой линейной алгебраической системе уравнений (3.4), учитывающей условия возбуждения среды, а также – контакты на границах раздела ее слоев. Решение системы уравнений (3.4) допускает представление по Крамеру в форме отношения (3.5), в знаменатель которого входит левая часть дисперсионного уравнения (3.7). В соответствии с этим для вычета подинтегральной функции из (3.2) в простом полюсе $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ (совпадающем с корнем дисперсионного уравнения) получается известное выражение:

$$a_{-1}\left[\zeta_0(\varkappa), x; \varkappa\right] = \left.\frac{\widetilde{\Delta}_n(\zeta, \varkappa)}{\frac{\partial}{\partial \zeta}\Delta(\zeta, \varkappa)} e^{-\varkappa\psi(\zeta, x)}\right|_{\zeta=\zeta_0(x)}. \qquad (5.36)$$

Однако при численной оценке интегралов типа (3.2) в случае систем уравнений (3.4) высокого порядка прибегать к формуле Крамера нецелесообразно. Значительно выгоднее определять функциональные коэффициенты $X_n(\zeta, \varkappa)$ из (3.2) непосредственно путем численного решения системы уравнений (3.4). При этом, естестенно, приходится изменять и способ вычисления вычетов.

В задачах рассматриваемого типа при вычислении вычетов вполне эффективным оказывается следующий численный подход (учитывающий дискретность расположения на плоскости (ζ) корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7)).

По корню $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$, в котором нужно вычислить вычет подинтегральной функции из (3.2), определяется точка $\zeta = \overset{\circ}{\zeta}$ и отрезок прямой $\zeta_0\overset{\circ}{\zeta}$ так, что все точки отрезка оказываются расположенными "далеко" от других корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa) \neq \zeta_0$ уравнения (3.7). Определяя на отрезке $\zeta_0\overset{\circ}{\zeta}$ последовательность точек, например, вида

$$\zeta_m = \zeta_0 + 2^{-m}(\overset{\circ}{\zeta} - \zeta_0), \quad (m \geqslant 0) \tag{5.37}$$

введем в рассмотрение переменную величину

$$a_m = (\zeta_m - \zeta_0)\, X_n(\zeta_m, \varkappa)\, e^{-\varkappa\psi(\zeta_m, x)}, \quad (\varkappa = \mathrm{const}), \tag{5.38}$$

где под $X_n(\zeta_m, \varkappa)$ подразумевается решение системы уравнений (3.4), построенной для точек $\zeta = \zeta_m$ из (5.37). При учете принципиальной возможности представления вида (3.5) для такого решения, а также – регулярности по ζ функции $\Delta(\zeta, \varkappa)$, ясно, что теоретическим пределом величины (5.38) при $\zeta_m \to \zeta_0$ является вычет из (5.36). Поэтому (вследствие достаточно высокой гладкости низкочастотных волновых полей) имеются все основания полагать, что и численный предел величин a_m при $m \to \infty$ даст значение, весьма близкое к вычету. При этом процесс $m \to \infty$ здесь следует понимать не формально, а так, что при $m \to \infty$ точка ζ_m приближается к корню $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ на малые расстояния, при которых процесс уточнения значений корня $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ по Ньютону еще не встречает затруднений, а приближения a_m и a_{m+1} отличаются друг от друга уже пренебрежимо мало.

Естественно, что указанный подход, базирующийся на допущении о достаточной гладкости изучаемых низкочастотных полей, нуждается в численном подтверждении. Произведенные проверки, основанные как на сопоставлении результатов, получаемых по формулам (5.36)–(5.38), так и на оценке скорости стремления к пределу переменной a_m из (5.38), подтвердили весьма высокую эффективность такого подхода, который использовался нами при вычислениях. К изложенному уместно еще добавить, что выбор отрезка прямой $\zeta_0\overset{\circ}{\zeta}$, вдоль которой точка ζ_m из (5.37) устремляется к корню $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ (при фиксированном значении $\varkappa$) – безразличен. Необходимо лишь, чтобы в его точках выполнялось неравенство

$$| \Delta(\zeta_m, \varkappa) | > \delta,$$

где $\delta > 0$ не слишком еще мало, определяющее условие корректности решения системы уравнений (3.4).

9. В соответствии с (5.38) вычет подинтегральной функции из (3.2) в простом полюсе, определяемом корнем $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, представляется в виде

$$a_0(x, \varkappa) = A(\varkappa) \exp[-\varkappa\psi(\zeta_0, x)], \tag{5.39}$$

где

$$A(\varkappa) = \lim_{\zeta_m \to \zeta_0} p\big[(\zeta_m - \zeta_0)\, X_n\,(\zeta_m, \varkappa)\big], \tag{5.40}$$

причем символ $\lim p$ означает практический (численный) предел при $\zeta_m \to \zeta_0(\varkappa)$ (в смысле, указанном в п. 8).

Если представить фазовую функцию из (3.3) в форме двух слагаемых

$$\psi(\zeta_0, x) = ix\zeta_0(\varkappa) + f(\zeta_0),$$

где $f(\zeta)$ часть фазовой функции, не зависящая от координаты x, то для вычета в корне

$$\zeta_0(\varkappa) = \xi_0(\varkappa) - i\eta_0(\varkappa), \quad (\eta_0(\varkappa) > 0) \tag{5.41}$$

дисперсионного уравнения получится следующее представление

$$\begin{aligned} a_0(x, \varkappa) = A(\varkappa)\, e^{-\varkappa f(\zeta_0)}\, e^{-\varkappa x\eta_0(\varkappa)} \exp[-i\varkappa x\xi_0(\varkappa)] \equiv \\ \equiv B(\varkappa)\, e^{-\varkappa x\eta_0(\varkappa)} \exp[-i\varkappa x\xi_0(\varkappa)]. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Такой вычет всегда рассматривается совместно со временны́м множителем $\exp(i\varkappa\tau)$, заимствованным у внешнего интеграла из (3.1). Это приводит к волновому образованию

$$u_0(x, \tau, \varkappa) = B(\varkappa)\, e^{-\varkappa x\eta_0(\varkappa)} \exp\left[i\varkappa(\tau - x\xi_0(\varkappa))\right] \tag{5.43}$$

типа затухающей монохроматической волны, называемому стационарной модой, отвечающей корню $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ из (5.41) дисперсионного уравнения (3.7). Уровень относительной интенсивности такой моды определяется множителем

$$N = |\exp[-\varkappa\psi(\zeta_0, x)]| \tag{5.44}$$

из (5.39), по значению которого следует решать вопрос о том, принимать ли эту моду во внимание ($N > \delta_0$) при оценках поля, или нет ($N < \delta_0$). В качестве же граничной величины δ_0 здесь, повидимому, достаточно выбрать значение

$$\delta_0 = \exp(-4) \sim 2.10^{-2}. \tag{5.45}$$

Стационарные моды вида (5.43) являются абстракцией, или (точнее) – промежуточным (спектральным) представлением нестационарной моды. При нестационарных воздействиях над средой (из §1) возбуждаются не они, а нестационарные моды, т.е. – результат их подстановки во внешний интеграл Фурье типа (3.1), приводящийся к виду

$$\widetilde{u}_0(x,\tau) = \mathrm{Re}\int\limits_0^{\varkappa_0} F\left(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h}\right) B(\varkappa)\, e^{-\varkappa x\eta_0(\varkappa)} \exp i\varkappa[\tau - x\xi_0(\varkappa)]\, d\varkappa, \tag{5.46}$$

где $F(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h})$ – спектральная функция из (1.4) зависимости источника от времени. Поэтому изучение интерференционных мод, возбуждающихся в рассматриваемых средах, сводится к разработке способов количественной оценки интегралов вида (5.46) при том, или ином выборе спектральной функции $F(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h})$ источника, и при тех, или иных значениях пространственно-временной области наблюдения (или регистрации) поля. При этом вследствие независимости друг от друга задач на оценку объемных интерференционных волн, а также – на оценку и изучение интерференционных нестационарных мод, спектральные функции источников в таких задачах также можно выбирать независимыми способами.

Таким образом, основная здесь задача сводится к изучению нестационарных мод типа (5.46) в зависимости от вида спектральной функции источника, а также – от области значений (x,τ), в которой поле изучается.

10. В области применимости обсуждаемого подхода (т.е. – когда выполняются неравенства вида (5.3)–(5.5) и рассматривается достаточно низеочастотная спектральная полоса (3.6) возбуждения поля) путь интегрирования λ из (3.2) при своей рациональной деформации пересекает, обычно, не так много корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7). При этом уровень относительной интенсивности затухающих мод оказывается (при не слишком малых значениях переменной $x > 0$) пренебрежимо малым в смысле (5.44). Незатухающие же моды, возбуждающиеся далеко не при любых значениях параметров γ_k и δ_k среды (в случаях воздействий, расположенных достаточно близко к тонкому слою) могут привносить заметный вклад в волновое поле, особенно на больших расстояниях $x > 0$ в областях, прилегающих к слою.

В области отчетливой регистрации такой моды из (5.46) (в которой $\eta_0(\varkappa) = 0$ и $\xi_0(\varkappa) = \zeta_0(\varkappa)$) должна оказаться достаточно малой дисперсия ее фазовой скорости $v_f(\varkappa) = [\zeta_0(\varkappa)]^{-1}$ так, чтобы величина

$$\tau_0 - x_0\zeta_0(\varkappa)$$

обращалась в нуль (например, при $\varkappa = \varkappa_0/2$) и изменялась незначительно по сравнению с $\pi/\varkappa_0$ при изменении параметра $\varkappa$ в реальной частотной полосе применяемого сигнала.

Более отчетливо условия, обеспечивающие типичную регистрацию нестационарной моды, можно сформулировать в случаях, когда мода реализуется в форме узкополостного волнового пакета

$$u = \mathrm{Re} \int\limits_{\mathring{\varkappa}}^{\mathring{\varkappa}+\Delta} c(\varkappa) \exp i\varkappa[\tau - x\zeta_0(\varkappa)]\, d\varkappa, \tag{5.47}$$

с гладкой медленно-изменяющейся функцией $c(\varkappa)$ и с фазовой функцией, допускающей достаточно хорошую аппроксимацию первыми двумя, или тремя членами ее разложения в ряд Тейлора.

Если справедливо разложение

$$\varphi(\varkappa) \equiv \varkappa\tau - x\varkappa\zeta_0(\varkappa) = \varphi(\mathring{\varkappa}) + \varphi'(\mathring{\varkappa})(\varkappa - \mathring{\varkappa}) + \Delta_2(\varkappa, \mathring{\varkappa}), \tag{5.48}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\mathring{\varkappa}) = \mathring{\varkappa} T_0, \quad T_0 = \tau - \frac{x}{v_f(\mathring{\varkappa})}; \\ v_f(\varkappa) = \frac{1}{\zeta_0(\varkappa)}, \quad \varphi'(\mathring{\varkappa}) = T, \quad T \equiv \tau - \frac{x}{v_g(\mathring{\varkappa})}; \\ v_g(\varkappa) = \frac{1}{\frac{d}{d\varkappa}[\varkappa\zeta_0(\varkappa)]}, \end{gathered} \tag{5.49}$$

с остаточным членом, удовлетворяющим оценке

$$| \Delta_2(\varkappa, \overset{\circ}{\varkappa}) | = \left| \frac{d^2}{2d\varkappa^2}[\varkappa\zeta_0(\varkappa)]x\Delta^2 \right| \ll \pi, \tag{5.50}$$

то для пакета (5.47) получается приближенное представление

$$u = \mathrm{Re}\int_0^\Delta c(\overset{\circ}{\varkappa} + y)e^{i\overset{\circ}{\varkappa}T_0} \exp iTy dy =$$

$$= c(\overset{\circ}{\varkappa})\frac{2\sin\frac{\Delta}{2}T}{T}\cos[\overset{\circ}{\varkappa}T_0 + \chi]. \tag{5.51}$$

Здесь T и T_0 имеют значения из (5.49), а фазовое смещение дается выражением

$$\chi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\Delta}{2}T\right) + \arg c(\overset{\circ}{\varkappa}).$$

Множитель

$$A(T) = \frac{2\sin\frac{\Delta}{2}T}{T} = \frac{2\sin\frac{\Delta}{2}[\tau - \frac{x}{v_g(\overset{\circ}{\varkappa})}]}{[\tau - \frac{x}{v_g(\overset{\circ}{\varkappa})}]},$$

определяющий огибающую волнового пакета, имеет реперные отметки (правда, сильно размытые при малых значениях Δ), например, $T = 0$, $T = \pi/\Delta$ и т.д. Поэтому поле (5.51) волнового пакета имеет характер волны, распространяющейся с групповой скоростью $v_g(\overset{\circ}{\varkappa})$ из (5.49), подобной модулированному колебанию с огибающей $A(T)$ и с частотным заполнением

$$\cos[\overset{\circ}{\varkappa}T_0 + \chi] \equiv \cos\left[\overset{\circ}{\varkappa}\left(\tau - \frac{x}{v_f(\overset{\circ}{\varkappa})}\right)\right].$$

По результатам регистрации такой волны фазовая скорость $v_f(\varkappa)$ определяется достаточно точно, а групповая скорость $v_g(\varkappa)$ – приближенно (вследствие размытости волнового пакета). При этом представление пакета формулой (5.51) справедливо, лишь когда выполняется оценка (5.50), т.е. – при достаточно малых значениях эпицентрального расстояния $x > 0$. На некотором промежутке возрастающих значений x (уже не удовлетворяющих условию (5.50)) можно дать подобное же описание распространения волнового пакета при учете трех первых членов разложения (5.48). При этом выясняется, что пространственная локализация пакета размывается с увеличением значения x. Однако на этом мы не будем здесь задерживаться.

11. В случае больших значений τ и x, как волновой пакет, так и незатухающая мода

$$u = \mathrm{Re} \int_0^{\varkappa_0} c(\varkappa) \exp i\varkappa[\tau - x\zeta_0(\varkappa)]\, d\varkappa, \tag{5.52}$$

распространенная по всей рабочей частотной полосе из (3.6), допускают приближенную оценку по методу стационарной фазы (или – по методу перевала). При этом, обычно, такую оценку производят в рамках качественного подхода Бромвича, придавая ей асимптотический смысл при $x = v\tau$ и $\tau \to \infty$.

При таком подходе полагают

$$\varkappa[\tau - x\zeta_0(\varkappa)] = \left[\varkappa - \frac{x}{\tau}\varkappa\zeta_0(\varkappa)\right]\tau \equiv \psi_0(\varkappa)\tau,$$

$$\psi_0(\varkappa) = \varkappa - v\varkappa\zeta_0(\varkappa), \tag{5.53}$$

и пользуются известной качественной оценкой интегралов

$$\int_{\Delta\varkappa} c(\varkappa) \exp[i\psi_0(\varkappa)\tau] d\varkappa \sim O\left(\frac{1}{a\tau}\right), \quad (\tau \to \infty),$$

если в промежутке $\Delta\varkappa$ оказывается $|\psi_0'(\varkappa)| \geqslant a > 0$, и

$$\int_{\widehat{\varkappa}-\varepsilon}^{\widehat{\varkappa}+\varepsilon} c(\varkappa) \exp[i\psi_0(\varkappa)\tau] d\varkappa \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{|\psi_0''(\widehat{\varkappa})|\tau}}\right),$$

если точка $\varkappa = \widehat{\varkappa}$ является стационарной для функции $\psi_0(\varkappa)$ (т.е. в ней $\psi_0'(\varkappa) = 0$). Из таких оценок делают заключение, что при $x \gg 1$ мода (5.52) ведет себя как (сильно) размазанный "сигнал", распространяющийся с групповой скоростью из (5.49) и с интенсивностью, убывающей как $(\sqrt{\tau})^{-1}$.

В случаях, когда в представлении (5.52) моды функции $c(\varkappa)$ и $\zeta_0(\varkappa)$ регулярны в достаточно широкой окрестности промежутка интегрирования $(0, \varkappa_0)$б для оценки интеграла можно применять метод перевала, допускающий, как известно, (см., например, [2], §4) оценки погрешностей вычислений при $\tau \gg 1$.

Пусть, например, на промежутке интегрирования $0 < \varkappa < \varkappa_0$ функция

$$\psi_0'(\varkappa) = 1 - v\frac{d}{d\varkappa}[\varkappa\zeta_0(\varkappa)]$$

из (5.53) монотонно возрастает от отрицательного значения $\psi_0'(0) < 0$ до положительного значения $\psi_0'(\varkappa_0) > 0$, проходя через значение $\psi_0'(\widehat{\varkappa}) = 0$ в седловой точке $\varkappa = \widehat{\varkappa}$ на плоскости $(\varkappa)$). Тогда путь интегрирования в (5.52) можно продеформировать в (составной) бесконечный контур

$$\mathcal{L} = l(0) + \lambda_0 - l(\varkappa_0), \tag{5.54}$$

образованный стационарными линиями $l(0)$ и $l(\varkappa_0)$ (наибыстрейшего убывания величины $\mathrm{Re}[i\psi_0(\varkappa)]$), выходящими из концевых точек $\varkappa = 0$ и $\varkappa = \varkappa_0$ промежутка $(0, \varkappa_0)$ из (5.52), а также – соединительньм бесконечным стационарным контуром λ_0, проходящим через седловую точку $\varkappa = \widehat{\varkappa}$ как указано на рис. 3.

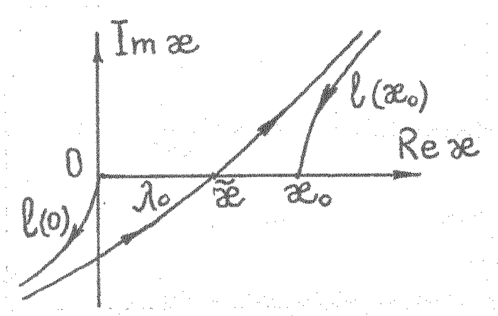

Рис. 3.

В результате интеграл (5.52) представится в виде

$$u = \mathrm{Re}\int\limits_{(\mathcal{L})} c(\varkappa)\exp[i\psi_0(\varkappa, x)\tau]d\varkappa, \tag{5.55}$$

суммы интегралов по стационарным линиям, входящих в составл контура $\mathcal{L}$, в которых функция $\exp[i\psi_0(\varkappa, x)\tau]$ не осциллирует и убывает наибыстрейшим образом при удалении от точек $\varkappa = 0$, $\varkappa = \widehat{\varkappa}$ и $\varkappa = \varkappa_0$.

Существенно подчеркнуть, что при таком подходе поле моды из (5.52) может быть оценено количественно и при умеренных значениях τ и $x = v\tau$, если интегралы по стационарным линиям оценивать численно.

В заключение изложенного следует остановиться на численной реализации указанного подхода к оценке интегралов вида (5.52) в наших задачах, в которых известен лишь факт существования регулярных функций $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ и $c(\varkappa)$, а также – способы численного определения их значений в любой точке комплексной плоскости $(\varkappa)$. Ситуация здесь сводится к следующему.

При построении моды (5.52) функция $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ корня (дисперсионного уравнения), порождающего моду, вычисляется в точках $\varkappa$ промежутка интегрирования $(0, \varkappa_0)$. Поэтому, исходя из таких значений, нетрудно их продолжить в любую точку плоскости $(\varkappa)$ на основе уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\varkappa} = \frac{-\Delta_\varkappa(\zeta, \varkappa)}{\Delta_\zeta(\zeta, \varkappa)} \equiv F(\zeta, \varkappa). \tag{5.56}$$

Этого, очевидно, достаточно для построения стационарных линий $l(0)$, $l(\varkappa_0)$ и λ_0, выходящих из точек $\varkappa = 0$, $\varkappa = \varkappa_0$ и $\varkappa = \widehat{\varkappa}$ соответственно по направлениям $d\varkappa = -id\rho$, $d\varkappa = id\rho$ и $d\varkappa = \pm e^{i\pi/4}d\rho$, где $d\rho > 0$. Действительно, в точках $\varkappa$, например, линии $l(0)$ должно выполняться соотношение

$$d[i\psi_0(\varkappa)] = i\psi_0'(\varkappa)d\varkappa = -d\rho < 0,$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varkappa}{d\rho} = \frac{i}{1 - v[\zeta(\varkappa) + \varkappa\zeta'(\varkappa)]} = \frac{i}{1 - v[\zeta + \varkappa F(\zeta, \varkappa)]}, \tag{5.57}$$

представляющее совместно с уравнением (5.56) полную систему уравнений для определения точек стационарной линии $l(0)$ по начальным данным $\varkappa = 0$, $\zeta = \zeta_0(0)$. Аналогично обстоит дело и в случае стационарных линий $l(\varkappa_0)$ и λ_0. При этом тривиальная разностная схема, отвечающая системе уравнений (5.56), (5.57), сводится, например, к следующему

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1} &= \zeta_n + F(\zeta_n, \varkappa_n)\ (\varkappa_{n+1} - \varkappa_n), \\ \varkappa_{n+1} &= \varkappa_n + \frac{i\Delta\rho}{1 - v[\zeta_n + \varkappa_n F(\zeta_n, \varkappa_n)]}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

§6. Сводка интегральных представлений изучаемых волновых полей и заключительные замечания к статье

При постановке и решении задач на количественное изучение интерференционных волновых полей численными методами весьма полезно иметь перед собой весь свод формул и соотношений, которыми поля определяются. Вследствие этого представлялось целесообразным собрать воедино в настоящем параграфе все основные соотношения, определяющие как постановку рассматриваемых задач, так и математические их решения. При этом, чтобы не отрывать выписываемые выражения от основного текста статьи, повидимому, уместно было снабжать их двойными символами-номерами, указывающими, во-первых, на соответствующее место в разделе статьи, где соотношение приведено впервые, а также – порядковым номером в тексте настоящего параграфа. Пояснения же к формулам здесь сведены к минимуму.

Наконец, остается еще отметить, что по своему содержанию параграф подразделен на три части, причем последняя из них посвящена заключительным замечаниям к статье.

РАЗДЕЛ I. Тонкий упругий слой $0 < \widetilde{z} < h$, $(\nu = 1)$, находящийся в жестком контакте с упругим полупространсвом $\widetilde{z} > h$, $(\nu = 2)$

1. Плоское внешнее воздействие

$$\left.\vec{t}_n\right|_{\widetilde{z}=0} = \delta(\widetilde{x}) f(t) \vec{k}_1, \qquad (1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds, \quad (\sigma > 0). \qquad (1.4) \qquad (6.1)$$

Составляющие поля смещений

$$u \equiv u_x = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial z}, \quad w \equiv u_z = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x}. \qquad (6.2)$$

Аналитические представления потенциалов

$$\left.\begin{matrix} \varphi_\nu \\ \psi_\nu \end{matrix}\right\} = \operatorname{Re} \frac{v_{s1}}{\pi h^2} \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix} \Phi_\nu(x, z, \varkappa) \\ \Psi_\nu(x, z, \varkappa) \end{matrix}\right\} F\left(i \frac{v_{s1}}{h} \varkappa\right) \varkappa e^{i\varkappa\tau}\, d\varkappa, \qquad \begin{matrix} (1.13) \\ (6.3) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_1\\ \Psi_1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}\left[X_1^+ e^{\varkappa z\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa z\alpha_1}\right]\\ i\left[Y_1^+ e^{\varkappa z\beta_1} + Y_1^- e^{-\varkappa z\beta_1}\right]\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa x\zeta}\, d\zeta, \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(z-1)\alpha_2}\\ iY_2^- e^{-\varkappa(z-1)\beta_2}\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa x\zeta}\, d\zeta, \tag{6.4}$$

Используемые обозначения

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2,$$
$$\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{s\nu}}, \quad \varkappa = \frac{\omega h}{v_{s1}}, \qquad (1.15)\ (6.5)$$
$$\tau = \frac{v_{s1}}{h}\, t, \quad x = \frac{\tilde{x}}{h}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{h}, \quad H = \frac{\tilde{H}}{h}.$$

Координаты x, r и время τ здесь и далее безразмерны.

Ветви радикалов определены (на основном листе плоскости (ζ)) условиями

$$\arg\alpha_\nu = \arg\,\beta_\nu = \frac{\pi}{2}, \quad (\zeta = 0) \qquad (1.16)\ (6.6)$$

при проведении разрезов вдоль вещественной оси от точек ветвления на бесконечность без пересечения мнимой оси.

За первичный путь интегрирования λ в (6.4) берется прямая

$$\zeta = k\exp(i\chi_0), \quad (-\infty < k < \infty), \tag{6.7}$$

где $\chi_0 > 0$ сколь угодно мало.

Функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из (6.4) определяются из алгебраической системы уравнений

$$(\Delta_2)\times(X) = (b_0) \qquad (1.17)\ (6.8)$$

при значении шестирядной матрицы (Δ_2) из (1.18) и матриц-столбцов

$$(X) = (X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_2^-, Y_2^-)^+,$$
$$(b_0) = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0\right)^+, \tag{6.9}$$

записанных в форме транспонированных матриц-строк.

Дисперсионное уравнение среды имеет вид

$$\Delta_2(\zeta, \varkappa) = 0, \qquad (1.19)\ (6.10)$$

где $\Delta_2(\zeta, \varkappa)$ – определитель матрицы из (1.18).

2. Двухслойная среда из п.1 в случае осесимметричного нормального воздействия

$$\vec{t}_z \Big|_{z=0} = -\frac{\delta(r)}{\pi r} f(t) \vec{k}_1, \qquad (1.2)\ (6.11)$$

где $f(t)$ имеет значение из (6.1) или (1.4).

Составляющие поля смещений

$$\begin{gathered} \vec{u}_\nu = q_\nu(r, z, \tau)\vec{r}_1 + w_\nu(r, z, \tau)\vec{k}_1, \\ q_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial r} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial z}, \quad w_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial\psi_\nu}{\partial r} + \frac{\partial\psi_\nu}{r}. \end{gathered} \qquad (6.12)$$

Потенциалы волн в слое ($\nu = 1$) и в полупространстве ($\nu = 2$) определяются интегралами (6.3) при следующих значениях подинтегральных фунций Φ_ν и Ψ_ν:

$$\begin{gathered} \left.\begin{matrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h} \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} \left[X_1^+ e^{\varkappa z \alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa z \alpha_1}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta) \\ \left[Y_1^+ e^{\varkappa z \beta_1} + Y_1^- e^{-\varkappa z \beta_1}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta) \end{matrix}\right\} \zeta\, d\zeta, \\ \left.\begin{matrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h} \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} X_2^- e^{-\varkappa(z-1)\alpha_2} H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta) \\ Y_2^- e^{-\varkappa(z-1)\beta_2} H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta) \end{matrix}\right\} \zeta\, d\zeta. \end{gathered} \qquad (1.21)\ (6.13)$$

При этом функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ определяются из прежней же системы уравнений (6.8); величины α_ν и β_ν имеют прежние же значения из (6.5) и (6.6), а путь интегрирования λ отличается от контура λ из (6.4) только тем, что он обходит точку $\zeta = 0$ ветвления функций Ханкеля по бесконечно-малой нижней полуокружности.

3. Двухслойная среда из п.1 в случае сосредоточенного нормального источника, приложенного в точке $0'$ ($\tilde{r} = 0$, $\tilde{z} = \tilde{z}_0 > h$) **полупространства** ($\nu = 2$). (Такой случай в §1 и §2 не рассматривался.)

Плотность силы источника

$$\vec{F} = \frac{\delta(\tilde{r})}{\pi\tilde{r}}\delta(\tilde{z}-\tilde{z}_0)f(t)\vec{k}_1 \tag{6.14}$$

при $f(t)$ из (1.4).

Составляющие поля смещений через потенциалы выражаются по формулам (6.12).

Потенциалы φ_ν и ψ_ν, ($\nu = 1$ и 2) определяются формулами (6.3), в которых

$$\left.\begin{matrix}\Phi_1\\ \Psi_1\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}\left[X_1^+ e^{\varkappa z\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa z\alpha_1}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ \left[Y_1^+ e^{\varkappa z\beta_1} + Y_1^- e^{-\varkappa z\beta_1}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta, \tag{6.15}$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}\left[X_2^+ e^{\varkappa(z-1)\alpha_2} + X_2^- e^{-\varkappa(z-1)\alpha_2}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ \left[Y_2^+ e^{\varkappa(z-1)\beta_2} + Y_2^- e^{-\varkappa(z-1)\beta_2}\right] H_1^{(2)}(\varkappa \tilde{r}\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta \tag{6.16}$$

при пути интегрирования λ таком же, как и в (6.13).

При этом величины X_2^+ и Y_2^+, принимающие здесь значения

$$\left.\begin{matrix}X_2^+\\ Y_2^+\end{matrix}\right\} = \frac{-h^2}{2\mu_2\delta_2^2\varkappa^2\beta_2}\left\{\begin{matrix}\beta_2\, e^{-\varkappa(z_0-1)}\alpha_2,\\ \zeta\, e^{-\varkappa(z_0-1)}\beta_2,\end{matrix}\right. \tag{6.17}$$

определяются из вспомогательной задачи для поля источника (6.14), действующего в безграничной среде с параметрами полупространства $\nu = 2$. (Подобная задача для трехслойной среды обсуждалась в начале п. 5 §1, правда, в представлениях метода контурных интегралов.)

Учет условий

$$\vec{t}_z^{\,(1)}\Big|_{z=0} = 0; \quad \vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad \vec{t}_z^{\,(1)} = \vec{t}_z^{\,(2)}, \quad (z=1)$$

на границах раздела $z = 0$ и $z = 1$ среды приводит для неизвестных функциональных коэффициентов $X_1^\pm$, $Y_1^\pm$, X_2^- и Y_2^- из (6.15) и (6.16) к алгебраической системе уравнений

$$(\Delta_2)\times(X) = (\mathring{b}), \tag{6.18}$$

(в точности такого же типа, как и система из (6.8)), где матрицы

$$\begin{aligned}(X) &= (X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_1^-, Y_1^-)^+\\ (\mathring{b}) &= 0, 0, \mathring{b}_3, \mathring{b}_4, \mathring{b}_5, \mathring{b}_6)^+\end{aligned} \tag{6.19}$$

записаны в форме транспонированных матриц-строк. При этом значения $\overset{\circ}{b}_k$ из (6.19) выражаются через величины X_2^+, Y_2^+ из (6.17) по формулам

$$\overset{\circ}{b}_3 = \zeta X_2^+ + \beta_2 Y_2^+; \qquad \overset{\circ}{b}_4 = \alpha_2 X_2^+ + \zeta Y_2^+,$$
$$\overset{\circ}{b}_5 = 2\mu_2\zeta\alpha_2 X_2^+ + \mu_2 g_2 Y_2^+; \quad \overset{\circ}{b}_6 = \mu_2 g_2 X_2^+ + 2\mu_2\zeta\beta_2 Y_2^+, \quad (6.20)$$

а матрица (Δ_2) из (6.18), совпадающая с матрицей (Δ_2) из (6.8), имеет значение из (1.11).

Остается отметить, что по полю смещений $\vec{u}(r, 0, \tau)$ в точках профиля $x = r > 0$ на поверхности $z = 0$ среды можно судить об искажающих свойствах "Верхней части разреза" – типа тонкого слоя SV – по отношению к сигналам, подходящим к дневной поверхности из глубины среды.

4. Двухслойная среда из п.1, в случае сосредоточенного касательного воздействия

$$\vec{t}_z\Big| = -\frac{\delta(r)}{\pi r}\, f(t)\,\vec{i} \qquad \begin{matrix}(2.27)\\(6.21)\end{matrix}$$

при $f(t)$ из (6.1).

Выражения составляющих поля смещений

$$\vec{u} = u_r\,\vec{r}_1 + u_\theta\,\vec{\theta}_1 + u_z\,\vec{k}_1, \qquad \begin{matrix}(2.6)\\(6.22)\end{matrix}$$

через потенциалы φ, ψ_1 и ψ_2

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}. \end{aligned} \qquad \begin{matrix}(2.7)\\(6.23)\end{matrix}$$

Потенциалы определяются формулами (при $\nu = 1$ и 2)

$$\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_{2\nu}\end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\,\frac{v_{s1}}{\pi h^2}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos\theta\Phi_\nu(\tilde{z},\tilde{r},\varkappa)\\ \sin\theta\Psi_{2\nu}(\tilde{z},\tilde{r},\varkappa)\end{matrix}\right\} F\left(i\frac{v_{s1}}{h}\,\varkappa\right)\varkappa e^{i\varkappa\tau}d\varkappa, \\ &\psi_{1\nu} = \mathrm{Re}\,\frac{v_{s1}}{\pi h^2}\int\limits_0^\infty \Psi_{1\nu}(\tilde{z},\tilde{r},\varkappa)F\left(i\frac{v_{s1}}{h}\,\varkappa\right)\varkappa e^{i\varkappa\tau}\,d\varkappa, \end{aligned} \qquad \begin{matrix}(2.33)\\(6.24)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1\\ \Psi_{21}\\ \Psi_{11}\end{array}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)}\left.\begin{array}{c}\left[X_1^+ e^{\varkappa z\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa z\alpha_1}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ \left[Y_{21}^+ e^{\varkappa z\beta_1} + Y_{21}^- e^{-\varkappa z\beta_1}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ -\left[Y_{11}^+ e^{\varkappa z\beta_1} + Y_{11}^- e^{-\varkappa z\beta_1}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{array}\right\}\zeta\, d\zeta, \qquad \begin{array}{r}(2.34)\\(6.25)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_2\\ \Psi_{22}\\ \Psi_{12}\end{array}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)}\left.\begin{array}{c}X_2^- e^{-\varkappa(z-1)\alpha_2} H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ Y_{22}^- e^{-\varkappa(z-1)\beta_2} H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ -Y_{12}^- e^{-\varkappa(z-1)\beta_2} H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{array}\right\}\zeta\, d\zeta.$$

причем путь интегрирования λ выбран так же, как и в (6.13) и (6.16).

Функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$, $Y_{2\nu}^\pm$ и $Y_{1\nu}^\pm$ из (6.25) определяются из системы уравнений

$$(L^{(2)}) \times (X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-, Y_{21}^-, Y_{21}^+, Y_{22}^-)^+ = \\ = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)^+, \qquad \begin{array}{r}(2.37)\\(6.26)\end{array}$$

где символ + сверху – знак транспонирования, а матрица $(L^{(2)})$ определяется таблицей из (2.38).

Система уравнения (6.26) расщепляется на две системы уравнений: на независимую систему шести уравнений типа SH

$$(\Delta_2) \times (X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+, Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-)^+ = \left(0, -\frac{h^2}{\varkappa^2}, 0, 0, 0, 0\right)^+, \qquad \begin{array}{r}(2.39)\\(6.27)\end{array}$$

с матрицей (Δ_2), в точности совпадающей с матрицей из (6.8) и (6.18). И – на систему уравнений типа SV

$$\begin{pmatrix}\mu_1\beta_1, & -\mu_1\beta_1, & 0\\ \mu_1\beta_1 e^{-\varkappa\beta_1}, & -\mu_1\beta_1 e^{\varkappa\beta_1}, & -\mu_2\beta_2\\ -e^{-\varkappa\beta_1}, & -e^{\varkappa\beta_1}, & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}Y_{21}^-\\ Y_{21}^+\\ Y_{22}^-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r}(2.40)\\(6.28)\end{array}$$

в которой величины l_q определяются выражениями

$$\begin{aligned} &l_1 = 2\mu_1\alpha_1(X_1^+ - X_1^-) + \mu_1\zeta(Y_{11}^+ + Y_{11}^-),\\ &l_2 = 2\mu_1\alpha_1(X_1^+ e^{\varkappa\alpha_1} - X_1^- e^{-\varkappa\alpha_1}) + \\ &\quad + \mu_1\zeta(Y_{11}^+ e^{\varkappa\beta_1} + Y_{11}^- e^{-\varkappa\beta_1}) + 2\mu_2\alpha_2 X_2^- - \mu_2\zeta Y_{12}^-,\\ &l_3 = X_1^+ e^{\varkappa\alpha_1} + X_1^- e^{-\varkappa\alpha_1} - X_2^-. \end{aligned} \qquad \begin{array}{r}(2.41)\\(6.29)\end{array}$$

через решения независимой системы уравнений (6.27).

РАЗДЕЛ II. Тонкий упругий слой $\tilde{H}_0 < \tilde{z} < H_0 + h$, ($\nu = 1$), контактирующий (жестко) с упругими полупространствами: $\tilde{z} < \tilde{H}_0$, ($\nu = 0$) и $\tilde{z} > H_0 + h$, ($\nu = 2$)

5. Плоское нормальное воздействие

$$\vec{F}_1 = \delta(\tilde{x})\,\delta(\tilde{z})\,f(t)\vec{k}_1 \qquad (1.22)\ (6.30)$$

с функцией $f(t)$ из (6.1).

Составляющие поля смещений

$$\vec{u} = u_x\,\vec{i} + u_z\,\vec{k}_1$$

определяются по (6.2).

Потенциалы φ_ν и ψ_ν представляются интегралами Фурье из (6.3) с функциями Φ_ν и Ψ_ν, определяемыми контурными интегралами:

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}[X_\nu^+ e^{\varkappa(z-\tilde{H})\alpha_\nu} + X_\nu^- e^{-\varkappa(z-\tilde{H})\alpha_\nu}]\\ i[Y_\nu^+ e^{\varkappa(z-H)\beta_\nu} + Y_\nu^- e^{-\varkappa(z-H)\beta_\nu}]\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa x\zeta}\,d\zeta,$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^- e^{-\varkappa(z-H-1)\alpha_2}\\ iY_2^- e^{-\varkappa(z-H-1)\beta_2}\end{matrix}\right\} e^{-i\varkappa x\zeta}\,d\zeta. \qquad (1.35)\ (6.31)$$

Здесь применены обозначения из (6.5), путь интегрирования λ определен по (6.7), а величины X и H_0 (равно как r и τ) безразмерны.

Для учета воздействия источника (6.30) на волновое поле в подинтегральных функциях выражений Φ_0 и Ψ_0 из (6.31) следует полагать

$$\left.\begin{matrix}X_0^-\\ Y_0^-\end{matrix}\right\} = \frac{h^2}{2\mu_0\delta_0^2\varkappa^2\beta_0}\left\{\begin{matrix}\beta_0\,e^{-\varkappa H_0\alpha_0},\\ \zeta\,e^{-\varkappa H_0\beta_0}.\end{matrix}\right. \qquad (6.32)$$

При этом для неизвестных функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$, ($\nu = 0, 1, 2$) из (6.31) получается система уравнений

$$(\Delta_3) \times (X) = (b), \qquad (1.36)\ (6.33)$$

в которой восьмирядная квадратная матрица (Δ_3) выписана в (1.38), а (X) и (b) – обозначают матрицы-столбцы, записываемые в форме транспонированных матриц-строк

$$(X) = (X_0^+, Y_0^+, X_1^-, Y_1^-, X_1^+, Y_1^+, X_2^-, Y_2^-)^+, \qquad (1.39)$$

$$(b) = (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, 0, 0, 0)^+, \qquad (6.34)$$

Значения b_q выражаются через значения X_0^- и Y_0^- из (6.32) следующим образом

$$b_1 = \zeta X_0^- - \beta_0 Y_0^-; \quad b_2 = -\alpha_0 X_0^- + \zeta Y_0^-, \qquad (1.40)$$

$$b_3 = -\mu_0(2\zeta\alpha_0 X_0^- - g_0 Y_0^-); \quad b_4 = \mu_0(g_0 X_0^- - 2\zeta\beta_0 Y_0^-). \qquad (6.35)$$

Дисперсионное уравнение плоской трехслойной среды имеет вид

$$\Delta_3(\zeta, \varkappa) = 0, \qquad (1.37)\ (6.36)$$

где $\Delta_3(\zeta, \varkappa)$ – определитель матрицы (Δ_3) из (1.38).

6. Сосредоточенное осесимметричное нормальное воздействие

$$\vec{F}_1 = \frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(z)\,f(t)\,\vec{k}_1 \qquad (1.23)\ (6.37)$$

с функцией $f(t)$ из (6.1).

Составляющие поля смещений в слоях $\nu = (0, 1, 2)$ среды выражаются через потенциалы φ_ν и ψ_ν посредством (6.12).

Потенциалы поля предсталяются интегралами Фурье (6.3) при $(\nu = 0, 1, 2)$, подинтегральные функции Φ_ν и Ψ_ν которых выражаются следующими интегралами

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}\left[X_\nu^+\, e^{\varkappa(z-H_0)\alpha_\nu} + X_\nu^-\, e^{-\varkappa(z-H_0)\alpha_\nu}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ \left[Y_\nu^+\, e^{\varkappa(z-H_0)\beta_\nu} + Y_\nu^-\, e^{-\varkappa(z-H_0)\beta_\nu}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta,$$

$(\nu = 0, 1)$ и

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^-\, e^{-\varkappa(z-H_0-1)\alpha_2} H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ Y_2^-\, e^{-\varkappa(z-H_0-1)\beta_2} H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\, d\zeta, \qquad (1.42)\ (6.38)$$

путь интегрирования λ в которых определен так же, как и в (6.13).

Функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из (6.38) определяются в точности так же, как и в случае плоского воздействия из (6.30).

7. Трехслойная среда из п.5 в случае сосредоточенного касательного воздействия

$$\vec{F}_1 = \frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(z)\,f(t)\,\vec{i} \qquad \begin{matrix}(2.48)\\(6.39)\end{matrix}$$

при $f(t)$ **из (6.1)**.

Составляющие поля смещений из (6.22) определяются формулами (6.23). Потенциалы φ_ν, $\psi_{2\nu}$ и $\psi_{1\nu}$ представляются интегралами Фурье из (6.24), в которых функции Φ_ν, $\Psi_{2\nu}$ и $\Psi_{1\nu}$ даются формулами

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_{2\nu}\\ \Psi_{1\nu}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi h}\oint\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}\left[X_\nu^+\,e^{\varkappa(z-H_0)\alpha_\nu} + X_\nu^-\,e^{-\varkappa(z-H_0)\alpha_\nu}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ \left[Y_{2\nu}^+ e^{\varkappa(z-H_0)\beta_\nu} + Y_{2\nu}^-\,e^{-\varkappa(z-H_0)\beta_\nu}\right] H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ -\left[Y_{1\nu}^+\,e^{\varkappa(z-H_0)\beta_\nu} + Y_{1\nu}^-\,e^{-\varkappa(z-H_0)\beta_\nu}\right] H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\,d\zeta,$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_2\\ \Psi_{22}\\ \Psi_{12}\end{matrix}\right\} = \frac{\varkappa}{4\pi h}\oint\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix}X_2^-\,e^{-\varkappa(z-H_0-1)\alpha_2}\,H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ Y_{22}^-\,e^{-\varkappa(z-H_0-1)\beta_2}\,H_1^{(2)}(\varkappa r\zeta)\\ -Y_{12}^- e^{-\varkappa(z-H_0-1)\beta_2}\,H_0^{(2)}(\varkappa r\zeta)\end{matrix}\right\}\zeta\,d\zeta. \qquad \begin{matrix}(2.34)\\(6.40)\end{matrix}$$

вида (6.25), в которых z заменено на $(z - H_0)$. Путь интегрирования λ здесь проходит так же, как и в (6.25).

Функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$, $Y_{1\nu}^\pm$ и $Y_{2\nu}^\pm$ из (6.40) определяются из системы уравнений

$$(L^{(3)}) \times (X) = (b), \qquad \begin{matrix}(2.58)\\(6.41)\end{matrix}$$

где (X) и (b) – матрицы-столбцы

$$\begin{aligned}(X) \equiv&(X_0^+, Y_{10}^+, X_1^-, Y_{11}^-, X_1^+,\\ &Y_{11}^+, X_2^-, Y_{12}^-, Y_{20}^+, Y_{21}^-, Y_{21}^+, Y_{22}^-)^+,\\ (b) \equiv&(b_1, b_2, b_3, b_4, 0, 0, 0, 0, b_9, b_{10}, 0, 0)^+,\end{aligned} \qquad \begin{matrix}(2.58)\\(6.42)\end{matrix}$$

а матрица $(L^{(3)})$ определяется таблицей из (2.61). (Далее см. последние четыре страницы §2, которые найти в тексте статьи не представляет труда.)

РАЗДЕЛ III

Заключительное замечание к статье, естественно, должно было бы касаться, прежде всего, содержания статьи, предложенной читателям, возможных ее достоинств и недостатков и, конечно, – планов на будущее в направлениях, развивающих затронутую в статье тематику.

1. Если следовать такому образцу, то уместно было бы начать с перечисления очевидных недостатков статьи, являющихся в значительной степени, следствием общей ситуации, в которой наши исследования протекают. Вследствие крайне стесненного материального положения наших научных сотрудников, при проведении исследований приходится обращаться за (некоторой) материальной поддержкой к “научным проектам” (грантам) РФФИ с обязательными (утвержденными) планами работ, с ежегодными отчетами о проделанной работе и с обязательным изложением результатов работы в форме научных статей для солидных журналов. При серьезном отношении к делу это заставляет писать статьи еще в процессе выполнения исследований (когда нет еще полного представления о полученных результатах), писать наспех, чтобы “освободить руки” к работам по следующему проекту, выдвигаемому сразу же по окончанию срока действия текущего проекта исследований.

Таким образом, написание статей (как серьезных научных отчетов о проделанной работе) – “наспех” становится типичным для системы работ по грантам. Так и в настоящей статье “работа наспех и некоторое многословие” просматриваются отчетливо во всех ее разделах, основное содержание которых все же – продукт оригинального творчества, грешащего вероятно иногда, слабым интересом к текущей литературе.

Отсутствие в настоящей статье иллюстративного материала также является следствием вышеизложенного, а также – того обстоятельства, что оригинальный расчетный материал по изучению интерференционных процессов и явлений начал получаться у нас лишь недавно (после приобретения в 1997 г. компьютера Pentium 200). Сейчас такой материал может получаться в количествах, намного превышающих возможности его осмысливания, систематизации и изложения в достаточно полной физически-корректной форме. Поэтому снова возникает проблема – в привлечении к работе необходимых научных сотрудников и лаборантов-вычислителей, чтобы следствия из численных оценок интерференционных волновых полей довести до уровня специального раздела теории распространения сейсмических волн. В этом следовало бы видеть одну из основных наших задач на ближайшее будущее.

2. Изложенные в статье результаты относятся к случаю одного тонкого упругого слоя типа SV, находящегося в жестком контакте с упругими полупространствами. Представляло бы существенный интерес его обобщение на случаи многослойных пачек тонких слоев типа SV, а также – на случаи присутствия в таких пачках и слоев, с нежесткими (граничными) контактами. Из результатов статьи уже отчетливо видна возможность (и даже простота) таких обобщений, причем первый (и основной) шаг в обобщениях на случаи многослойных пачек уже фактически сделан во второй части настоящей статьи [7].

Было бы крайне интересно (и практически очень полезно) поставить исследования на распространение волн в сейсмических средах, содержащих пачки тонких слоев с тем, чтобы установить зависимости частотных свойств возбуждающихся в них волновых полей от структурных особенностей пачек. Подобные вопросы, возникающие вследствие очевидной неразличимости деталей в структурно-вещественном строении пачки на основании (даже достаточно полных) наблюдений поля в низкочастотной спектральной полосе, тесно соприкасаются с проблемой “укрупнения параметров тонкослоистых пачек”. При этом здесь, прежде всего, следует выяснить вопрос о том, какие параметры пачек и с какой точностью находят свое отображение в свойствах низкочастотных интерференционных волновых полей, порождаемых пачкой.

3. Применяемые в статье методы исследования волновых полей явно указывают на прямую зависимость между интерференционными процессами в слоистой среде и частотной полосой спектра Фурье сосредоточенного источника, возбуждающего волновое поле. При этом встречаются случаи полей, имеющих на больших эпицентральных расстояниях явно выраженный интерференционный характер, а на малых (расстояниях) представляющих собой прямое наложение кратных отраженно-преломленных волн, проходящих слои пачки последовательно друг за другом без заметной интерференции. Такие случаи естественно толковать как следствие известного математического факта, состоящего в том, что любое поле смещений в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела допускает простые представления в двух, математически эквивалентных формах. Или в форме повторных интерференционных интегралов, подобных представлениям волновых полей в §1 и §2 настоящей статьи. Или же в форме суммы конечного числа $N(t)$ слагаемых (неограниченно возрастающего при $t \to \infty$), представляющих собой поля смещений всевозможных отраженно-преломленных кратных (неинтерференционных) волн. Неинтерференционные объемные волны, возбуждаемые сосредоточенными источниками в слоицто-однородных упругих средах, всесторонне изучались в 50-е–70-е годы, причем тогда же были разработаны эффективные алгоритмы количественной (и качественной) их оценки, в том числе, и метод суммирования множества кратных волн, возбуждаемых в произвольных пачках упругих плоско-параллельных слоев [9–12].

Представляло бы несомненный интерес несколько модернизировать метод суммирования множества кратных (отраженно-преломленных) волн, приспособив его к современным компьютерам, и произвести сопоставление возможностей в оценке волновых полей этим методом с возможностями, доставляемыми развиваемым нами здесь подходом к изучению интерференционных волновых явлений. Имеются основания полагать, что упомянутые методы будут дополнять друг друга в том смысле, что один метод легко приводит к хорошим результатам в условиях, в которых второй метод встречается с (теми или иными) затруднениями и наоборот. При этом, несомненно, должны быть обнаружены и некоторые промежуточные области, в которых оба метода приводят к достаточно точным (правильным) результатам.

Обстоятельное обсуждение такого рода вопросов позволило бы детально сопоставить указанные методы как в смысле их прикладной эффективности в изучении волновых полей, так и в смысле их математической сущности. При этом начинать следовало бы с рассмотрения случаев малых, а также больших эпицентральных расстояний. Исследования в такой области несомненно обещают быть весьма интересными в математико-вычислительном смысле и плодотворными в прикладном отношении для развития теории сейсмических волновых полей.

4. Если исходить из потребностей теории распространения сейсмических волн и ее приложений, то несомненно крайне важным следует считать получение физических следствий из численной оценки интерференционных волновых полей в кусочно-однородных упругих средах, содержащих пачки тонких слоев и возбуждаемых источниками различных типов. При этом исходное (“опорное”) представление о таких следствиях должно формироваться в результате численных оценок полей (с последующей физической их интерпретацией) при достаточно редкой сети параметров среды, однако с предложением общедоступной методики получения необходимого расчетного материала для любых промежуточных случаев упомянутых параметров. Несомненный интерес здесь представляют и поля, возбуждаемые в средах, содержащих лишь один тонкий упругий слой, как в задачах из §1 и §2. С их систематического изучения при пространственно-сосредоточенных низкочастотных источниках как прямого, так и “индуцированного” типов, как раз и следует начинать исследования.

Однако более интригующим оказывается вопрос о приложении уже разработанных методов исследования к изучению интерференционных волновых полей, возбуждаемых в пачках, состоящих из нескольких тонких слоев (поначалу – немногослойных, чтобы не запутаться в обилии параметров среды). Здесь следует, прежде всего, выяснить, как “справляются” разработанные уже методы исследования полей с заметными усложнениями основных промежуточных (вспомогательных) задач, связанных с расположением и перемещением корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионных уравнений на частях области (B), а также – с выполнением численного интегрирования вдоль стационарного контура λ_0 фазовой функции, проходящего через седловую ее точку. В зависимости от ответов на такие вопросы определится ход исследований при обобщениях предложенных методов на многослойные пачки тонких слоев, а также, возможно, и на один из прямых подходов к проблеме укрупнения параметров тонкослоистых пачек. Решение последней (проблемы), по-видимому, можно базировать на прямом подборе параметров “укрупненных” пачек,[*)] у которых располо-

[*)]Структурно более простых.

жение корней $\zeta = \widehat{\zeta}_n(\varkappa)$ дисперсионных уравнений на основных участках областей (B) плоскости (ζ), где величины

$$| \varkappa \widehat{\zeta}_n(\varkappa) |$$

еще невелики, “мало” отличается от подобного же расположения корней $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионного уравнения исследуемой пачки.

Детали в таком подходе к проблеме будут становиться все более ясными по мере накопления опыта в вычислении корней дисперсионных уравнений в рассматриваемых задачах на изучение интерференционных волновых полей. Установленный же уже факт достаточно быстрого и эффективного вычисления корней дисперсионных уравнений рассматриваемого типа дает веские основания надеятся на возможность практической реализации такого подхода. К изложенному здесь нужно еще присовокупить, что в качестве дополнительного важного критерия качества подбора для заданной тонкослоистой пачки ее “укрупненного отображения” следует использовать и сейсмограммы интерференционных объемных волн (или даже только их фрагменты), получаемые путем численного интегрирования по стационарному контуру λ_0 фазовой функции спектрального (внутреннего) интеграла в представлениях поля смещений в форме метода Лемба.

Литература

1. *Интерференционные волны в слоистых средах* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **214** (1994).
2. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных упругих средах* II, §5. Наука, Л. (1985).
3. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных упругих средах* I, §13. Наука, Л. (1982).
4. *Интерференционные волны в слоистых средах* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **225** (1996).
5. Г. И. Петрашень, *О рациональном методе решения задач динамической теории упругости.* — Ученые записки Лен. гос. университета **208** (1956), 6–56.
6. Г. И. Петрашень, *Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах.* — Ученые записки ЛГУ **162** (1952), 102–135.
7. В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев* II. *(Численные методы оценки полей. Краткий обзор получаемых результатов).* — Настоящий том журнала.
8. Л. А. Молотков, Н. С. Смирнова, *К вопросу о колебаниях тонкого упругого слоя, заключенного между двумя упругими полупространствами.* —

В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. том 10, с. 21–42, Наука, Л. (1970).

9. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Г. И. Макаров, *Об асимптотических представлениях цилиндрических функций.* — Ученые записки ЛГУ, Сер. Мат., вып. 27 **170** (1953), 7–95.
10. Н. С. Смирнова, *Вычисление волновых полей в окрестности особых точек* I *и* II. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. вып. VI, с. 30–59, Наука, Л. (1962).

Petrashen G, I., Reshetnikov V. V. The development of engineering approaches to the study of interference wave fields excited in packets of thin elastic layers. (I). (the construction of wave fields of the SV type and the discussion of rational methods of quantitative evaluation of them.).

The methods of the quantitative study of interference wave fields in thin-layered elastic media are developed. The problems for the simplest thin-layered media are formulated, exact mathematical solutions of them are given in the Fourier type. The methods of the quantitative estimation of the wave fields in the sufficiently low-frequency band of their spectrum are discussed. The problems of the quantitative studing the roots of dispersion equations and the numerical integration in the complex plane are considered in detail.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 12 марта 1998 г.