Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

А. И. Виноградов

БИНАРНЫЕ ЗАДАЧИ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД. II

В томе No. 245 этого сборника за 1997 год опубликована первая часть этой работы, где с помощью арифметического аналога Гейзенберговской некоммутативности для μ-функции Мебиуса осуществлен перевод бинарных задач теории чисел на язык среднего от сумм Клостермана. Тем самым появилась возможность применить спектральную технику мат.-физики (в духе Сельберга) к решению этих задач.

В этой части работы изложены конкретные шаги по переводу среднего от сумм Клостермана на спектральный язык. Из трех спектральных компонент оператора Лапласа (непрерывной, дискретной и конечно-мерных классических пространств) наиболее важными в этом случае являются конечно-мерные пространства, поэтому с них мы и начинаем. Непрерывная и дискретная компоненты будут исследованы вслед за конечно-мерными пространствами. Нумерация параграфов сквозная.

Ссылки на формулы части I этой работы будут сопровождаться римской цифрой I. Ссылки на формулы этой части будут стандартными. Список литературы в конце части I является общим, но для удобства читателей мы повторим его и в конце этой части снова.

§5. Сглаживающие функции

Наиболее тонким местом этой части работы является замена характеристической функции ψ полуоткрытого интервала $(N_1, N^2]$:

$$\psi(c) = \begin{cases} 1, & c \in (N_1, N^2] \\ 0, & c \notin (N_1, N^2], \end{cases} \tag{5.1}$$

которая присутствует в сумме Клостермана (3.22), I:

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (Грант No. 96-01-00679), С.-Петербург.

$$\sum_{c\equiv 0 \pmod{\delta}} \psi(c)\cdot S_c(m,n)\cdot(\cdot), \tag{5.2}$$

другой функцией, более гладкой на концах.

Это связано с тем, что спектральные представления для суммы сумм Клостермана в работах [4, 5] требуют гладкости весовых функций, которой нет у функции $\psi(c)$.

Приближать разрывную функцию (5.1) удобнее всего гладкими финитными функциями. Но большая длина интервала (5.1) не позволяет использовать одну финитную функцию для всего интервала (5.1), т.к. в этом случае ее гладкость на одном конце будет очень крутой, с большой производной, что ослабит оценки суммы сумм Клостермана. Поэтому удобно разбить весь интервал (5.1) точками геометрической прогрессии M_k на "ящики" вида

$$\psi_k(c)=\begin{cases} 1, & M_{k-1}<c\leqslant M_k,\ \ M_k=2\cdot M_{k-1}\\ 0, & c\notin(M_{k-1},M_k),\ \ M_{k-1}=2^{k-1}\cdot N_1\end{cases} \tag{5.3}$$

где $1\leqslant k\leqslant k_1$. При этом в силу произвольного выбора (1.14), I параметра $N_1\geqslant N^{\frac{1}{3}}$ его всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$2^{k_1}\cdot N_1=N^2 \tag{5.4}$$

с целым k_1 для последней точки деления. Поэтому сумму (5.2) можно переписать на языке "ящиков" (5.3) в новом виде

$$\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{c\equiv 0(\delta)}\psi_k(c)\cdot S_c(m,n)(\cdot). \tag{5.5}$$

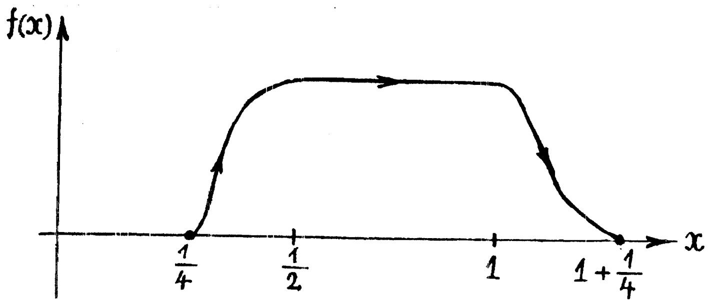
Характеристическую функцию $\psi_k(c)$ из (5.3) будем приближать гладкой финитной функцией $f(x)$, чей аргумент x отнормирован на интервале (5.3) по его правому концу

$$x=\frac{c}{M_k}=\frac{c}{2^kN_1}. \tag{5.6}$$

Точное значение функции $f(x)$ определим пятью условиями на полуоси $x \geqslant 0$:

$$
\begin{gathered}
f(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\
0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\
f(x)=1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\
1 \geqslant f(x) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{4}, \\
f(x)=0, \quad x \geqslant 1+\frac{1}{4}
\end{gathered} \tag{5.7}
$$

Графически эта функция выглядит так



При этом на переходных интервалах подъема $\left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ и спуска $\left(1 \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{4}\right)$ будем считать функцию $f(x)$ монотонной и бесконечно гладкой с ограниченными производными до любого фиксированного порядка включительно. Кроме того, не нарушая общности, можно считать функцию $f(x)$ симметричной относительно центра ее носителя $x_0=\frac{3}{4}$.

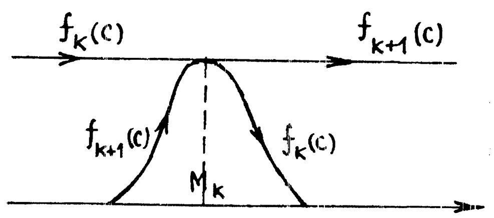
Поэтому, если мы заменим в сумме (5.5) функцию $\psi_k(c)$ ее гладким аналогом $f_k(c)$:

$$
f_k(c)=f\left(\frac{c}{M_k}\right)=f\left(\frac{c}{2^k N_1}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant k_1
$$

то сумма (5.5) перейдет в новую сумму:

$$
\sum_{k=1}^{k_1} \sum_{c \equiv 0(\delta)} f_k(c) \cdot S_c(m, n) \cdot(\cdot). \tag{5.8}
$$

Весовые функции $f_k(c)$ в сумме (5.8) удовлетворяют всем требованиям гладкости работ [4, 5]. Единственное препятствие, которое машает нам заменить сумму (5.5) суммой (5.8) состоит в том, что сглаженная функция $f_k(c)$ из (5.8) захватывает "лишние" суммы Клостермана из соседних "ящиков" на подъеме и спуске, чего нет в исходной сумме (5.5) с первоначальной функцией $\psi_k(c)$. На графике это пересечение выглядит так:



Чтобы компенсировать этот недостаток надо учесть, что суммы Клостермана $S_c(m,n)$ на спуске функции $f_k(c)$ учитываются второй раз на постоянном участке функции $f_{k+1}(c)$, где она $= 1$ для всех $k \in [1, k_1 - 1]$. И наоборот, суммы Клостермана на подъеме функции $f_{k+1}(c)$ учитываются второй раз на интервале постоянного значения функции $f_k(c) = 1$. Поэтому из суммы (5.8) надо вычесть один раз те суммы Клостермана, которые учитываются дважды. Они определяются произведением функций:

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) \tag{5.9}$$

для всех $k \in [1, k_1 - 1]$, где

$$x_k = 2 \cdot x_{k+1} = \frac{c}{M_k} = \frac{c}{2^k \cdot N_1}.$$

Утверждение о произведении (5.9) не совсем тривиально из-за разной нормировки интервалов суммирования в соседних "ящиках" поэтому мы кратко его докажем. Когда переменная x_{k+1} из (5.9) находится на интервале подъема $\frac{1}{4} \leqslant x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$, переменная x_k соседнего "ящика" слева находится на интервале $\frac{1}{2} \leqslant x_k \leqslant 1$, т.к. $x_k = 2 \cdot x_{k+1}$. На этом интервале $f(x_k) = 1$, поэтому справедливо равенство:

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f_{k+1}(c), \quad \frac{1}{4} \leqslant x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

И наоборот, когда переменная x_k находится на интервале спуска: $1 \leqslant x_k \leqslant 1+\frac{1}{4}$, переменная x_{k+1} соседнего "ящика" справа находится в интервале: $\frac{1}{2} \leqslant x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{8}$, т.к. $x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k$. Поэтому $f(x_{k+1})=1$ и следовательно справедливо равенство:

$$f_k(c)\cdot f_{k+1}(c)=f_k(c), \quad 1 \leqslant x_k \leqslant 1+\frac{1}{4}.$$

Для того, чтобы убедиться, что наше произведение (5.9) никаких других значений не принимает, его надо проверить на полном носителе одной из переменных, например, x_k. Для этой переменной остался не проверенным только интервал подъема $\frac{1}{4} \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{2}$. Но для этого интервала вторая переменная, из $(k+1)$-го ящика, $x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k$ лежит в интервале $\frac{1}{8} \leqslant x_{k+1} \leqslant \frac{1}{4}$, т.е. вне носителя функции $f(x_{k+1})$ и поэтому $=0$.

Следовательно произведение (5.9) действительно дает нам только $f_k(c)$ на подъемах и спусках, когда $k \in [1, k_1-1]$. Поэтому сумму (5.8) следует заменить разностью двойных сумм:

$$\sum_{k=1}^{k_1} \sum_{c\equiv 0(\delta)} f_k(c)\cdot S_c(m,n)\cdot(\cdot)- \\ -\sum_{k=1}^{k_1-1} \sum_{c\equiv 0(\delta)} f_k(c)\cdot f_{k+1}(c)\cdot S_c(m,n)\cdot(\cdot). \qquad (5.10)$$

Разность двойных сумм (5.10) уже близка к исходной сумме (5.5). Отличие только в левом подъеме функции $f_1(c)$ самого первого "ящика" слева и в спуске функции $f_{k_1}(c)$ самого последнего "ящика" справа. Поэтому суммы Клостермана (с весом $(\cdot)$) на самом первом подъеме слева и самом последнем спуске справа надо вычесть из (5.10), чтобы эта разность двойных сумм совпала с первоначальной суммой (5.5). Другими словами, из (5.10) надо вычесть величину равную:

$$\sum_{\substack{c\leqslant N_1\\ c\equiv 0(\delta)}} f_1(c)\cdot S_c(m,n)\cdot(\cdot)+\sum_{\substack{c>N^2\\ c\equiv 0(\delta)}} f_{k_1}(c)\cdot S_c(m,n)\cdot(\cdot). \qquad (5.11)$$

Теперь вспомним, что из определяющего равенства (3.22), §3.I следует, что символ веса $(\cdot)$ во всех предыдущих суммах имеет вид:

$$(\cdot)=\varepsilon\cdot\exp(-\varepsilon\cdot n)\cdot W_{\delta_1}(Y/c), \qquad (5.12)$$

при этом по условию (1.10),I, $Y = N^2$. Но по определению (2.2),I:

$$W_{\delta_1}(x) = \sum_{\substack{d \leqslant x \\ (d,\delta_1)=1}} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \left(\frac{x}{\delta_1 \cdot d} \right). \tag{5.13}$$

Поэтому, если $c > N^2$, то сумма (5.13) пуста и следовательно второе слагаемое в (5.11) равно нулю. Следовательно для получения первоначальной суммы (5.5) надо вычесть из первой двойной суммы в (5.10) только первое слагаемое (5.11):

$$\sum_{\substack{c \leqslant N_1, \\ c \equiv 0(\delta)}} f_1(c) \cdot S_c(m,n) \cdot (\cdot). \tag{5.14}$$

Но эту сумму мы можем оценить не прибегая к ее спектральной трактовке. Для этого достаточно обратить внимание на тот факт, что в окончательное равенство (3.20),I сумма (5.14) входит как среднее по параметрам n, m, δ, поэтому с помощью равенства Харди–Литтлвуда (3.13),I, прочитанного в обратную сторону, мы снова можем перевести среднее суммы (5.14) на первоначальный язык сумм Рамануджана и μ-функции Мебиуса и придать ей вид суммы $G_1(N)$ из (1.15),I с весом f:

$$G_f(N) = \sum_{m = N^2 - x^2 > 0} \sum_{c \leqslant N_1} f\left(\frac{c}{2N_1}\right) \cdot \frac{\mu(c)}{c} \cdot r_c(m) \cdot V_c(Y). \tag{5.15}$$

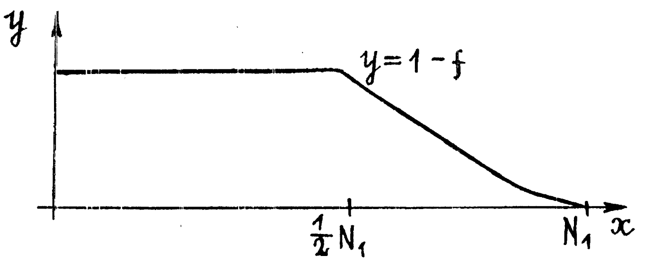
Из определения функции f в (5.7) следует, что в интервале $1 \leqslant c \leqslant N_1$ она определяется условиями

$$f\left(\frac{c}{2N_1}\right) = 0, \quad 1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}N_1 \;\; 0 \leqslant f\left(\frac{c}{2N_1}\right) \leqslant 1, \quad \frac{1}{2}N_1 \leqslant c \leqslant N_1$$

При этом на интервале $c \in \left(\frac{1}{2}N_1, N_1\right]$ функция f монотонно возрастает как это видно на ее графическом изображении, помещенном сразу за (5.7). Поэтому разность $(1-f)$ является сглаженной единицей на конце интервала суммирования.
и следовательно асимптотика суммы $G_{1-f}(N)$ точно такая же как у исходной суммы $G_1(N)$ в равенстве (1.22),I.

Дальше остается заметить, что справедливо равенство

$$G_f(N) = G_1(N) - G_{1-f}(N),$$



которое сразу же следует из определения (5.15). Поэтому для $G_f(N)$ справедливо оценка:

$$G_f(N) \ll N \cdot \exp(-\sqrt{\log N}). \tag{5.16}$$

Тем самым мы действительно свели оценку исходной суммы (5.5) к оценке разности двойных сумм (5.10), что эквивалентно двум отдельным оценкам. Сначала оценке суммы

$$\sum_{c \equiv 0(\delta)} f_k(c) \cdot S_c(m,n) \cdot (\cdot) \tag{5.17}$$

при любом фиксированном $k \in [1, k_1]$ и затем оценке аналогичной суммы с произведением весовых функций:

$$\sum_{c \equiv 0(\delta)} f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) \cdot S_c(m,n) \cdot (\cdot), \tag{5.18}$$

для любого фиксированного k из интервала $1 \leqslant k \leqslant (k_1 - 1)$. Обе эти суммы имеют весовые функции, которые удовлетворяют всем требованиям работ [4, 5], что позволяет перевести их на спектральный язык.

§6. Обратное преобразование Меллина

Стандартным языком спектральных оценок в работах [4, 5] является язык рядов Гекке, коэффициентами которых являются арифметические коэффициенты Фурье собственных функций. Поэтому прежде чем приступать к оценкам сумм (5.17) и (5.18), следует сперва перевести функцию f из (5.7) на язык обратного преобразования Меллина:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}} \check{f}(s_2) \cdot y^{-s_2} ds_2, \tag{6.1}$$

где

$$\check{f}(s_2) = \int\limits_0^\infty f(x) \cdot x^{s_2-1} dx. \tag{6.2}$$

Для унификации обозначений с частью I этой работы мы взяли переменную интегрирования s_2, оставив символ s_1 интегралу (1.11),I, чтобы отличать их, когда эти интегралы встретятся дальше вместе в двойном интеграле.

В связи с тем, что $f(x) = 0$ для $x \leqslant 1/4$, интеграл (6.2) абсолютно сходится в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s_2 < 0$. Кроме того, в связи с бесконечной гладкостью $f(x)$ интеграл (6.1) абсолютно сходится по s_2 на любой прямой $\operatorname{Re} s_2 = -\sigma_2$, $\sigma_2 > 0$, со скоростью выше любой фиксированной степени s_2. Поэтому равенство (6.1) вполне законно на прямой $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$. Его можно проверить непосредственным счетом правой части, подставив (6.2) в (6.1) и поменяв порядки интегрирования, с предварительным двухкратным интегрированием по частям, в (6.2).

Этот феномен объясняется тем, что носитель функции f отделен от нуля, поэтому все вычеты в полюсах равны нулю.

Используя многократное интегрирование по частям в (6.2) можно преобразовать это равенство к виду:

$$\check{f}(s_2) = \frac{1}{s_2(s_2+1)\ldots(s_2+c)} \cdot \int\limits_0^\infty f^{(c+1)}(x) \cdot x^{s_2+c} \cdot dx, \tag{6.3}$$

где $c \geqslant 1$ – любое фиксированное целое число.

Любая производная $f^{(n)}(x)$, $n \geqslant 1$, так же является финитной бесконечно гладкой функцией, носителем которой являются два интервала: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{5}{4}\right)$. Поэтому равенство (6.3) аналитически продолжается на всю комплексную s_2-плоскость без полюсов, так как вычеты в полюсах равны 0. Поэтому контур интеграла (6.1) можно сдвигать на любую прямую $\operatorname{Re} s_2 = \mathrm{const}$.

В дальнейшем нам потребуется выделить часть сходимости интеграла (6.1) по s_2 для других целей. Поэтому правую часть (6.3) мы еще раз преобразуем. Для этого возьмем целое число C-четным

$$C = 2 \cdot C_2, \quad C_2 \geqslant 3 \tag{6.4}$$

где константа $C_2 \geqslant 3$ – любое фиксированное целое число. При этом мы намеренно согласовали индекс у константы C_2 и переменной интегрирования s_2, так как они тесно связаны между собой в одном интеграле.

Подставляя равенство (6.4) в (6.3) перепишем это представление в новом виде:

$$\check{f}(s_2) = \frac{\check{\check{f}}(s_2)}{\prod\limits_{i=1}^{C_2}(s_2 + C_2 + i)}, \tag{6.5}$$

где

$$\check{\check{f}}(s_2) = \frac{1}{s_2(s_2+1)\ldots(s_2+C_2)} \cdot \int\limits_0^\infty f^{(2C_2+1)}(x) \cdot x^{s_2+2C_2} dx. \tag{6.6}$$

Мы разделили произведение в знаменателе (6.3) на две половины, оставив для функции $\check{\check{f}}$ в (6.6) только его первую половину и выделив вторую половину отдельно в знаменатель правой части (6.5), т.к. он нам потребуется для других целей в дальнейшем. Первой половины знаменателя в (6.6) вполне достаточно для обуспечения абсолютной сходимости интеграла (6.1) по s_2, если $C_2 \geqslant 3$.

Теперь снова вернемся к сумме (5.17) и вспомним, что

$$f_k(c) = f\left(\frac{c}{M_k}\right), \quad \text{где} \quad M_k = 2^k \cdot N_1. \tag{6.7}$$

Если перевести параметр C на язык спектрального параметра x из §4.I, который мы повторим здесь для удобства

$$x = \frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{c}, \tag{6.8}$$

тогда равенство (6.7) примет вид

$$f_k(c) = f\left(\frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{x \cdot M_k}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant k_1. \tag{6.9}$$

Полагая в равенстве (6.1) $y = \frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{x \cdot M_k}$ мы получим, благодаря равенству (6.9), интегральное представление функции $f_k(c)$ на языке спектрального параметра x из (6.8):

$$f_k(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s_2 = -\frac{1}{2}} \check{f}(s_2) \cdot \left(\frac{x \cdot M_k}{4\pi\sqrt{m \cdot n}}\right)^{s_2} ds_2. \tag{6.10}$$

Все, что было сказано выше об интегральном представлении функции $f_k(c)$ остается верным и для произведения этих функций:

$$F_k(c) = f_k(c) \cdot f_{k+1}(c). \tag{6.11}$$

При этом пользуясь равенством

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) = f(x_k) \cdot f\left(\frac{1}{2}x_k\right),$$

где $x_k = \frac{c}{M_k}$, $M_k = 2^k \cdot N_1$, определим функцию $F(y)$ равенством

$$F(y) = f(y) \cdot f\left(\frac{1}{2}y\right). \tag{6.12}$$

При таком определении равенства (6.11) и (6.12) согласуются между собой.

Поэтому и для произведения (6.11) справедлив аналог равенства (6.10):

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}} \check{F}(s_2) \cdot \left(\frac{x \cdot M_k}{4\pi\sqrt{m \cdot n}}\right)^{s_2} ds_2, \tag{6.13}$$

где $\check{F}(s_2)$ определяется равенством (6.2) с заменой в нем f на F из равенства (6.12). В этом случае остаются справедливыми аналоги равенств (6.3)–(6.6) для функции F из (6.12) вместо f.

§7. Интегральные представления для весовых функций

В дальнейшем мы будем ориентироваться на спектральное равенство (1.19) работы [5], т.к. оно выписано для общей конгруэнц-группы, которая нам и нужна, в то время как в работе [4] оно выписано для группы $SL(2,\mathbb{Z})$. Эта разница существенно уменьшается, когда речь идет о классических суммах Клостермана для пары вершин (∞,∞) как у нас в этой работе. В этом случае формальная разница работ [4, 5] остается только в записи непрерывной компоненты в правой части равенства (1.19), [5]. Левая же часть этого равенства совпадает с работой [4], если считать $SL(2,\mathbb{Z})$ группой $\Gamma_0(1)$. В этом случае параметр суммирования γ в равенстве (1.19), [5] совпадает с параметром “C” матрицы σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\delta),$$

т.е. запись левой части равенства (1.19) [5] становится точно такой же как в работе [4] с дополнительным условием делимости: $C \equiv 0 \pmod{\delta}$. Но прежде, чем воспользоваться равенством (1.19), [5] нам надо перевести сумму $W_{\delta_1}(Y/c)$ из (5.12) на язык интегрального представления с помощью разрывного интеграла (0.9),I точно также, как в случае равенства (1.11),I. При этом мы сразу воспользуемся аргументом этой суммы из (4.7),I, переведенным на язык спектрального параметра x из равенства (6.8):

$$W_{\delta_1}(Y/c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_1 > 3/2} \left(\frac{Y \cdot x}{\delta_1 \cdot 4\pi\sqrt{m \cdot n}}\right)^{s_1} \cdot \frac{ds_1}{s_1^3 \cdot \zeta_{\delta_1}(1+s_1)}, \quad (7.1)$$

где $\zeta_n(s) = \zeta(s) \cdot \prod\limits_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$. Кроме того, мы воспользуемся равенствами (4.4),I и подставим их вместе с (7.1) в сумму (5.17). После перемены порядков суммирования и интегрирования, что законно, приведем сумму (5.17) к новому виду интегрального среднего:

$$\frac{\pi}{X}\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_1 > 3/2} \frac{(Y/\delta_1)^{s_1} \cdot (4\pi\sqrt{m \cdot n})^{-s_1}}{s_1^3 \cdot \zeta_{\delta_1}(1+s_1)} \cdot \sum(\varphi_k) ds_1, \quad (7.2)$$

где

$$\sum(\varphi_k) = \sum_{c \equiv 0 \pmod{\delta}} \frac{s_c(m,n)}{c} \cdot \varphi_k\left(\frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{c}\right) \quad (7.3)$$

$$\varphi_k(x) = x^{1+s_1} \exp\left[-\frac{1}{X}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \cdot f\left(\frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{x \cdot M_k}\right). \quad (7.4)$$

В равенстве (7.4) мы воспользовались равенством (6.9). Для того, чтобы окончательно свести сумму (7.3) к сумме (1.19), [5] воспользуемся интегральным представлением (6.10) и подставим его в (7.4). В этом случае равенство (7.4) примет вид интегрального представления:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}} \check{f}(s_2) \cdot \frac{M_k^{s_2}}{(4\pi\sqrt{m \cdot n})^{s_2}} \cdot \varphi(x) ds_2, \quad (7.5)$$

где

$$\varphi(x) = x^{1+s_1+s_2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{X}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]. \quad (7.6)$$

По условию $\operatorname{Re} s_1 > 3/2$ и $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$, следовательно $\operatorname{Re}(s_1+s_2) > 1$. Поэтому функция $\varphi(x)$ из (7.6) удовлетворяет всем требованием спектрального равенство (1.19), [5] и нам остается только подставить (7.5) в (7.3) и поменять порядки суммирования и интегрирования, что вполне законно, т.к. сумма и интеграл сходятся абсолютно и равномерно при любой фиксированной реальной части $\operatorname{Re} s_1 > 3/2$. После чего наша сумма (7.3) преобразуется к интегральному виду:

$$\sum(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}} \frac{\check{f}(s_2)\cdot M_k^{s_2}}{(4\pi\sqrt{m\cdot n})^{s_2}} \cdot \sum(\varphi) ds_2, \tag{7.7}$$

где

$$\sum(\varphi) = \sum_{c\equiv 0 \pmod{\delta}} \frac{s_c(m,n)}{c}\cdot\varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{m\cdot n}}{c}\right) \tag{7.8}$$

с функцией φ из (7.6). Сумма (7.8) уже в точности соответствует равнству (1.19), [5] для пары вершин (∞,∞) которым мы и воспользуемся для перевода ее на спектральный язык. После чего подставим (7.7) в (7.2) и получим представление исходной суммы (5.17) для k-го “ящика” в виде двойного интегрального среднего от спектральной суммы (7.8):

$$\frac{\pi}{X}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\substack{\operatorname{Re} s_1 > 3/2 \\ \operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}}} \frac{m^{1-s_3}(Y/\delta_1)^{s_1}\cdot\check{f}(s_2)\cdot M_k^{s_2}}{n^{s_3}(4\pi)^{s_1+s_2}\cdot s_1^3\cdot\zeta_{\delta_1}(1+s_1)}\cdot\sum(\varphi) ds_1 ds_2, \tag{7.9}$$

где для сокращения записи мы ввели новый параметр

$$s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2}. \tag{7.10}$$

Условие на внутреннем s_1-контуре: $\operatorname{Re} s_1 > 3/2$, выбрано таким потому, что в дальнейшем предстоит суммирование по $n \geqslant 1$, поэтому для обеспечения абсолютной сходимости ряда нужно условие $\operatorname{Re} s_3 > 1$, что в точности соответствует условию $\operatorname{Re} s_1 > 3/2$, если исходить из определения (7.10) и условия $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$ на s_2-контуре.

Суммирование по параметру $m = N^2 - x^2 > 0$ является конечным, поэтому проблем со сходимостью этой суммы не возникает.

§8. Конечномерные пространства

На первом месте правой части равенства (1.19), [5] стоит спектральная часть суммы (7.8), которая отвечает всем конечномерным классическим пространствам группы $\Gamma_0(\delta)$ по всем целым четным весам $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geqslant 2$. К тому же в нашем случае обе вершины разложения (α, β) совпадают и равны ∞. Поэтому индексы вершин мы опустим и выпишем эту составляющую в явном виде для наглядности:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k \equiv 0(2)} (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \theta_k(\delta)} a_{j,k} \cdot \overline{t^*_{j,k}(m)} \cdot t^*_{j,k}(n) \cdot \tilde{\varphi}(k-1). \tag{8.1}$$

По пути мы упростили запись, воспользовавшись мультипликативной связью коэффициентов Фурье $\psi_{j,k}(n)$ и собственных чисел операторов Гекке $t_{j,k}(n)$:

$$\psi_{j,k}(n) = \psi_{j,k}(1) \cdot t_{j,k}(n), \tag{8.2}$$

где $\psi_{j,k}(1)$ – нормировочный коэффициент.

Кроме того, вместо обычного собственного числа оператора Гекке $t_{j,k}(n)$ мы взяли его нормированную форму:

$$t^*_{j,k}(n) = \frac{t_{j,k}(n)}{n^{\frac{k-1}{2}}}. \tag{8.3}$$

Она удобна тем, что из оценки Делиня $|t_{j,k}(n)| \leqslant \tau(n) \cdot n^{\frac{k-1}{2}}$ следует единая оценка нормированных собственных чисел для всех k:

$$|t^*_{j,k}(n)| \leqslant \tau(n), \tag{8.4}$$

где $\tau(n)$ – функция числа делителей, $a_{j,k}$ – нормировочный коэффициент:

$$a_{j,k} = |\psi_{j,k}(1)|^2 \cdot \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}}. \tag{8.5}$$

Из определяющего равенства (8.5) видно, что $a_{j,k}$ вещественно и положительно, т.к. $\psi_{j,k}(1) \neq 0$ (иначе бы j-ая собственная функция была тождественным нулем).

$\theta_k(\delta)$ – размер пространства параболических форм веса k для конгруэнц-группы $\Gamma_0(\delta)$.

Весовая функция $\tilde{\varphi}$ определяется равенством (1.21), [5], которое мы здесь выпишем для наглядности:

$$\tilde{\varphi}(k-1)=\int\limits_0^\infty J_{k-1}(x)\cdot\varphi(x)\cdot\frac{dx}{x}. \tag{8.6}$$

Для функции Бесселя $J_{2\cdot z}(x)$, где $\operatorname{Re} z>\varepsilon>0$, мы воспользуемся представлением:

$$J_{2\cdot z}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\operatorname{Re}(s+z)>0\\ \operatorname{Re} s=-\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leqslant\frac14}}\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(1-s+z)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\cdot s}ds. \tag{8.7}$$

Второе условие на s-контуре (8.7): $\operatorname{Re} s<0$, нужно для того, чтобы интеграл (8.7) абсолютно сходился.

Подставляя (8.7) в (8.6) при $z=\frac{k-1}{2}$ и меняя порядки интегрирования, (что законно при условии $\operatorname{Re} s<0$), получаем преобразованное равенство (8.6):

$$\tilde{\varphi}(k-1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\operatorname{Re}\left(s+\frac{k-1}{2}\right)>0,\\ \operatorname{Re} s=-\varepsilon}}\frac{\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-s+\frac{k-1}{2}\right)}\cdot J_s(\varphi)\,ds, \tag{8.8}$$

где

$$J_s(\varphi)=\int\limits_0^\infty\varphi(x)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-2s}\frac{dx}{x}. \tag{8.9}$$

Подставляя явный вид $\varphi(x)$ из (7.6) в (8.9), получаем явный вид интеграла (8.9):

$$J_s(\varphi)=2^{2s_3-1}\cdot X^{s_3-s}\cdot\Gamma(s_3-s), \tag{8.10}$$

где

$$s_3=\frac{1+s_1+s_2}{2}=\sigma_3+it_3. \tag{8.11}$$

Из равенства (8.10) и условия $\operatorname{Re} s=-\varepsilon<0$ следует, что функция $J_s(\varphi)$ регулярна по s_3 в области $\operatorname{Re} s_3\geqslant 0$. Но в дальнейшем мы будем с ней работать только в области $\operatorname{Re} s_3\geqslant\frac12$.

Для Г-ядра интеграла (8.8) по формуле Стирлинга следует оценка:

$$\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)\cdot\Gamma^{-1}\left(1-s+\frac{k-1}{2}\right)\ll\frac{1}{k^{1+2\varepsilon}}. \tag{8.12}$$

При этом константа в символе И. М. Виноградова $\ll$ абсолютная, если $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

Кроме того, если $\sigma_3\geqslant\frac{1}{2}$ и $s=\sigma+it$, тогда из формулы Стирлинга следует еще одна оценка:

$$\Gamma(s_3-s)\ll(1+|t_3-t|)^{\sigma_3-\sigma-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{2}|t_3-t|\right). \tag{8.13}$$

Полагая $\sigma=-\varepsilon$ и подставляя (8.13) и (8.12) в (8.8), получаем оценку:

$$\tilde{\varphi}\to\tilde{\Phi}(k-1)\ll\frac{X^{\sigma_3+\varepsilon}}{k^{1+2\varepsilon}}. \tag{8.14}$$

Эта оценка справедлива в области регулярности $\mathrm{Re}(s_3-s)\geqslant\varepsilon$ с любым фиксированным $\varepsilon>0$. Она обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда (8.1) при любом фиксированном $\varepsilon>0$. Это сразу же следует из классического равенства для нормировочных коэффициентов $a_{j,k}$:

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant\theta_k(\delta)}a_{j,k}=1+2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot\sum_{c\equiv0(\delta)}J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\right)\cdot\frac{S_c(1,1)}{c}, \tag{8.15}$$

где $S_c(1,1)$ – сумма Клостермана модуля c и параметров (1,1).

Детали, связанные с получением равенства (8.15), можно найти в работах [4, 5].

Ряд справа в (8.15) быстро и абсолютно сходится с ростом $k\geqslant 2$. Это сразу следует из поведения функции Бесселя $J_{k-1}(x)$ при $x\to0$. Из представления (8.7) следует оценка при $\varepsilon=\frac{k-1}{2}-\varepsilon_1$:

$$J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\right)\ll\left(\frac{4\pi}{c}\right)^{k-1-2\cdot\varepsilon_1},\quad\varepsilon_1\in\left(0,\frac{1}{4}\right).$$

Поэтому с учетом оценки А. Вейля для сумм Клостермана: $S_c(1,1)\ll\tau(c)\cdot\sqrt{c}$, где $\tau(c)$ – число делителей c, ряд справа в (8.15) абсолютно сходится при всех $k\geqslant2$ и $\varepsilon_1<\frac{1}{4}$.

Подставляя ряд (8.1) в ядро интеграла (7.9) на место суммы $\sum(\varphi)$ мы получим часть этого интеграла, отвечающего конечномерным пространствам. Суммируя эту часть по всем $n\geqslant1$ и

$m = N^2 - x^2 > 0$ и меняя порядки суммирования и интегрирования, что законно при $\operatorname{Re} s_3 > 1$, мы получим в ядре конечную сумму:

$$\sum_{m=N^2-x^2>0} t^*_{j,k}(m) \cdot m^{1-s_3} \tag{8.16}$$

и бесконечный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cdot t^*_{j,k}(n) \cdot n^{-s_3}. \tag{8.17}$$

У конечной суммы (8.16) проблем со сходимостью нет при любых значениях параметра $s_3 \in \mathbb{C}$. Поэтому мы сосредоточим внимание на бесконечном ряде (8.17).

Благодаря оценке Делиня (8.3), он абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} s_3 > 1$ и в нем можно выделить главную часть:

$$-\frac{L'_{j,k}}{L_{j,k}}(s_3), \tag{8.18}$$

т.е. логарифмическую производную ряда Гекке:

$$L_{j,k}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^*_{j,k}(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{t^*_{j,k}(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Отсюда следует равенство:

$$-\frac{L'_{j,k}}{L_{j,k}}(s_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \cdot t^*_{j,k}(n)}{n^{s_3}} - \sum_p \frac{\log p}{p^{2s_3}} \left(1 - \frac{t_{j,k}(p)}{p^{s_3}} + \frac{1}{p^{2s_3}}\right)^{-1}.$$

Поэтому разность между рядом (8.17) и логарифмической производной (8.18) абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} s_3 > \frac{1}{2}$ и проблем с ее исследованием нет. Поэтому все внимание мы сосредоточим на логарифмической производной (8.18). Мы приняли гипотезу Римана для рядов Гекке всех конгруэнц-групп. Поэтому функция (8.18) аналитически продолжима как целая функция до прямой $\operatorname{Re} s_3 = \frac{1}{2}$. В области $\operatorname{Re} s_3 \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, с любым фиксированным $\varepsilon > 0$, из гипотезы Римана следует оценка:

$$-\frac{L'_{j,k}}{L_{j,k}}(s_3) \ll \log^2(|s_3| + k + \delta), \tag{8.19}$$

где δ – конгруэнц-модуль группы автоморфности $\Gamma_0(\delta)$. Поэтому перенося s_1-контур в интеграле (7.9) влево на прямую $\operatorname{Re} s_1 =$

$\frac{1}{2}+2\varepsilon$, с учетом равенства $s_3=\frac{1+s_1+s_3}{2}$ и условия $\operatorname{Re}s_2=-\frac{1}{2}$, получаем на новом s_1-контуре условие $\operatorname{Re}s_3=\frac{1}{2}+\varepsilon$, т.е. ядро интеграла (7.9) остатется регулярным при таком переносе.

На прямой $\operatorname{Re}s_3=\frac{1}{2}+\varepsilon$ мы воспользуемся оценками (8.19) и (8.14) и в результате получим оценку части интеграла (7.9) для конечномерных пространств. Эта часть не превосходит величины порядка

$$X^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\cdot N\cdot Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{8.20}$$

Параметр N возник в (8.20) как оценка сверху для суммы (8.16) на прямой $\operatorname{Re}s_3=\frac{1}{2}+\varepsilon$. Если считать $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$, тогда (8.20) уходит в остаток как величина порядка $O(1)$, т.к. по условию $X\geqslant N^{10}$, $Y=N^2$.

Окончание спектрального счета будет опубликовано в III-ей части этой работы.

Литература

1. И. М. Виноградов, *Представление нечетного числа суммой трех простых чисел.* — Докл. Акад. Наук СССР **15** (1937), 291–294.
2. A. Selberg, *Discontinuous groups and harmonic analysis.* — Proc. Intern. Congress Mathem. (1962), 177–189, Stockholm.
3. А. И. Виноградов, Ю. В. Линник, *Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии.* — УМН **12, No. 4** (1957), 277–280.
4. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* — Матем. Сборник **111, No. 3** (1980), 333–383.
5. J.-M. Deshouillers, H. Jwaniec, *Kloostermann sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70,** No. **2** (1982), 219–288.
6. G. H. Hardy, J. E. Littlwood, *Some problems of partitio numerorum V. A further contribution to the study of Goldbach's problem.* — Proc. London Math. Soc. **22** (1994), 46–58.
7. H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory.* — L.N.M No. 227 (1971), Berlin Русский перевод: 1974 "Мир" Москва, Springer Verlag.
8. А. И. Виноградов, *Бинарные задачи. Спектральный подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 130–149.

Vinogradov A. I. Binary problem. A spectral approach. II.

In this part of the work the "small arcs" of Part I (volume 245 of this edition) are translated to the language of the spectral components of Laplace operator. The necessary estimate for its algebraic-arithmetic part, i.e., for finite dimensional classical spaces, is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 24 марта 1997 г.