Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

Н. Д. Лебедева

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ТЕЛ В $\mathbb{R}^3$

§1. Постановка задачи и результаты

Выпуклое тело Q (т.е. выпуклый компакт с внутренними точками) в $\mathbb{R}^n$ называем *квазисимплексом* (обозначение KS), если оно обладает следующим свойством.

(*). *При любом параллельном проектировании (не обязательно ортогональном) тела Q на любую гиперплоскость проекция любых двух противоположных граней тела Q не содержится строго внутри проекции всего Q.*

Гранью тела Q называют его пересечение с опорной гиперплоскостью. Две различные грани называют противоположными, если соответствующие опорные гиперплоскости параллельны. Обозначенное KS мотивируется тем, что в $\mathbb{R}^2$ свойство (*) характеризует среди выпуклых тел именно симплексы.

Задачу описать вид всех KS при $n > 2$ поставил B. Dekster (устное сообщение) в связи с задачами освещения. В настоящей работе эта задача решается для случая $n = 3$.

Теорема A. *Для того, чтобы выпуклое тело Q в $\mathbb{R}^3$ было KS, необходимо и достаточно, чтобы Q было либо выпуклым конусом (т.е. выпуклой оболочкой двумерного выпуклого компакта и точки, не лежащей в его плоскости), либо усеченной трехгранной пирамидой.*

В последний случай мы включаем и усеченную трехгранную призму; основания усеченной пирамиды или призмы могут быть не параллельны.

Теорема A будет следствием теорем B и C. Чтобы их сформулировать, напомним, что точка $x \in Q$ называется экспонированной, если она является гранью тела Q. Множество экспонированных точек обозначается $\exp Q$. *Обобщенным ребром* тела Q мы будем называть любой максимальный (т.е. непродолжимый) отрезок на границе ∂Q тела Q.

Теорема B. *Выпуклое тело $Q \subset \mathbb{R}^3$ является KS тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие.*

(**). *Любые две экспонированные точки тела Q соединяются обобщенным ребром.*

Теорема C. *Свойство (**) выпуклого тела $Q \subset \mathbb{R}^3$ эквивалентно тому, что Q является конусом или усеченной трехгранной пирамидой.*

Теорема C доказывается в §2, а теорема B в §3. Знаком $\langle\ \ \rangle$ мы обозначаем линейную оболочку стоящих внутри этих скобок точек.

§2. Доказательство теоремы C

Легко проверить, что конус и усеченная трехгранная пирамида обладает свойством (**). Предположим, что тело Q обладает свойством (**), но не является конусом.

1. По теореме Крейна–Мильмана Q является замыканием выпуклой оболочки своих экспонированных точек. Поэтому существуют 4 экспонированных точки x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \exp Q$, служащие вершинами некоторого трехмерного симплекса Δ. Плоскости, содержащие грани Δ, разбивают в $\mathbb{R}^3$ дополнение к Δ на 14 неограниченных множеств трех типов: прилегающие к граням Δ, прилегающие к ребрам Δ, прилегающие к вершинам Δ. Легко убедиться, что строго внутри каждой из этих частей не могут находиться экспонированные точки тела Q. Например, если бы точка $x \in \exp Q$ лежала внутри множества, прилегающего к вершине x_4, то отрезок xx_4 не был бы обобщенным ребром.

Обозначим $M(x_1x_2x_3x_4)$ множество точек, являющееся объединением плоскостей всех четырех граней симплекса с вершинами x_1, x_2, x_3, x_4. Если все остальные точки множества $\exp Q$ лежат на одной из этих плоскостей, то Q – конус, что исключено по предположению. По той же причине $\exp Q$ не исчерпывается взятыми четырьмя точками.

2. Рассмотрим еще одну экспонированную точку. Она лежит в плоскости одной из граней Δ, но не в самой грани и не на продолжении ее сторон. Перенумеруем заново наши пять точек так, что точки $x_1x_2x_3x_4$ образуют выпуклый плоский четырехугольник, рис. 1, а точка x_5 не лежит в плоскости $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$. Поскольку Q не конус (с вершиной x_5), должна найтись еще одна точка $x_6 \in \exp Q$, не лежащая в плоскости $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$. Чтобы выяснить ее возможное положение, заметим, что она должна принадлежать каждому из четырех множеств $M(x_1x_2x_3x_5)$, $M(x_1x_2x_4x_5)$, $M(x_1x_3x_4x_5)$, $M(x_2x_3x_4x_5)$, т.е. принадлежить их пересечению. Это пересечение состоит из плоскости $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$ и трех прямых $a = \langle x_1x_2x_5\rangle \cap \langle x_3x_4x_5\rangle$, $b = \langle x_1x_4x_5\rangle \cap \langle x_2x_3x_5\rangle$, $c = \langle x_2x_4x_5\rangle \cap \langle x_1x_3x_5\rangle = 0x_5$, где 0 – точка пересечения диагоналей плоского четырехугольника $x_1x_2x_3x_4$, Рис. 1. Но точка x_6 не лежит в плоскости $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$. Не может она лежать и на прямой c: тогда отрезок x_5x_6 не был бы обобщенным ребром. Значит, точка x_6 лежит на прямой a или на прямой b.

Не нарушая общности можно за счет перенумерации точек x_1, x_2, x_3, x_4 считать, что точка x_6 лежит на прямой a, притом именно с той стороны от точки x_5, как это изображено на Рис. 1.

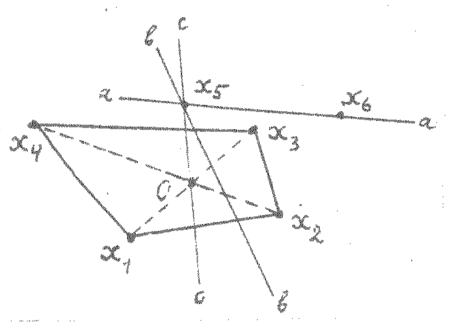

Рис. 1.

3. Выпуклая оболочка так выбранных точек $x_1, \ldots, x_6$ является усеченной трехгранной пирамидой Π (призмой в случае $x_1x_2 \| x_4x_3$) с основаниями $x_1x_5x_4$ и $x_2x_6x_3$. Чтобы доказать теорему C мы убедимся, что у тела Q больше нет экспонированных точек, и $Q = \Pi$.

Плоскости пяти граней усеченной пирамиды Π разбивают (стратифицируют) пространство $\mathbb{R}^3$ на конечной число частей (страт). Седьмая экспонированная точка x_7 тела Q не может лежать на границе $\partial\Pi$ и на продолжениях ребер Π. Но, в какой бы из остальных страт она ни лежала, среди точек $x_1, \ldots, x_6$ найдутся такие четыре точки x_i, x_j, x_k, x_l, что x_7 не принадлежит $M(x_ix_jx_kx_l)$. Таким образом для точки x_7 просто нет места, и $Q = \Pi$.

Теорема C доказана.

§3. Доказательство теоремы B

Для грани с нормалью ν тела Q будем обозначать $\exp(\nu)$ множество экспонированных точек самой грани. (Они, вообще говоря, не обязаны быть экспонированными для Q.) Мы докажем эквивалентность следующих трех свойств.

$1.^0$ Любые две экспонированные точки тела Q соединяются обобщенным ребром.

$2.^0$ Тело Q является KS.

$3.^0$ Одновременно выполняются следующие требования:

а) Для любой точки $A \in \exp Q$ и любой нормали ν из относительной внутренности конуса нормалей к Q в точке A и для любой точки $B \in \exp(-\nu)$ точки A и B соединяются обобщенным ребром.

б) Для любой точки $A \in \exp Q$ и любой нормали ν из конуса нормалей к Q в точке A существует экстремальная точка B тела Q, принадлежащая грани с внешней нормалью $-\nu$, такая, что A и B соединяются обобщенным ребром.

в) Для любых двух противоположных граней тела Q существуют две лежащие в разных из этих граней точки, экспонированные для самих граней и такие, что они соединяются обобщенным ребром.

Эквивалентность $1^0 \iff 2^0$ совпадает с утверждением теоремы B. Доказательство эквивалентностей $1^0 \iff 2^0 \iff 3^0$ проведем по схеме $1^0 \Longrightarrow 2^0 \Longrightarrow 3^0 \Longrightarrow 1^0$. Будем использовать стандартные обозначения: ∂X – граница множества X, т.е. $\partial X = \mathrm{cl}\, X \setminus \mathrm{int}\, X$; $\mathrm{relint}\, X$ – относительная внутренность X.

1. Доказательство импликации $1^0 \Longrightarrow 2^0$.

1.1. Выберем любые две противоположные грани и в каждой из них по одной экстремальной точке. Пусть это будут точки A и B. Эти точки можно аппроксимировать последовательностями $A_i \to A$, $B_i \to B$ экспонированных точек тела Q. Ввиду 1^0 отрезки A_iB_i – обобщенные ребра. Поэтому и A – обобщенное ребро.

1.2. Рассмотрим тело F, ограниченное параллельными опорными к Q плоскостями, содержащими точки A, B, и опорной к Q плоскостью, содержащей обобщенное ребро AB. Тогда $Q \subset F$. Легко видеть, что при параллельном проектировании тела F на любую плоскость проекция хоть одной из точек A, B попадает на границу проекции тела F, а потому и на границу проекции тела Q. Это доказывает 2^0.

2. Доказательство импликации $2^0 \Longrightarrow 3^0$**.** Введем следующие обозначения:

$P(\nu)$ – опорная плоскость с внешней нормалью ν рассматриваемого выпуклого тела $Q \subset \mathbb{R}^3$;

$G(\nu) = P(\nu) \cap Q$ – грань с нормалью ν тела Q;

$p(\nu_1)$ – опорная прямая с внешней нормалью ν_1 (в плоскости) к двумерному выпуклому компакту M;

$g(\nu_1) = p(\nu_1) \cap M$ – грань с нормалью ν_1 компакта M.

2.1. Лемма. *Пусть M_1, M_2 – выпуклые компакты, лежащие соответственно в параллельных $\mathbb{R}^2$ плоскостях $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^2_2$ пространства $\mathbb{R}^3$. Обозначим S^1 множество всех единичных векторов в $\mathbb{R}^2$; S^1 можно рассматривать как окружность. Для ν_1, $\nu_2 \in S^1$ обозначим $[\nu_1\nu_2]$ кратчайшую дугу $\nu_1\nu_2$ на S^1. Тогда при любых ν_1, $\nu_2 \in S^1$ существует не более чем счетное множество единичных векторов $x \in [\nu_1\nu_2] \subset S^1$, для которых хоть одна из граней $g(x)$ компакта M_1 и $g(-x)$ компакта M_2 не является точкой.*

Справедливость этого утверждения следует из того, что каждая плоская замкнутая выпуклая кривая содержит не более чем счетное количество прямолинейных участков.

2.2. Лемма. *Пусть Q является KS и ν – нормаль к Q, а вектор $\nu_1 \perp \nu$ лежит в плоскости $P(\nu)$. Тогда, если грани $g(\nu_1)$, $g(-\nu_1)$ соответственно граней $G(\nu)$, $G(-\nu)$ тела Q являются точками A и B, то отрезок AB является обобщенным ребром тела Q.*

Доказательство. Рассмотрим плоскость T, в которой лежат векторы ν и ν_1. Обозначим Pr ортогональное проектирование на эту плоскость и $Q_T := \mathrm{Pr}Q$. Очевидно $\mathrm{Pr}A \cup \mathrm{Pr}B \in \partial Q_T$. По лемме 2.1 в плоскости T для почти всех $\nu_x \in [\nu_1\nu]$ соответствующие ν_x противоположные грани плоского выпуклого компакта Q_T являются точками. Поэтому найдется сходящаяся к ν последовательность $\nu_i \in [\nu_1\nu]$, для которых соответствующие противоположные грани компакта Q_T суть точки.

Пусть $p(\nu_1)$ опорная прямая с нормалью ν_1 в плоскости $P(\nu)$ к грани $G(\nu)$ тла Q. Отметим, что $\mathrm{Pr}p(\nu_1)$ – точка. Грани тела Q с нормалями ν_i, $-\nu_i$ суть отрезки (быть может вырожденные), параллельные прямой $p(\nu_1)$. Т.е. $G(\nu_i) = a_ib_i \parallel \overline{a}_i\overline{b}_i = G(-\nu_i)$.

Покажем, что $G(\nu_i) \to A$, $G(-\nu_i) \to B$. Действительно, длины отрезков $G(\nu_i)$ стремятся к нулю; иначе нашлась бы подпоследовательность $a_{ik}b_{ik}$ с длинами больше $\varepsilon > 0$, сходящаяся к отрезку на прямой $p(\nu_1)$, но грань $g(\nu_1)$ – точка, именно точка A. Аналогично убеждаемся, что $G(-\nu_i) \to B$.

Зафиксируем номер i. Пусть для определенности $|a_ib_i| \geqslant |\overline{a}_i\overline{b}_i|$. Поскольку $a_ib_i \parallel \overline{a}_i\overline{b}_i$, то найдется такое направление параллельного проектирования Pr_i (на плоскость T_i, ортогональную этому направлению), при котором $\mathrm{Pr}_i[a_ib_i] \supset \mathrm{Pr}_i[\overline{a}_i\overline{b}_i]$. Поскольку отрезки a_ib_i, $\overline{a}_i\overline{b}_i$ – пара противоположных граней тела Q, которое по предложению 2^0 является KS, то хоть один из концов a_i, b_i проектируется в точку на границе $\partial\mathrm{Pr}_iQ$. Пусть p_i – опорная прямая в плоскости T_i к Pr_iQ в этой точке. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ ту плоскость P_i, проекцией Pr_iP_i которой служит прямая p_i. Тогда P_i – опорная плоскость тела Q. Выберем сходящуюся подпоследосательность P_{ik} из таких плоскостей P_i. Предельаня опорная плоскость тела Q будет содержать точки A и B. Значит, AB идет по границе тела Q. Но точки A и B были экспонированными для самих граней $G(\nu)$, $G(-\nu)$ и потому заведомо экстремальными для Q. Поэтому на Q отрезок AB не может продолжаться за свои концы. Итак, AB – обобщенное ребро. Лемма 2.2 доказана.

2.3. Теперь свойства а), б), в) устанавливаются с помощью леммы 2.2.

а) Пусть $A \in \exp Q$ и ν – нормаль такой опорной плоскости, для которой $G(\nu) = A$, а $B \in \exp(-\nu)$. В плоскости $P(-\nu)$ найдется вектор ν_1, для которого грань $g(-\nu_1)$ грани $G(-\nu)$ будет одной точкой B. При этом грань $g(\nu_1)$ грани $G(\nu)$ есть точка A. По лемме 2.2 AB – обобщенное ребро.

б) Пусть $A \in \exp Q$ и ν – произвольная внешняя нормаль к Q в точке A. В плоскости $P(\nu)$ найдется такой единичный вектор ν_1, что грань $g(\nu_1)$ грани $G(\nu)$ есть сама точка A. Если у грани $G(-\nu)$ тела Q грань $g(-\nu_1)$ является точкой B, то по лемме 2.2 AB – обобщенное ребро. Если же $g(-\nu)$ есть отрезок B_1B_2, Рис. 2, то мы в плоскости $P(-\nu) \parallel P(\nu)$ кроме ν_1 рассмотрим еще один единичный вектор ν_2. По лемме 2.1, примененной к плоским выпуклым компактам $G(\nu)$, $G(-\nu)$ и дуге $[\nu_1\nu_2]$ найдется последовательность $\nu_i \in [\nu_1\nu_2]$, сходящаяся к ν_1 и такая, что для каждого ν_i, $i \geqslant 3$, грань $g(\nu_i)$ грани $G(\nu)$ и грань $g(-\nu_i)$ грани $G(-\nu)$ одновременно являются точками. Тогда $g(\nu_i) \to A$, $g(-\nu_i)$ сходятся к одному из

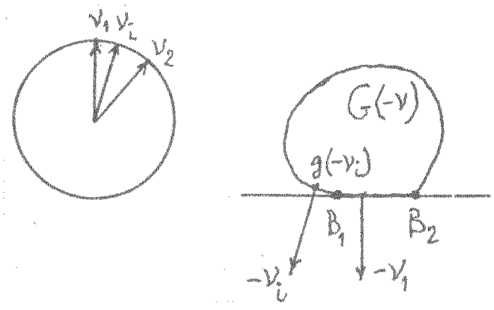

Рис. 2.

концов B_1B_2 (в зависимости от того, в какую сторону вектор ν_2 отклоняется от ν_1). По лемме 2.2 точки $g(\nu_i)$ и $g(-\nu_i)$ соединялись обобщенным ребром. В пределе найдется идущий по ∂Q отрезок от A до одной из точек B_1, B_2. Но точка $A \in \exp Q$, а точки B_1, $B_2 \in \operatorname{ext} Q$, поскольку B_1, $B_2 \in \exp(-\nu)$. Поэтому упомянутый отрезок непродолжим за свои концы и является обобщенным ребром.

в) Для любой нормали ν в плоскости $P(\nu)$ можно по лемме 2.1 выбрать такой вектор ν_1, что грань $g(\nu_1)$ грани $G(\nu)$ и грань $g(-\nu_1)$ грани $G(-\nu)$ одновременно являются точками. По лемме 2.2 эти точки соединяются обобщенным ребром.

Доказательство импликации $3^0 \Longrightarrow 1^0$.

3.1. Рассмотрим сферическое отображение, т.е. отображение границы ∂Q тела Q в единичную сферу S^2 по соответствию единичных внешних нормалей. При этом точке $x \in \partial Q$, в которой нормаль не единственна, отвечает в S^2 целое множество. Будем обозначать $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$ экстремальные точки тела Q, а теми же буквами без черты $A, B, \ldots$ сферические образы этих точек. Образы всех экстремальных точек в совокупности покрывают всю сферу S^2. Для любой нормали ν каждая экспонированная точка самой грани $G(\nu)$ является экстремальной для Q, т.е. $\exp(\nu) \subset \operatorname{ext} Q$. Множество, элементами которого являются сферические образы отдельных экстремальных точек, будем обозначать Ψ. Малыми буквами обозначаем точки на сфере S^2, и как (ab), $[ab]$ обозначаем (соответственно открытый интервал и замкнутый отрезок), кратчайший на сфере S^2.

3.2. Зафиксируем две сферы σ, Σ с общим центром O так, чтобы сфера σ лежала строго внутри тела Q, а Q лежало строго внутри Σ, Рис. 3.

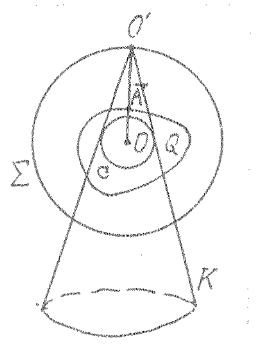

Рис. 3.

Пусть r, R – радиусы этих сфер. Для $\overline{A} \in \partial Q$ луч $O\overline{A}$ пересекает Σ в некоторой точке O'. Сферическое изображение A точки $\overline{A}$ содержится строго внутри сферического изображения конуса K, проектирующего сферу σ из O'. Обозначим

$$\varepsilon = 2 \arcsin \frac{r}{R} > 0$$

угол раствора конуса K. Сферическое изображение этого конуса есть круг на сфере диаметра $\pi - \varepsilon$. *Для любой точки $\overline{A} \in \partial Q$ множество A является на S^2 замкнутым выпуклым множеством, лежащим внутри круга диаметра $\pi - \varepsilon$, поэтому для любого $m \in \Psi$* $\operatorname{diam} m < \pi - \varepsilon$.

3.3. Пусть $\overline{A}$, $\overline{B} \in \operatorname{ext} Q$. Если $\overline{A}\,\overline{B}$ обобщенное ребро, то A и B пересекаются: им обоим принадлежит нормаль к опорной плоскости, в которой лежит $\overline{A}\,\overline{B}$. Обратно, если A и B пересекаются и $a \in A \cap B$, то отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ лежит в опорной плоскости с нормалью a и является обобщенным ребром.

Если A и B двумерны, то $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \varnothing$. Поэтому при двумерных A и B если $A \cap B \neq \varnothing$, то $A \cap B$ – общий участок границы двух выпуклых множеств и потому этот участок есть либо точка, либо – некоторый отрезок $[pq]$. Во втором случае обобщенное ребро $\overline{A}\,\overline{B}$ является настоящим ребром и любая точка $a \in [pq]$ является нормалью к одной из опорных к Q вдоль $\overline{A}\,\overline{B}$ плоскостей.

3.4. Лемма. *Пусть A, $B \in \Psi$ и B содержит хотя бы одну внутреннюю точку открытого интервала $(ab) \subset A$. Тогда B содержит весь замкнутый отрезок $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим опорные к Q плоскости с внешними нормалями a и b. Они образуют двугранный угол (с некоторым ребром l), в котором лежит Q. Точки $\overline{A}$, $\overline{B}$, чьими сферическими образами являются фигурирующие в лемме множества A и B, обязаны лежать на ребре l. Значит, тело Q пересекается с l по отрезку. Поскольку $\overline{A}$, $\overline{B} \in \operatorname{ext} Q$, то $\overline{A}, \overline{B}$ – концы этого отрезка. Но тогда B содержит $[a, b]$. $\square$

3.5. Перейдем к доказательству импликации $3^0 \Longrightarrow 1^0$. Допустим, что она неверна. Тогда, согласно 3.3 существует выпуклое тело Q, обладающее всеми тремя свойствами а), б), в) из 3^0, но у Q существуют две экспонированные точки $\overline{A}$, $\overline{B}$, для которых $A \cap B = \varnothing$. Приведение этого допущения к противоречию разобъем на два шага.

(1) Докажем, при сделанном допущении, что для любой точки $b \in -B$ ($-B$ это множество, центрально симметричное B на S^2) существует элемент $m(b) \in \Psi$, который (как множество на S^2) обладает четырьмя свойствами: 1) $m(b) \ni b$; 2) $m(b) \cap A \neq \varnothing$; 3) $m(b) \cap (-A) \neq \varnothing$; 4) $m(b) \cap B \neq \varnothing$. Этому доказательству посвящены пункты 3.6–3.18.

(2) Докажем, что из (1) следует нарушение свойства в) из 3^0, т.е. получим противоречие.

При доказательстве (1) и (2) мы будем для выпуклых множеств $X \subset S^2$, не являющихся точками, понимать под $\operatorname{relint} X$ внутреннюю часть дуги, если X – дуга, и внутренность X на S^2, если X двумерно. Аналогично, под ∂X будем понимать *относительную* границу, т.е. концы дуги, если X – дуга, и всю границу X в S^2, если X двумерно.

Приступим к доказательству (1).

3.6. Лемма. *Пусть $\overline{A} \in \exp Q$ и $a \in -A$. Тогда существует такая точка $\overline{a} \in A$ и такое $m \in \Psi$, что $[a\overline{a}] \subset m$. При этом A не точка, $m \cap A \subset \partial A$, в частности $\overline{a} \in \partial A$, $\varepsilon < |a\overline{a}| < \pi - \varepsilon$, и если m и A*

двумерны, а их пересечение – отрезок $[pq]$, то в качестве $\overline{a}$ можно взять любую из точек $\overline{a} \in [pq]$. Значение ε см. 3.2.

Доказательство. По свойству б) из 3^0 выберем в грани $G(a)$ тела Q (быть может не единственно возможную) точку $\overline{C} \in \operatorname{ext} Q$ так, что $\overline{A}\,\overline{C}$ обобщенное ребро. В качестве m возьмем сферический образ C точки $\overline{C}$, а в качестве $\overline{a}$ единичную внешнюю нормаль опорной к Q вдоль $\overline{A}\,\overline{C}$ плоскости. Если опорная вдоль $\overline{A}\,\overline{C}$ плоскость не единственна, то и выбор $\overline{a}$ не единственен.

Из $[a\overline{a}] \subset m$ следует, что A не точка: иначе $a = -A$, $\overline{a} = A$, $|a\overline{a}| = \pi$, что противоречит $\operatorname{diam} m < \pi - \varepsilon$.

Если бы $m \cap A$ содержало хоть одну точку $\nu \in \operatorname{relint} A$, то по 3.4 $m \supset A$, т.е. $m \supset [-a, a]$, что противоречит $\operatorname{diam} m < \pi - \varepsilon$. Поскольку $a \in -A$, $\overline{a} \in A$, то по 3.2 $|a\overline{a}| > \varepsilon$. Кроме того $|a\overline{a}| < \pi - \varepsilon$ ввиду $[a\overline{a}] \subset m$.

Наконец, если m и A двумерны, а их пересение – отрезок $[pq]$, то, согласно 3.3, в качестве $\overline{a}$ можно взять любую из точек $\overline{a} \in [pq]$. $\square$

3.7. Лемма. $-A \cap B = \varnothing$.

Доказательство разобьем на ряд шагов 3.8–3.14. Некоторые из них будут самостоятельными леммами.

3.8. Сначала убедимя, что B не пересекается с относительной внутренностью множества $-A$. Если это не так, то существует точка $\nu \in \operatorname{relint}(-A) \cap B$. Тогда $\overline{B}$ экспонированная точка для Q, лежащая в грани $G(\nu)$. И по свойству а) из 3^0 точки $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соединяются обобщенным ребром. Тогда (по 3.3) A и B пересекаются, что противоречит допущению 3.4.

Аналогично $\operatorname{relint}(-B) \cap A = \varnothing$, и по симметрии $(-A) \cap \operatorname{relint} B = \varnothing$, $(-B) \cap \operatorname{relint} A = \varnothing$. $\square$

3.9. Исключим возможность, что $\partial(-A) \cap B \neq \varnothing$. Допустим, что A является отрезком $[-p, -q]$ и $\partial(-A) \cap B = p$. Для точки $p \in -A$ точкой $\overline{p}$ может быть только точка $-q$. Соединим $-q$ с q меридианом, проходящим через p. Возьмем на $-A = [pq]$ точку ν на расстоянии $|\nu p| < \varepsilon$. Для точки ν тоже $\overline{\nu} = -q$. Множество B содержит внутреннюю точку p отрезка $[\nu\overline{\nu}] = [\nu, -q]$ а по лемме 3.4 и весь этот отрезок. Значит $A \cap B \ni -q$, что противоречит допущению $A \cap B = \varnothing$. По аналогичным соображениям при $\partial(-A) \cap \partial B \neq \varnothing$ множество B также не может быть дугой.

Для доказательства леммы 3.7 осталось исключить возможность, что $\partial(-A) \cap \partial B \neq \varnothing$ когда A и B двумерны.

3.10. Для любой точки $a \in \partial(-A)$ интервал $(a\overline{a})$ не пересекает B. Иначе по 3.4 $B \supset [a\overline{a}]$ и $B \cap A \neq \varnothing$ вопреки допущению.

При любом $a \in \partial(-A)$ кратчайшую $[a\overline{a}]$ можно продлить за точку a до полного меридиана $[-\overline{a}\,\overline{a}]$. Ввиду $|a\overline{a}| < \pi - \varepsilon$ длина продленного участка $[-\overline{a}\,a]$ больше ε. Кроме того, этот "хвост" $[-\overline{a}\,a]$ длины $> \varepsilon$ кратчайшей $[a\,\overline{a}]$ целиком лежит в $-A$, т.к. множество $-A$ выпукло и в нем лежат концы $-\overline{a}, a$ этого хвоста. Наличие такого хвоста у каждой кратчайшей $[a\,\overline{a}]$ мы далее называем *свойством* (ε).

Есть две возможности. 1) Интервал $(-\overline{a}\,a) \subset \operatorname{int}(-A)$. Тогда кратчайшая $[a\,\overline{a}]$ за исключением ее начальной точки a идет целиком вне множества $-A$. 2) Хвост $[-\overline{a}\,a]$ весь идет по границе $\partial(-A)$. Тогда $[a\,\overline{a}]$ может на некотором начальном участке (быть может одноточечном) идти по $\partial(-A)$, а затем – полностью отрывается от множества $-A$.

3.11. Пусть A, B двумерны и $\partial(-A) \cap \partial B \neq \varnothing$. Ни одно из выпуклых множества $-A$, B не заходит внутрь другого. Поэтому $\partial(-A) \cap \partial B$ есть либо точка, либо некоторый отрезок $[pq]$. Вторая возможность сразу отпадает. Достаточно взять точку $a \in (pq)$. Для нее будет $(a\,\overline{a}) \cap B \neq \varnothing$, что по 3.4 противоречит допущению $A \cap B = \varnothing$. Значит $\partial(-A) \cap \partial B = x$, где x – точка.

3.12. Рассмотрим все ненулевые отрезки $[cx] \subset -A$ и каждый из них продлим за точку x на длину π, т.е. до точки $-x$. Эти продолжения заведомо заполнят на сфере внутренность двуугольника D между двумя меридианами с концами x и $-x$. Каждый из граничных меридианов двуугольника D принадлежит D только в том случае, если продолжение этого меридиана за точку x хоть на небольшом отрезке идет по границе $\partial(-A)$.

3.13. Лемма $B \subset D$.

Доказательство. Поскольку у выпуклых множеств $-A$ и B их внутренние области не пересекаются, то $-A$ и B нестрого отделимы некоторой большой окружностью l сферы. Если точка x была внутренней точкой отрезка, идущего по границе $\partial(-A)$, то этот отрезок лежит на l, двуугольник D совпадает с той замкнутой полусферой, в которой лежит B, и утверждение леммы верно.

Пусть x не лежит внутри отрезка, идущего по $\partial(-A)$. Рассмотрим на S^2 круг с центром x настолько малого радиуса $\delta > 0$, что $\delta < \varepsilon/2$ и его граница пересекает как $\operatorname{int} A$, так и $\operatorname{int} B$. Границы множеств $-A$, B разбивает этот круг, Рис. 4, на четыре сектора (с возможно криволинейными границами). Замкнутые секторы, принадлежащие $-A$ и B, разделяются открытыми секторами I и II.

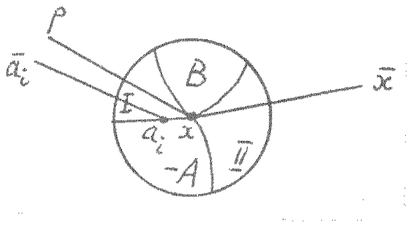

Рис. 4.

Кратчайшая $[x\,\overline{x}]$ обязана (кроме начала x) пройти в одном из секторов I, II. Действительно, $(x\,\overline{x})$ не пересекает B. Если бы $(x\,\overline{x})$ пересекло $-A$, то по свойству (ε) для этой кратчайшей точка x лежала бы внутри отрезка, идущего по $\partial(-A)$, что уже исключено. Обозначим II именно тот сектор, в котором прошла кратчайшая $[x\,\overline{x}]$. Меридиан μ_1, на котором лежит $[x\,\overline{x}]$, принадлежит D и оставляет B строго слева от себя.

Теперь рассмотрим последовательность точек $a_i \to x$, лежащих на участке границы $\partial(-A)$, примыкающем к сектору I. Кратчайшие $[a_i\overline{a}_i]$ сами длиннее ε и имеют "хвосты" длинее ε, идущие в $-A$ и не проходящие через x. Поэтому кратчайшие $[a_i\,\overline{a}_i]$, кроме начальных точек, проходят в секторе I. Выберем из кратчайших $[a_i\,\overline{a}_i]$ сходящуюся подпоследовательность. Она сойдется к некоторой кратчайшей $[xp]$, $p \in A$. По свойству (ε) у всех $[a_i\,\overline{a}_i]$ имелись хвосты длиной $> \varepsilon$, лежащие в $-A$. Поэтому и у $[xp]$ есть продолжение длины $\geqslant \varepsilon$ за точку x, лежащее в $-A$. По этой причине $[xp]$ не идет по $\partial(-A)$. И по этой же причине $[xp]$ – участок некоторого меридиана μ_2, принадлежащего D. Но из-за наличия $[a_i\,\overline{a}_i] \to [xp]$ этот меридиан оставляет B справа от себя (но на этот раз множества B может прилегать к меридиану μ_2 на некотором его начальном отрезке). Лемма 3.13 доказана.

3.14. Изобразим схематически двуугольник D и расположение относительно него множества $-A$, B, A, $-B$, Рис. 5. (На рисунке для определенности изображен вариант, когда граница $\partial(-A)$ вблизи точки x содержала отрезок, притом только с одной стороны от точки x. Соответственно один из граничных меридианов двуугольника D ему принадлежит, а другой – нет.) Теперь ясно, что для точки $-x \in -B$ кратчайшая $[-x, \overline{-x}]$, где $\overline{-x} \in B$ неминуемо пересечет своими внутренними точками множество A. Но тогда, по лемме 3.4, $[-x, \overline{-x}] \supset A$, поэтому $A \ni \overline{-x}$, и $A \cap B \neq \varnothing$ вопреки основному допущению.

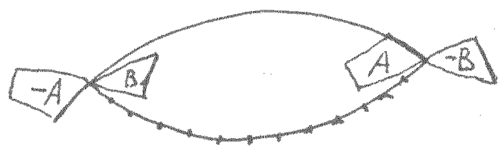

Рис. 5.

Тем самым мы завершили доказательство леммы 3.7. Значит, все четыре множества $-A$, B, A, $-B$ попарно не пересекаются.

Обратимся теперь к доказательству (1).

3.15. Согласно 3.6 множество A не одноточечно. Допустим, что A есть отрезок $[-p, -q]$. Тогда для точки $p \in -A$ точкой $\overline{p}$ служит $-q$, а для точки $q \in -A$ точкой $\overline{q}$ служит $-p$. Кратчайшие $[p\,\overline{p}]$ и $[q\,\overline{q}]$ не пересекают B. Они не пересекаются и $-B$: если бы одна из них пересекла $-B$, то другая пересекла бы B. Теперь, какую бы из точек $b \in -B$ мы ни взяли, кратчайшая $[b\,\overline{b}]$ пересечет или $(p\,\overline{p})$ или $(q\,\overline{q})$. Но тогда множество $m(b) \in \Psi$, содержащее $[b\,\overline{b}]$, (оно существует по лемме 3.6) содержит и $[p\,\overline{p}]$ или $[q\,\overline{q}]$. Тем самым это $m(b)$ пересекает все четыре множества $-A$, B, A, $-B$, как это требуется (1).

Аналогично доказывается (1) если B – отрезок.

3.16. Пусть A и B двумерны. На границе ∂A зафиксируем направление обхода. Для каждой точки $a \in \partial(-A)$ выберем конкретную кратчайшую $[a\,\overline{a}]$, см. лемму 3.6.

Допустим, что существует множество $m \in \Psi$, содержащее $[a, \overline{a}]$, притом двумерное и прилегающее к A по некоторому отрезку $[pq]$. Считаем $[pq]$ ориентированным по обходу ∂A. (Такое

m, если оно есть, единственно.) В этом случае согласно 3.6 можно заменить $\overline{a}$ любой другой точкой из $[pq]$, будем считать, что в этом случае $\overline{a}$ помещено именно в точке q.

Множество $T = S^2 \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} -A)$ представляет собой пояс, строго внутри которого лежат B и $-B$. Каждая из выбранных кратчайших $[a\,\overline{a}]$ не пересекает B (но $-B$ может пересекать). При этом любые две кратчайшие $[a_1\,\overline{a}_1]$, $[a_2\,\overline{a}_2]$ не могут трансверсально пересекаться внутри пояса T. Действительно, при наличии такого пересечения нашлось бы $m \in \Psi$, содержащее обе эти кратчайшие, притом двумерное и прилегающее к A по ненулевому отрезку $[\overline{a}_1\,\overline{a}_2]$, что противоречит правилу выбора этих кратчайших.

3.17. Разрежем пояс T по одной кратчайшей $[a_0\,\overline{a}_0]$ из числа выбранных. Разрезанный пояс гомуоморфен прямоугольнику, Рис. 6. Точки множества $\partial(-A) \setminus a_0$ распадутся на два класса: в зависимости от того, как проходит $[a\,\overline{a}]$ – справа или слева от B. (Если все точки попадут в один класс, то точку a_0 отнесем к противоположному классу.) На прямой $a_0^1 a_0^2$, Рис. 6, эти два класса мажорируют друг друга. Поэтому найдется точка $x \in a_0^1 a_0^2$, слева от которой точки одного класса, справа – другого, и сама она принадлежит одному из этих классов.

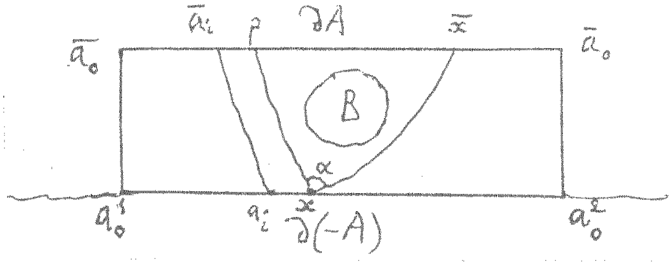

Рис. 6.

Пусть, для определенности, $[x\,\overline{x}]$ проходит справа от B, как показано на Рис. 6. Рассмотрим последовательность точек $a_i \to x$, лежащих на $a_0^1 a_0^2$ слева от x. Из кратчайших $[a_i\,\overline{a}_i]$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся (притом с одной стороны) к некоторой кратчайшей $[xp]$. Из того, что каждая из $[a_i\,\overline{a}_i]$ обладала свойством (ε), т.е. имела "хвост" длины $> \varepsilon$, идущей в $-A$, то и кратчайшая $[xp]$ обладает "хвостом" длины $\geqslant \varepsilon$, идущим в $-A$. Но $-A$ выпукло, поэтому угол сектора $\alpha \geqslant \pi$, см. Рис. 6.

Рассмотрим ту большую окружность l сферы S^2, на которой лежит кратчайшая $[x\,\overline{x}]$. Множество B лежит строго по одну сторону от l, а $-B$ по другую. Поэтому, кратчайшая $[x\,\overline{x}]$ и кратчайшая $[a_i\,\overline{a}_i]$ при достаточно большом номере i не пересекают не только B, но и $-B$. Они на внутренней части пояса T с двух сторон строго разделяют B и $-B$.

3.18. Теперь легко завершить доказательство (1). Какую бы из точек $b \in -B$ мы ни взяли, кратчайшая $[b\,\overline{b}]$ пересекает или $(x\,\overline{x})$ или $(a_i\overline{a}_i)$ или же интервал $(b,\overline{b})$ содержит точку $x \in -A$. В первых двух случаях множество $m(b) \in \Psi$, которое содержит $[b\,\overline{b}]$, будет содержать и одну из кратчайших $[x\,\overline{x}]$ или $[a_i\,\overline{a}]_i$, а потому – иметь общие точки с каждым из множеств A, B, $-A$, $-B$. В третьем случае интервал $(b,\overline{b})$ пересечет отрезок $[x,\overline{x}]$, что и требуется. $\square$

Перейдем к доказательству (2).

3.19. Из утверждения (1) следует, что существуют множества $\{m_\alpha \mid m_\alpha \in \Psi\}_{\mathfrak{A}_1}$ и $\{m_\beta \mid m_\beta \in \Psi\}_{\mathfrak{A}_2}$, такие что $\cup_{\mathfrak{A}_1} m_\alpha \supset -B$, $\cup_{\mathfrak{A}_2} m_\alpha \supset -A$, при этом для всех $\gamma \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ множество m_γ пересекается с множествами A, B, $-B$, $-A$. Это свойство множеств m_γ обозначим через $(*m_\gamma)$. Строго отделим множества A и B большой окружностью l_1. Строго отделим A и $-B$ большой окружностью l_2. Тогда множества A, B, $-A$, $-B$ строго разделены окружностями l_1 и l_2. Обозначим через p – пересечение l_1 и l_2. Пусть l_2^+ и l_2^- – две различные открытые полуокружности, на которые точки p и $-p$ делят l_2. Любое множество m_γ, $\gamma \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$, по свойству $(*m_\gamma)$ содержит точки $m_\gamma^A \in A$, $m_\gamma^B \in B$, $m_\gamma^{-B} \in -B$, $m_\gamma^{-A} \in -A$ и m_γ выпукло. Тогда если $t_1 = (m_x^B, m_x^{-A}) \cap l_2 \in l_2^+$, то $t_2 = (m_\gamma^A, m_\gamma^{-B}) \cap l_2 \in l_2^-$ и t_1, $t_2 \in m_x$. Интервал $(t_1, t_2) \in m_\gamma$ содержит точку p или $-p$. Аналогично находим интервал $(t_3, t_4) \in l_1 \cap m_\gamma$, (t_3, t_4) содержит p или $-p$. Тогда существует такая окрестность $U \subset m_\gamma$, что $U \ni p$ или $U \ni -p$. Т.к. выпуклые области различных m_γ не могут пересекаться, то множеств m_γ не больше двух. Если бы m_γ было одно, то m_γ содержало бы $-A$ и m_γ пересекалось бы с A. Но $\operatorname{diam} m_\gamma < \pi - \varepsilon$.

Таким образом мы имеем два множества m_1, m_2, такие что:

$$m_1 \cup m_2 \supset -B \cup -A, \quad m_i \cap A \neq \varnothing, \quad m_i \cap B \neq \varnothing.$$

3.20. Пересечение множеств m_1 и m_2 отрезок. Пусть l – большая окружность, содержащая этот отрезок. Тогда

$$m_1 \cap l = m_2 \cap l \supset (-A \cap l) \cup (-B \cap l).$$

Тогда существует точка $h \in l$, для которой пересечение множества $\{h\} \cup \{-h\}$ с множеством $(m_1 \cap l) \cup (B \cap l) \cup (A \cap l)$ пусто.

Дополнение множества $m_1 \cup m_2 \cup B \cup A$ на сфере – три односвязные компоненты. Не теряя общности, можно считать, что h лежит в компоненте H^+, граница которой $\partial H^+ \subset \partial A \cup \partial m_1 \cup \partial m_2$, тогда – h лежит в компоненте H^-, для которой $\partial H^- \subset \partial B \cup \partial m_1 \cup \partial m_2$. Заметим, что $\partial H^+ \cap \partial H^- = \varnothing$.

Из условия 3в) следует, что для любой точки $y \in S^2$ существуют множества ω, $\omega' \in \Psi$ со свойствами:

1) $\omega \ni y$, 2) $\omega' \ni -y$, 3) $\omega \cap \omega' \neq \varnothing$.

В качестве ω и ω' достаточно взять образы тех точек, экспонированных для граней с нормалями y и $-y$, о которых утверждение 3в).

Применим это к точке $h = y$. Существует точка $x \in \omega \cap \omega'$. Так как $\operatorname{cl} H^+ \cap \operatorname{cl} H^- = \varnothing$, то либо $x \notin \operatorname{cl} H^+$, либо $x \notin \operatorname{cl} H^-$. Для определенности будем считать, что $x \in \operatorname{cl} H^+$. Тогда интервал (hx) пересекает ∂H^+, значит (hx) пересекает либо ∂A, либо ∂m_1, либо ∂m_2. Если интервал (hx) пересекает множества ∂m_1, то по лемме 3.4, точка $h \in m_1$ – это противоречие. Аналогично, если (hx) пересекает ∂A или ∂m_2. $\square$

Lebedeva N. D. Description of a class of solids in $\mathbb{R}^3$.

Let $Q \subset \mathbb{R}^3$ be a compact convex solid suth that for each parallel (not necessarily orthogonal) projection onto any plane no two antipodal faces of the solid are projected strictly inside the projection of all Q. Then Q is either a cone with a convex base or a frustrum of a trihedral pyramid or a prism (possibly with nonparallel bases).

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 13 апреля 1998 г.