Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

А. Л. Пирозерский

РЕДУКЦИЯ ДРИНФЕЛЬДА-СОКОЛОВА ДЛЯ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ЛАКСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В СЛУЧАЕ $GL\left(N, C((\lambda^{-1}))\right)$

1. Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения типа КдФ можно построить различными способами. С одной стороны, можно рассмотреть уравнения Лакса вида

$$\frac{d\Lambda}{dt} = [\mathcal{A}, \Lambda],$$

где

$$\Lambda = \frac{d}{dx} + l + q(x),$$

$q(x)$ – нижнетреугольная матрица, и

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это уравнение оказывается инвариантным относительно калибровочных преобразований $\Lambda \longrightarrow \tilde{\Lambda} = S\Lambda S^{-1}$, где S – функция со значениями в группе нижнетреугольных матриц с единицами на диагонали [1]. Выбрав представителя в классе калибровочной эквивалентности так, чтобы в $q(x)$ была ненулевой только последняя строка, получим некоторое уравнение для скалярного дифференциального оператора n-го порядка.

Другой подход состоит в непосредственном построении скалярных уравнений Лакса $\frac{dL}{dt} = [A, L]$, где A, L – скалярные дифференциальные операторы, исходя из алгебры псевдодифференциальных символов [1, 6]. Основным моментом здесь является построение дробных степеней оператора L, которые являются, вообще говоря, псевдодифференциальными. (Другой способ, основанный на построении формальных собственных функций, дает те же результаты).

Связь между этими двумя подходами к построению нелинейных уравнений типа КдФ была показана в работе Дринфельда и Соколова [1], где также были построены аналоги уравнений КдФ и мКдФ для произвольных алгебр Каца-Муди.

Представляет интерес обобщение этой конструкции на случай разностных Лаксовых уравнений. К настоящему времени имеется большое количество работ, посвященных исследованиям как матричных [2, 4, 5, 7, 8], так и скалярных [2, 3] разностных уравнений Лакса, однако дискретного аналога редукции Дринфельда–Соколова (ДРДС) в указанных работах построено не было. В вышедших недавно препринтах [9, 10] на основе гамильтонова подхода построен вариант ДРДС для случая матричного разностного оператора без спектрального параметра.

В настоящей работе для построения ДРДС используется метод одевающих преобразований. Получены калибровочно-инвариантные разностные уравнения Лакса вида

$$\frac{d\Lambda(n)}{dt} = \mathcal{A}(n+1)\Lambda(n) - \Lambda(n)\mathcal{A}(n), \tag{1.2}$$

где $\Lambda(n) = l + q(n)$, $q(n)$ – нижнетреугольная матрица. Для уравнений вида (1.2) построено семейство законов сохранения $\{\xi_i\}$, причем оказывается, что потоки, порождаемые разными ξ_i, коммутируют. Показано, что возникающие после редукции уравнения на класс эквивалентности аналогичны скалярным разностным уравнениям типа КдФ, построенным в [2, 3]. Получены формулы, связывающие ξ_i с законами сохранения h_j для скалярного уравнения.

Работа состоит из введения и трех разделов. В разделе 2 в рамках метода одевающих преобразований исследуются матричные разностные уравнения вида (1.2). Доказана калибровочная инвариантность этих уравнений и коммутативность соответствующих потоков. Приводятся две теоремы о формальной диагонализации Лаксова оператора. Одна из них позволяет построить семейство законов сохранения, вторая имеет большое значение при доказательстве того факта, что уравнения на класс эквивалентности совпадают со скалярным уравнением Лакса, причем получившиеся функции f_i оказываются коэффициентами разложения оператора сдвига на решетке по дробным степеням скалярного Лаксова оператора L, как доказано в разделе 4.

В разделе 3 излагаются, с использованием формализма дробных степеней, некоторые известные факты относительно скалярного разностного уравнения Лакса. Эти результаты были, по-существу, получены в работах [2, 3] (в [3] рассматривались аналогичные уравнения для q-разностного оператора).

Раздел 4 посвящен собственно редукции и доказательству того, что уравнения (1.2), рассматриваемее как уравнения на класс калибровочной эквивалентности, совпадают с разностными скалярными уравнениями, описанными в разделе 3. Доказательства основаны на построении некоторого модуля на пространстве функций на $\mathbb{Z}$ со значениями $\mathbb{C}((\lambda^{-1}))^l$ и являются близкими к соответствующим доказатальствам из работы Дринфельда и Соколова ([1], §3).

Автор благодарен М. А. Семенову-Тян-Шанскому за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

2. Матричные разностные уравнения Лакса

В этом разделе мы будем исследовать разностные уравнения Лакса вида:

$$\frac{d\Lambda}{dt} =^h [\mathcal{A}, \Lambda] \stackrel{def}{\equiv}^h \mathcal{A}\Lambda - \Lambda\mathcal{A}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{A}, \Lambda$ – периодические функции на $\mathbb{Z}$ с периодом N, принимающие значения в $gl(l, \mathbb{C}\,[\lambda])$ – пространстве матриц $l \times l$, элементы которых являются полиномами от спектрального параметра λ. Здесь и далее предполагается, что l и N взаимно просты. ${}^h\mathcal{A}$ обозначает действие оператора сдвига $\hat{h}$ на $\mathcal{A}$:

$${}^h\mathcal{A}(n) \equiv \left(\hat{h}\mathcal{A}\right)(n) = \mathcal{A}(n+1)$$

Оператор Λ имеет вид

$$\Lambda(n) = l + q(n), \tag{2.2}$$

где $q(n)$ – нижнетреугольная матрица с произвольными элементами на главной диагонали, а l задана формулой (1.1).

Уравнение (2.1) является условием совместности для системы

$$\begin{cases} \hat{h}\Psi = & \Lambda\Psi \\ \frac{d}{dt}\Psi = & \mathcal{A}\Psi \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь Ψ – фундаментальная матрица решений, ее можно нормировать условием $\Psi(0) = E$, где E обозначает единичную матрицу.

Умножение Ψ слева на матричнозначную функцию S порождает калибровочное преобразование оператора Λ:

$$\Lambda \longrightarrow^{h} S\Lambda S^{-1} \tag{2.4}$$

В дальнейшем, в разделе 4, будет удобнее рассматривать не уравнение (2.1), а сопряженное:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = [\mathcal{B}, \mathcal{Q}]^{h} \equiv \mathcal{B}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^{h}\mathcal{B}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{Q}(n) = \Theta + p(n), \quad \Theta \equiv l^{T} \tag{2.6}$$

а $p(n)$ – верхнетреугольная матрица.

Калибровочное преобразование для $\mathcal{Q}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{Q} \longrightarrow V\mathcal{Q}^{h}V^{-1}. \tag{2.7}$$

В этом разделе теоремы будут формулироваться параллельно для уравнений вида (2.1) и (2.5).

Предложение 2.1. *Пусть Λ имеет вид (2.2). Существует и единственна периодическая функция S, принимающая значения в группе $\mathbb{N}_{-}$ нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, такая, что*

$$^{h}S\Lambda S^{-1} = \Lambda_{can} \equiv l + q_{can}, \tag{2.8}$$

где

$$q_{can}(n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{l-1}(n) & \cdots & w_0(n) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

причем матричные элементы $S^{i}_{j}(n), w_i(n)$ являются полиномами от матричных элементов q.

$\odot$ Представим Λ в виде:

$$\Lambda(n) = l + \sum_{i=0}^{l-1} d_i(n)\Lambda^{-i}, \quad d_i(n) = \operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, d_i^{i}(n), \ldots, d_i^{l-1}(n)\right) \tag{2.10}$$

и аналогично

$$S(n) = E + \sum_{i=1}^{l-1} s_i(n)\Lambda^{-i}, \quad s_i(n) = \operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, s_i^i(n), \ldots, s_i^{l-1}(n)\right) \tag{2.11}$$

$$\Lambda_{can}(n) = l + \sum_{i=0}^{l-1} \mathrm{w}_i(n)\Lambda^{-i}, \quad \mathrm{w}_i(n) = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, w_i(n)) \tag{2.12}$$

Переписав (2.8) в виде ${}^hS\Lambda = L_{\mathrm{can}}S$, подставив (2.10)–(2.12) и приравняв члены при одинаковых степенях l (это возможно, так как любой элемент из $gl(l, \mathbb{C}((\lambda^{-1})))$ однозначно представляется в виде $\sum\limits_{i=-\infty}^{n} a_i l^i$ с диагональными a_i), получим следующую рекуррентную систему:

$$s_{i+1}(n+1) - {}^\sigma s_{i+1}(n) = -d_i(n) + \mathrm{w}_i(n) + F_i(n), \quad i = 0, \ldots, l-1, \tag{2.13}$$

где $F_i(n) = \operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, F_i^i(n), \ldots, F_i^{l-1}(n)\right)$ – некоторый полином от матричных элементов $s_1, \ldots, s_i$, $d_0, \ldots, d_{i-1}$ и $w_0, \ldots, w_{i-1}$; ${}^\sigma$ обозначает сопряжение с матрицей l: ${}^\sigma s = lsl^{-1}$ и по определению $s_l(n) \equiv 0$.

Уравнение (2.13) при $i < l-1$ представляют собой рекуррентную систему на коэффициенты $s_{i+1}^{i+1}, \ldots, s_{i+1}^{l-1}$:

$$\begin{array}{rcrcl} & - & s_{i+1}^{i+1}(n) & = & -d_i^i(n) + F_i^i(n), \\ s_{i+1}^{i+1}(n+1) & - & s_{i+1}^{i+2}(n) & = & -d_i^{i+1} + F_i^{i+1}(n), \\ & & & \vdots & \\ s_{i+1}^{l-1}(n+1) & & & = & -d_i^{l-1}(n) + w_i(n) + F_i^{l-1}(n) \end{array} \tag{2.14}$$

Легко видеть, что из первого уравнения в (2.14) однозначно определяется $s_{i+1}^{i+1}(n)$ для всех n, из второго – s_{i+1}^{i+2} и так далее. Последнее уравнение в (2.14), которое можно рассматривать как условие разрешимости, является уравнением на w_i, поскольку все s_{i+1}^j уже определены из предыдущих уравнений.

Последнее уравнение в (2.13) имеет вид

$$-d_{l-1}^{l-1}(n) + w_{l-1}(n) + F_{l-1}^{l-1}(n) = 0$$

и однозначно определяет w_{l-1}. □

Следствие:

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{Q}$ имеет вид* (2.6). *Существует и единственна периодическая функция V, принимающая значения в группе $\mathbb{N}_+$ верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, такая, что*

$$V\mathcal{Q}^h V^{-1} = \mathcal{Q}_{\mathrm{can}} \equiv \Theta + p_{\mathrm{can}}, \tag{2.15}$$

где p^T_{can} имеет вид (2.9)

Теорема 2.3. *Существует формальный ряд T_0 вида*

$$T_0(n) = E + \sum_{i=1}^{\infty} t_i(n)\Lambda^{-i},\ t_i(n) \in \mathrm{Diag},\ t_i(n+N) = t_i(n) \tag{2.16}$$

такой, что $\Lambda_0 =^h T_0 \Lambda T_0{}^{-1}$ имеет вид

$$\Lambda_0 = l + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Lambda^{-i} \tag{2.17}$$

где $\xi_i \in \mathbb{C}$ не зависят от координаты n. Ряд T_0 определен с точностью до умножения слева на произвольный ряд S вида

$$S = E + \sum_{i=0}^{\infty} s_i \Lambda^{-i},\ s_i \in \mathbb{C},\ s_i(n) = s_i(m) \quad \forall m, n, \tag{2.18}$$

а Λ_0 определен однозначно.

⨀ Подставляя (2.16), (2.17) и (2.10) в равенство ${}^h T_0 \Lambda = \Lambda_0 T_0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях l, получим:

$$t_{i+1}(n+1) - {}^{\sigma} t_{i+1}(n) = -d_i(n) + \xi_i(n) + F_i(n), \quad i = 0, \ldots, \infty, \tag{2.19}$$

где

$$F_i(n) = -\sum_{j=1}^{i} t_j(n+1)^{\sigma^{-j}} d_{i-j}(n) - j + \sum_{j=1}^{i} {}^{\sigma^{-(i-j)}} t_j(n) - (i-j)\xi_{i-j}, \quad i \geqslant 1 \tag{2.20}$$

– функция от же известных t_j, $\xi_{j'}$, и по определению $F_0(n) \equiv 0$.

Замечание 2.1 Если Λ имеет вид (2.10), то $d_j(n) \equiv 0$ при $j > l-1$. Мы докажем теорему для оператора более общего вида – именно, будем считать, что $d_j(n)$ – произвольные диагональные матрицы, вообще говоря, отличные от нуля при всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

Определим оператор $J \in \mathrm{End}\,(\mathrm{Diag}(l, \mathbb{B}_N))$, где $\mathbb{B}_N$ – пространство N-периодических функций на $\mathbb{Z}$, следующим образом:

$$(J\,u)(n) = u(n+1) - {}^{\sigma} u(n),\ u \in \mathrm{Diag}(l, \mathbb{B}_N). \tag{2.21}$$

Лемма 2.1. 1) *Ядро оператора J одномерно и состоит из постоянных по n матриц, кратных единичной;* 2) $\mathrm{Ker} J \bigcap \mathrm{Im} J = \{0\}$.

Из леммы 2.1 сразу следует разрешимость рекуррентной системы уравнений (2.19).

Покажем теперь, что произвол в определении T_0 сводится к умножению его слева на ряд вида (2.18). Очевидно, что если T_0 удовлетворяет условию теоремы, то ST_0 также удовлетворяет ему. Обратно, пусть ${}^h T_0 \Lambda T_0{}^{-1} = \Lambda_0$ и ${}^h \tilde{T}_0 \Lambda \tilde{T}_0^{-1} = \tilde{\Lambda}_0$, тогда

$$ {}^h S \Lambda_0 S^{-1} = \tilde{\Lambda}_0, \tag{2.22} $$

где Λ_0, $\tilde{\Lambda}_0$ имеют вид (2.17) и

$$ S = \tilde{T}_0 T_0{}^{-1} = E + \sum_{i=0}^{\infty} s_j(n) \Lambda^{-i}, \;\; s_i(n) = s_i(n+N), \;\; s_i(n) \in \mathrm{Diag}. \tag{2.23} $$

Записывая для (2.22) систему, аналогичную (2.19), получим:

$$ (J\, s_{i+1})(n) = -\xi_i + \tilde{\xi}_i + F_i(n), \tag{2.24} $$

$$ F_i(n) = -\sum_{j=1}^{i} {}^{\sigma^{-(i-j)}} s_j(n) - (i-j)\tilde{\xi}_{i-j} - s_j(n+1)\xi_{i-j}, \quad i \geqslant 1, \;\; F_0(n) \equiv 0 \tag{2.25} $$

Рассмотрим первое уравнение рекуррентной системы (2.24):

$$ (J s_1)(n) = -\xi_0 + \tilde{\xi}_0 \tag{2.26} $$

Правая часть (2.26) является постоянной матрицей, кратной единичной, и в соответствии с утверждением 1) леммы 2.1 принадлежит ядру J. Тогда из второго утверждения той же леммы следует

$$ \xi_0 = \tilde{\xi}_0, \quad s_1(n) = \alpha_1 E, \;\; \alpha_1 \in \mathbb{C} \tag{2.27} $$

Подставляя (2.27) в (2.25) получим $F_1(n) = 0$. Таким образом по индукции получаем, что $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}$ и S имеет вид (2.18), что и требовалось доказать. $\square$

Из теоремы 2.3 следует аналогичная теорема для сопряженного оператора.

Теорема 2.4. *Существует формальный ряд U_0 вида*

$$U_0(n) = E + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta^{-i} u_i(n),\ \ u_i(n) \in \mathrm{Diag},\ \ u_i(n+N) = u_i(n) \qquad (2.28)$$

такой, что $\mathcal{Q}_0 = U_0 \Lambda^h {U_0}^{-1}$ *имеет вид*

$$\mathcal{Q}_0 = \Theta + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Theta^{-i} \qquad (2.29)$$

где $\zeta_i \in \mathbb{C}$ *не зависят от координаты* n. *Ряд* U_0 *определен с точностью до умножения слева на произвольный ряд* V *вида*

$$V = E + \sum_{i=0}^{\infty} v_i \Theta^{-i},\ \ v_i \in \mathbb{C}\ ,\ \ v_i(n) = v_i(m) \quad \forall m, n\ , \qquad (2.30)$$

а $\mathcal{Q}_0$ *определен однозначно. Если* $\mathcal{Q} = \Lambda^T$, *то* $\zeta_i \equiv \xi_i$ *и можно положить* $U_0 = \left(T_0^{-1}\right)^T$.

Следствие. Λ_0 *(*$\mathcal{Q}_0$*) инвариантен относительно калибровочных преобразований вида* (2.4) *(*(2.7) *соответственно).*

Теоремы 2.3, 2.4 будут играть важную роль при построении так называемого h-централизатора для Λ и $\mathcal{Q}$.

Определение 2.1. *h-централизатором (левым) оператора Λ называется множество*

$${}^h\mathcal{Z}\Lambda = \left\{ u \in gl\left(l, \mathbb{B}((\lambda^{-1}))\right) \middle| {}^h[u, \Lambda] \equiv^h u\Lambda - \Lambda u = 0 \right\}$$

Аналогично определяется h-централизатор (правый) для $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Z}^h\, \mathcal{Q} = \left\{ v \in gl\left(l, \mathbb{B}((\lambda^{-1}))\right) \middle| [v, \mathcal{Q}]^h \equiv v\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^h v = 0 \right\}$$

Предложение 2.5. *Пусть* ${}^h T_0 \Lambda {T_0}^{-1} = \Lambda_0$ *(соответственно* $U_0 \mathcal{Q}^h {U_0}^{-1} = \mathcal{Q}_0$*). Тогда*

$$u \in {}^h\mathcal{Z}\Lambda_0 \Longleftrightarrow \varphi_0(u) = {T_0}^{-1} u T_0 \in {}^h\mathcal{Z}\Lambda,$$

и соответственно

$$v \in \mathcal{Z}^h\, \mathcal{Q}_0 \Longleftrightarrow \chi_0(v) = {U_0}^{-1} v U_0 \in \mathcal{Z}^h\, \mathcal{Q}.$$

Следующее предложение явно описывает ${}^h\mathcal{Z}\left(\Lambda_0\right)$.

Предложение 2.6.

$$^h\mathcal{Z}\Lambda_0 = \mathbb{C}((\Lambda^{-1})), \quad \mathcal{Z}^h\,\mathcal{Q}_0 = \mathbb{C}((\Theta^{-1})).$$

$\odot$ Очевидно, что $\mathbb{C}((\Lambda^{-1})) \subset {}^h\mathcal{Z}\Lambda_0$. Обратно, пусть $u \in {}^h\mathcal{Z}\Lambda_0$. Представим u в виде

$$u(n) = \sum_{j=-\infty}^{M} u_j(n) l^j, \quad u_j(n) \in \mathrm{Diag} \tag{2.31}$$

Из условия ${}^h u\Lambda_0 = \Lambda_0 u$ следует $u_M \in \mathrm{Ker} J$, следовательно $u_M l^M \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1})) \subset {}^h\mathcal{Z}\Lambda_0$. Положим $u^1 = u - u_M l^M$. $u^1 \in {}^h\mathcal{Z}\Lambda_0$ и начинается со степени l^{M-1}, к ней можно применить то же рассуждение и т.д. $\square$

Следствие.

$$^h\mathcal{Z}\Lambda = \left\{\varphi_0(u) | u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))\right\}$$

и

$$\mathcal{Z}^h\,\mathcal{Q} = \left\{\chi_0(v) | v \in \mathbb{C}((\Theta^{-1}))\right\}.$$

Опишем теперь другой способ построения $\mathcal{Z}^h\,\Lambda$.

Теорема 2.7. *Существует формальный ряд T_1 вида*

$$T_1(n) = E + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{t}_i(n)\Lambda^{-i}, \; \tilde{t}_i(n) = \mathrm{diag}\left(0, \tilde{t}_i^1(n), \ldots, \tilde{t}_i^{l-1}(n)\right), \tag{2.32}$$

с периодическими коэффициентами $\tilde{t}_i(n)$, такой что $\Lambda_1 = {}^h T_1 \Lambda {T_1}^{-1}$ имеет вид

$$\Lambda_1(n) = l + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n)\Lambda^{-i}, \quad f_i(n) \in \mathbb{C} \tag{2.33}$$

Ряды T_1 и Λ_1 определены однозначно.

$\odot$ Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2.3, получим рекуррентную систему уравнений

$$\left(J\tilde{t}_{i+1}\right)(n) = -d_i(n) + f_i(n) + F_i(n), \quad i = 0, \ldots, \infty, \tag{2.34}$$

где $F_i(n)$ определяются формулой, аналогичной (2.20) и зависит от уже известных $\tilde{t}_j$, f_j. Пусть W_1 – пространство N-периодических функций со значениями в пространстве диагональных матриц вида $\tilde{t} = \left(0, \tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^{l-1}\right)$. Оператор J в (2.34) рассматривается как оператор из W_1 в $\mathrm{Diag}\,(l, \mathbb{B}_N)$.

Лемма 2.2. 1) *Ядро J тривиально;* 2) *пусть*

$$W_2 = \{f \in \mathrm{Diag}\,(l, \mathbb{B}_N\,)\,|f(n) = f_n E,\ f_n \in \mathbb{C}\}\,,$$

тогда $J(W_1) \dot{+} W_2 = \mathrm{Diag}\,(l, \mathbb{B}_N\,)$.

Из леммы следует разрешимость уравнений (2.34) и единственность T_1, Λ_1. □

Для сопряженного оператора справедлива аналогичная

Теорема 2.8. *Существует формальный ряд U_1 вида*

$$U_1(n) = E + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta^{-i} \tilde{u}_i(n), \quad \tilde{u}_i \in W_1, \tag{2.35}$$

такой что $\mathcal{Q}_1 = U_1 \mathcal{Q}^h {U_1}^{-1}$ *имеет вид*

$$\mathcal{Q}_1(n) = \Theta + \sum_{i=0}^{\infty} g_i(n)\Theta^{-i}, \quad g_i(n) \in \mathbb{C} \tag{2.36}$$

Ряды U_1 и $\mathcal{Q}_1$ определены однозначно. Если $\mathcal{Q} = \Lambda^T$, то $g_i(n) = f_i(n)$ и $U_1 = \left({T_1}^{-1}\right)^T$.

Пусть $\varphi_1(u) = {T_1}^{-1} u T_1$ и $\chi_0(v) = {U_0}^{-1} v U_0$. Аналогично предложениям 2.5, 2.6 доказывается

Предложение 2.9. 1) ${}^h\mathcal{Z}\Lambda_1 = \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$ *и* $\mathcal{Z}^h\,\mathcal{Q}_1 = \mathbb{C}((\Theta^{-1}))$*;*
2) ${}^h\mathcal{Z}\Lambda = \left\{\varphi_1(u) | u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))\right\}$ *и* $\mathcal{Z}^h\,\mathcal{Q} = \left\{\chi_1(v) | v \in \mathbb{C}((\Theta^{-1}))\right\}$.

Таким образом, мы получили два представления для h-централизатора Λ. Оказывается, что $\varphi_0(u) = \varphi_1(u)$. Это является простым следствием следующей леммы:

Лемма 2.3. *Пусть ${}^hT\Lambda_1T^{-1} = \Lambda_0$, где T имеет вид (2.16), тогда $T \in \mathbb{B}_N\left((l^{-1})\right)$ – пространству N-периодических функций со значениями в $\mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$.*

⊙ В соответствии с теоремой (2.1) и замечанием (2.1) к ней существует формальный ряд T вида (2.16), такой, что выполнено равенство

$${}^hT\Lambda_1T^{-1} = \Lambda_0 \tag{2.37}$$

Коэффициенты ряда T определяются уравнениями, аналогичными (2.19):

$$(Jt_{i+1})\,(n) = -f_i(n) + \xi_i + F_i(n), i = 0, \ldots, \infty \tag{2.38}$$

Рассмотрим первое из этих уравнений:

$$(Jt_1)(n) = -f_0(n) + \xi_0 \tag{2.39}$$

Правая часть в (2.39) пропорциональна единичной матрице, обозначим коэффициент пропорциональности через $\alpha_0(n) \equiv -f_0(n) + \xi_0$. Из (2.39) и (2.21) следует, что

$$t_1(n) = {}^{\sigma^n} t_1(0)n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0(i) \tag{2.40}$$

Накладывая условие периодичности $t_1(N) = t_1(0)$, имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_0(i) = 0 \tag{2.41}$$

и

$$t_1(0) = \beta_1(0)E,$$

поскольку N и l взаимно простые. Тогда из (2.40) следует, что

$$t_1(n) = \left(\beta_1(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0(i)\right) E. \tag{2.42}$$

Подставив (2.42) в формулу (2.20) для $F_i(n)$, получим, что $F_1(n) \sim E$. По индукции получаем нужное утверждение. □

Следствие. *$\varphi_0(u) = \varphi_1(u)$ и $\chi_0(v) = \chi_1(v)$.*

⊙ Действительно, из равенств ${}^hT_i \Lambda T_i^{-1} = \Lambda_i$, $i = 0, 1$ и ${}^hT\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_0$, и теоремы 2.3 следует, что $TT_1 = ST_0$, где $S \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$. Учитывая, что $T \in \mathbb{B}_N\left((l^{-1})\right)$, имеем:

$$\varphi_1(u) = T_1{}^{-1} u T_1 = T_0{}^{-1} S^{-1} T u T^{-1} S T_0 = \varphi_0(u). \square$$

Перейдем теперь к построению уравнений. Любой элемент $\mathcal{M} \in gl\left(l, \mathbb{C}((\lambda^{-1}))\right)$ допускает представление

$$\mathcal{M} = \sum_{i=-\infty}^{n} \alpha_i \lambda^i = \sum_{j=-\infty}^{m} \beta_j l^j = \sum_{j=-\infty}^{m'} \gamma_j \Theta^j$$

где $\alpha_i \in gl(l)$, а $\beta_j, \gamma_j \in \mathrm{Diag}\,(l)$, причем $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$ определяются однозначно. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{M}_+ \overset{def}{\equiv} \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i \lambda^i, \quad \mathcal{M}_- \overset{def}{\equiv} \sum_{i<0} \alpha_i \lambda^i;$$

$$\mathcal{M}^+ \overset{def}{\equiv} \sum_{j\geqslant 0} \beta_j l^j, \quad \mathcal{M}^- \overset{def}{\equiv} \sum_{j<0} \beta_j l^j;$$

$$^+\mathcal{M} \overset{def}{\equiv} \sum_{j\geqslant 0} \gamma_j \Theta^j, \quad ^-\mathcal{M} \overset{def}{\equiv} \sum_{j<0} \gamma_j \Theta^j;$$

Предложение 2.10. *Пусть* $\mathcal{M} \in {}^h\mathcal{Z}\Lambda$. *Тогда* ${}^h[\mathcal{M}^+, \Lambda]$, ${}^h[\mathcal{M}_+, \Lambda]$ *– не зависящие от* λ *нижнетреугольные матрицы.*

⊙ Это простое следствие равенства ${}^h[\mathcal{M}^+, \Lambda] = -{}^h[\mathcal{M}^-, \Lambda]$. □

Предложение 2.11. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{Z}^h\, \mathcal{Q}$. *Тогда* $\left[{}^+\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{Q}\right]^h$, $\left[\widetilde{\mathcal{M}}_+, \mathcal{Q}\right]^h$ *– не зависящие от* λ *верхнетреугольные матрицы.*

Из предложений 2.10 и 2.11 вытекает самосогласованность следующих уравнений для оператора Λ:

$$\frac{d\Lambda}{dt} =^h [\mathcal{A}_1, \Lambda], \quad \mathcal{A}_1 = \varphi_+(u), \quad u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1})) \tag{2.43}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} =^h [\mathcal{A}_2, \Lambda], \quad \mathcal{A}_2 = \varphi^+(u), \quad u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1})) \tag{2.44}$$

и для оператора $\mathcal{Q}$:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{Q}]^h, \quad \mathcal{B}_1 = \chi_+(v), \quad v \in \mathbb{C}((\Theta^{-1})) \tag{2.45}$$

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = [\mathcal{B}_2, \mathcal{Q}]^h, \quad \mathcal{B}_2 = \chi^+(v), \quad v \in \mathbb{C}((\Theta^{-1})) \tag{2.46}$$

Предложение 2.12. Λ *удовлетворяет* (2.43) *(соответственно* (2.44) *для некоторого* $u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{Q} = \Lambda^T$ *удовлетворяет (2.45) (соответственно (2.46)) с* $v = -u^T$.

В оставшейся части этого раздела будет доказано, что уравнения (2.43) и (2.44) калибровочно-инвариантны и приводят к одному и тому же уравнению на класс эквивалентности, коэффициенты ξ_i ряда по l для Λ_0 являются интегралами движения и потоки, соответствующие различным u коммутируют. Чтобы не увеличивать громоздкость изложения, формулировки теорем приводятся только для оператора Λ. Для сопряженного оператора $\mathcal{Q}$ справедливы аналогичные утверждения.

Определение 2.2. *Будем говорить, что уравнение калибровочно-инвариантно (или сохраняет калибровочную эквивалентность), если из того, что два решения этого уравнения* $\Lambda(t)$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$ *калибровочно-эквивалентны в начальный момент времени* t_0, *т.е.*

$$ {}^{h}S\Lambda(t_0)S^{-1} = \widetilde{\mathcal{L}}(t_0), \tag{2.47}$$

где S – N*-периодическая функция, принимающая значения в группе* $\mathbb{N}_-$ *нижнетреугольных матриц с единичной главной диагональю, следует, что эти решения калибровочно-эквивалентны в любой момент времени.*

Теорема 2.13. *Уравнения (2.43) и (2.44) сохраняют калибровочную эквивалентность и определяют одно и тоже уравнение на класс эквивалентности.*

$\odot$ Покажем сначала, что уравнение (2.43) калибровочно-инвариантно. Пусть $\Lambda, \widetilde{\mathcal{L}}$ – два решения (2.43) и в момент времени t_0 выполнено (2.47). Положим

$$\widehat{\mathcal{L}}(t) \stackrel{def}{\equiv} {}^{h}S\Lambda(t)S^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

$\widehat{\mathcal{L}}(t)$ является решением (2.43). Действительно, непосредственно проверяется, что $\frac{d\widehat{\mathcal{L}}}{dt} =^{h} \left[\hat{\mathcal{A}}_1, \widehat{\mathcal{L}}\right]$, где $\hat{\mathcal{A}}_1(\Lambda) = S\mathcal{A}_1(\Lambda)S^{-1}$, и нужно показать, что $\hat{\mathcal{A}}_1(\Lambda) = \mathcal{A}_1(\widehat{\mathcal{L}})$. Из (2.48) и теоремы 2.3 следует, что $T_{0,\widehat{\mathcal{L}}(t)} = H(t)T_{0,\Lambda(t)}S^{-1}$, где $H(t) \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$, поэтому $\varphi_{0,\widehat{\mathcal{L}}}(u) = S\varphi_{0,\Lambda}(u)S^{-1}$. Поскольку S не зависит от λ, то

$$\mathcal{A}_1(\widehat{\mathcal{L}}) \equiv \left[\varphi_{0,\widehat{\mathcal{L}}}(u)\right]_+ = S[\varphi_{0,\Lambda}(u)]_+S^{-1} = \hat{\mathcal{A}}_1(\Lambda).$$

Итак, $\widehat{\mathcal{L}}(t)$ – решение (2.43) и $\widehat{\mathcal{L}}(t_0) = \widetilde{\mathcal{L}}(t_0)$, тогда в силу единственности решения задачи Коши $\widehat{\mathcal{L}}(t) = \widetilde{\mathcal{L}}(t)$ при всех t, и из (2.48) следует калибровочная инвариантность уравнения (2.43). Пусть теперь $\Lambda(t)$ – решение уравнения (2.44), $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$ – решение (2.43), и в момент времени t_0 выполнено ${}^{h}S_0\widetilde{\mathcal{L}}(t_0){S_0}^{-1} = \Lambda(t_0)$. Мы покажем, что $\Lambda(t)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$ будут калибровочно-эквивалентны при всех t, что доказывает одновременно калибровочную эквивалентность (2.44) и совпадение соответствующих уравнений на класс эквивалентности (напомним, что в соответствии с предложением 2.1 множество классов калибровочной эквивалентности операторов Λ взаимно-однозначно отождествляется с множеством операторов Λ_{can} вида (2.8)).

Пусть $S(t)$ – решение уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \left[\mathcal{A}_2\left(\Lambda(t)\right) - \mathcal{A}_1\left(\Lambda(t)\right)\right] S \tag{2.49}$$

с начальным условием $S(t_0) = S_0$. Легко видеть, что разность $\mathcal{A}_2(\Lambda) - \mathcal{A}_1(\Lambda)$ есть не зависящая от λ нижнетреугольная матрица с нулевой диагональю, поэтому (2.49) самосогласовано и разрешимо в классе $\mathbb{N}_-$:

$$S(t) = p - exp \int\limits_{t_0}^{t} \left[\mathcal{A}_2\left(\Lambda(t)\right) - \mathcal{A}_1\left(\Lambda(t)\right)\right] dt\ S_0.$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{L}}(t) =^h S(t)\widetilde{\mathcal{L}}(t)S^{-1}(t). \tag{2.50}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{d\widehat{\mathcal{L}}}{dt} =^h \left[\mathcal{A}, \widehat{\mathcal{L}}\right], \tag{2.51}$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{dt}S^{-1} + S\mathcal{A}_1(\widetilde{\mathcal{L}})S^{-1} \tag{2.52}$$

Как было доказано выше, $S\mathcal{A}_1(\widetilde{\mathcal{L}})S^{-1} = \mathcal{A}_1\left({}^h S\widetilde{\mathcal{L}}S^{-1}\right)$. Отсюда, учитывая (2.49) находим:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2\left(\Lambda(t)\right) - \mathcal{A}_1\left(\Lambda(t)\right) + \mathcal{A}_1(\widehat{\mathcal{L}}) \tag{2.53}$$

Считая $\Lambda(t)$ заданной функцией, можно рассматривать (2.51) с $\mathcal{A}$, заданным формулой (2.53), как уравнение на $\widehat{\mathcal{L}}$. Решение $\Lambda(t)$ также удовлетворяет (2.51) (смотри (2.53)), и при $t = t_0$ $\Lambda(t_0) = \widehat{\mathcal{L}}(t_0)$, следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, $\Lambda(t) = \widehat{\mathcal{L}}(t)$ при всех t, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.14. *$\Lambda_0(t)$ является интегралом движения для уравнений (2.43), (2.44).*

⊙ Докажем например, что $\frac{d\Lambda_0}{dt} = 0$, где производная вычисляется в соответствии с (2.44). В условии теоремы 2.3 можно потребовать, например, чтобы $\operatorname{Tr}\sum_{n=0}^{N-1} t_i(n) = 0$ для любого i, тогда T_0 будет определен однозначно. Дифференцируя по t равенство $\Lambda_0 =^h T_0 \Lambda {T_0}^{-1}$, получим

$$\frac{d\Lambda_0}{dt} =^h \left[\widetilde{\mathcal{A}}_2^-, \Lambda_0\right] \tag{2.54}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2^- = \partial_t T_0 \, {T_0}^{-1} - T_0 \varphi^-(u) {T_0}^{-1} \tag{2.55}$$

(Здесь учтено, что ${}^h[\mathcal{A}_2, \Lambda] = -{}^h[\varphi^-(u), \Lambda]$.)

Записав $\widetilde{\mathcal{A}}_2^-$ в виде

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2^-(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) \Lambda^{-i}, \quad a_i(n) \in \mathrm{Diag} \tag{2.56}$$

и разлагая (2.54) в ряд по l, получим

$$\frac{d\xi_i}{dt} = (J \; a_{i+1})(n) + F_i(n), \quad i = 0, \ldots, \infty \tag{2.57}$$

где

$$F_i(n) = \sum_{j+1}^{i} \Big(a_j(n+1) - {}^{\sigma-(i-j)} a_j(n) - (i-j)\Big) \, \xi_{i-j}, \quad i \geqslant 1 \tag{2.58}$$

и $F_0(n) \equiv 0$. Рассмотрим первое из уравнений (2.57):

$$\frac{d\xi_0}{dt} = (J \; a_1)(n). \tag{2.59}$$

Из леммы 2.1 и (2.59) следует $\frac{d\xi_0}{dt} = 0$ и

$$a_1(n) = \alpha_1 \cdot E, \quad \alpha_1 \in \mathbb{C} \tag{2.60}$$

Тогда из (2.60) и (2.58) видно, что $F_1(n) = 0 \quad \forall n$. По индукции получаем, что $\Lambda_0(t) = \mathrm{const}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_2^- \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$. Аналогично проверяется, что Λ_0 является интегралом движения для уравнения (2.43). $\square$

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathcal{M} = \varphi_{0,\Lambda}(v), \quad v \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$. *Тогда* $\frac{d\mathcal{M}}{dt} = [\mathcal{A}_1, \mathcal{M}]$ *в силу уравнения* (2.43) *и* $\frac{d\mathcal{M}}{dt} = [\mathcal{A}_2, \mathcal{M}]$ *в силу* (2.44).

⊙ Непосредственно проверяется, что

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \left[\mathcal{M}, \, {T_0}^{-1} \frac{dT_0}{dt}\right]. \tag{2.61}$$

С другой стороны, при доказательстве теоремы 2.14 было показано, что $\widetilde{\mathcal{A}}_2^- \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$. Поэтому

$$0 = \left[\widetilde{\mathcal{A}}_2^-, v\right] = T_0^{-1}\left[\widetilde{\mathcal{A}}_2^-, v\right] T_0 = \left[T_0^{-1}\frac{dT_0}{dt} - \varphi_0^-(u),\, \mathcal{M}\right]. \qquad (2.62)$$

Учитывая (2.61) и то, что $[\varphi_0(u), \mathcal{M}] = 0$, получим $\frac{d\mathcal{M}}{dt} = [\mathcal{A}_2, \mathcal{M}]$. Аналогично доказывается второе соотношение. $\square$

Теорема 2.15. *Рассмотрим уравнения типа* (2.43)

$$\frac{d\Lambda}{dt} =^h [\varphi_+(u), \Lambda], \quad u \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1})), \qquad (2.63)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} =^h [\varphi_+(v), \Lambda], \quad v \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1})). \qquad (2.64)$$

Тогда $\frac{d^2\Lambda}{dt\,d\tau} = \frac{d^2\Lambda}{d\tau\,dt}$, *где производные вычисляются в силу уравнений* (2.63), (2.64).

Аналогичное утверждение верно и для уравнений типа (2.44).

⊙ Из (2.63), (2.64) и леммы 2.4 следует:

$$\frac{d^2\Lambda}{dt d\tau} = I_1(u, v) + I_2(u, v), \qquad (2.65)$$

$$\frac{d^2\Lambda}{d\tau dt} = I_1(v, u) + I_2(v, u), \qquad (2.66)$$

где

$$I_1(u, v) =^h [[\varphi_+(u), \varphi(v)]_+, \Lambda], \qquad (2.67)$$

$$I_2(u, v) =^h \left[\varphi_+(v), ^h[\varphi(u)_+, \Lambda]\right]. \qquad (2.68)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} I_1(u, v) &=^h [-[\varphi_-(u), \varphi_+(v)]_+, \Lambda] =^h [[\varphi_+(v), \varphi(u)]_+, \Lambda] \\ &+^h [[\varphi_+(u), \varphi_+(v)]_+, \Lambda] = I_1(v, u) +^h [[\varphi_+(u), \varphi_+(v)], \Lambda] \end{aligned} \qquad (2.69)$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $[\varphi(u), \varphi(v)] = 0$, и очевидным свойством $[\varphi_-(u), \varphi_-(v)]_+ = 0$). Аналогичным образом, учитывая, что

$$\left[^h\varphi_+(u), ^h\varphi_+(v)\right] = \hat{h}\left([\varphi_+(u), \varphi_+(v)]\right)$$

получим

$$I_2(u, v) = I_2(v, u) -^h [[\varphi_+(u), \varphi_+(v)], \Lambda] \qquad (2.70)$$

Таким образом, $I_1 + I_2$ симметрична относительно перестановки u и v, что и требовалось доказать. $\square$

3. Скалярные разностные уравнения Лакса

В этом разделе рассматривается формализм дробных степеней для скалярных разностных уравнений Лакса, т.е. уравнений вида:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = [A, L], \tag{3.1}$$

где A, L - разностные операторы с коэффициентами из кольца $\mathbb{B}_N$ N-периодических функций на $\mathbb{Z}$, и L имеет вид

$$L(n) = D^l + a_{l-1}(n)D^{l-1} + \cdots + a_0(n). \tag{3.2}$$

Здесь для оператора сдвига использовано обозначение D вместо $\hat{h}$, как это было в разделе 2, чтобы различать область действия оператора.

$$(D\,a)(n) \stackrel{def}{\equiv} a(n+1) \tag{3.3}$$

Определим алгебру $\psi\Delta O_N$ псевдоразностных операторов как алгебру формальных рядов вида

$$A(n) = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i(n)D^i, \qquad a_i(n+N) = a_i(n) \tag{3.4}$$

с естественным коммутационным соотношением $D \cdot a =^h a \cdot D$. Зададим функционал следа на $\psi\Delta O_N$ формулой

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Res}A(n), \tag{3.5}$$

где

$$\mathrm{Res}A(n) \equiv a_0(n).$$

Легко показать, что Tr удовлетворяет естественному условию

$$\mathrm{Tr}\;AB = \mathrm{Tr}\;BA \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Для любого оператора L вида* (3.2) *существует единственный оператор $P \in \psi\Delta O_N$ вида*

$$P = D + \sum_{i=0}^{\infty} p_i(n)D^{-i} \tag{3.7}$$

такой, что $P^l = L$. Оператор P называется корнем степени l из L и обозначается $L^{1/l}$.

$\odot$ Подставляя (3.7) и (3.2) в выражение $P^l = L$, получим рекуррентную систему уравнений на коэффициенты p_i:

$$\left(1 + \hat{h} + \cdots + \hat{h}^{l-1}\right) p_i = F_i, \tag{3.8}$$

где $F_i(n) \in \mathbb{B}_N$ – известная функция от p_j, $\quad j < i$ и коэффициентов оператора L. Завершает доказательство следующая

Лемма 3.1. *Оператор $G = 1 + \hat{h} + \cdots + \hat{h}^{l-1}$ обратим в классе $\mathbb{B}_N$.*

$\odot$ Пространство $\mathbb{B}_N$ конечномерно, поэтому достаточно доказать, что $\mathrm{Ker} G$ тривиально. Пусть $Gf = 0$, $f \in \mathbb{B}_N$, тогда $f(n) = f(n + l)$, $\forall n$ т.е. f имеет два взаимно-простых периода – N и l, следовательно $f(n) = \mathrm{const}$, и значит $f \equiv 0$. □

Обозначим через $Z(L)$ централизатор L в алгебре $\psi\Delta O_N$.

Предложение 3.2. *Любой элемент $M \in Z(L)$ допускает следующее представление*

$$M(n) = \sum_{i=-\infty}^{m} c_i L^{i/l}, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

$\odot$ Пусть $M(n) = \sum_{j=-\infty}^{m'} b_j(n) D^j$. Из условия $[M, L] = 0$ следует $b_{m'}(n) = b_{m'}(n + l)$ и значит $b_{m'}(n) = \mathrm{const}$. Положим $M_1 = M - b_{m'} L^{m'/l}$. Очевидно, M_1 имеет меньший порядок и принадлежит централизатору L, поэтому к нему применимо то же рассуждение. По индукции получаем представление (3.9). □

Пусть $A = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i D^i$. Введем следующие обозначения:

$$A_+ = \sum_{i \geqslant 0} a_i(n) D^i, \qquad A_- = \sum_{i<0} a_i(n) D^i.$$

Предложение 3.3. *Пусть $M \in Z(L)$, тогда $[M_+, L]$ содержит только неотрицательные степени D не выше $l - 1$.*

$\odot$ Это очевидное следствие соотношения $[M_+, L] = -[M_-, L]$. □

Из предложения 3.3 вытекает, что следующее уравнение на L является самосогласованным:

$$\frac{dL}{dt} = [A, L], \quad A = M_+, \quad M = \sum_{i=0}^{m} c_i L^{i/l}, \quad c_i \in \mathbb{C} \tag{3.10}$$

Замечание. Без ограничения общности можно считать, что $c_i = 0$, если i кратно l. Действительно, в этом случае $\left(L^{i/l}\right)_+ = L^{i/l}$ коммутирует с L.

Для того, чтобы доказать коммутативность потоков, определяемых яравнениями вида (3.10) при разных M, и построить семейство законов сохранения, нам потребуется следующая лемма:

Лемма 3.2. *Если* $\frac{dL}{dt} = [A, L]$, *то* $\frac{d}{dt}\left(L^{r/l}\right) = \left[A, L^{r/l}\right]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4 из работы [1].

Из леммы 3.2 и формулы (3.6) следует

Предложение 3.4. *Функционалы*

$$H_m = \frac{1}{m}\mathrm{Tr} L^{m/l}, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

являются законами сохранения для уравнения (3.10).

Для H_m можно получить другое представление. Разложим оператор D по степеням $L^{1/l}$ (это всегда возможно):

$$D = L^{1/l} + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) L^{-i/l}, \quad f_i \in \mathbb{B}_N \tag{3.12}$$

Теорема 3.5 [[3]]. *Пусть* $h_m \in \mathbb{B}_N$ *определяются соотношением*

$$\sum_{m>0} h_m t^{-m} = -\ln\left(1 + \sum_{i\geqslant 0} f_i t^{-i-1}\right), \tag{3.13}$$

где

$$\ln(1+x) = \sum_{m>0} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m}, \tag{3.14}$$

а $f_i \in \mathbb{B}_N$ *определяются формулой* (3.12). *Тогда*

$$h_m - \frac{1}{m}\mathrm{Res} L^{m/l} = \left(1 - \hat{h}\right) g_m \tag{3.15}$$

для некоторого $g_m \in \mathbb{B}_N$, *и следовательно*

$$H_m = \sum_{n=0}^{N-1} h_m(n). \tag{3.16}$$

Теорема 3.6. *Пусть*

$$\frac{dL}{dt} = [M_+, L], \qquad M \in Z(L) \tag{3.17}$$

$$\frac{dL}{d\tau} = \left[\tilde{M}_+, L\right], \qquad \tilde{M} \in Z(L). \tag{3.18}$$

Тогда $\frac{d^2L}{dt\,d\tau} = \frac{d^2L}{d\tau\,dt}$, *где производные вычисляются в силу уравнений (3.17), (3.18).*

⊙ Это следствие леммы 3.2. Доказательсто аналогично доказательству теоремы 2.15. □

4. Равносильность уравнения на класс калибровочной эквивалентности и скалярного уравнения Лакса

Пусть $\mathcal{Q}$ – оператор вида (2.6). Введем на $\mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ структуру ΔO_N-модуля следующим образом:
$D \circ_{\mathcal{Q}} \eta = \mathcal{Q}\hat{h}\eta$, $a \circ_{\mathcal{Q}} \eta = a\eta$, $\forall \eta \in \mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$, $\quad a \in \mathbb{B}_N$. Аксиомы модуля выполнены, поскольку $\mathcal{Q}\hat{h}a =^h a\mathcal{Q}\hat{h}$. Подпространство $\mathbb{B}_N[\lambda]^l$, очевидно, является подмодулем.

Предложение 4.1 [[1]]. *Любой элемент* $\eta \in \mathbb{B}_N[\lambda]^l$ *представляется однозначно в виде*

$$\eta = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \Theta^i\right) \Psi, \qquad b_i \in \mathbb{B}_N \tag{4.1}$$

где $b_m(n)$ *не обращается в ноль тождественно, если* $\eta \neq 0$ *и*

$$\Psi = (1, 0, \ldots, 0)^T \tag{4.2}$$

Будем называть число m *порядком элемента* η *и обозначать через* ord, *а сам коэффициент* b_m *– старшим коэффициентом и обозначать через* $\pi(\eta)$.

Предложение 4.2. *Для* $\forall \eta \in \mathbb{B}_N[\lambda]^l$ *существует и единственен* $P \in \Delta O_N$, *такой, что* $\eta = P \circ_{\mathcal{Q}} \Psi$, *при этом степень* P *равна порядку* η.

⊙ Непосредственно проверяется, что

$$\operatorname{ord}(D \circ \eta) = \operatorname{ord}\eta + 1, \tag{4.3}$$

$$\pi(D \circ \eta) =^h \pi(\eta). \tag{4.4}$$

Положим $\eta_1 = \eta - \pi(\eta) D^{\operatorname{ord}\eta} \circ \Psi$; очевидно $\operatorname{ord}\eta_1 < \operatorname{ord}\eta$. Применяя то же рассуждение к η_1 и т.д., по индукции получим требуемое утверждение. $\square$

Поставим в соответствие оператору $\mathcal{Q}$ некоторый оператор $L \in \Delta O_N$, определяемый соотношением

$$\lambda\Psi = L \circ_{\mathcal{Q}} \Psi. \tag{4.5}$$

В соответствии с предложением 4.2 L имеет вид

$$L = D^l + a_{l-1} D^{l-1} + \cdots + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{B}_N \tag{4.6}$$

Предложение 4.3. 1) *коэффициенты L инвариантны относительно калибровочного действия (2.7) группы $\mathbf{N}_+(l, \mathbb{B}_N)$ – группы периодических функций на $\mathbb{Z}$ со значениями в группе верхнетреугольных матриц;*

2) *соответствие (4.5) между множеством операторов L вида (4.6) и множеством классов калибровочной эквивалентности операторов $\mathcal{Q}$ биективно.*

$\odot$ Пусть $\tilde{\mathcal{Q}} = V\mathcal{Q}^h V^{-1}, \qquad V \in \mathbf{N}_+(l, \mathbb{B}_N)$, тогда

$$D^n \circ_{\tilde{\mathcal{Q}}} \Psi = V\left(D^n \circ_{\mathcal{Q}} \Psi\right), \quad \forall n. \tag{4.7}$$

Действительно, в соответствии с определением модуля

$$D^n \circ_{\tilde{\mathcal{Q}}} \Psi = V\mathcal{Q}^h V^{-1} \hat{h}\, V\mathcal{Q}^h V^{-1} \hat{h} \cdots V\mathcal{Q}^h V^{-1} \hat{h}\Psi = \tag{4.8}$$

$$= V\mathcal{Q}^h V^{-1}\, {}^h V \hat{h} \mathcal{Q}^h V^{-1} \hat{h} \cdots V\mathcal{Q}^h V^{-1} \hat{h}\Psi = \tag{4.9}$$

$$= V\mathcal{Q}\hat{h}\, \mathcal{Q}\hat{h} \cdots \mathcal{Q}\hat{h}\Psi = V D^n \circ_{\mathcal{Q}} \Psi \tag{4.10}$$

Здесь учтено, что $V\Psi = \Psi$ и $\hat{h}\Psi = \Psi$. Из (4.7) следует, что

$$P \circ_{\tilde{\mathcal{Q}}} \Psi = V P \circ_{\mathcal{Q}} \Psi \quad \forall P \in \Delta O_N \tag{4.11}$$

Умножая обе части (4.5) на V и учитывая (4.11), получаем:

$$\lambda\Psi = L \circ_{\mathcal{Q}} \Psi = L \circ_{\tilde{\mathcal{Q}}} \Psi.$$

Утверждение 1) доказано. Для доказательства второго утверждения вычислим L для оператора $\mathcal{Q}$ канонического вида:

$$\mathcal{Q}_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 + \lambda \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{l-1} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Очевидно,

$$D^i \circ_{\mathcal{Q}_{\mathrm{can}}} \Psi = \Psi_i, \qquad i = 1, \dots, l-1, \tag{4.13}$$

где Ψ_i обозначает столбец, у которого на i-том месте стоит 1, а остальные элементы равны нулю (элементы нумеруются с 0), $\Psi \equiv \Psi_0$. Из (4.13) непосредственно следует, что

$$D^l \circ_{\mathcal{Q}_{\mathrm{can}}} \Psi = \sum_{j=0}^{l-1} c_j \Psi_j + \lambda \Psi. \tag{4.14}$$

Выражение (4.14) совместно с (4.13) означает, что L имеет вид (4.6) и $a_i = -c_i$. Поскольку согласно предложению 2.2 каждый класс калибровочной эквивалентности содержит ровно представителя вида (4.12), соответствие между классами калибровочной эквивалентности и операторами вида (4.6) биективно. □

Замечание 4.1. Указанное выше соответствие между L и $\mathcal{Q}$ можно получить и другим способом. Пусть $\Lambda = {\mathcal{Q}_{can}}^T$. Тогда вспомогательная линейная задача $\hat{h}\tilde{\Psi} = \Lambda\tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_{l-1})^T$ эквивалентна уравнению $\tilde{L}\tilde{\psi}_0 = \lambda\tilde{\psi}_0$, где $\tilde{L}$ имеет вид (4.6). Можно показать, что $\tilde{L} = L$.

Введем теперь на $\mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ структуру $\psi\Delta O_N$-модуля. Действие ΔO_N определим так же как и ранее. Чтобы задать действие D^{-1}, необходимо обращать оператор $\mathcal{Q}$. Он обратим в классе эндоморфизмов $\mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$:

$$\mathcal{Q}^{-1} \equiv (\Theta + p)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\Theta^{-1} p\right)^i \Theta^{-1}. \tag{4.15}$$

Для $\mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ имеет место утверждение, аналогичное предложению 4.1, именно:

Любой элемент η из $\mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ однозначно представляется в виде

$$\eta = \left(\sum_{i=-\infty}^{m} b_i \Theta^i \right) \Psi, \qquad b_i \in \mathbb{B}_N, \tag{4.16}$$

где $b_m(n)$ не обращается в ноль тождественно, если $\eta \neq 0$. Так же как и ранее вводится определение порядка и старшего коэффициента. Выражение (4.15) имеет смысл, поскольку Θ^{-1} понижает порядок. Действие D^{-1} на $\eta \in \mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ определяется естественной формулой

$$D^{-1} \circ_{\mathcal{Q}} \eta = \hat{h}^{-1} \mathcal{Q}^{-1} \eta.$$

Легко провеяется, что аксиомы модуля выполнены.

Предложение 4.4. *Для* $\forall \eta \in \mathbb{B}_N((\lambda^{-1}))^l$ *существует единственный* $P \in \psi\Delta O_N$, *такой что* $\eta = P \circ_{\mathcal{Q}} \Psi$, *при этом* $\mathrm{ord} P = \mathrm{ord}\eta$.

$\odot$ Доказывается аналогично предложению 4.2.□

Пусть $\chi(v) \equiv \chi_0(v) = \chi_1(v), \quad \forall v \in \mathbb{C}((\Theta^{-1}))$ определено так же, как в разделе 2. Имеет место следующая

Теорема 4.5.

$$\chi(\Theta^m) = L^{m/l} \circ \Psi \tag{4.17}$$

$\odot$ Поскольку, в соответствии со следствием предложения 2.6, $\chi(\Theta) \in \mathcal{Z}^h\,\mathcal{Q}$, то $\left[\chi(\Theta), \mathcal{Q}\hat{h}\right] \circ \eta = 0, \quad \forall \eta$, т.е. умножение на $\chi(\Theta)$ коммутирует с действием любого $P \in \psi\Delta O_N$. Определим P соотношением $\chi(\Theta)\Psi = P \circ \Psi$. Тогда $\chi(\Theta^m)\Psi = \chi^m(\Theta)\Psi = P^m \circ \Psi$. Положив $m = l$ и учитывая, что $\Theta^l = \lambda$, получим $P^l = L$, что и требовалось. □

Теорема 4.6. *Уравнение* (2.46), *рассматриваемое как уравнение на класс калибровочной эквивалентности, при* $\mathcal{B}_2 = \chi^+(v), \quad v = \sum_{i=0}^m c_i \Theta^i$ *и выборе оператора* L, *определяемого формулой* (4.5), *в качестве представителя класса эквивалентности, совпадает со скалярным уравнением Лакса* (3.10) *для* $A = M_+$ *и* $M = -\sum_{i=0}^m c_i L^{i/l}$.

$\odot$ Пусть $\mathbb{B}_{N,t}$ обозначает пространство функций от двух переменных – $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, N-периодических по n и гладких по t. Введем на $\mathbb{B}^l_{N,t}[\lambda]$ структуру $\mathbb{B}_{N,t}\left[D, D_t \equiv \frac{d}{dt}\right]$-модуля, положив $D_t \circ \eta = \left(\frac{d}{dt} - \mathcal{B}_2\right)\eta$ и сохраняя прежним действие D. Аксиомы модуля выполнены, так как $\left[\frac{d}{dt} - \mathcal{B}_2, \mathcal{Q}\hat{h}\right] = 0$ – это следствие уравнения (2.46), и $\left[\frac{d}{dt} - \mathcal{B}_2, f\right] = \frac{df}{dt}$ из-за скалярности $f \in \mathbb{B}_{N,t}$.

Пусть $\mathcal{M}\Psi = -\tilde{M} \circ_{\mathcal{Q}} \Psi, \quad \mathcal{M} \equiv \chi(v)$. Из теоремы 4.5 следует, что

$$\tilde{M} = -\sum_{i=0}^m c_i L^{i/l} = M. \tag{4.18}$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathcal{M}\Psi = M \circ \Psi$, *тогда* $\mathcal{M}^{+}\Psi = M_{+} \circ \Psi$.

⊙ Поскольку $\mathcal{M}^{+}$ есть полином по Θ с коэффициентами из $\mathrm{Diag}(l, \mathbb{B}_N)$, то $\mathcal{M}^{+}\Psi \in \mathbb{B}_N[\lambda]^l$, и в соответствии с предложением 4.2 существует $P \in \Delta O_N$, такой, что $\mathcal{M}^{+}\Psi = P \circ \Psi$. Тогда $\mathcal{M}^{-}\Psi = (M-P)\circ\Psi$ и, так как $\mathcal{M}^{-}\Psi$ имеет отрицательный порядок, то в соответствии с предложением 4.4 $M-P$ представляет собой ряд по отрицательным степеням D, и следовательно $P = M_{+}$, что и требовалось доказать. □

Из определения действия D_t, формулы (4.18) и леммы 4.1 следует:

$$D_t \circ \Psi = -\mathcal{B}_2\Psi = -\mathcal{M}^{+}\Psi = M_{+} \circ \Psi = A \circ \Psi.$$

Учитывая, что $L \circ \Psi = \lambda\Psi$, получаем $[D_t - A, L] \circ \Psi = 0$. Но $[D_t - A, L] = \frac{dL}{dt} - [A, L] \in \Delta O_N$, следовательно $\frac{dL}{dt} = [A, L]$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dt} =^{h} [\mathcal{A}, \Lambda], \qquad \mathcal{A} = \varphi^{+}(u), \qquad u = \sum_{i=0}^{m} c_i l^i \tag{4.19}$$

Положим $\mathcal{Q} = \Lambda^T$. В соответствии с предложением 2.12 $\mathcal{Q}$ удовлетворяет уравнению (ф244) при $v = -\sum_{i=0}^{m} c_i \Theta^i$. Далее, из предложения 2.1 следует, что в каждом классе калибровочной эквивалентности операторов Λ существует единственный представитель Λ_{can} вида

$$\Lambda_{\mathrm{can}}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda - a_0(n) & -a_1(n) & \cdots & -a_{l-2}(n) & -a_{l-1}(n) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Положим

$$L = D^l + a_{l-1}D^{l-1} + \cdots + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{B}_N. \tag{4.21}$$

В соответствии с замечанием 4.1 так определенный L совпадает с L, задаваемым формулой (4.5). Тогда из теоремы 4.6 следует

Теорема 4.7. *Уравнение* (4.19), *рассматриваемое как уравнение на класс калибровочной эквивалентности, при выборе оператора L, определяемого формулой* (4.21), *в качестве представителя класса эквивалентности, совпадает со скалярным уравнением Лакса* (3.10) *для $A = M_+$ и $M = \sum_{i=0}^{m} c_i L^{i/l}$.*

Рассмотрим теперь вопрос о связи интегралов движения ξ_i и H_m уравнений (2.44) и (3.10) соответственно.

Теорема 4.8.

$$D = L^{1/l} + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) L^{-i/l}, \tag{4.22}$$

где $f_i \in \mathbb{B}_N$ определяется формулой (2.33), *а L – формулой* (4.21) *(или, что то же самое, формулой* (4.5) *для $\mathcal{Q} = \Lambda^T$).*

$\odot$ Положим $\mathcal{Q} = \Lambda^T$. В соответствии с теоремой 2.8 имеем

$$U_1 \mathcal{Q}^h {U_1}^{-1} = \Theta + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) \Theta^{-i}, \tag{4.23}$$

где

$$U_1(n) = E + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta^{-i} \tilde{u}_i(n), \quad \tilde{u}_i = \mathrm{diag}\left(0, \tilde{u}_i^1(n), \ldots, \tilde{u}_i^{l-1}(n)\right). \tag{4.24}$$

Из (4.24) следует, что $U_1 \Psi = \Psi$. Учитывая, что $\chi(v) = \chi_1(v) = {U_1}^{-1} v U_1$, из (4.23) находим:

$$\mathcal{Q} = \left[\chi(\Theta) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) \chi(\Theta^{-i})\right] U_1^{-1 h} U_1. \tag{4.25}$$

Пользуясь теоремой 4.5, формулой (4.25) и равенством $U_1 \Psi = \Psi$ получаем

$$D \circ_{\mathcal{Q}} \Psi = \mathcal{Q} \hat{h} \Psi = \left(L^{1/l} + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) L^{-i/l}\right) \circ_{\mathcal{Q}} \Psi,$$

откуда вытекает утверждение теоремы. $\Box$

Таким образом оказывается, что f_i, определяемые формулой (2.33), совпадают с f_i, которые фигурировали в теореме 3.5.

Для линейной задачи $\hat{h}\Psi = \Lambda\Psi$, где $\Psi(n) \in gl\left(l, \mathbb{C}((\lambda^{-1}))\right)$, введем матрицу монодромии $\mathbb{M}\,(\Lambda)$:

$$\mathbb{M}\,(\Lambda) = \Psi(N)\Psi^{-1}(0) = \prod_{n=0}^{\widehat{N-1}} \Lambda(n) \qquad (4.26)$$

Калибровочному преобразованию Λ вида (2.4) отвечает сопряжение монодромии:

$$\mathbb{M}\,\left({}^{h}T\Lambda T^{-1}\right) = T(0)\mathbb{M}\,(\Lambda)T^{-1}(0). \qquad (4.27)$$

Согласно лемме 2.3 ${}^{h}T\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_0$, где Λ_0 и Λ_1 определяются формулами (2.17) и (2.33) соответственно, причем $T \in \mathbb{B}_N((l^{-1}))$, и следовательно $T(0)$ коммутирует с $\mathbb{M}\,(\Lambda_1)$, поэтому

$$\mathbb{M}\,(\Lambda_0) = \mathbb{M}\,(\Lambda_1) \qquad (4.28)$$

Теорема 4.9.

$$\ln\left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i t^{-i-1}\right) = -\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{\infty} H_m t^{-m}, \qquad (4.29)$$

где ξ_i определяются формулой (2.17), *H_m – формулой* (3.16) *или, что тоже самое, формулой* (3.11) *в соответствии с теоремой* 3.5, *и*

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i}. \qquad (4.30)$$

$\odot$ Поскольку $\Lambda_1 \in \mathbb{B}_N((l^{-1}))$ и $\Lambda_0 \in \mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$, то все $\Lambda_1(n)$ коммутируют между собой и с Λ_0. Учитывая этот факт и умножая обе части (4.28) на l^{-N}, получим

$$\left(E + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i l^{-i-1}\right)^N = \prod_{n=0}^{N-1}\left(E + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(n) l^{-j-1}\right). \qquad (4.31)$$

Коммутативное кольцо $\mathbb{C}((\Lambda^{-1}))$ изоморфно кольцу $\mathbb{C}\,((t^{-1}))$, поэтому в (4.31) можно заменить l на t. Применяя к обеим частям (4.31) операцию ln и пользуясь теоремой 3.5, получим

$$\ln\left(1 + \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i t^{-i-1}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(n) t^{-j-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty} h_m t^{-m} = -\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{\infty} H_m t^{-m}. \ \square$$

Литература

1. В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов , *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега-де-Фриза.* Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники.) т.24 стр.81–180 М. ВИНИТИ 1984 .
2. B. A. Kuperschmidt , *Discrete Lax Equations and Differential-Difference Calculus.* Astérisque, **123** (1985) .
3. E. Frenkel , *Deformations of the KDV hierarchy and related soliton equations.* Preprint q-alg/9511003 .
4. M. A. Semenov-Tian-Shansky , *Dressing transformations and Poisson-Lie group actions.* Publ. RIMS, Kyoto University **21**, No. 6 (1985), 1203–1221 .
5. M. A. Semenov-Tian-Shansky , *What in a classical R-matrix.* Func. Anal. Appl. **17** (1983), 259–272 .
6. B. Khesin and I. Zakharevich , *Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols and fractional KP-KdV hierarchies.* C. R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), Serie I, 621–626 .
7. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев , *Гамильтонов подход в теории солитонов публ М. Наука, 1986.*
8. А. Л. Пирозерский , *Пуассоновы структуры и интегрируемые системы, связанные с графами.* Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1985), 279–299 .
9. E. Frenkel, N. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky , *Drinfeld-Sokolov reduction for difference operators and deformations of W-algebras. I. The case of Virasoro algebra.* Preprint q-alg/9704011 .
10. M. A. Semenov-Tian-Shansky and A. V. Sevostyanov , *Drinfeld-Sokolov reduction for difference operators and deformations of W-algebras. II. General semisimple case.* Preprint q-alg/9702016 .

Pirozersky A. L. The Drinfeld–Sokolov reduction for a Lax difference operator with the periodic boundary conditions in the case $gl(n, \mathbb{C}((\lambda^{-1}))$.

Matrix difference equations of a special kind are investigated by means of the dressing equations method. It is shown that these equations are gauge invariant, the corresponding flows being commutative. It is proved that the equation for the gauge equivalence class and the Lax equation are equivalent.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 16 февраля 1998 г.