Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. А. Залгаллер

ЗАМЕЧАНИЕ О ВЫПУКЛОМ k–УГОЛЬНИКЕ МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ, ОПИСАННОМ ОКОЛО ВЫПУКЛОГО n–УГОЛЬНИКА

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксирован выпуклый n-угольник P и $n > k \geqslant 3$. Цель настоящей заметки доказать следующее утверждение.

Теорема. *Среди всех выпуклых k-угольников Q, содержащих P, существуют (возможно в единственном числе) k-угольники минимальной площади. Среди них всегда существует хотя бы один такой k-угольник Q_0 минимальной площади, что не менее чем на $k-1$ из сторон Q_0 лежат стороны P. При этом середина каждой из сторон Q_0 принадлежит P; если на (единственно возможной) стороне q многоугольника Q_0 нет стороны P, то в середине этой стороны q лежит вершина P.*

При $k \geqslant 4$ у Q_0 есть стороны q, в концах которых углы β_1, β_2 многоугольника Q_0 в сумме больше π. На каждой такой стороне q обязательно лежит сторона P, причем эта сторона P содержит строго внутри себя (а не на конце) середину стороны q.

Мы надеемся, что эта теорема поможет программистам создать экономный вычислительный алгоритм поиска такого Q_0, когда многоугольник P задан своими вершинами.

Лемма 1. *Среди всех $Q \supset P$ существует k-угольник наименьшей площади; он может быть не единственным.*

Доказательство. Выберем большой правильный k-угольник $Q_1 \supset P$ и пусть его площадь $A(Q_1) = S_1$. Зафиксируем круг D (с центром в центре Q_1) столь большого радиуса, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ площадь $A(\operatorname{conv}(P \cup x)) > S_1$. Пусть теперь $Q_1, Q_2, \ldots$ минимизирующая площадь последовательность k-угольников, содержащих P, причем площади $A(Q_i)$ с ростом i разве лишь убывают. Тогда все Q_i содержатся в круге D. По

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–681.

"принципу выбора" Бляшке [1], §18 из Q_i можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому выпуклому многоугольнику $\bar{Q}$, который будет содержать P. Число m сторон $\bar{Q}$ не больше k. Но, ввиду $n > k \geqslant m$ многоугольник $\bar{Q} \neq P$, и если бы было $m < k$, то от $\bar{Q}$ можно было бы отсечь одну из вершин, сохранив включение в него P и уменьшив площадь. Значит, $m = k$, и $\bar{Q}$ есть k-угольник, реализующий минимум площади.

Приведем два примера, наглядно показывающих возможность неединственности k-угольника $Q \supset P$ минимальной площади.

1). Пусть $n = 6$, $k = 4$ и P получен из правильного шестиугольника сильным удлиннением двух противоположных сторон, рис. 1. У содержащего P четырехугольника, минимизирующего площадь, две стороны пойдут по длинным сторонам P, а две другие стороны могут идти вдоль любых опорных к P в точках M и N прямых.

Рис. 1.

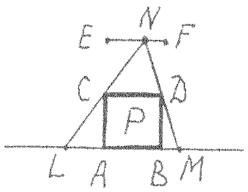

Рис. 2.

2). Пусть $n = 4$, $k = 3$ и P единичный квадрат, рис. 2. Какую бы точку N на единичном отрезке EF (приподнятом над P на высоту 1) мы ни взяли, прямые AB, ND, NC ограничат треугольник LMN наименьшей площади среди треугольников, содержащих квадрат P. Кроме того, любой из треугольников LMN можно отражать относительно осей симметрии квадрата. □

Лемма 2. *Пусть внутри сектора с вершиной A фиксирована точка M и $ABCD$ – параллелограмм с центром M и двумя сторонами на граничных лучах сектора, рис. 3. Тогда отрезок BD (делящийся точкой M пополам) отсекает треугольник ABD строго меньшей площади, чем любой другой проходящий через M, отрезок UV с концами на сторонах сектора. Один из концов U, V лежит на стороне параллелограмма $ABCD$. Именно этот конец мы обозначаем U, а соответствующую сторону параллелограмма обознача-*

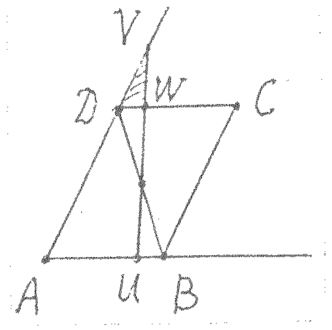

Рис. 3.

ем AB. Превосходство площади AUV над площадью ABD строго возрастает с приближением точки U к A вдоль отрезка BA.

Действительно, площадь ABD равна половине площади упомянутого параллелограмма, а площадь AUV кроме половины площади этого параллелограмма содержит "довесок" в виде площади треугольника DWV, которая растет с приближением U к A вдоль BA.

Доказательство теоремы при $k = 3$. Пусть ABC – треугольник минимальной площади, описанный вокруг P.

Приведем к противоречию допущение, что ни на одной стороне ABC нет сторон P. При таком допущении на каждой стороне ABC должна лежать одна вершина P. По лемме 2 эти вершины должны лежать точно в серединах L, M, N сторон ABC, рис. 4.

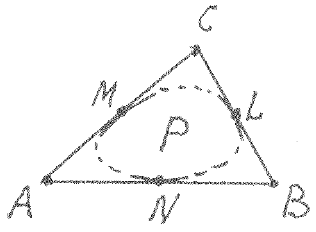

Рис. 4.

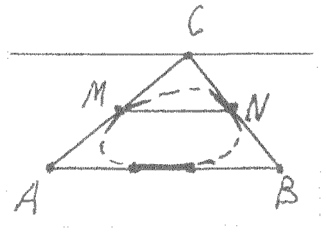

Рис. 5.

Подвергнем плоскость аффинному преобразованию f, после которого $f(ABC)$ окажется правильным треугольником. После чего, оставив неподвижным $f(P)$, немного повернем правильный треугольник $f(ABC)$ вокруг его центра. При этом его стороны "оторвутся" от $f(P)$, но он по-прежнему будет охватывать $f(P)$. Теперь совершим обратное аффинное преобразование f^{-1}. Многоугольник P вернется на место, а треугольник ABC займет новое положение $A'B'C'$, охватывая P и не касаясь P, но будет иметь ту же площадь, что и ABC. От $A'B'C'$ можно перейти к треугольнику меньшей площади, содержащему P. Но это противоречит минимальности площади ABC.

Итак, хоть на одной из сторон ABC (пусть это сторона AB) лежит сторона P. Если еще на одной из сторон ABC есть сторона P, то теорема (с учетом леммы 2) верна. Допустим, что на сторонах AC и BC есть только по одной вершине P. По лемме 2 эти вершины P лежат в серединах M и N сторон AC и BC, рис. 5. Будем непрерывно смещать точку C влево параллельно прямой AB. При этом прямые AB, CM, CN все время ограничивают треугольник постоянной площади (его высота постоянна, а основание равно $2MN$). Смещение продолжаем до тех пор, пока или на прямой CN или прямой CM появится сторона P. $\square$

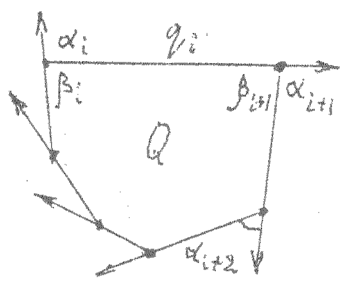

Рис. 6.

Теорема при $k = 3$ была по-видимому известна. В [2] предложен алгоритм сложности $O(n \log^2 n)$ нахождения Q_0 при $k = 3$, в [3] алгоритм улучшен до сложности $O(n)$.

Перейдем к случаю $k \geqslant 4$. Пусть $k \geqslant 4$, Q – выпуклый k-угольник, q – одна из сторон Q, β_1 и β_2 – внутренние углы Q

в концах ребра q. Будем говорить, что многоугольник Q *расширяется* при ребре q, если $\beta_1 + \beta_2 < \pi$.

Лемма 3. *При $k \geqslant 4$ выпуклый k-угольник Q либо не расширяется ни при одном ребре, либо расширяется только при одном ребре, либо расширяется только при двух, притом смежных, ребрах.*

Доказательство. Придадим всем ребрам q_i многоугольника Q направление в порядке обхода по часовой стрелке, рис. 6, и обозначим $\alpha_i > 0$ углы поворота при переходе от ребра q_{i-1} к ребру q_i. Сумма всех k углов $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi$. Если при ребре q_i многоугольник Q расширяется, т.е. $\beta_i + \beta_{i+1} < \pi$, то $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$. Если бы Q расширялся при двух не соседних ребрах q_i, q_j, мы бы имели неравенства $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, $\alpha_j + \alpha_{j+1} > \pi$ для различных углов α_i, α_{i+1}, α_j, α_{j+1}. Но это противоречит тождеству $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 4$, Q k-угольник минимальной площади, содержащий P, и на концах стороны q многоугольника Q сумма углов β_1, β_2 многоугольника Q больше π. Тогда на стороне q лежит сторона P и последняя содержит строго внутри себя середину M стороны q.*

Действительно, при $\beta_1 + \beta_2 > \pi$ продолжения смежных с q сторон Q образуют сектор, от которого q отсекает некоторый треугольник T, лежащий вне Q, рис. 7. Если точка M не принадлежит P или является вершиной P, то по лемме 2 найдется поворот прямой BD, на которой лежит q, вокруг точки M, при котором площадь треугольника T возрастает; соответственно площадь Q уменьшается, а включение $Q \subset P$ сохранится. $\square$

Доказательство теоремы при $k \geqslant 4$. Пусть Q минимальный по площади k-угольник, содержащий P. Если при стороне q многоугольника Q сумма $\beta_1 + \beta_2 > \pi$, то согласно лемме 4 на q лежит сторона P. Если $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ и на q нет стороны P, то середина M стороны q является вершиной P. В этом случае поворот q вокруг M не меняет площадь многоугольника Q, и можно повернуть q в положение, при котором на q будет лежать сторона P (с концом в точке M).

По лемме 3 у Q может быть одна или две смежные стороны, для каждой из которых $\beta_1 + \beta_2 < \pi$. Пусть q – одна из этих сторон.

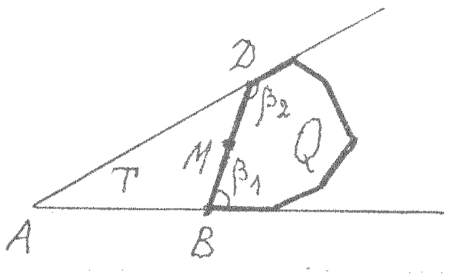

Рис. 7.

На ней либо лежит сторона P, либо в ее середине M лежит вершина P. Нам остается исключить возможность, что таких сторон две q_1, q_2, что они смежны и на каждой из них нет сторон P, а только в серединах M_1, M_2 этих сторон лежат вершины P. На рис. 8 изображена такая ситуация. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – последовательные вершины многоугольника Q. (При $k = 4$ $A_1 = A_5$), $q_1 = A_2A_3$, $q_2 = A_3A_4$.

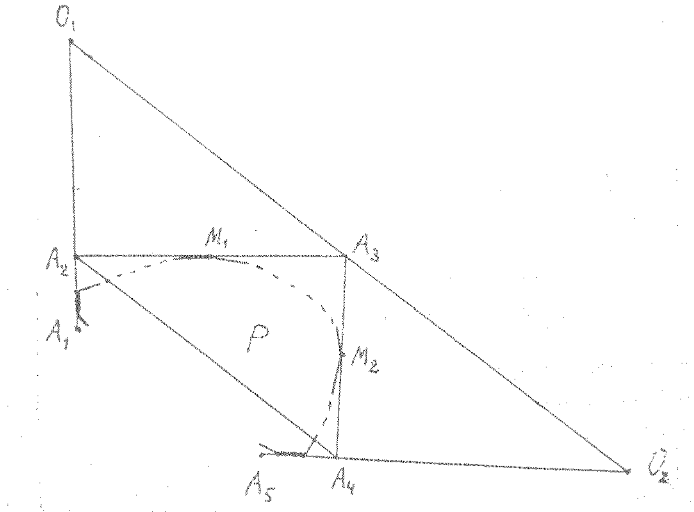

Рис. 8.

Проведем через точку A_3 прямую, параллельную диагонали

A_2A_3 многоугольника Q. Эта прямая пересечет луч A_1A_2 в некоторой точке O_1 и образует сектор $A_1O_1A_3$. Она пересечет также луч A_5A_4 в некоторой точке O_2 и образует сектор $A_5O_2A_3$. Если немного сместить вершину A_3 вдоль прямой O_1O_2, то новые лучи A_3M_1 и A_3M_2 будут отсекать от этих секторов треугольники большей чем раньше площади (лемма 2), и соответственно площадь Q уменьшится. Это противоречит минимальности Q. □

Литература

1. В. Бляшке, *Круг и шар*. М.: Наука, 1967.
2. V. Klee, M. Laskowski, *Finding the smallest triangles containing a given convex polygon*. J. of Algorithms **6** (1985), 359–375.
3. O'Rourke et. al., *An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangles.* J. of Algorithms **7** (1986), 258–269.

Zalgaller V. A. A note on convex k-gons of minimal area circumscribed around a convex n-gon.

For one of there k-gons of minimal area circumscribed around a convex n-gon, $k-1$ sides of the n-gon lie on the sides of the k-gon. All midpoints of the sides of the k-gon belong to the n-gon.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 марта 1998 г.