Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

Л. А. Молотков, А. В. Бакулин

О ЗАТУХАНИИ В СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ БИО И ИХ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДЕЛЯХ

В связи с развитием теории распространения сейсмических и акустических волн и электронно-вычислительной техники в настоящее время наблюдается огромный интерес к пористым и трещиноватым средам, насыщенным различными жидкостями или газами. Как правило, в этих средах наблюдается анизотропия, обусловленная тонкослоистостью и ориентированной трещиноватостью. Другая особенность этих сред состоит в том, что в них очень большую роль играет поглощение, которое, в свою очередь, может давать информацию о трещиноватости скелета и о характере флюида.

Для описания волновых процессов и затухания в таких средах в предлагаемой работе используется модель Био [1]. Применяя эту модель, удалось построить эффективные модели слоистых сред Био, а также сред, в которых пористые слои Био чередуются с твердыми или жидкими слоями [2]. Результаты указанной статьи оказались в противоречии с работами [3, 4]. Различие выводов, по-видимому, связано с тем, что, согласно применяемому методу и в соответствии со статьей [5], плотности жидких фаз и жидкостей осредняются по-разному в направлении, перпендикулярном слоям, и вдоль слоев, а в указанных статьях такие осреднения предполагаются одинаковыми.

В настоящей работе эффективная модель слоистых пористых сред [2] обобщается на случай, когда эти пористые среды обладают вязкостью. Полученная при этом эффективная модель является не только вязкой, но и описывается дополнительно экспоненциальными ядрами релаксации.

Аналогичное появление экспоненциальных ядер релаксации отмечалось в работе [6] при осреднении упруго-вязких слоистых сред. Такие ядра не получаются, если предполагать, что опре-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00666, 96-05-66207).

деление плотностей жидких фаз в различных направлениях проводится одинаковым образом. Использование экспоненциальных ядер для описания поглощения в пористых средах ранее предлагалось в работе [7]. В настоящей же работе устанавливаются параметры этих ядер и указываются неравенства, которым должны удовлетворять параметры, чтобы характеризовали поглощение.

§1. Установление эффективной модели слоистой пористо-вязкой среды Био

Пусть задана слоистая периодическая трансверсально-изотропная среда Био $0 \leqslant z \leqslant H$, содержащая n периодов с толщиной $h = H/n$ (рис. 1). Каждый период состоит из двух однородных слоев 1 и 2, имеющих толщины $h_1 = \theta_1 h$ и $h_2 = \theta_2 h$ $(\theta_1 + \theta_2 = 1)$. Оба слоя описываются уравнениями

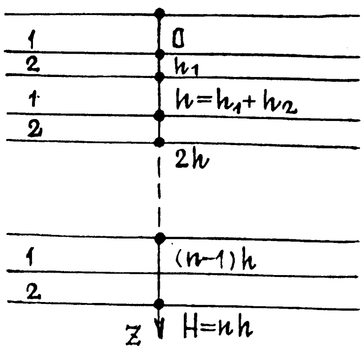

Рис. 1.

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx} &= P\frac{\partial u_x}{\partial x} + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz} &= F\frac{\partial u_x}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p &= M\frac{\partial u_x}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz} &= L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\rho_f\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_f\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+m_x\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2}+b_z\frac{\partial w_x}{\partial t},\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\rho_f\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_f\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+m_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}+b_z\frac{\partial w_z}{\partial t},
\end{aligned}\tag{1.2}$$

в которых τ_{xx}, τ_{zz} и τ_{xz} являются суммарными напряжениями, u_x, u_z – смещения в твердой фазе, w_x, w_z – относительные смещения в жидкой фазе и p – давление в жидкой фазе. К указанным величинам и к параметрам, относящимся к определенному слою, следует добавлять индекс 1 или 2, определяющий номер слоя. В отличие от работы [2] в уравнениях (1.2) учитывается затухание дополнительными членами, содержащими коэффициенты вязкости $b_x > 0$ и $b_z > 0$. На границах между слоями по-прежнему выполняются граничные условия

$$\begin{aligned}
&u_{x1}=u_{x2},\quad u_{z1}=u_{z2},\quad w_{z1}=w_{z2},\\
&\tau_{xz1}=\tau_{xz2},\quad \tau_{zz1}=\tau_{zz2},\quad p_1=p_2.
\end{aligned}\tag{1.3}$$

В волновом поле, удовлетворяющем уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3), совершается, как и в работе [2] предельный переход при $n\to\infty$, $h\to 0$, $H=\mathrm{const}$, $\theta_1=\mathrm{const}$ и $\theta_2=\mathrm{const}$. Чтобы использовать результаты работы [2], полезно ввести операторы

$$\mu_x=m_x+b_x/s,\quad \mu_z=m_z+b_z/s,\tag{1.4}$$

в которых через s обозначен оператор дифференцирования по времени:

$$s=\partial/\partial t.\tag{1.5}$$

С учетом соотношений (1.4) и (1.5) второе и четвертое уравнения (1.2) представляются в виде

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_f\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\mu_x\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_f\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\mu_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}
\end{aligned}\tag{1.6}$$

и отличаются от соответствующих уравнений (1.2) [2], не учитывающих затухание, только тем, что коэффициенты m_x и m_z заменены операторами μ_x и μ_z.

Предельное волновое поле удовлетворяет закону Гука и уравнениям движения сплошной среды, при этом закон Гука попрежнему представляется формулами (2.8) и (2.10) [2], а остальные уравнения выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\tilde\rho_x\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\tilde\rho_{fx}\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x}=\tilde\rho_{fx}\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\tilde\mu_x\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\tilde\rho_z\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\tilde\rho_{fz}\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\tilde\rho_{fz}\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\tilde\mu_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Так как осреднение слоев Био проводится одинаковым способом при наличии и отсутствии затухания в слоях Био, то для определения параметров $\tilde\rho_z$, $\tilde\rho_{fz}$ и операторов $\tilde\mu_z$, $\tilde\rho_x$, $\tilde\rho_{fx}$ и $\tilde\mu_x$ могут быть использованы формулы (2.15) [2]. На основании этих формул записываются соотношения

$$\begin{aligned}
&\tilde\rho_z=\rho_1\theta_1+\rho_2\theta_2,\quad \tilde\rho_{fz}=\rho_{f1}\theta_1+\rho_{f2}\theta_2,\\
&\tilde\mu_z=\mu_{z1}\theta_1+\mu_{z2}\theta_2,\\
&\tilde\rho_x=\rho_1\theta_1+\rho_2\theta_2-\frac{\theta_1\theta_2(\rho_{f1}-\rho_{f2})^2}{\mu_{x2}\theta_1+\mu_{x1}\theta_2},\\
&\tilde\rho_{fx}=\frac{\rho_{f1}\mu_{x2}\theta_1+\rho_{f2}\mu_{x1}\theta_2}{\mu_{x2}\theta_1+\mu_{x1}\theta_2},\\
&\tilde\mu_x=\frac{\mu_{x1}\mu_{x2}}{\mu_{x2}\theta_1+\mu_{x1}\theta_2}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

После подстановки второй формулы (1.4) в третье равенство (1.8) приходим к соотношению

$$\tilde\mu_z=\tilde m_z+\tilde b_z/s,\tag{1.9}$$

в котором

$$\tilde m_z=m_{z1}\theta_1+m_{z2}\theta_2,\quad \tilde b_z=b_{z1}\theta_1+b_{z2}\theta_2.\tag{1.10}$$

Уравнения движения сплошной среды вдоль оси z в предельной среде представляются равенствами

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\tilde\rho_z\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\tilde\rho_{fz}\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\tilde\rho_{fz}\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\tilde m_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}+\tilde b_z\frac{\partial w_z}{\partial t},
\end{aligned}\tag{1.11}$$

при этом коэффициенты $\tilde{\rho}_z$, $\tilde{\rho}_{fz}$, $\tilde{m}_z$ и $\tilde{b}_z$ выражаются первой и второй формулами (1.8) и соотношениями (1.10). Таким образом, вид этих уравнений после осреднения принципиально не изменяется.

Более сложными после осреднения оказываются уравнения движения сплошной среды вдоль оси x. Операторы $\tilde{\mu}_x$, $\tilde{\rho}_{fx}$ и $\tilde{\rho}_x$ представляются равенствами

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_x &= \frac{(m_{x1}+b_{x1}/s)(m_{x2}+b_{x2}/s)}{\theta_2(m_{x1}+b_{x1}/s)+\theta_1(m_{x2}+b_{x2}/s)},\\
\tilde{\rho}_x &= \rho_1\theta_1+\rho_2\theta_2-\frac{\theta_1\theta_2(\rho_{f1}-\rho_{f2})^2}{\theta_2(m_{x1}+b_{x1}/s)+\theta_1(m_{x2}+b_{x2}/s)},\\
\tilde{\rho}_{fx} &= \frac{\rho_{f1}(m_{x1}+b_{x1}/s)+\rho_{f2}(m_{x2}+b_{x2}/s)}{\theta_2(m_{x1}+b_{x1}/s)+\theta_1(m_{x2}+b_{x2}/s)}.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

В дробях, входящих в выражения (1.12), выделим целые части и произведем разложение на простые дроби. В результате формулы (1.12) заменятся соотношениями

$$
\tilde{\rho}_x=\bar{\rho}_x+\frac{A}{s+D},\quad \tilde{\rho}_{fx}=\bar{\rho}_{fx}+\frac{B}{s+D},\quad \tilde{\mu}_x=\tilde{m}_x+\frac{C}{s+D}+\frac{\tilde{b}_x}{s},\tag{1.13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar{\rho}_x &= \rho_1\theta_1+\rho_2\theta_2-\frac{\theta_1\theta_2(\rho_{f1}-\rho_{f2})^2}{\theta_2 m_{x1}+\theta_1 m_{x2}},\quad \tilde{m}_x=\frac{m_{x1}m_{x2}}{\theta_1 m_{x2}+\theta_2 m_{x1}},\\
\bar{\rho}_{fx} &= \frac{\rho_{f1}m_{x1}\theta_2+\rho_{f2}m_{x2}\theta_1}{\theta_2 m_{x1}+\theta_1 m_{x2}},\quad \tilde{b}_x=\frac{b_{x1}b_{x2}}{\theta_1 b_{x2}+\theta_2 b_{x1}},\\
A &= \frac{\theta_1\theta_2(\rho_{f1}-\rho_{f2})^2(\theta_1 b_{x2}+\theta_2 b_{x1})}{(\theta_1 m_{x2}+\theta_2 m_{x1})},\\
B &= \frac{\theta_1\theta_2(\rho_{f1}-\rho_{f2})(m_{x1}b_{x2}-b_{x1}m_{x2})}{(\theta_1 m_{x2}+\theta_2 m_{x1})^2},\\
C &= \frac{\theta_1\theta_2(b_{x1}m_{x2}-b_{x2}m_{x1})^2}{(\theta_2 m_{x1}+\theta_1 m_{x2})^2(\theta_1 b_{x2}+\theta_2 b_{x1})},\\
D &= \frac{\theta_1 b_{x2}+\theta_2 b_{x1}}{\theta_1 m_{x2}+\theta_2 m_{x1}}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Для перехода к уравнениям движения сплошной среды вдоль оси x используем соотношение

$$\frac{1}{D+s}f = \int\limits_0^t e^{-D(t-\tau)}f(\tau)d\tau, \tag{1.15}$$

которое справедливо для произвольной интегрируемой функции $f(t)$ и выводится на основании теоремы о свертывании. В результате приходим к уравнениям

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = \bar\rho_x\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + A\int\limits_0^t e^{-D(t-\tau)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}\,d\tau +$$

$$+\bar\rho_{fx}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + B\int\limits_0^t e^{-D(t-\tau)}\frac{\partial^2 w_x}{\partial\tau^2}\,d\tau, \tag{1.16}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \bar\rho_{fx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + B\int\limits_0^t e^{-D(t-\tau)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}\,d\tau +$$

$$+\tilde m_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \tilde b_x\frac{\partial w_x}{\partial t} + C\int\limits_0^t e^{-D(t-\tau)}\frac{\partial^2 w_x}{\partial\tau^2}\,d\tau,$$

где после определения появились дополнительные интегральные члены, содержащие ядра $\exp[-D(t-\tau)]$. Как будет показано в §2, с этими членами также связано затухание волнового поля. Особенность коэффициентов при интегральных членах состоит в том, что они удовлетворяют соотношению

$$AC = B^2. \tag{1.17}$$

Члены в уравнениях (1.11) и (1.16), не связанные с затуханием, согласно первым трем равенствам (1.16) имеют те же самые выражения, как и в случае отсутствия затухания [2].

В заключение укажем ряд свойств членов, определяющих затухание. Коэффициенты осредненной вязкости удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &\min(b_{x1}, b_{x2}) < \tilde b_x < \max(b_{x1}, b_{x2}),\\ &\min(b_{z1}, b_{z2}) < \tilde b_z < \max(b_{z1}, b_{z2}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

и лежат между соответствующими коэффициентами вязкости слоев. Если в одном из слоев коэффициент вязкости в направлении оси x равен нулю, то и коэффициент осредненной вязкости также обращается в нуль, при этом интегральные члены не исчезают. Для коэффициента вязкости вдоль оси z это свойство не выполняется. При одновременном выполнении равенств

$$\rho_{f1} = \rho_{f2}, \quad m_{x1} b_{x2} - b_{x1} m_{x2} = 0, \tag{1.19}$$

$A = B = C = 0$, интегральные члены обращаются в нуль, но осредненная вязкость сохраняется. Согласно соотношениям (1.13) и (1.14), $\tilde{\rho}_x$ как функция s при $s = 0$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\rho}_x(0) = \rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2. \tag{1.20}$$

Аналогичное равенство для $\tilde{\rho}_z$ выполняется при всех s и, следовательно, имеет место равенство

$$\tilde{\rho}_x(0) = \tilde{\rho}_z(0). \tag{1.21}$$

Формулы (1.8)–(1.10), (1.13) и (1.14) определяют величины $\tilde{\rho}_z$, $\tilde{\rho}_{fz}$, $\tilde{\mu}_z$, $\tilde{\rho}_x$, $\tilde{\rho}_{fx}$ и $\tilde{\mu}_x$, характеризующие уравнения движения сплошной пористой среды после осреднения. Выражения этих величин содержат слагаемые, связанные с идеальной пористой средой, и добавки, описывающие затухание. Указанные слагаемые отличаются от соответствующих выражений в работах [3, 4], и эти различия обусловлены тем, что авторы необоснованно предполагают равенства осредненных плотностей $\tilde{\rho}_x = \tilde{\rho}_z$ и плотностей жидкостей $\tilde{\rho}_{fx} = \tilde{\rho}_{fz}$ вдоль осей.

§2. Энергетические исследования пористой среды Био с вязкостью и релаксацией

Для исследования количественного убывания энергии в выведенной в §1 эффективной модели за счет поглощения представим уравнения равновесия равенствами

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \bar{\rho}_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{A}{s+D}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{\rho}_{fx} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \frac{B}{s+D}\,\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \bar{\rho}_{fx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{B}{s+D}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \tilde{m}_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \tilde{b}_x \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{C}{s+D}\,\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}=\tilde{\rho}_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+\tilde{\rho}_{fz}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\tilde{\rho}_{fz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+\tilde{m}_z\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}+\tilde{b}_z\frac{\partial w_z}{\partial t},$$

в которых операторы s и $1/(s+D)$ определены соотношениями (1.5) и (1.15). Закон Гука для эффективной модели представляется по-прежнему формулами (1.1).

Помножим первое, второе, третье и четвертое уравнение (2.1) соответственно на $\partial u_x/\partial t$, $\partial w_x/\partial t$, $\partial u_z/\partial t$ и $\partial w_z/\partial t$ и почленно сложим полученные уравнения. После ряда несложных преобразований придем к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}(W_k+W_p)+\tilde{b}_x\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2+\tilde{b}_z\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)^2+$$
$$+\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{A}{s+D}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}+\frac{\partial w_x}{\partial t}\,\frac{C}{s+D}\,\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}+\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{B}{s+D}\,\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}+ \tag{2.2}$$
$$+\frac{\partial w_x}{\partial t}\,\frac{B}{s+D}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

в котором

$$p_x=\tau_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial t}-p\frac{\partial w_x}{\partial t}+\tau_{xz}\frac{\partial u_z}{\partial t},$$
$$p_z=\tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t}-p\frac{\partial w_z}{\partial t}+\tau_{xz}\frac{\partial u_x}{\partial t} \tag{2.3}$$

– составляющие вектора потока энергии вдоль осей x и z. Плотности кинетической и потенциальной энергий W_k и W_p представляются равенствами

$$W_k=\frac{1}{2}\Bigg[\bar{\rho}_x\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+2\bar{\rho}_{fx}\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{\partial w_x}{\partial t}+\tilde{m}_x\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2+$$
$$+\tilde{\rho}_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2+2\tilde{\rho}_{fz}\frac{\partial w_z}{\partial t}\,\frac{\partial u_z}{\partial t}+\tilde{m}_z\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)^2\Bigg], \tag{2.4}$$

$$W_p=\frac{1}{2}\Bigg[P\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+2F\frac{\partial u_x}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}+2M\frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+$$
$$+C\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+2Q\frac{\partial u_z}{\partial z}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2\Bigg]$$

и являются положительно определенными функциями производных смещений по времени и координатам. Поэтому из коэффициентов $\bar{\rho}_x$, $\bar{\rho}_{fx}$, $\tilde{m}_x$, $\tilde{\rho}_z$, $\tilde{\rho}_{fz}$, $\tilde{m}_z$, P, F, M, C, Q и R можно составить положительно определенные матрицы

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}_x, & \bar{\rho}_{fx} \\ \bar{\rho}_{fx}, & \tilde{m}_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_z, & \tilde{\rho}_{fz} \\ \tilde{\rho}_{fz}, & \tilde{m}_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P, & F, & M \\ F, & C, & Q \\ M, & Q, & R \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

и, в частности, должны выполняться неравенства

$$\bar{\rho}_x \tilde{m}_x > \bar{\rho}_{fx}^2, \quad \tilde{\rho}_z \tilde{m}_z > \tilde{\rho}_{fz}^2, \quad PR > M^2, \quad CR > Q^2. \tag{2.6}$$

Слагаемые в формуле (2.2), содержащие коэффициенты $\tilde{b}_x$ и $\tilde{b}_z$, и члены с оператором $1/(s+D)$ описывают соответственно мощности вязких сил и сил релаксации. Последние члены преобразуем с использованием очевидных формул

$$\frac{1}{s+D}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{D}{s+D}\frac{\partial u_x}{\partial t},$$
$$\frac{1}{s+D}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = \frac{\partial w_x}{\partial t} - \frac{D}{s+D}\frac{\partial w_x}{\partial t}. \tag{2.7}$$

В результате сумма этих членов заменится выражением

$$A\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 - D\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{1}{s+D}\frac{\partial u_x}{\partial t}\right] +$$
$$+C\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 - D\frac{\partial w_x}{\partial t}\frac{1}{s+D}\frac{\partial w_x}{\partial t}\right] +$$
$$+B\left[2\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{\partial w_x}{\partial t} - D\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{1}{s+D}\frac{\partial w_x}{\partial t} - D\frac{\partial w_x}{\partial t}\frac{1}{s+D}\frac{\partial u_x}{\partial t}\right]. \tag{2.8}$$

Проинтегрируем соотношение (2.2) по времени в промежутке $[0,t]$ и, с учетом выражения (2.6), получим равенство

$$W_k(t) + W_p(t) = W_k(0) + W_p(0) - \int\limits_0^t \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) dt -$$
$$-\int\limits_0^t \left[\tilde{b}_x\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 + \tilde{b}_z\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)^2\right] dt -$$

$$-A\int\limits_0^t\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2-D\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{1}{s+D}\,\frac{\partial u_x}{\partial t}\right]dt-$$

$$-C\int\limits_0^t\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2-D\frac{\partial w_x}{\partial t}\,\frac{1}{s+D}\,\frac{\partial w_x}{\partial t}\right]dt- \qquad (2.9)$$

$$-B\int\limits_0^t\left[2\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{\partial w_x}{\partial t}-D\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{1}{s+D}\,\frac{\partial w_x}{\partial t}-D\frac{\partial w_x}{\partial t}\,\frac{1}{s+D}\,\frac{\partial u_x}{\partial t}\right]dt.$$

Если не учитывать перенос энергии, то вследствие поглощения сумма плотностей кинетической и потенциальной энергий в произвольной точке и в любой момент времени $t > 0$ должна быть меньше, чем при $t = 0$. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, необходимо доказать неравенства

$$\int\limits_0^t\left[\tilde{b}_x\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2+\tilde{b}_z\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)^2\right]dt>0, \qquad (2.10)$$

$$A\left[\int\limits_0^t\left(\frac{\partial u_x}{\partial t_1}\right)^2dt_1-D\int\limits_0^t\frac{\partial u_x}{\partial t_1}\,dt_1\int\limits_0^{t_1}e^{-D(t_1-\tau)}\frac{\partial u_x}{\partial \tau}\,d\tau\right]+$$

$$+C\left[\int\limits_0^t\left(\frac{\partial w_x}{\partial t_1}\right)^2dt_1-D\int\limits_0^t\frac{\partial w_x}{\partial t_1}\,dt_1\int\limits_0^{t_1}e^{-D(t_1-\tau)}\frac{\partial w_x}{\partial \tau}\,d\tau\right]+ \qquad (2.11)$$

$$+B\Bigg[2\int\limits_0^t\frac{\partial u_x}{\partial t_1}\frac{\partial w_x}{\partial t_1}dt_1-D\int\limits_0^t\frac{\partial u_x}{\partial t_1}\,dt_1\int\limits_0^{t_1}e^{-D(t_1-\tau)}\frac{\partial w_x}{\partial \tau}\,d\tau-$$

$$-D\int\limits_0^t\frac{\partial w_x}{\partial t_1}\,dt_1\int\limits_0^{t_1}e^{-D(t_1-\tau)}\frac{\partial w_x}{\partial \tau}\,d\tau\Bigg]\geqslant 0,$$

определяющие знаки работ вязких сил и сил релаксации. Так как $\tilde{b}_x > 0$ и $\tilde{b}_z > 0$, то неравенство (2.10) всегда выполняется.

Для доказательство условия (2.11) при

$$A > 0, \quad C > 0, \quad -\sqrt{AC} \leqslant B \leqslant \sqrt{AC} \qquad (2.12)$$

полезно использовать неравенство

$$\int_0^T u(t)^2 dt - \alpha \int_0^T u(t)dt \int_0^t u(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau > 0, \qquad (2.13)$$

справедливое для любой интегрируемой функции $u(t)$. При $B = 0$ неравенство (2.11), согласно (2.13), выполняется. Если $B \neq 0$, то неравенство (2.11) нужно доказывать только в случае, когда слагаемое, содержащее B, является отрицательным. Коэффициент B при этом может быть как положительным, так и отрицательным. Заменим $B > 0$ на $\sqrt{AC}$ или $B < 0$ на $-\sqrt{AC}$. После такой замены левая часть неравенства (2.11) уменьшается, а само неравенство (2.11) принимает вид

$$\int_0^t \left(\sqrt{A}\frac{\partial u_x}{\partial t} \pm \sqrt{C}\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 dt - -D\int_0^t \left(\sqrt{A}\frac{\partial u_x}{\partial t_1} \pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{C}\frac{\partial w_x}{\partial t_1}\right)^2 dt_1 \int_0^{t_1} e^{-D(t_1-\tau)} \left(\sqrt{A}\frac{\partial u_x}{\partial \tau} \pm \sqrt{C}\frac{\partial w_x}{\partial \tau}\right) d\tau \geqslant 0, \qquad (2.14)$$

при этом знак “+” соответствует случаю $B > 0$, а знак “−” – случаю $B < 0$. Неравенство (2.14) выполняется на основании (2.13). Так как левая часть (2.14) неотрицательная, то неотрицательной является и левая часть (2.11) и, следовательно, неравенство (2.11) выполняется при условиях (2.12).

Вне интервала $-\sqrt{AC} \leqslant B \leqslant \sqrt{AC}$ неравенство (2.11) удовлетворяется не при всех параметрах. В самом деле, при $D = 0$ оно переходит в неравенство

$$\int_0^t \left[A\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + C\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 + 2B\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{\partial w_x}{\partial t}\right] dt \geqslant 0, \qquad (2.15)$$

которое не выполняется, если

$$\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} < \frac{\partial u_x}{\partial t}\Big/\frac{\partial w_x}{\partial t} < \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \qquad (2.16)$$

Таким образом, для существования диссипации, связанной с силами релаксации, необходимо, чтобы параметры в уравнениях (2.1) удовлетворяли условиям (2.12). Для параметров эффективной модели, выведенной в §1, эти условия выполняются.

§3. Установление эффективной модели слоистой пористой среды Био с вязкостью и релаксацией

Рассмотрим периодическую слоистую среду, изображенную на рис. 1 и состоящую из пористых слоев Био, в которых диссипация связана не только с вязкостью, но с ядрами релаксации. Эти среды описываются уравнениями

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho_x\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\frac{A_x}{s+D_x}\,\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\rho_{fx}\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2}+\frac{B_x}{s+D_x}\,\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_{fx}\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\frac{B_x}{s+D_x}\,\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+m_x\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2}+b_x\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{C_x}{s+D_x}\,\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\rho_z\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\frac{A_z}{s+D_z}\,\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\rho_{fz}\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}+\frac{B_z}{s+D_x}\,\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2},$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{fz}\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\frac{B_z}{s+D_z}\,\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+m_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}+b_z\frac{\partial w_z}{\partial t}+\frac{C_z}{s+D_z}\,\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}\tag{3.1}$$

и законом Гука (1.1). Коэффициенты при членах с ядрами удовлетворяют соотношениям

$$A_xC_x\geqslant B_x^2,\quad A_zC_z\geqslant B_z^2,\quad A_x>0,\quad A_z>0,\quad C_x>0,\quad C_z>0.\tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) с условиями (3.2) соответствуют уравнениям эффективной модели слоистой вязкой среды Био, при этом характер затухания вдоль осей предполагается одинаковым. К параметрам, смещениям и напряжениям, относящимся к определенному слою, также добавляется индекс 1 или 2 в зависимости от номера слоя. На границе между слоями выполняются граничные условия (1.3). В волновом поле, удовлетворяющем уравнениям (1.1), (3.1) и условиям (1.3), совершается предельный переход, указанный в §1.

Чтобы записать уравнения, описывающие предельное волновое поле, полезно использовать результаты работы [2] и ввести операторы

$$\tilde\mu_{xi}=m_{xi}+\frac{b_{xi}}{s}+\frac{C_{xi}}{s+D_{xi}},\quad \tilde\mu_{zi}=m_{zi}+\frac{b_{zi}}{s}+\frac{C_{zi}}{s+D_{zi}},$$
$$\tilde\rho_{fxi}=\rho_{fxi}+\frac{B_{xi}}{s+D_{xi}},\quad \tilde\rho_{fzi}=\rho_{fzi}+\frac{B_{zi}}{s+D_{zi}},\tag{3.3}$$

$$\tilde{\rho}_{xi} = \rho_{xi} + \frac{A_{xi}}{s + D_{xi}}, \quad \tilde{\rho}_{zi} = \rho_{zi} + \frac{A_{zi}}{s + D_{zi}}, \quad (i = 1, 2).$$

Первые три формулы (1.8) представятся в виде

$$\tilde{\rho}_z = \tilde{\rho}_{z1}\theta_1 + \tilde{\rho}_{z2}\theta_2, \quad \tilde{\rho}_{fz} = \rho_{fz1}\theta_1 + \rho_{fz_2}\theta_2,$$
$$\tilde{\mu}_z = \tilde{\mu}_{z1}\theta_1 + \tilde{\mu}_{z2}\theta_2. \tag{3.4}$$

После подстановки выражений (3.3) в соотношения (3.4) приходим к равенствам

$$\tilde{\mu}_z = \bar{m}_z + \frac{\bar{b}_z}{s} + \frac{\bar{C}_{z1}}{s + D_{z1}} + \frac{\bar{C}_{z2}}{s + D_{z2}},$$
$$\tilde{\rho}_{fz} = \bar{\rho}_{fz} + \frac{\bar{B}_{z1}}{s + D_{z1}} + \frac{\bar{B}_{z2}}{s + D_{z2}}, \tag{3.5}$$
$$\tilde{\rho}_z = \bar{\rho}_z + \frac{\bar{A}_{z1}}{s + D_{z1}} + \frac{\bar{A}_{z2}}{s + D_{z2}},$$

где

$$\bar{m}_z = m_{z1}\theta_1 + m_{z2}\theta_2, \quad \bar{b}_z = b_{z1}\theta_1 + b_{z2}\theta_2,$$
$$\bar{\rho}_{fz} = \rho_{fz1}\theta_1 + \rho_{fz2}\theta_2, \quad \bar{\rho}_z = \rho_{z1}\theta_1 + \rho_{z2}\theta_2, \tag{3.6}$$
$$\bar{C}_{zi} = C_{zi}\theta_i, \quad \bar{B}_{zi} = B_{zi}\theta_i, \quad \bar{A}_{zi} = A_{zi}\theta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Из формул (3.5) и (3.6) следуют предельные уравнения вдоль оси z

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \bar{\rho}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} \bar{A}_{zi} \int_0^t e^{-D_{zi}(t-\tau)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2}\, d\tau +$$
$$+ \bar{\rho}_{fz} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} \bar{B}_{zi} \int_0^t e^{-D_{zi}(t-\tau)} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \tau^2}\, d\tau, \tag{3.7}$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \bar{\rho}_{fz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} \bar{B}_{zi} \int_0^t e^{-D_{zi}(t-\tau)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2}\, d\tau +$$
$$+ \bar{m}_z \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} + \bar{b}_z \frac{\partial w_z}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \bar{C}_{zi} \int_0^t e^{-D_{zi}(t-\tau)} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \tau^2}\, d\tau.$$

Таким образом, после осреднения уравнения движения сплошной среды вдоль оси z (3.7) существенно не изменяются. Вместо одного экспоненциального ядра в предельных уравнениях оказываются два экспоненциальных ядра.

Установление уравнений движения сплошной среды вдоль оси x начнем с исследования оператора $\tilde{\mu}_x$, который представляется шестой формулой (1.8). После подстановки в эту формулу первых соотношений (3.3) оператор $\tilde{\mu}_x$ выражается равенством

$$\tilde{\mu}_x = \left(m_{x1} + \frac{b_{x1}}{s} + \frac{C_{x1}}{s + D_{x1}}\right)\left(m_{x2} + \frac{b_{x2}}{s} + \frac{C_{x2}}{s + D_{x2}}\right) \Big/ f(s), \quad (3.8)$$

где

$$f(s) = \theta_2 m_{x1} + \theta_1 m_{x2} + \frac{\theta_1 b_{x2} + \theta_2 b_{x1}}{s} + \frac{\theta_1 C_{x1}}{s + D_{x1}} + \frac{\theta_2 C_{x2}}{s + D_{x2}}. \quad (3.9)$$

Элементарные преобразования выражений (3.8) и (3.9) приводят к формуле

$$\tilde{\mu}_x = \frac{P_4(s)}{sP_3(s)}, \quad (3.10)$$

в которых $P_3(s)$ и $P_4(s)$ – полиномы третьей и четвертой степени с известными коэффициентами. После выделения из дроби в формуле (3.10) целой части и элементарных дробей равенство (3.10) заменяется соотношением

$$\tilde{\mu}_x = \bar{m}_x + \frac{\bar{b}_x}{s} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\bar{C}_{xi}}{s + \bar{D}_{xi}}, \quad (3.11)$$

где выражения

$$\bar{m}_x = \frac{m_{x1} m_{x2}}{\theta_2 m_{x1} + \theta_1 m_{x2}}, \quad \bar{b}_x = \frac{b_{x1} b_{x2}}{\theta_2 b_{x1} + \theta_1 b_{x2}} \quad (3.12)$$

совпадают с первым и вторым равенствами (1.14).

Чтобы установить свойства величин $\bar{C}_{xi}$ и $\bar{D}_{xi}$, укажем, что величины $-\bar{D}_{xi}$ являются полюсами выражения для $\tilde{\mu}_x$ и корнями функции (3.9), а коэффициенты $\bar{C}_{xi}$ – вычеты в этих полюсах. Докажем, что все $\bar{D}_{xi}$ удовлетворяют неравенству

$$\bar{D}_{xi} > 0. \quad (3.13)$$

Производная $f'(s)$ имеет выражение

$$f'(s) = -\frac{\theta_2 b_{x1} + \theta_1 b_{x2}}{s^2} - \frac{\theta_1 C_{x1}}{(s + D_{x1})^2} - \frac{\theta^2 C_{x2}}{(s + D_{x2})^2} \tag{3.14}$$

и на вещественной оси удовлетворяет неравенству

$$f'(s) < 0. \tag{3.15}$$

С учетом неравенства (3.15), расположения полюсов и условия $f(\pm\infty) = \theta_2 m_{x1} + \theta_1 m_{x2} > 0$ удается построить график функции $f(s)$ при вещественных s (рис. 2). Из этого графика видно, что корни функции $f(s)$ расположены по одному в интервалах $(-\infty, D_2^0)$, $(-D_2^0, -D_1^0)$ и $(-D_1^0, 0)$, где $D_1^0 = \min(D_1, D_2)$, $D_2^0 = \max(D_1, D_2)$. Таким образом, величины $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ и $\bar{D}_3$ удовлетворяют неравенствам

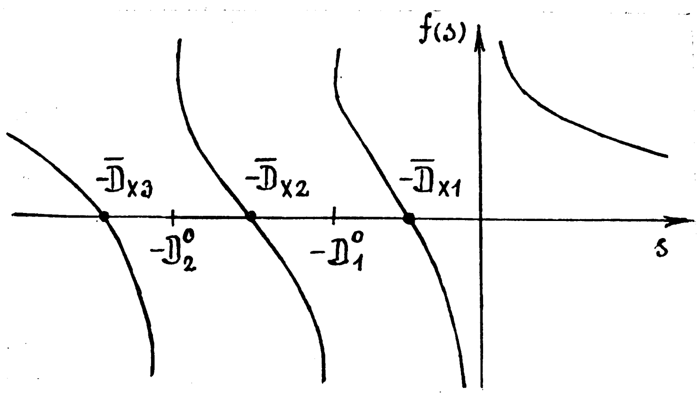

Рис. 2.

$$\bar{D}_{3x} > D_2^0 > \bar{D}_{2x} > D_1^0 > \bar{D}_{1x} > 0 \tag{3.16}$$

и (3.13). Для нахождения численных значений коэффициентов $\bar{D}_{x1}$, $\bar{D}_{x2}$ и $\bar{D}_{x3}$ необходимо решить уравнение

$$(\theta_1 m_{x2} + \theta_2 m_{x1})s^3 + [(\theta_1 m_{x2} + \theta_2 m_{x1})(D_{x1} + D_{x2}) + \theta_2 b_{x1} + \theta_1 b_{x2} +$$
$$+ \theta_1 C_{x1} + \theta_2 C_{x2}]s^2 + [(\theta_2 m_{x1} + \theta_1 m_{x2}) D_{x1} D_{x2} + \tag{3.17}$$

$$+(\theta_2 b_{x1} + \theta_1 b_{x2})(D_{x1} + D_{x2}) + \theta_1 C_{x1} D_{x2} + \theta_2 C_{x2} D_{x1}]s+$$

$$+(\theta_2 b_{x1} + \theta_1 b_{x2}) D_{x1} D_{x2} = 0,$$

эквивалентное уравнению $f(s) = 0$.

Величины $\bar{C}_{xi}$ выражаются соотношением

$$\bar{C}_{xi} = \operatorname{Res} \tilde{\mu}_{xi}\big|_{s=-\tilde{D}_i}. \tag{3.18}$$

С использованием формулы (3.8) равенство (3.18) переходит в соотношение

$$\bar{C}_{xi} = -\frac{\theta_2}{\theta_1 f'(s)} \left(m_{x1} + \frac{A}{s + D_1} + \frac{b_{x1}}{s} \right)^2 \bigg|_{s=-\tilde{D}_i}. \tag{3.19}$$

Из условия (3.15) следует, что

$$\bar{C}_{xi} > 0. \tag{3.20}$$

Аналогичным образом преобразуются и исследуются выражения для операторов $\tilde{\rho}_{fx}$ и $\tilde{\rho}_x$. После подстановки формул (3.3) в соотношения (1.8) приходим к равенствам

$$\tilde{\rho}_{fx} = \left[\theta_1 \left(\rho_{fx1} + \frac{B_{x1}}{s + D_{x1}} \right) \left(m_{x2} + \frac{A_{x2}}{s + D_{x2}} + \frac{b_{x2}}{s} \right) + \right.$$

$$\left. + \theta_2 \left(\rho_{fx2} + \frac{B_{x2}}{s + D_{x2}} \right) \left(m_{x1} + \frac{A_{x1}}{s + D_{x1}} + \frac{b_{x1}}{s} \right) \right] \Big/ f(s), \tag{3.21}$$

$$\tilde{\rho}_x = \rho_{x1}\theta_1 + \rho_{x2}\theta_2 + \frac{A_{x1}\theta_1}{s + D_{x1}} + \frac{A_{x2}\theta_2}{s + D_{x2}} -$$

$$-\theta_1\theta_2 \left(\rho_{fx1} - \rho_{fx2} + \frac{B_{x1}}{s + D_{x1}} - \frac{B_{x2}}{s + D_{x2}} \right) \Big/ f(s).$$

Выделяя в выражениях (3.21) элементарные дроби и целые части, получим соотношения

$$\tilde{\rho}_{fx} = \bar{\rho}_{fx} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\bar{B}_{xi}}{s + \bar{D}_{xi}}, \quad \tilde{\rho}_x = \bar{\rho}_x + \sum_{i=1}^{5} \frac{\bar{A}_{xi}}{s + \bar{D}_{xi}}, \tag{3.22}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{fx} &= \frac{\rho_{fx1} m_{x2}\theta_1 + \rho_{fx2} m_{x1}\theta_2}{m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2}, \\ \bar{\rho}_x &= \rho_{x1}\theta_1 + \rho_{x2}\theta_2 - \frac{\theta_1\theta_2(\rho_{fx1} - \rho_{fx2})^2}{m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Коэффициенты $\bar{B}_{xi}$, $\bar{A}_{xi}$ и величины $\bar{D}_{x4}$ и $\bar{D}_{x5}$ представляются равенствами

$$\bar{B}_{xi} =$$

$$= -\frac{\theta_2 \left(\rho_{fx1} - \rho_{fx2} + \frac{B_{x1}}{s+D_{x1}} - \frac{B_{x2}}{s+D_{x2}}\right)\left(m_{x1} + \frac{A_{x1}}{s+D_{x1}} + \frac{b_{x1}}{s}\right)}{f'(s)}\Bigg|_{s=-\bar{D}_{xi}},$$

$$A_{xi} = -\frac{\theta_1\theta_2 \left(\rho_{fx1} - \rho_{fx2} + \frac{B_{x1}}{s+D_{x1}} - \frac{B_{x2}}{s+D_{x2}}\right)}{f'(s)}\Bigg|_{s=-\bar{D}_{xi}}, \tag{3.24}$$

$$\bar{A}_{x4} = A_{x1}\theta_1, \quad \bar{A}_{x5} = A_{x2}\theta_2, \quad \bar{D}_{x4} = D_{x1}, \quad \bar{D}_{x5} = D_{x2}.$$

Так как выполняется условие (3.15), то

$$\bar{A}_{xi} > 0, \tag{3.25}$$

а коэффициент $\bar{B}_{xi}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Коэффициенты $\bar{A}_{xi}$, $\bar{B}_{xi}$ и $\bar{C}_{xi}$, согласно формулам (3.19) и (3.24), удовлетворяют соотношению

$$\bar{A}_{xi}\bar{C}_{xi} = \bar{B}_{xi}^2. \tag{3.26}$$

Если рассматривать операторы $\tilde{\rho}_x$ и $\tilde{\rho}_z$ как функции от s, то при $s = 0$ они представляются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_x(0) &= \rho_{x1}\theta_1 + \rho_{x2}\theta_2 + \frac{A_{x1}\theta_1}{D_{x1}} + \frac{A_{x2}\theta_2}{D_{x2}},\\ \tilde{\rho}_z(0) &= \rho_{z1}\theta_1 + \rho_{z2}\theta_2 + \frac{A_{z1}\theta_1}{D_{z1}} + \frac{A_{z2}\theta_2}{D_{z2}}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

В случае, когда заданная среда является изотропной и

$$\rho_{xi} = \rho_{zi}, \quad A_{xi} = A_{zi}, \quad D_{xi} = D_{zi} \quad (i = 1, 2), \tag{3.28}$$

выполняется равенство

$$\tilde{\rho}_x(0) = \tilde{\rho}_z(0), \tag{3.29}$$

которое совпадает с соотношением (1.21).

Из равенств (3.11) и (3.22) следуют уравнения равновесия вдоль оси x

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \bar{\rho}_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{5} \bar{A}_{xi} \int\limits_0^t e^{-\bar{D}_{xi}(t-\tau)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2}\, d\tau +$$

$$+\bar{\rho}_{fx}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{3}\bar{B}_{xi}\int_0^t e^{-\bar{D}_{xi}(t-\tau)}\frac{\partial^2 w_x}{\partial\tau^2}\,d\tau, \tag{3.30}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\bar{\rho}_{fx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{3}\bar{B}_{xi}\int_0^t e^{-\bar{D}_{xi}(t-\tau)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}\,d\tau+$$

$$+\bar{m}_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}+\bar{b}_x\frac{\partial w_x}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\bar{C}_{xi}\int_0^t e^{-\bar{D}_{xi}(t-\tau)}\frac{\partial^2 w_x}{\partial\tau^2}\,d\tau.$$

Полученные уравнения (3.30), как и уравнения (3.7), принципиально не отличаются от исходных уравнений (3.1) и содержат три экспоненциальных ядра.

Для уравнений (3.7) и (3.30) могут быть проведены энергетические исследования и может быть записано уравнение, аналогичное равенству (2.7). Из него следует, что диссипация, связанная с ядрами релаксации, имеет место в том случае, когда коэффициенты $\bar{A}_{xi}$, $\bar{B}_{xi}$, $\bar{C}_{xi}$, $\bar{A}_{zi}$, $\bar{B}_{zi}$ и $\bar{C}_{zi}$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}\bar{A}_{xi}\geqslant 0,\quad \bar{C}_{xi}\geqslant 0,\quad \bar{A}_{xi}\bar{C}_{xi}\geqslant \bar{B}_{xi}^2,\\ \bar{A}_{zi}\geqslant 0, \bar{C}_{zi}\geqslant 0,\quad \bar{A}_{zi}\bar{C}_{zi}\geqslant \bar{B}_{zi}^2,\end{gathered} \tag{3.31}$$

подобным (2.10). Из неравенств (3.2) и формул (3.6) и (3.26) следует, что коэффициенты в уравнениях (3.7) и (3.27) удовлетворяют условиям (3.28) и, следовательно, в полученной эффективной модели существует диссипация, обусловленная силами релаксации.

Если слоистая периодическая среда (рис. 1) описывается полученными уравнениями (3.7) и (3.30), то осредненная эффективная модель будет характеризоваться аналогичными уравнениями, в которых число ядер будет больше, чем в исходных уравнениях. Коэффициенты при этих ядрах также будут удовлетворять условиям (3.31) и поэтому будет иметь место диссипация, связанная с ядрами релаксации. В том случае, когда осредняемая среда обладает изотропией, также будут выполняться соотношения (1.21) и (3.29).

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range.* J. Acoust. Soc. Am. **28**, No. 2 (1956), 168–178.
2. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био.* Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.
3. S. Gelinsky, S. Shapiro, *Poroelastic effective media model for fractured and layered reservoir rock – 65th Annual International Meeting.* Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstracts (1995), 922–925.
4. A. Norris, *Low-frequency dispersion and attenuation in partially saturated rocks.* J. Acoust. Soc. Am. **94**, No. 1 (1993), 359–370.
5. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных систем* . Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
6. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Осреднение периодических неидеальноупругих сред.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 123–131.
7. J. M. Carcione, *Wave propagation in anisotropic, saturated porous media: Plane-wave theory and numerical simulation.* J. Acoust. Soc. Am. **99**, No. 5 (1996), 2655–2666.

Molotkov L. A., Bakulin A. V. On attenuation in layered porous Biot media and their effective models.

The effective models of periodic layered porous Biot media possessing viscosity and relaxation are established and investigated. These models correspond to the generalized Biot media with the equations containing as a rule exponential kernels of relaxation and viscosity. There exist such kernels even if in the initial medium relaxation is absent. The inequalities, which must be satisfied by the parameters of kernels, are established by means of the energy investigations. The partial cases when the effective models possess no viscosity or no relaxation are pointed out.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 28 ноября 1997 г.