Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова

КРАЕВАЯ ВОЛНА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ГРАНИЦЕ С РАЗРЫВОМ КРИВИЗНЫ

В настоящей статье рассматривается задача дифракции волны соскальзывания на границе области, состоящей из двух частей – выпуклой и плоской. Обозначим выпуклую часть границы через S^-, плоскую через S^+ и кривую, являющуюся аналитическим продолжением кривой S^- через S^+_{im} (см. Рис. 1).

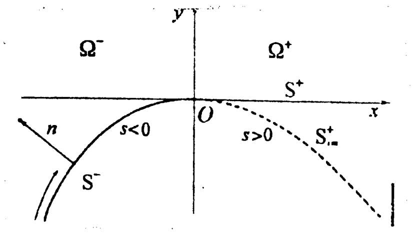

Рис. 1.

Введем координаты (x, y) с началом в точке разрыва кривизны $\mathcal{O}$, в ось x направлена вдоль границы S^+, ось y – по внешней нормали к области, и полугеодезические координаты (s, n) вблизи S^- и S^+_{im}, $n=0$ на границе S^- и S^+_{im}, $s<0$ на S^-, а $s>0$ на S^+_{im}, $s=n=0$ при $x=y=0$.

Предполагаем, что вдоль границы S^- набегает волна соскальзывания $u^-(\mathbf{x}, k)$, где $\mathbf{x}=(n, s)\in\Omega^-$.

В окрестности точки $\mathcal{O}$ введем растянутые координаты:

$$\sigma = M\frac{s}{\rho}, \quad \nu = 2M^2\frac{n}{\rho} \tag{1}$$

и

$$X = M\frac{x}{\rho}, \quad Y = 2M^2\frac{y}{\rho}, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 96-01-00666).

где $M = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}$, ρ – радиус кривизны кривой S^- в точке $s = 0$.

Волна соскальзывания для задачи Дирихле в окрестности точки $\mathcal{O}$ записывается в виде:

$$u^-(s,n) = A_0 e^{iks} e^{i\zeta_1\sigma} w_1(\zeta_1 - \nu), \tag{3}$$

где ζ_1 – первый корень функции Эйри w_1.

В работе [1] была получена формула для поля, дающая продолжение формулы (3) в область Ω^+ (при $s>0$), она имеет вид:

$$u^+(x,y) = A_0\, e^{ikx} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi X}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \left[e^{i\frac{(Y-Y')^2}{4X}} - e^{i\frac{(Y+Y')^2}{4X}} \right] w_1(\zeta_1 - Y')\, dY'. \tag{4}$$

Было показано, что функции u^+ и u^- совпадают на линии $x = s = 0$ и имеют на ней скачок производной, т.е. имеем:

1. $u^+(+0,0) = u^-(-0,0)$,
2. $\left(\dfrac{\partial u^+}{\partial x}\right)\Big|_{+0} - \left(\dfrac{\partial u^-}{\partial s}\right)\Big|_{-0} \neq 0.$

Из физических соображений, а также из рассмотрения результатов исследования близких задач (см. [2, 3]), в которых изучена дифракция от разрыва кривизны в освещенной области и в полутени, следует ожидать, что и в рассматриваемом нами более сложном случае дифракции от разрыва кривизны в теневой области будет существовать краевая волна, распространяющаяся от линии разрыва кривизны. *Получению этой краевой волны посвящена настоящая работа.*

Формулы (3), (4) дают представление для поля в окрестности границы в первом приближении. Эти формулы порождают формулы для тока на границе в первом приближении, а именно:

$$\Psi^-(s) = \left(\frac{\partial u^-}{\partial n}\right)\Big|_{n=0} = B_0 e^{iks} e^{i\zeta_1\sigma}, \tag{5}$$

$$\Psi^+(s) = \left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = B_0 \frac{2e^{i(kx+\pi/4)}}{w_1'(\zeta_1)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\frac{iY^2}{4X}}}{\sqrt{\pi X}} w_1'(\zeta_1 - Y)\, dY, \tag{6}$$

где
$$B_0 = A_0 w_1'(\zeta_1)\frac{\partial\nu}{\partial n} = A_0 w_1'(\zeta)\frac{2M^2}{\rho}.$$

Проведем *доказательство формулы* (6).

Дифференцируя (4) по y при $y=0$, получим
$$\left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0} = A_0\frac{i^{3/2}e^{ikx}}{\sqrt{\pi X}}\int\limits_0^\infty \frac{Y'e^{\frac{iY'^2}{4X}}}{2X} w_1'(\zeta_1 - Y')\,dY'.$$

Учитывая, что
$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(e^{i\frac{Y^2}{4X}}\right) = \frac{iY^2}{2X}e^{i\frac{Y^2}{4X}},$$
и используя формулу интегрирования по частям, получим формулу (6). Внеинтегральный член равен нулю, поскольку ζ_1 есть первый корень функции Эйри w_1.

Запишем ток, порождаемый формулами (3), (4), следующим образом:
$$\Psi_0(s) = \begin{cases} \Psi^-(s) & = B_0 e^{iks}\Psi^-(\sigma), \quad s < 0, \\ \Psi^+(x) & = B_0 e^{ikx}\Psi^+(X), \quad x > 0, (s > 0), \end{cases} \tag{7}$$
где
$$\Psi^-(\sigma) = e^{i\zeta_1\sigma}, \tag{8}$$
$$\Psi^+(X) = \frac{2e^{i\pi/4}}{w_1'(\zeta_1)}\int\limits_0^\infty \frac{e^{\frac{iY^2}{4X}}}{\sqrt{\pi X}} w_1'(\zeta_1 - Y)\,dY. \tag{9}$$

Покажем, что:

1. $$\Psi^+(+0) = \Psi^-(-0), \tag{10}$$
2. $$\left(\frac{\partial\Psi^+}{\partial X}\right)\bigg|_{+0} - \left(\frac{\partial\Psi^-}{\partial\sigma}\right)\bigg|_{-0} \neq 0. \tag{11}$$

Доказательство формул (10), (11).

В интеграле (9), дающем представление для функции Ψ^+, сделаем замену переменной так
$$e^{i\pi/4}\frac{Y}{2\sqrt{X}} = t, \quad dY = e^{-i\pi/4}2\sqrt{X}\,dt,$$

что формула (9) примет вид:

$$\Psi^+(X) = \frac{2}{w_1'(\zeta_1)\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2} w_1'(\zeta_1 - e^{-i\pi/4} 2\sqrt{X}t)\, dt. \qquad (12)$$

Раскладывая производную функции Эйри w_1' в ряд Тейлора в окрестности $X = 0$, получим:

$$w_1'(\zeta_1 - e^{-i\pi/4} 2\sqrt{X}t) =$$
$$= w_1'(\zeta_1) - w_1''(\zeta_1) e^{-\pi/4} 2\sqrt{X}t + w_1'''(\zeta_1) e^{-i\pi/2} 4Xt^2 + \ldots .$$

Учитывая, что

$$w_1''(\zeta_1) = \zeta_1 w_1(\zeta_1) = 0,$$
$$w_1'''(\zeta_1) = w_1(\zeta_1) + \zeta_1 w_1'(\zeta_1) = \zeta_1 w_1'(\zeta_1),$$

находим:

$$w_1'(\zeta_1 - e^{-i\pi/4} 2\sqrt{X}t) = w_1'(\zeta_1) - 2i w_1'(\zeta_1)\zeta_1 X t^2 + \ldots .$$

Подставляя это разложение в (12) и учитывая равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int\limits_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

получим разложение для тока $\Psi^+(X)$ при малых X

$$\Psi^+(X) = 1 - i\zeta_1 X + O(X^{3/2}).$$

Сопоставляя это разложение с разложением для тока $\Psi^-(\sigma)$:

$$\Psi^-(\sigma) = 1 + i\zeta_1\sigma + O(\sigma^2),$$

которое следует из формулы (8), мы убеждаемся в справедливости утверждений (10), (11), при этом

$$\mathbb{C}_\Psi = \left(\frac{\partial \Psi^+}{\partial X}\right)\bigg|_{+0} - \left(\frac{\partial \Psi^-}{\partial \sigma}\right)\bigg|_{-0} = -2i\zeta_1. \qquad (13)$$

С помощью тока Ψ_0 (см. (7)) определим некоторое решение уравнения Гельмгольца $\widehat{u}$, которое назовем "квази-решением" рассматриваемой задачи Дирихле

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int\limits_{S^- \cup S^+} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s)))\Psi_0(s)ds. \tag{14}$$

Здесь $H_{(1)}^0$ – функция Ханкеля первого рода, $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s))$ – расстояние от точки наблюдения $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{x}(s) \in S^- \cup S^+$, Ψ_0 – ток, определяемый формулой (7). Очевидны свойства "квази-решения" $\widehat{u}$:

1. $\widehat{u} \in C^\infty(\Omega^- \cup \Omega^+)$,
2. $(\Delta + k^2)\widehat{u} = 0$, при $\mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$.

Покажем, что

1. $\widehat{u}$ переходит в волну соскальзывания u^- при $ks \to -\infty$.
2. $\widehat{u}$ приближенно удовлетворяет условию на границе $\widehat{u} = 0$ в главном приближении по $k \to \infty$.

Утверждение 1. *При $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \in S^-$ имеет место равенство*

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = u^-(\mathbf{x}(s)) + \frac{i}{4} \int\limits_{S^+} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')))\Psi^+(s')ds' -$$
$$- \frac{i}{4} \int\limits_{S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds', \tag{15}$$

где S^+_{im} – кривая, являющаяся аналитическим продолжением кривой S^- (см. Рис. 1).

Для доказательства утверждения 1 докажем сначала, что имеет место следующее

Утверждение 2. *При $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \in S^- \cup S^+_{im}$ справедливо равенство:*

$$u^-(\mathbf{x}(s)) = \frac{i}{4} \int\limits_{S^- \cup S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds', \tag{16}$$

где ток $\Psi^-(s)$ определяется формулами (7)–(9), а функция u^- – формулой (3).

Доказательство утверждения 2 может быть получено непосредственно из формул, определяющих ток, а также может быть получено из формулы Грина, записанной для фундаментального решения уравнения Гельмгольца $\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kR)$ и решения u^-, определяющего волну соскальзывания.

Доказательство утверждения 1 следует из представления

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \frac{i}{4}\int\limits_{S^-\cup S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x},\mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds' +$$

$$+\frac{i}{4}\int\limits_{S^+} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x},\mathbf{x}(s')))\Psi^+(s')ds' -$$

$$-\frac{i}{4}\int\limits_{S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x},\mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds',$$

которое получается из формулы (14) при добавлении и при вычитании интеграла

$$\frac{i}{4}\int\limits_{S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x},\mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds'.$$

Получим оценку для интегралов по S^+ и S^+_{im} в формуле (15) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \in S^-$.

В дальнейшем нам понадобятся разложения, связывающие координаты s, n и x, y.

Если кривая S (см. Рис. 2) задана своим естественным уравнением $\rho = \rho(s)$, то из геометрии известно, что декартовы координаты точки на кривой S задаются формулами

$$\begin{cases} x(s) = \int\limits_0^s \cos\phi(s)\,ds, \\ y(s) = -\int\limits_0^s \sin\phi(s)\,ds, \end{cases}$$

$$\phi(s) = \int\limits_0^s \frac{ds}{\rho(s)}.$$

Отсюда получаем следующие разложения

$$\phi(s) = \frac{s}{\rho(0)} + O(s^2),$$

$$x(s) = \int_0^s \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots\right) ds = \int_0^s \left(1 - \frac{s^2}{2\rho^2(0)} + O(s^3)\right) ds =$$

$$= s - \frac{s^3}{6\rho^2(0)} + O(s^4), \qquad (17)$$

$$y(s) = -\int_0^s (\phi + \dots)\, ds = -\frac{s^2}{2\rho(0)} + O(s^3). \qquad (18)$$

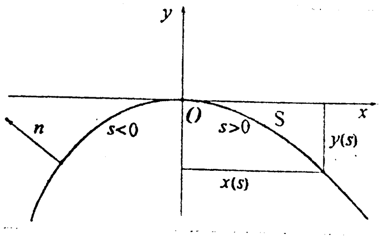

Рис. 2.

Получим оценку для функции $\widehat{u}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \in S^-$.

Предположим, что точка наблюдения $\mathbf{x}$ лежит не слишком близко к точке $\mathcal{O}$ так, что $ks \gg 1$. Тогда воспользуемся асимптотикой функции Ханкеля для большого аргумента

$$H_0^{(1)}(kR) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k R}}\, e^{i(kR - \pi/4)} \qquad (19)$$

и подставим ее в интегралы по S^+ и по S^+_{im} в формуле (15).

Для точек $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = (s, 0) \in S^-$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s') = (x, 0) \in S^+$ имеем разложение

$$R(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s')) = R_0 + \cos\theta\, x + O(x^2), \qquad (20)$$

где R_0 – расстояние от точки $\mathbf{x} \in S^-$ до начала координат $\mathcal{O}$, θ – угол между радиусом вектором, проведенным из точки $\mathbf{x} \in S^-$ в начало координат $\mathcal{O}$ и осью x.

Аналогичное разложение имеет место и для точек $\mathbf{x}(s) \in S^-$ и $\mathbf{x}(s') \in S^+_{im}$. Поскольку кривая S^+_{im} касается прямой S^+, различие в соответствующих разложениях (18) будет только, начиная с квадратичных членов. Учитывая формулы (10), (11) для токов Ψ^+ и Ψ^- в интегралах по S^+ и S^+_{im}, из формулы (15), находим, что интеграл по S^+ может быть представлен в виде

$$I^+ = \frac{i}{4} \int\limits_{S^+} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')))\Psi^+(s')ds' =$$

$$= \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ik(R_0-\pi/4)} B_0 \int\limits_0^\infty e^{ikx(2+c_1x)} \left[\Psi^+(0) + \left(\frac{\partial \Psi^+}{\partial X}\right)\Big|_0 \frac{Mx}{\rho}\right] dx,$$

а интеграл по S^+_{im} в виде

$$I^+_{im} = \frac{i}{4} \int\limits_{S^+_{im}} H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')))\Psi^-(s')ds' =$$

$$= \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ik(R_0-\pi/4)} B_0 \int\limits_0^\infty e^{iks(2+c_2s)} \left[\Psi^-(0) + \left(\frac{\partial \Psi^-}{\partial \sigma}\right)\Big|_0 \frac{Ms}{\rho}\right] ds.$$

Откуда, учитывая формулы (10)–(13), получаем, что разность этих интегралов имеет оценку при $k \to \infty$ следующего вида

$$I^+ - I^+_{im} = \frac{\mathbb{C}_0}{k\rho}\frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{kR_0}}.$$

Согласно формуле (15), разность "квази-решения" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ и "волны соскальзывания" $u^-(\mathbf{x})$, равная разности интегралов, будет при $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)\in S^-$ иметь оценку

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) - u^-(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{C}_0}{k\rho}\frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{kR_0}}, \tag{21}$$

т.е. будет иметь более высокий порядок малости по k, чем u^-. Этим доказано свойство 1 квази-решения о том, что оно переходит в волну соскальзывания при $ks \to -\infty$.

Поскольку "волна соскальзывания" удовлетворяет условию на границе $u=0$, то из формулы (21) видно, что квази-решение (21) приближенно удовлетворяет этому условию на выпуклой части границы S^-.

Рассмотрим более детально выражение для квази-решения $\widehat{u}(\mathbf{x})$ на S^- в окрестности точки $\mathcal{O}$.

Для этого воспользуемся интегральным представлением Ватсона для функции Ханкеля [4]:

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}y)}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad (22)$$

где путь интегрирования указан на Рис. 3.

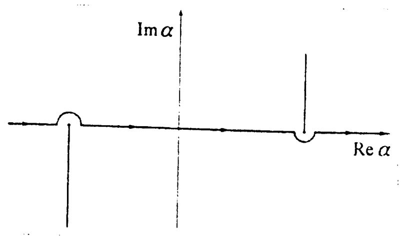

Рис. 3.

Пусть $\mathbf{x}(s) \in S^-$ и $\mathbf{x}(s') \in S^+$, тогда имеем для расстояния R представление

$$R(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(s')) = \sqrt{(x-x(s))^2+y^2(s)}.$$

Поскольку $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$, $\mathbf{x}(s') = (x, 0)$, тогда для функции Ханкеля получим представление:

$$H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(s'))) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik[(x-x(s))\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}y(s)]}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Поменяем порядки интегрирования по x и α в интеграле по S^+, учитывая выражение для тока Ψ^+, (см. (7)). Раскладывая функцию $\Psi^+(X)$ в ряд Тейлора и оставляя только первые члены для интеграла I^+ по кривой S^+ получим выражение:

$$I^+ = \frac{iB_0}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik[(-x(s))\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}y(s)]}\times$$

$$\times \int\limits_{0}^{\infty} e^{ikx(1+\alpha)}\left[\Psi^+(0) + \left(\frac{\partial\Psi^+}{\partial X}\right)\Bigg|_0 \frac{Mx}{\rho}\right] dx.$$

Внутренний интеграл по x можно вычислить, тогда получим для I^+ следующее представление:

$$I^+ = \frac{iB_0}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik[(-x(s))\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}y(s)]} \left[\frac{\Psi^+(0)}{ik(1-\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \Psi^+}{\partial X} \right)\bigg|_0 \frac{M}{k^2\rho(1-\alpha)^2} \right] \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (23)$$

Рассмотрим интеграл по S^+_{im} в формуле (15). При $\mathbf{x}(s) \in S^-$ и $\mathbf{x}(s') \in S^+_{im}$ для расстояния R имеем представление

$$R(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s')) = \sqrt{(x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2},$$

где $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$, $\mathbf{x}(s') = (x(s'), y(s'))$. Тогда функция Ханкеля будет представлена интегралом:

$$H_0^{(1)}(kR(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s'))) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik[(x(s') - x(s))\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}(y(s') - y(s))]} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Проведем с интегралом I^+_{im} по S^+_{im} те же процедуры, что и с интегралом I^+, тогда получим следующее разложение:

$$I^+_{im} = \frac{iB_0}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik[(-x(s))\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}y(s)]} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} e^{ik[(x(s')\alpha) + s') + \sqrt{1-\alpha^2}y(s')]} \left[\Psi^-(0) + \left(\frac{\partial \Psi^-}{\partial \sigma} \right)\bigg|_0 \frac{Ms'}{\rho} \right] ds'. \qquad (24)$$

Учитывая формулы (17) и (18) для декартовых координат $x(s')$ $y(s')$ точки $\mathbf{x}(s') \in S^+_{im}$, получим для внутреннего интеграла по s' выражение

$$I' = \int\limits_0^{\infty} \exp\left\{ ik \left[s'(1+\alpha) - \frac{s'^3}{6\rho^2}\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\frac{s'^2}{2\rho} \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\Psi^-(0) + \left(\frac{\partial \Psi^-}{\partial \sigma} \right)\bigg|_0 \frac{Ms'}{\rho} \right] ds'.$$

Сохраняя старшие порядки по k, получим для интеграла разложение

$$I' = \frac{\Psi^-(0)}{ik(1+\alpha)} + \left(\frac{\partial \Psi^-}{\partial \sigma}\right)\bigg|_0 \frac{M}{k^2\rho(1+\alpha)^2} + \dots .$$

Сравнивая это выражение с выражением (23) для интеграла по S^+ и учитывая формулы (10)–(12), видим, что у разности этих интегралов старшие члены сократятся, и разность интегралов будет иметь следующую оценку:

$$I^+ - I^- \sim \frac{iB_0}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iks\alpha} \left[\frac{M\mathbb{C}_\Psi}{k^2\rho(1+\alpha)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Psi^-(0)\sqrt{1-\alpha^2}}{k^2\rho(1+\alpha)^3} + \dots \right] \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{25}$$

Второй член в этой формуле возникает из разложения экспоненты с квадратичным членом во внутреннем интеграле в ряд Тейлора.

Согласно формуле (15) разность "квази-решения" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ и "волны соскальзывания" $u^-(\mathbf{x})$ выражается через разность этих интегралов, формула (25) дает оценку для "квази-решения" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ на выпуклой части S^- границы.

Аналогичным образом можно провести рассмотрение для "квази-решения" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ на плоской части границы S^+, при этом для функции $\widehat{u}(\mathbf{x})$ в окрестности начала $\mathcal{O}$ при $\mathbf{x} = (x, 0) \in S^+$ можно получить следующую формулу:

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) - u^-(\mathbf{x}) = \frac{iB_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx\alpha} \left[\frac{M\mathbb{C}_\Psi}{k^2\rho(1-\alpha)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Psi^-(0)\sqrt{1-\alpha^2}}{k^2\rho(1-\alpha)^3} + \dots \right] \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{26}$$

Рассмотрим "волну соскальзывания" $u^-(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} = (x, 0) \in S^+$. Выражая полугеодезические координаты n, s точки $\mathbf{x}$ через декартовы, находим, что

$$\begin{cases} s = x + \frac{x^3}{6\rho^2} + \dots , \\ n = \frac{x^2}{2\rho} + \dots . \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), определяющую "волну соскальзывани $u^-(\mathbf{x})$, имеем для $\mathbf{x} = (x, 0) \in S^+$

$$u^-(\mathbf{x}) = A_0 e^{ikx} e^{i\zeta_1 x} \left[w_1(\zeta_1) - w_1'(\zeta) \frac{M^2 x^2}{\rho^2} + \dots, \right]$$

или, учитывая, что ζ_1 – корень функции Эйри, окончательно получаем следующее выражение для "волны соскальзывания"

$$u^-(\mathbf{x}) \sim A_0\, e^{ikx} e^{i\zeta_1 x} w_1'(\zeta) \frac{M^2 x^2}{\rho^2}. \tag{27}$$

Вернемся к формуле (26) и рассмотрим интеграл от второго слагаемого. Контур интегрирования показан на Рис. 3, он обходит точку $\alpha = 1$ снизу. Интеграл имеет вид:

$$I_2 = \frac{iB_0 \Psi^0(0)}{2\pi k^2 \rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx\alpha} \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^3}.$$

Поскольку $kx > 0$ интеграл равен вычету в точке $\alpha = 1$

$$I_2 = \frac{\Psi^-(0) B_0 x^2}{2\rho}.$$

Сравнивая это значение с выражением для "волны соскальзывания" $u^-(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} = (x, 0) \in S^+$ видим, что эти выражения равны, т.е. в формуле (23) эти значения совпадают. Таким образом, получаем, что "квази-решение" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S^+$ равно:

$$\widehat{u}(\mathbf{x}) = \frac{iB_0 M \mathbb{C}_\Psi}{2\pi k^2 \rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx\alpha} \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^2 \sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{28}$$

Легко убедится в том, что такое же значение имеет эта функция и на выпуклой части границы S^-. Действительно, из формулы (25) следует эта формула, поскольку интеграл от второго слагаемого в формуле (25) равен нулю, так как контур обходит точку $\alpha = -1$ сверху и при $ks < 0$ контур можно продеформировать в верхнюю полуплоскость.

Итак формула (28) дает выражение для "квази-решения" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ на всей границе $\mathbf{x} \in S^+ \cup S^+$.

Для того, чтобы скомпенсировать это значение, добавим к "квази-решению" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ некоторое решение однородного уравнения Гельмгольца

$$u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\alpha x+\sqrt{1-\alpha^2}y)} f(\alpha) d\alpha. \tag{29}$$

Возьмем функцию $f(\alpha)$ равной:

$$f(\alpha) = \frac{iB_0 M\mathbb{C}_\Psi}{2\pi k^2 \rho} \frac{1}{(1-\alpha)^2\sqrt{1-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(\mathbf{x}) = \widehat{u}(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x})$$

будет удовлетворять уравнению Гельмгольца, поскольку оба слагаемых $\widehat{u}$ и u_1 удовлетворяют этому уравнению и граничному условию, как было показано выше.

Ранее также было показано, что "квази-решение" $\widehat{u}(\mathbf{x})$ переходит в "волну соскальзывания" u^- при $ks \to -\infty$, т.е. можно сделать вывод, что функция $u(\mathbf{x})$, определена в окрестности начала $\mathcal{O}$. Из формулы (29), вспоминая формулу (14), определяющую "квази-решение" $\widehat{u}(\mathbf{x})$, нетрудно получить выражение для краевой волны:

$$u(\mathbf{x}) - u^{inc}(\mathbf{x}) \sim A_0 \frac{w_1'(\zeta_1)}{2^{2/3}(k\rho)^{4/3}} \frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{kR_0}} F(\varphi),$$

$$F(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^3}, \tag{30}$$

где R_0 – расстояние от точки $\mathbf{x}$ до начала координат $\mathcal{O}$, u^{inc} – набегающая волна соскальзывания или ее продолжение. Это выражение портится вблизи плоской части границы S^+, там асимптотика определяется через интеграл Френеля.

Литература

1. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 86–102.
2. L. Kaminetzky, J. B. Keller, *Diffraction coeffitients for high order edges and vertices.* — SIAM. J. Appl. Math. **22, No. 1** (1972), 109–132.

3. А. В. Попов, *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны.* — В кн.: “Труды В Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн,”. Наука, (Ленинград, 1975), с. 171–175.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. И. Ватсон, *Курс современного анализа. Ч. 2.* Физматгиз, М., 1963. 516 с.

Philippov V. B., Kirpichnikova N. Ya. The edge wave in the problem of diffraction from the curvature jump on the boundary of the region.

A problem of the diffraction of the creeping waves over-running from the side of the convex boundary to the point of the curvature jump – the point of transition of the convex boundary into the straight boundary is studied. On passing throught the point of the curvature jump, the tangent to the region boundary is changed continiously, but the velocity of this change has the jump. The edge wave is received and investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 октября 1997