Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова

ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНЯМИ

Введение

Рассмотрим задачу дифракции лучевого поля на клиновидной области с искривленными гранями. Для определенности будем рассматривать двумерную задачу с условиями Дирихле на границе. Будем предполагать, что выполняются условия применимости коротковолновой асимптотики, т.е. характерные размеры тела: радиус кривизны и диаметр достаточно велики по сравнению с длиной волны. Решение рассматриваемой задачи для идеального клина (клин с плоскими гранями) хорошо известна и выражается в виде интеграла Зоммерфельда (см. например [1]).

Метод получения асимптотики решения рассматриваемой задачи восходит к методу, предложенному в работе [2] и состоит в следующем: рассеянное поле ищется в виде суммы геометрооптического поля и дифракционного. Геометрооптическое поле находится лучевым методом, а дифракционное поле ищется вначале в малой окрестности ребра и затем продолжается вдоль ребер.

1. Решение в окрестности ребра

Пусть падающее поле

$$u^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) = \exp\{ik\tau_0(\mathbf{x})\}U^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}),$$

$$U^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) = \sum_{j\geqslant 0} U_j(\mathbf{x})k^{-j},$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \in R^2 \setminus \Omega$$

падает на клиновидную область Ω, (см. Рис. 1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 96-01-00666).

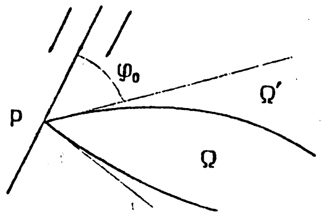

Рис. 1.

Рассеянное поле будем искать вначале в окрестности $O(k^{-1+\varepsilon})$ ребра тела Ω. Введем полярные координаты с началом координат, помещенным в вершине P верхнего ребра. Эйконал и амплитуду падающего поля можно разложить в окрестности ребра в ряд по обратным степеням волнового числа k; тогда

$$u^{\rm inc}(\mathbf{x}) = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}\,\widehat{U}(\mathbf{x}),$$
$$\widehat{U}(\mathbf{x}) = \sum_{j\geqslant 0} \widehat{U}_j(kr,\varphi)\,k^{-j}.$$

В дальнейшем будем заниматься только главными членами соответствующих асимптотик. В первом приближении падающее поле запишется в виде:

$$u^{\rm inc}(\mathbf{x}) = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}u^{\rm inc}(P), \quad \mathbf{x}=(r,\varphi), \quad P=(0,0).$$

Рассеянное поле $u(\mathbf{x})$ в первом приближении будет совпадать с решением задачи дифракции на клиновидной области Ω' с прямыми гранями, являющимися касательными к граням исходного тела Ω. Это решение можно найти явно, в виде интеграла Зоммерфельда (см., например, [1])

$$u = \frac{u^{\rm inc}(P)}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-ikr\cos\alpha} H_0(\alpha+\varphi,\varphi_0,\Phi)\,d\alpha, \qquad (1.1)$$

$$H_0(\alpha+\varphi,\varphi_0,\Phi) = \frac{\pi}{2\Phi}\left[\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha+\varphi-\varphi_0) - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha+\varphi+\varphi_0)\right].$$

Контур интегрирования Γ состоит из двух петель D_1 и D_2 (см. Рис. 2).

В зависимости от того, в какой области (освещенной, полутени или тени) находится точка наблюдения, решение (1.1) может

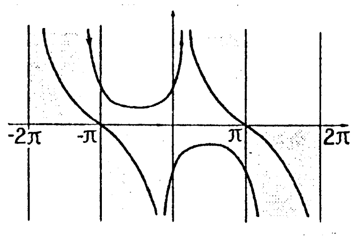

Рис. 2.

быть подвергнуто дальнейшим преобразованиям. Нас в основном будет интересовать решение в окрестности верхней и нижней границ тела Ω. Предположим, что падающее волновое поле освещает рассматриваемое тело Ω таким образом, что верхняя грань $\varphi = 0$ будет находиться в освещенной области, а нижняя грань $\varphi = \Phi$ в зоне тени, т.е. $0 < \varphi_0 < \Phi - \pi$.

В окрестности верхней грани $\varphi = 0$, $(0 < \varphi_0 < \Phi - \pi)$ представление (1.1) для поля u можно заменить на сумму вычетов в полосах $\alpha = \alpha_{1,2}$ и интеграл по контурам $D_{1,2}$ (см. Рис. 2):

$$u = u^{\mathrm{inc}}(P) \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}\left[e^{-ikr\cos\alpha_j} H_0(\alpha_j + \varphi, \varphi_0, \Phi)\right] + \\ + \frac{u^{\mathrm{inc}}}{2\pi i} \int\limits_{D_1 + D_2} e^{-ikr\cos\alpha} H_0(\alpha + \varphi, \varphi_0, \Phi)\, d\alpha.$$

Легко видеть, что слагаемое равное сумме вычетов представляет собой геометрическое поле (падающая плюс отраженная волна)

$$u^g(\mathbf{x}) = u^{\mathrm{inc}}(P)\left[e^{-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr\cos(\varphi + \varphi_0)}\right]. \qquad (1.2)$$

Дифракционная волна представляется суммой интегралов по контурам D_1 и D_2. Преобразуем эти интегралы в один интеграл. Для этого сделаем в них замену $\alpha' = \alpha \pm \pi$. Тогда получим следующее представление для дифракционного поля

$$u^d = -\frac{u^{\mathrm{inc}}(P)}{2\pi i} \int\limits_{D_0} e^{-ikr\cos\alpha} H(\alpha + \varphi, \varphi_0, \Phi)\, d\alpha, \qquad (1.3)$$

здесь контур интегрирования D_0 проведен в соответствии с Рис. 3, а функция $H(\alpha + \varphi, \varphi_0, \Phi)$ определена равенством

$$H(\alpha + \varphi, \varphi_0, \Phi) = H_0(\alpha + \varphi - \pi, \varphi_0, \Phi) - H_0(\alpha + \varphi + \pi, \varphi_0, \Phi).$$

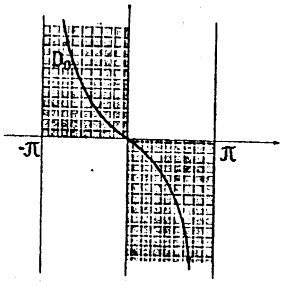

Рис. 3.

После элементарных преобразований подинтегрального выражения в формуле (1.3) и после замены переменной интегрирования по формуле $\alpha = \beta - \varphi$, выражение (1.3) запишется следующим образом:

$$u^d = -\frac{u^{\text{inc}}(P)}{2\pi i} \int\limits_{D_0} e^{ikr\cos(\beta-\varphi)} H(\beta, \varphi_0, \Phi)\, d\beta, \tag{1.4}$$

где

$$H(\beta, \varphi_0, \Phi) = \frac{2\,\pi}{\Phi} \sin\frac{\pi^2}{\Phi}\, \frac{\sin\frac{\pi}{\Phi}\varphi_0 \sin\frac{\pi}{\Phi}\beta}{\mathcal{D}(\beta, \varphi_0, \Phi)},$$

$$\mathcal{D}(\beta, \varphi_0, \Phi) = \big(\cos\frac{\pi}{\Phi}(\beta-\varphi_0) - \cos\frac{\pi^2}{\Phi}\big)\big(\cos\frac{\pi}{\Phi}(\beta+\varphi_0) - \cos\frac{\pi^2}{\Phi}\big).$$

Мы получили выражение для рассеянного поле в малой окрестности ребра в первом приближении по параметру $k \to \infty$. Могут быть найдены и последующие члены асимптотического разложения поля, но мы этим заниматься не будем. Наша основная цель – продолжить это решения на область вне ребра и найти коэффициенты возбуждения волн соскальзывания и шепчущей галереи.

2. Дифракционное поле вне окрестности ребра

Выражение для дифракционного поля вне окрестности ребра будет зависеть от того, являются ли грани тела Ω выпуклыми или вогнутыми поверхностями. Для определенности будем считать, что грань, в окрестности которой будем искать поле, является выпуклой поверхностью. Случай вогнутой поверхности будет рассмотрен ниже.

Итак, пусть верхняя грань S_1 является выпуклой поверхностью или, поскольку мы рассматриваем двумерную задачу, выпуклой кривой. Введем полугеодезические координаты (n, s), причем $n \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $n = 0$ на S_1, $s = 0$ в ребре $r = 0$.

Естественно предположить, что в окрестности грани S_1 дифракционное поле представляет волну, распространяющуюся вдоль границы, т.е. его можно представить в виде

$$u^d = e^{iks}\, U^d. \tag{2.1}$$

Введем координаты σ, ν по формулам

$$\sigma = \left(\frac{k\rho(0)}{2}\right)^{1/3} \frac{s}{\rho(0)}, \quad \nu = 2\left(\frac{k\rho(0)}{2}\right)^{2/3} \frac{n}{\rho(0)},$$

где $\rho(0)$ – радиус кривизны грани S_1 в точке $s = 0$.

Величину U^d в (2.1) можно искать в виде ряда:

$$U^d = \sum_{j \geqslant 0} U_j\,(\sigma, \nu)\, k^{-j/3},$$

при этом, главный член является решением уравнения

$$\left(2\,i\,\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - \nu\right)U_0 = 0.$$

В качестве решения возьмем суперпозицию частных решений этого уравнения следующего вида

$$U_0(\sigma, \nu) = B(\varphi_0, \Phi) \int\limits_{\mathcal{L}_0} e^{i\sigma\xi}\, \frac{w_1(\xi - \nu)}{w_1(\xi)}\, d\xi, \tag{2.2}$$

где $w_1(\xi)$ – первая функция Эйри, контур $\mathcal{L}_0$ и линия корней функции Эйри даны на Рис. 4, функция $B(\varphi_0, \Phi)$ – произвольная функция.

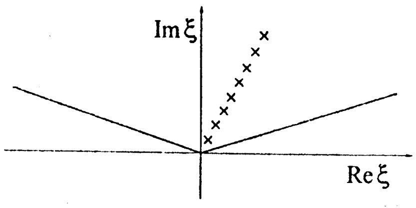

Рис. 4.

Выражение (2.1), (2.2) для функции u^d является продолжением выражения (1.4) для дифракционного поля.

Покажем, что в промежуточной области при таких значениях s, когда выполняются условия $ks \gg 1$ и $\sigma \ll 1$, эти выражения совпадают.

Получим сначала асимптотику для интеграла (1.4) при $kr \gg 1$; $\varphi \ll 1$. Введем декартовы координаты с осью x, направленной вдоль луча $\varphi = 0$, по формулам

$$x = r\,\cos\varphi; \quad y = r\,\sin\varphi,$$

и сделаем замену переменной интегрирования по формуле

$$\cos\beta = \gamma.$$

Тогда интеграл (1.4) примет вид:

$$u^d = -\frac{u^{\text{inc}}(P)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ik(x\gamma + y\sqrt{1-\gamma^2})\}\,\frac{H(\cos\gamma,\varphi_0,\Phi)}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,d\gamma. \quad (2.3)$$

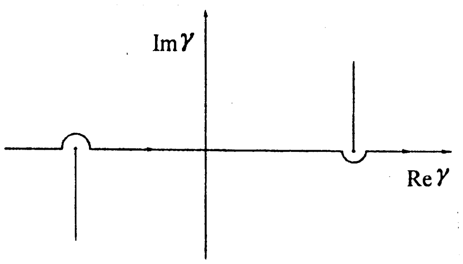

Рис. 5.

Контур интегрирования обходит точки ветвления $\gamma = \pm 1$ как показано на Рис. 5.

Очевидно, что при $kx \gg 1$, $y \ll x$, основной вклад в интеграл дает окрестность точки $\gamma = 1$.

Сделаем замену переменных

$$\gamma = 1 + \frac{\zeta}{kx}$$

и сохраним главное значение по kx. Тогда интеграл (2.3) запишется следующим образом:

$$u^d = \frac{A(\varphi_0, \Phi)}{k\,x}\, e^{ikx} \int\limits_{\infty\, e^{i(\pi-\varepsilon)}}^{\infty} \exp\{i\zeta - \mu\sqrt{\zeta}\}\, d\zeta, \tag{2.4}$$

где

$$\mu = k\,y\sqrt{\frac{2}{kx}},$$

$$A(\varphi_0, \Phi) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\Phi}\right)^2 \frac{\sin\frac{\pi^2}{\Phi}\,\sin\frac{\pi}{\Phi}\varphi_0}{\mathcal{D}(0, \varphi_0, \Phi)}\, u^{\mathrm{inc}}(P),$$

$$\mathcal{D}(0, \varphi_0, \Phi) = \big(\cos\frac{\pi}{\Phi}\varphi_0 - \cos\frac{\pi^2}{\Phi}\big)^2 =$$

$$= 4\sin^2\frac{\pi}{\Phi}\left(\frac{\varphi_0 - \pi}{2}\right)\sin^2\frac{\pi}{\Phi}\left(\frac{\varphi_0 + \pi}{2}\right).$$

Займемся теперь получением асимптотики интеграла (2.2) при $\sigma \ll 1$, $\nu = O(1)$. Продеформируем контур интегрировния в нижнюю полуплоскость так, чтобы он совпадал с окружностью $|\zeta| = \frac{1}{\sigma}$, см. Рис. 6.

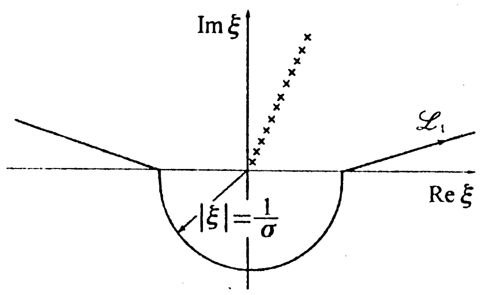

Рис. 6.

Вспоминая, что $\sigma \ll 1$ и, следовательно, контур удален от начала координат, мы можем заменить функции Эйри в интеграле (2.2) на их асимптотические разложения

$$w_1(\xi) \sim \xi^{-1/4}\exp\left\{\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right\}, \quad -\frac{5}{3}\pi + \varepsilon < \arg\xi < \frac{\pi}{3} - \varepsilon.$$

Учитывая, что $\nu = O(1)$, получим, что на контуре интегрирования $\mathcal{L}_1$, $|\xi| \gg 1$, можно также написать следующее разложение:

$$\frac{2}{3}(\xi - \nu)^{3/2} = \frac{2}{3}\xi^{3/2} - \nu\sqrt{\xi} + \dots,$$

и, следовательно, отношение функций Эйри в интеграле (2.2) будет иметь асимптотику вида

$$\frac{w_1(\xi - \nu)}{w_1(\xi)} = e^{-\nu\sqrt{\xi}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

Если теперь сделать в интеграле (2.2) замену

$$\xi = \frac{1}{\sigma}\zeta,$$

то он примет вид

$$U_0(\sigma, \nu) = \frac{B(\varphi_0, \Phi)}{\sigma} \int\limits_{\infty\, e^{i(\pi-\varepsilon)}}^{\infty} e^{i\zeta - \mu\sqrt{\zeta}}\, d\zeta, \tag{2.5}$$

где

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{\sigma}} = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2/3} \frac{2n}{\rho} \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{1/6} \sqrt{\frac{\rho}{s}} = kn\sqrt{\frac{2}{ks}}.$$

Величины μ в формулах (2.4) и (2.5) совпадают, поскольку $x \sim s$, $y \sim n$.

Сравнивая (2.1), (2.5) и (2.4), мы видим,что выражения для диффракционного поля совпадут, если взять величину $B(\varphi, \Phi)$ в формуле (2.5) равной

$$B(\varphi_0, \Phi) = \frac{A(\varphi_0, \Phi)}{2}\left(\frac{2}{k\rho(0)}\right)^{2/3}, \tag{2.6}$$

где $A(\varphi, \Phi)$ определяется в формуле (2.4).

Таким образом, формула (2.1), (2.2) с функцией $B(\varphi_0, \Phi)$, определяемой (2.6), дает продолжение выражения (1.4) для дифракционного поля, полученного в окрестности ребра. Следует отметить, что выражение (2.1) с (2.2) само справедливо при не слишком больших величинах σ. Но это выражение легко продолжить на произвольные s, если взять σ и ν равными

$$\sigma = \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \int\limits_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)},$$

$$\nu = \left(\frac{2}{\rho(s)}\right)^{1/3} n,$$

и перед интегралом (2.2) поставить отношение

$$\left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{1/6}.$$

Остановимся теперь на случае, когда граница S_1 является вогнутой поверхностью. В этом случае в качестве решения (2.2) следует взять суперпозицию функций Эйри $v(\xi+\nu)$ и $w_2(\xi+\nu)$, а именно:

$$U_0(\sigma,\nu) = B(\varphi_0,\Phi)\int\limits_{\mathcal{L}_0} e^{i\sigma\xi}\left[\frac{v(\xi+\nu)}{v(\xi)} - \frac{w_2(\xi+\nu)}{w_2(\xi)}\right] d\xi, \qquad (2.7)$$

Контур интегрирования $\mathcal{L}_0$ показан на Рис. 7.

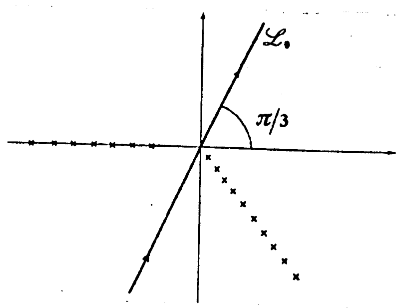

Рис. 7.

В верхней полуплоскости интеграл сходится за счет экспоненты, а в нижней полуплоскости – за счет функций Эйри. Поскольку функция Эйри v может быть представлена в виде

$$v(\xi) = \frac{w_1(\xi) - w_2(\xi)}{2i}$$

и ввиду того, что $w_1(\xi)$ экспоненциально убывает при $-\pi < \arg\xi < -\pi/3$, а функции $v(\xi)$ и $w_2(\xi)$ экспоненциально растут, находим, что выражение

$$\frac{v(\xi+\nu)}{v(\xi)} - \frac{w_2(\xi+\nu)}{w_2(\xi)} = \frac{v(\xi+\nu)w_2(\xi) - v(\xi)w_2(\xi+\nu)}{v(\xi)w_2(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{w_1(\xi+\nu)w_2(\xi) - w_2(\xi+\nu)w_1(\xi)}{w_1(\xi)w_2(\xi)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{\xi}\nu} - e^{-\sqrt{\xi}\nu}}{e^{2/3\xi^{3/2}}}$$

экспоненциально убывает при $\arg \xi = -\frac{2}{3}\pi$.

Здесь мы использовали асимптотические разложения

$$v(\xi) \sim \frac{1}{2}\xi^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{2}{3}\xi^{3/2} \right\},$$

$$-\pi + \varepsilon < \arg \xi < \pi - \varepsilon,$$

$$w_2(\xi) \sim -i\xi^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{2}{3}\xi^{3/2} \right\},$$

$$-\frac{7}{3}\pi + \varepsilon < \arg \xi < -\frac{\pi}{3} = \varepsilon.$$

Получим асимптотику интеграла (2.7) при $\sigma \ll 1$. Здесь ситуация более сложная, чем в случае выпуклой области. Деформации контура препятствует линия корней функций Эйри $v(\xi)$ и $w_2(\xi)$: корни фунции $v(\xi)$ располагаются на линии $\arg \xi = \pi$, а корни функции $w_2(\xi)$ – на линии $\arg \xi = -\pi/3$ (см. Рис. 7).

Асимптотику интеграла (2.7) при $\sigma \ll 1$ удается получить, если разбить этот интеграл на два: один с отношением $v(\xi + \nu)/v(\xi)$ и второй с отношением $w_2(\xi+\nu)/w_2(\xi)$. Контур $\mathcal{L}_0$ для первого интеграла сместим так, чтобы он совпал с контуром $\mathcal{L}_1$, а для второго – с контуром $\mathcal{L}_2$ (см. Рис. 8).

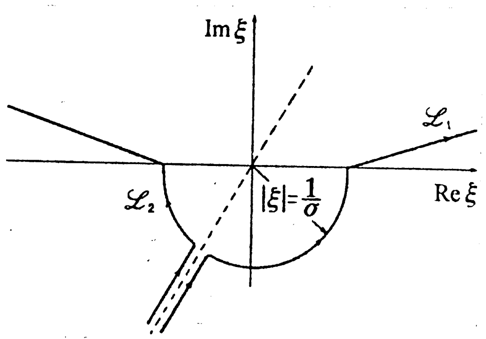

Рис. 8.

Это можно сделать поскольку при этом мы не пересечем линий корней.

Легко показать, что интеграл по той части, где $\arg \xi = -2/3\pi$, будет экспоненциально мал, а на оставшейся части можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций v и w_2. В результате мы получим такое же выражение как и в (2.5).

Таким образом, можно сделать вывод, что и в случае вогнутой границы коэффициент возбуждения $B(\varphi_0, \Phi)$ имеет такой же вид, как и для выпуклой, и задается формулой (2.6). Вычисляя интеграл (2.7) по вычетам в корнях функции Эйри $v(\xi)$, мы можем найти коэффициенты возбуждения волн шепчущей галереи.

Подчеркнем, что описанная процедура позволяет найти первичное дифракционное поле, т.е. результат дифракции падающего лучевого поля на ребро. Заметим, что, если у тела имеется еще одно или несколько ребер, то указанным методом можно вычислить и вторичное дифракционное поле, т.е. результат дифракции первичного дифракционного поля на ребре и т.д.

В заключение заметим, что метод переносится на случай других граничных условий.

Литература

1. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* Наука, М., 1966, 455 с.
2. V. B. Philippov, *Diffraction by a nonplanar screen.* — Wave Motion **3** (1981), 78–81.

Philippov V. B., Kirpichnikova N. Ya. The diffraction from the wedge-shaped region with curved bounds.

A problem of the diffraction of the waves over-running on the wedge-shaped region Ω with curved bounds is considered. The incidence wave is given by the ray expansion. The scattered field is found as sum of the geometric-optical field and the diffractional field.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 1997 г.