Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

Я. В. Курылев, М. Лассас

БАЗИСНОСТЬ ПО АБЕЛЮ–ЛИДСКОМУ В НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ

§1. Введение. Основные результаты

Настоящая работа посвящена описанию процедуры восстановления несамосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка, заданного на многообразии с краем, по его граничным спектральным данным Гельфанда (ГСДГ). В случае оператора Шредингера, $-\Delta + q$, заданного в ограниченной области $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, задача о восстановлении вещественно-аналитического потенциала q была решена в [1]. Для случая неаналитического q обратная граничная спектральная задача была решена в [2, 3]. Метод, развитый в этих работах, был также использован для доказательства единственности в задаче восстановления потенциала по граничным данным, заданным на одной частоте (оператор Дирихле–в–Нейман). Более того, метод [2, 3] может быть использован и в случае невещественных потенциалов и был в дальнейшем обобщен на случай несамосопряженного оператора Максвелла [4]. Однако, насколько нам известно, в настоящее время не существует обобщения метода [2, 3] на случай несамосопряженного возмущения оператора Лапласа членами первого порядка (самосопряженный случай рассмотрен в [5]). Что же касается обратной задачи теории рассеяния, то теорема единственности (или, точнее, описание соответствующей группы преобразований) для возмущения оператора Лапласа младшими членами была доказана в [6] с помощью преобразования Радона. В работе [7] была проанализирована взаимосвязь между ГСДГ и граничными спектральными данными (ГСД) как для случая несамосопряженного оператора Шредингера, так и для случая несамосопряженного оператора Максвелла. Эта связь была исследована в [7] для доказательства единственности в обратной граничной спектральной задаче для указанных операторов. С другой стороны, обратная граничная спектральная задача для самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка, заданных на многообразии с краем, была рассмотрена в [8–10] с помощью ГУ-метода [11–13]. В этих работах было показано, что ГСД определяют многообразие, а оператор – с точностью до некоторого преобразования из группы обобщенных калибровочных преобразований.

В настоящей работе мы используем методы [7] и [8–10] для анализа обратной граничной спектральной задачи для несамосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка на многообразии с краем.

Пусть $(M, \partial M)$ – компактное, связное дифференцируемое (C^∞) многообразие, $\partial M \neq \varnothing$, $\dim M = m \geqslant 1$. Граница ∂M представляет собой компактное дифференцируемое многообразие размерности $m-1$, вообще говоря, несвязное.

Пусть $a(x, D)$ – равномерно-эллиптическое дифференциальное выражение второго порядка на M. В координатах $x = (x^1, \dots, x^m)$ на M символ $a(x, D)$ имеет вид:

$$a(x, D)u := -a^{jl}(x)\partial_j\partial_l u + a^j(x)\partial_j u + a^0(x)u, \tag{1.1}$$

с вещественным положительно-определенным тензором $[a^{jl}]_{j,l=1}^m$. Всюду в дальнейшем мы предполагаем бесконечную гладкость $a(x, D)$, а также появляющегося вскоре импеданса σ.

Символ $a(x, D)$ или, точнее, его главная часть задает риманову метрику на M:

$$d\tau^2 = g_{jl}dx^j dx^l, \quad \left[g^{jl}\right]_{j,l=1}^m = \left[a^{jl}\right]_{j,l=1}^m. \tag{1.2}$$

С $a(x, D)$ связан оператор g_λ-оператор Дирихле-в-Нейман:

$$g_\lambda : f \to u_\lambda^f\big|_{\partial M}, \quad f \in C^\infty(\partial M). \tag{1.3}$$

Здесь $u_\lambda^f \in C^\infty(M)$ – это решение краевой задачи

$$\big(a(x, D) - \lambda\big)u_\lambda^f = 0 \quad \text{на} \quad M; \quad B\,u_\lambda^f\big|_{\partial M} = f, \tag{1.4}$$

где B – оператор, задающий граничное условие

$$Bu\big|_{\partial M} = \partial_\nu u + \sigma u\big|_{\partial M} \tag{1.5}$$

и ∂_ν – это нормальная производная в метрике (1.2). Оператор g_λ определен при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением точек спектра $\sigma(A)$ оператора A вида

$$Au = a(x, D)u, \quad D(A) = \big\{u \in H^2(M) : Bu = 0\big\}. \tag{1.6}$$

Определение 1. *Пара* $\{\partial M; g_\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)\}$ *называется граничными спектральными данными Гельфанда (ГСДГ)* (M, A).

Пусть $\varkappa \in \mathbb{C}^\infty(M)$ – комплексно-значная функция и

$$\varkappa\big|_{\partial M} = 1, \quad \varkappa\big|_M \neq 0. \tag{1.7}$$

Функция $\varkappa$ порождает преобразование подобия оператора A,

$$A \to \varkappa A \varkappa^{-1}, \tag{1.8}$$

которое не меняет ГСДГ. Преобразования (1.7). (1.8) образуют группу G, называемую группой обобщенных калибровочных преобразований, которая действует в пространстве равномерно-эллиптических операторов A на M.

Задача. (Обобщенная обратная задача Гельфанда [14, 1]). Пусть пары (M_1, A_1) и (M_2, A_2) имеют те же ГСДС. Показать, что $M_1 = M_2 (= M)$ и A_1 и A_2 лежат в одной и той же орбите группы G на M.

Замечание 1. Под равенством дифференцируемых многообразий мы понимаем их диффеоморфность.

В данной работе мы приводим решение указанной задачи для случая, когда поле геодезических на (M, g) удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Пусть p – гамильтониан вида

$$p(t, x, \omega, \xi) = \omega^2 - g^{jl}(x)\,\xi_j\,\xi_l. \tag{1.9}$$

Обозначим через $q(s) \in T^*(M \times \mathbb{R}_+)$ обобщенную бихарактеристику гамильтониана p, принимая во внимание возможное отражение (дифракцию) ее от $\partial M \times \mathbb{R}_+$ (см., например, [15–17]). $q(s)$ встречает границу в недифракционной точке $s = s_0$, если либо

(a) $\qquad q(s_0) \bar{\in} T^*(\partial M \times \mathbb{R}_+)$,

либо

(b) $\qquad q(s_0) \in T^*(\partial M \times \mathbb{R}_+)$,

но бихарактеристика $\tilde{q}(s) \in T^*(\widetilde{M} \times \mathbb{R}_+)$, такая что $\tilde{q}(s_0) = q(s)$ выходит в дополнение $\widetilde{M} \setminus M$ при малых $s - s_0$. Здесь $\widetilde{M}$ – замкнутое многообразие, содержащее M, а $\tilde{q}$ – бихарактеристика на $\widetilde{M} \times \mathbb{R}_+$, отвечающая гладкому продолжению p на $T^*(\widetilde{M} \times \mathbb{R}_+)$.

Замечание 2. Случай (a) соответствует отражению от границы, случай (b) – касательному падению луча на границу, при котором луч выходит за пределы M.

Определение 2. (M, A) *удовлетворяет условию Бардо–Лебо–Рауха (BLR-условие), если либо*

(a) *любой луч имеет с границей контакт не более чем конечного порядка и существует $T > 0$, такое что любая обобщенная бихарактеристика проходит через недифракционную точку за время T, либо*

(b) *существует $T > 0$ и открытая коническая окрестность $\mathcal{O}$ множества не-недифракционных точек на $T^*(M \times [0,T])\big|_{\partial M \times [0,T]}$, такие что любая обобщенная бихарактеристика проходит через $T^*(M \times [0,T])\big|_{\partial M \times [0,T]} \setminus \mathcal{O}$.*

Замечание 3. Условие BLR заведомо выполнено, если $M \subset \mathbb{R}^m$ и A – это возмущение эвклидова лапласиана членами младшего порядка [15, 18].

Основным результатом работы является

Теорема A. *Пусть (M_1, A_1) и (M_2, A_2) удовлетворяют условию BLR. Их ГСДГ совпадают в том и только том случае, когда $M_1 = M_2 (= M)$ и A_1 и A_2 лежат в одной орбите группы G на M, т.е.*

$$A_2 = \varkappa A_1 \varkappa^{-1}, \tag{1.10}$$

где $\varkappa$ удовлетворяет (1.7).

Ввиду Замечания 3 и Теоремы A вытекает

Следствие B. *Пусть M – область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей и A_1, A_2 – возмущение эвклидова лапласиана членами младшего порядка. A_1 и A_2 имеют одни и те же ГСДС, если и только если они лежат в одной орбите группы G на M.*

Так как условие BLR устойчиво по отношению к C^2-возмущениям метрики, имеет место

Следствие C. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ и A_i, $i = 1, 2$ – эллиптические операторы второго порядка на M. Существует $\varepsilon = \varepsilon(M)$, такое, что при*

$$\| a^{jl}_{(i)} - \delta^{jl} \|_{C^2(M)} \leqslant \varepsilon, \tag{1.11}$$

$$A_2 = X \circ \varkappa A_1 \varkappa^{-1} \circ X^{-1}, \tag{1.12}$$

если A_1 и A_2 имеют одни и те же ГСДГ. Здесь $\varkappa$ – функция вида (1.7), а X – диффеоморфизм M, такой что $X\big|_{\partial M} = id\big|_{\partial M}$. Наконец, $a^{jl}_{(i)}$ – это коэффициенты второго порядка $a_{(i)}(x, D)$.

План работы. §§2, 3 посвящены изложению необходимых в дальнейшем результатов спектральной теории эллиптических операторов. В §4 мы устанавливаем связь между ГСДГ и ГСД, т.е. следами на ∂M обобщенных собственных функций операторов A и A^*. В §5 приводится представление коэффициентов Фурье волн, порождаемых граничными источниками. §6 посвящен некоторым результатам теории граничного управления. Спектральное представление специального класса подпространств в $L^2(M)$, необходимых для восстановления (M, A) изучается в §7. В §§8, 9 мы описываем процедуру восстановления (M, A) и доказываем Теорему A.

Основной результат работы (Теорема A) был аннонсирован как совместный результат обоих авторов на конференции "Обратные задачи, связанные с геометрией" (Токио, сентябрь 1996) (см.§XI (iii) [10]).

§2. Нормальный спектр

В настоящем параграфе мы напомним некоторые факты спектральной теории несамосопряженных операторов (см., например, [19, 20]), необходимые в дальнейшем. Пусть A – замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Элемент $\varphi \subset D(A) \subset \mathcal{H}$ называется обобщенным собственным вектором (или, в случае функционального пространства H – функцией) оператора A (сокращение – (о.с.в.) или (о.с.ф.)), соответствующим собственному значению $\lambda \in \sigma(A)$, если

$$(A-\lambda)^p\,\varphi = 0 \quad \text{для некоторого положительного} \quad p. \tag{2.1}$$

Проектор Рисса P_λ, отвечающий изолированной точке спектра, $\lambda \in \sigma(A)$, определяется контурным интегралом

$$P_\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(A-z)^{-1}\,dz. \tag{2.2}$$

Контур $\Gamma \subset \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ окружает λ и не содержит иных точек $\sigma(A)$. Проектор P_λ задает A-инвариантное разложение $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = H_\lambda \dot{+} G_\lambda, \quad H_\lambda = P_\lambda\mathcal{H}, \quad G_\lambda = (I-P_\lambda)\mathcal{H}, \tag{2.3}$$

где I – тождественный оператор. Обозначим через $A\big|_{H_\lambda}$ ограничение A на H_λ и через $A\big|_{G_\lambda}$ – на G_λ. Спектр $\sigma(A\big|_{H_\lambda})$ состоит из единственной точки λ, в то время как для $A\big|_{G_\lambda}$ точка λ – регулярная точка.

Точка $\lambda \in \sigma(A)$ – нормальная точка спектра (нтс), если λ – изолированная точка $\sigma(A)$ и P_λ – конечномерный проектор,

$$\dim H_\lambda = \nu_\lambda < \infty. \tag{2.4}$$

При этом

$$\left(A\big|_{H_\lambda} - \lambda\right)^{\nu_\lambda} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi \in H_\lambda. \tag{2.5}$$

т.е. H_λ состоит из о.с.в. оператора A соответствующих собственному числу λ. Если λ – н.т.с. A, то $\overline{\lambda}$ – н.т.с. A^*. Соответствующее A^* – инвариантное разложение

$$\mathcal{H} = H^*_{\overline{\lambda}} \dot{+} G^*_{\overline{\lambda}} \tag{2.6}$$

удовлетворяет соотношениям

$$H^*_{\overline{\lambda}} = \mathcal{H} \ominus G_\lambda; \quad G^*_{\overline{\lambda}} = \mathcal{H} \ominus H_\lambda; \quad \dim H_\lambda = \dim H^*_{\overline{\lambda}} (= \nu_\lambda). \tag{2.7}$$

Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\nu_\lambda}$ – базис в H_λ, то существует единственный биортогональный базис $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu_\lambda}$ в $H^*_{\overline{\lambda}}$;

$$\langle \varphi_k, \psi_l \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}, \quad k, l, = 1, \dots, \nu_\lambda. \tag{2.8}$$

В базисе $\{\varphi_k\}_1^{\nu_\lambda}$ оператор $A\big|_{H_\lambda}$ задается матрицей $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \left[\, \alpha_{ik} \,\right]_{i,k=1}^{\nu_k}, \quad A\,\varphi_k = \sum_{i=1}^{\nu_k} \alpha_{ik}\, \varphi_i, \tag{2.9}$$

где

$$\alpha_{ik} = \langle A\,\varphi_k, \psi_i \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{2.10}$$

Тогда оператор $A^*\big|_{H^*_{\overline{\lambda}}}$ в базисе $\{\psi_k\}_1^{\nu_\lambda}$ задан матрицей $\mathcal{A}^*$. Поскольку $\sigma\big(A\big|_{H_\lambda}\big) = \lambda$, можно выбрать базис $\{\varphi_k\}$, так что $\mathcal{A}$ принимает вид жордановой матрицы, в частности,

$$\alpha_{kk} = \lambda, \quad k = 1, \dots, \nu_\lambda. \tag{2.11}$$

При этом оператор $A^*\big|_{H^*_{\overline{\lambda}}}$ в биортогональном базисе $\{\psi_k\}$ задается сопряженно-жордановой матрицей $\mathcal{A}^*$.

Обозначим через $r = r_\lambda$ число жордановых блоков $\mathcal{A}$ и через n_k, $k = 1, \dots, r$, – размер каждого из жордановых блоков. Перенумеруем φ_j, $j = 1, \dots, \nu_\lambda$, с помощью двух индексов k, l: $\varphi_{k,l}$, где

k указывает на жорданов блок, а l – на позицию внутри блока. Тогда

$$(A-\lambda)^p\,\varphi_{k,l}=\varphi_{k,l-p},\quad k=1,\dots,r;\quad l=1,\dots,n_k, \tag{2.12}$$

причем

$$\varphi_{k,l}=0\ \text{ при }\ l\leqslant 0. \tag{2.13}$$

Биортогональный базис $\{\psi_j\}$ будет тогда перенумерован как $\psi_{k,l}$, $k=1,\dots,r$, $l=1,\dots,n_k$, и

$$\langle\,\varphi_{kl},\psi_{ij}\,\rangle_{\mathcal{H}}=\delta_{ki}\,\delta_{lj}\,. \tag{2.14}$$

При этом

$$(A^*-\bar{\lambda})^p\psi_{k,l}=\psi_{k,l+p}, \tag{2.15}$$

причем

$$\psi_{k,l}=0\ \text{ при }\ l>n_k. \tag{2.16}$$

Обозначим через $J_\lambda\subset GL(\nu_\lambda,\mathbb{C})$ группу преобразований базиса $\{\varphi_{k,l}\}$ сохраняющих жорданову структуру $\mathcal{A}$.

Предложение 1. *Группа J_λ порождена семейством преобразований $\{T_{k,m,p}(c)\}$, где $k=1,\dots,r$; $p=1,\dots,n_k$; $m=1,\dots,r$; с $n_m\geqslant n_k-p+1$, и*

(i) *при $m=k$ и $p=1$*

$$T\varphi_{k,l}=c\varphi_{k,l},\ c\in\mathbb{C},\ c\neq 0;\ T\varphi_{j,l}=\varphi_{j,l}\ \ \text{при}\ \ j\neq k; \tag{2.17}$$

(ii) *в ином случае*

$$T\varphi_{k,l}=\varphi_{k,l}+c\varphi_{m,l-p+1},\ c\in\mathbb{C};\ T\varphi_{j,l}=\varphi_{j,l}\ \ \text{при}\ \ j\neq k, \tag{2.18}$$

а также перестановками жордановых блоков в $\mathcal{A}$.

(Мы напоминаем, что $\varphi_{k,l}=0$ при $l\leqslant 0$.)

Доказательство. Упорядочим жордановы блоки в порядке убывания n_k:

$$\mu=n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_r.$$

Обозначим через p_μ число блоков размерности μ, через $p_{\mu-1}$-размерности $\mu-1$, и т.д. Очевидно, $\mu p_\mu+\ldots+p_1=\nu_\lambda$ и $D^\mu H_\lambda=0$, где через D мы обозначили $A\big|_{H_\lambda}-\lambda$.

Рассмотрим последовательность подпространств H_λ:

$$\{0\}=R(D^\mu)\subset R(D^{\mu-1})\subset\ldots\subset R(D)\subset R(D^0)=H_\lambda, \tag{2.19}$$

$R(D^j)$ порождено векторами $\{\varphi_{k,l}\}$, $k = 1,\dots,p_\mu + \dots p_{j+1}$; $l = 1,\dots,n_k - j$.

Допустимое преобразование T, сохраняющее жорданову форму $\mathcal{A}$, $\varphi_{k,l} \xrightarrow{T} \widetilde{\varphi}_{k,l}$, характеризуется тем, что новые о.с.в. $\widetilde{\varphi}_{k,l}$ также удовлетворяют (2.12), (2.13) и семейство $\{\widetilde{\varphi}_{k,l}\}$, $k = 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{j+1}$, $l = 1,\dots,n_k - j$, порождает $R(D^j)$, $j = 0,1,\dots,\mu$.

Рассмотрим семейство $\{\varphi_{k,1}\}_{k=1}^{p_\mu}$, порождающее $R(D^{\mu-1})$. Ясно, что невырожденное линейное преобразование $C_\mu \in GL(p_\mu,\mathbb{C})$ приводит к допустимому базису $\{\widetilde{\varphi}_{k,1}\}_{k=1}^{p_\mu}$ в $R(D^{\mu-1})$. Применяя тоже преобразование к о.с.в. $\{\varphi_{k,l}\}_{k=1}^{p_\mu}$; $l = 2,\dots,\mu$, мы получаем преобразование из группы J_λ.

Рассмотрим $R(D^{\mu-2})$. Оно порождено о.с.в. $\{\varphi_{k,1}, k = 1,\dots,p_\mu + p_{\mu-1}; \varphi_{k,2}, k = 1,\dots,p_\mu\}$. Поскольку $\{\varphi_{k,1}; k = 1,\dots,p_\mu\}$ уже выбраны, и $D\varphi_{k,2} = \varphi_{k,1}$, единственно возможными преобразованиями базиса в $R(D^{\mu-2})$ являются следующие преобразования:

(i) Невырожденное линейное преобразование $C_{\mu-1} \in GL(p_{\mu-1},\mathbb{C})$ векторов $\{\varphi_{k,1}\}_{k=p_\mu+1}^{p_\mu+p_{\mu-1}}$;

(ii) Добавление к векторам $\varphi_{k,1}$, $k = p_\mu + 1,\dots,p_\mu + p_{\mu-1}$, линейной комбинации векторов $\varphi_{k,1}$, $k = 1,\dots,p_\mu$;

(iii) Добавление к векторам $\varphi_{k,2}$, $k = 1,\dots,p_\mu$, линейной комбинации векторов $\varphi_{k,1}$, $k = 1,\dots,p_\mu + p_{\mu-1}$.

Сопровождая каждое из преобразований (i)–(iii) соответствующими линейными преобразованиями векторов $\varphi_{k,j}$, $k = 1,\dots,p_\mu$, $j \geqslant 3$, и $\varphi_{k,j}$, $k = p_\mu + 1,\dots,p_\mu + p_{\mu-1}$, $j \geqslant 2$, мы получаем преобразования группы J_λ.

Рассмотрим $R(D^{\mu-s-1})$. Оно порождено базисом $R(D^{\mu-s})$, который уже выбран, и векторами

$$\bigl\{\varphi_{k,s+1},\ k = 1,\dots,p_\mu;\ \varphi_{k,s},\ k = p_\mu + 1,\dots,p_\mu + p_{\mu-1};\dots;\varphi_{k,1},$$
$$k = p_\mu + \dots + p_{\mu-s+1} + 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s}\bigr\}.$$

Возможные преобразования этих векторов имеют следующий вид:

(i) Невырожденное линейное преобразование $C_{\mu-s} \in GL(p_{\mu-s},\mathbb{C})$ векторов $\{\varphi_{k,1},\ k = p_\mu + \dots + p_{\mu-s+1} + 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s}\}$;

(ii) Добавление к векторам $\varphi_{k,1}$, $k = p_\mu + \dots + p_{\mu-s+1} + 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s}$, линейной комбинации $\varphi_{k,1}$, $k = 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s+1}$;

(iii) Добавление к векторам $\varphi_{k,l}$, $k = 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s+1}$, $l = n_k - (\mu - s - 1)$, линейной комбинации $\varphi_{k,1}$, $k = 1,\dots,p_\mu + \dots + p_{\mu-s}$.

Сопровождая каждое из преобразований (i)–(iii) соответствующими линейными преобразованиями векторов $\varphi_{k,l}$, $k = 1, \dots, p_\mu + \dots + p_{\mu-s}$, $l > n_k - (\mu - s - 1)$, мы получаем преобразования группы J_λ.

Ясно, что описанные преобразования соответствуют преобразованиям, полученным элементарными преобразованиями $T_{k,m,p}$, и определяют групп J_λ с точностью до перестановок жордановых блоков. Когда $T \in J_\lambda$ – преобразование базиса $\{\varphi_{k,l}\}$ в H_λ, $(T^*)^{-1}$ – индуцированное преобразование биортогонального базиса $\{\psi_{k,l}\}$ в $H^*_{\bar\lambda}$. В частности, при $T = T_{k,m,p}(c)$ имеем

(i) $m = k$, $p = 1$

$$(T^*)^{-1}\,\psi_{k,l} = \bar c^{\,-1}\,\psi_{k,l}; \quad (T^*)^{-1}\,\psi_{j,l} = \psi_{j,l}, \quad j \neq k; \tag{2.20}$$

(ii) в ином случае

$$(T^*)^{-1}\,\psi_{m,l} = \psi_{m,l} - \bar c\,\psi_{k,l+p-1}; \quad (T^*)^{-1}\,\psi_{j,l} = \psi_{j,l}, \quad j \neq m. \tag{2.21}$$

Замечание 4. *Если мы перенумеруем $\{\psi_j\}$ в соответствии с перестановкой $\{1, 2, \dots, \nu\} \to \{\nu, \dots, 2, 1\}$, то $(T^*)^{-1}$ переходит в преобразование из группы J_λ.*

Резольвента $\bigl(A\big|_{H_\lambda} - z\bigr)^{-1}$ – это мероморфная оператор-значная функция z с единственным полюсом в $z = \lambda$. Порядок полюса равен μ и

$$\bigl(A\big|_{H_\lambda} - z\bigr)^{-1} = -\sum_{p=1}^{\mu} \frac{\bigl(A\big|_{H_\lambda} - \lambda\bigr)^{p-1}}{(z-\lambda)^p}. \tag{2.22}$$

Так как λ – регулярная точка $A\big|_{G_\lambda}$, разложения (2.3), (2.22) показывают, что

$$(A - z)^{-1} = \bigl(A\big|_{G_\lambda} - z\bigr)^{-1}(I - P_\lambda) - \sum_{p=1}^{\mu} \frac{T_p}{(z-\lambda)^p}, \tag{2.23}$$

причем первый член в правой части (2.23) аналитичен при $z = \lambda$ и

$$T_p = \bigl(A\big|_{H_\lambda} - \lambda\bigr)^{p-1} P_\lambda. \tag{2.24}$$

В биортогональном базисе $\{\varphi_{k,l}\}$, $\{\psi_{k,l}\}$, T_p имеет вид

$$T_p\, f = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_k} \langle f, \psi_{k,l} \rangle_{\mathcal H}\, \varphi_{k,l-p+1}. \tag{2.25}$$

В частности, когда $\mathcal{H} = L^2(M,g)$, T_p – это интегральный оператор с ядром

$$T_p(x,y) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_k} \varphi_{k,l-p+1}(x)\, \overline{\psi_{k,l}(y)}. \tag{2.26}$$

§3. Суммируемость по Абелю–Лидскому

Когда A – оператор вида (1.1), (1.5), (1.6), его спектр дискретен, $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, и каждое λ_j – нормальная точка спектра [21, 22]. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : L^2(M) \to \mathbb{C}^\infty$ задается представлением

$$\mathcal{F}(f) = \left\{ \mathcal{F}_{j,k,l}(f),\ j = 1,2,\dots;\ k = 1,\dots,r_j;\ l = 1,\dots,n_k^j \right\} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{F}_{j,k,l}(f) = \langle f, \psi_{k,l}^j \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{3.2}$$

В равенствах (3.1), (3.2) и в дальнейшем индекс j соответствует номеру собственного числа λ_j, а числа ν_j, r_j, n_k^j имеют тот же смысл, что и в §2 с $\lambda = \lambda_j$, т.е. $r^j = r_{\lambda_j}^j$ и т.д. Имеет место разложение

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{n_k^j} \mathcal{F}_{j,k,l}(f)\, \varphi_{k,l}^j, \tag{3.3}$$

причем суммируемость понимается в смысле Абеля–Лидского [23]. Для определения суммируемости, рассмотрим контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$, $\Gamma \cap \sigma(A) = \varnothing$. Обозначим через $P_{\Gamma,\beta}(\tau)$, $\tau, \beta \geqslant 0$, модифицированный проектор Рисса, отвечающий Γ

$$P_{\Gamma,\beta}(\tau)\, f = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{-z^\beta \tau}\, (A - z)^{-1} f\, dz. \tag{3.4}$$

Используя коэффициенты Фурье $\mathcal{F}_{j,k,l}$, перепишем (3.4) в виде

$$P_{\Gamma,\beta}(\tau) f = \sum_{\lambda_j \text{ внутри } \Gamma} \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{n_k^j} \sum_{p=0}^{l-1} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial^p}{\partial z^p}\, e^{-\tau z^\beta} \right] \Bigg|_{z=\lambda_j} \mathcal{F}_{j,k,l}(f)\, \varphi_{k,l-p}^j \right\}. \tag{3.5}$$

Теорема 2 (Кацнельсон–Агранович). *Пусть A – оператор вида (1.1), (1.5), (1.6). $\beta > m-1$ – произвольно. Существует последовательность чисел α_n, $\alpha_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая что*

$$f = \lim_{\tau \to +0} f_\tau, \tag{3.6}$$

где

$$f_\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha_n \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{n_k^j} \sum_{p=0}^{n_k^j} \left[\frac{\partial^p}{\partial z^p} e^{-\tau z^\beta} \right]\Big|_{z=\lambda_j} \mathcal{F}_{j,k,l}(f)\, \varphi^j_{k,l-p} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\alpha_n \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha_{n+1} \\ k,l}} f^j_{k,l}(\tau) \varphi^j_{k,l} \right]. \tag{3.7}$$

Сходимость в (3.7) – это сходимость в L^2-метрике.

Последовательность α_n зависит только от β и $\sigma(A)$.

Теорема 2 – это, по существу, частный случай Теоремы 9.2.3 [21] и Теоремы 6.2.4 [22]. Однако, в силу того, что в случае обратной задачи мы не знаем спектра $\sigma(A_0)$ самосопряженного оператора A_0, близкого к A, прямой перенос доказательства указанных теорем на случай Теоремы 2 невозможен, и мы приводим краткое доказательство Теоремы 2.

Доказательство. Начнем с некоторых замечаний:

(i) Используя калибровочное преобразование, можно добиться того, что $\sigma = 0$ в граничном условии (1.5).

(ii) Сдвигая спектр $\sigma(A)$ вдоль вещественной оси, можно считать, что $\sigma(A)$ лежит внутри сектора $|\arg z| < \theta$, причем $\beta\theta \leqslant \pi/4$. Выберем контур Γ в (3.4), ограничивающий сектор $|\arg z| < \theta$ (см. рис. 1), и ветвь z^β, проводя разрез вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Пусть A_0 – оператор Лапласа на (M, g) (с краевым условием Неймана):

$$A_0 v = -g^{-1/2} \partial_j \left[g^{1/2} g^{jl} \partial_l v \right] + v, \quad \partial_\nu v\big|_{\partial M} = 0. \tag{3.8}$$

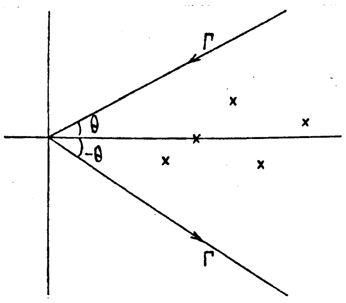

Рис. 1.

Тогда $A = A_0 + A_1$, где A_1 – оператор первого порядка. При доказательстве мы используем оценку (6.61) из [21], которую можно сформулировать в виде:

в любом интервале $\left(n^d, (n+1)^d\right)$, $d > 2$, найдется число α_n, такое что

$$\left\|(A - z)^{-1}\right\| \leqslant c_1 \exp\left(c n^{d\gamma}\right), \quad \gamma > \frac{n-1}{2}, \tag{3.9}$$

когда $z \in \Gamma_n$. Здесь Γ_n – это конечный контур, полученный из Γ с помощью вертикальных линий, проходящих через точки α_n, α_{n+1} (см. Рис. 2).

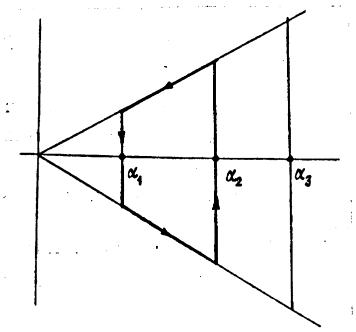

Рис. 2.

(Отметим, что оценка (3.9) может быть получена из Теоремы V.5.1, [19] с помощью техники теории целых функций [24].)

В силу тождества Гильберта

$$\left(A-z\right)^{-1}-\left(A-\xi\right)^{-1}=(z-\xi)\left(A-z\right)^{-1}\left(A-\xi\right)^{-1},$$

из (3.9) следует, что

$$\left\|\left(A-\xi\right)^{-1}\right\|\leqslant 2c_1\exp\left(cn^{d\gamma}\right) \tag{3.10}$$

при $z\in\Gamma_n$ и $|\xi-z|\leqslant 1/2c_1\exp\left(-cn^{d\gamma}\right)$. Из оценки (3.10) и вейлевской асимптотики для A_0 вытекает существование последовательности чисел $\alpha'_n\in(n^d,(n+1)^d)$, таких что оценка (3.9) справедлива как для A, так и для A_0

$$\left\|\left(A_0-z\right)^{-1}\right\|\leqslant c'_1\exp\left(c'n^{d\gamma}\right) \tag{3.11}$$

всюду на Γ'_n, где Γ'_n – контуры через точки α'_n, α'_{n+1}.

Рассмотрим модифицированные проекторы Рисса $P'_{n\beta}(\tau)$ и $Q'_{n\beta}(\tau)$ для операторов A и A_0, соответствующие контурам Γ'_n:

$$P'_{n\beta}(\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'_n}e^{-\tau z^\beta}\,(A-z)^{-1}\,dz;$$

$$Q'_{n\beta}(\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'_n}e^{-\tau z^\beta}\,(A_0-z)^{-1}\,dz. \tag{3.12}$$

Отметим, что, так как полосы $\operatorname{Re}z\in[\alpha_n,\alpha'_n]$ свободны от точек спектра A, $P'_{n\beta}(\tau)=P_{n\beta}(\tau)$.

Выберем d и γ таким образом, что

$$d\gamma<\beta. \tag{3.13}$$

Используя определение (3.12) и неравенства (3.9), (3.11), (3.13), легко получить, что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}P'_{n,\beta}(\tau)=P_{\Gamma,\beta}(\tau); \tag{3.14}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}Q'_{n,\beta}(\tau)=Q_{\Gamma,\beta}(\tau), \tag{3.15}$$

причем сходимость имеет место в равномерной операторной топологии. Это означает, в частности, что сумма в правой части (3.7) сходится.

Рассмотрим

$$Q_{\Gamma,\beta}(\tau)f = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\tau\, z^{\beta}}\,(A_0 - z)^{-1}\, f\, dz$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\tau\, \lambda_{0j}^{\beta}}\, f_{0j}\, \varphi_{0j}, \tag{3.16}$$

где λ_{0j}, φ_{0j}, f_{0j} – это собственные значения, собственные функции и коэффициенты Фурье, соответствующие A_0. При $\tau \to 0$ правая часть (3.16) стремится к f, т.е.

$$Q_{\Gamma,\beta}(\tau) \to I, \tag{3.17}$$

причем сходимость имеет место в сильной операторной топологии.

С другой стороны, в силу второго тождества Гильберта,

$$P_{\Gamma,\beta}(\tau) - Q_{\Gamma,\beta}(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\tau z^{\beta}}\left[(A - z)^{-1} - (A_0 - z)^{-1}\right] dz$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\tau z^{\beta}}(A - z)^{-1}\, A_1 (A_0 - z)^{-1}\, dz. \tag{3.18}$$

Поскольку

$$\left\|(A_0 - z)^{-1}\right\| \leqslant c\mid z\mid^{-1}, \quad \left\|A_1(A_0 - z)^{-1}\right\| \leqslant c\mid z\mid^{-1/2} \quad \text{вне}\ \ \Gamma,$$

$$\left\|(A - z)^{-1}\right\| \leqslant c\mid z\mid^{-1} \quad \text{на}\ \ \Gamma.$$

Используя эти оценки получим, что

$$\left\|e^{-\tau\, z^{\beta}}(A - z)^{-1}\, A_1(A_0 - z)^{-1}\right\| \leqslant c\mid z\mid^{-3/2}, \tag{3.19}$$

при $\tau \geqslant 0$, $z \in \Gamma$. Но тогда

$$P_{\Gamma,\beta}(\tau) - Q_{\Gamma,\beta}(\tau) \underset{\tau\to+0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A - z)^{-1}\, A_1(A_0 - z)^{-1}\, dz. \tag{3.20}$$

Используя аналитичность подынтегральной функции в (3.20) во внешности Γ и оценку (3.19), легко показать, что интеграл в правой части (3.20) равен 0. Утверждение теоремы вытекает из (3.17) и (3.20).

Когда f – гладкая функция, теорему 2 можно усилить:

Лемма 3. *Пусть $v \in D(A^n)$, $n \geqslant 0$, и v_τ определено формулой* (3.7). *Тогда, в топологии $H^{2n}(M)$,*

$$\lim_{\tau \to +0} v_\tau = v. \tag{3.21}$$

Доказательство. В силу экспоненциальной оценки подынтегральной функции в (3.4), $A^n(v_\tau) = (A^n v)_\tau$. Но $(A^n v)_\tau \to A^n v$ в $L^2(M)$, так что

$$v_\tau \underset{\tau \to +0}{\longrightarrow} v \tag{3.22}$$

относительно метрики, порожденной A^n. Утверждение леммы вытекает теперь из того, что $D(A^n) \subset H^{2n}(M)$.

Поскольку оператор A^* имеет ту же форму (1.1), (1.5), (1.6), что и A, все утверждения остаются справедливыми и для A^*, если мы заменим преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(g) = \bigl\{\mathcal{F}^*_{j,k,l}(g) = \langle\, g, \varphi^j_{k,l} \rangle; \quad j = 1, 2, \dots; \\ k = 1, \dots, r_j; \quad l = 1, \dots, n^j_k \bigr\}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Так как $(A^* - \bar z\,)^{-1} = [(A - z)^{-1}]^*$, оценки (3.9), (3.10) справедливы и для $(A^* - \bar z\,)^{-1}$, когда $z \in \Gamma_n$, Γ'_n. Поэтому при определении g_τ мы можем использовать те же α_n, что и для f_τ, так что

$$\begin{aligned} g_\tau &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Biggl\{ \sum_{\alpha_n \leqslant \operatorname{Re} \bar\lambda_j < \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{n^j_k} \sum_{p=0}^{n^j_k} \left[\frac{\partial^p}{\partial z^p}\, e^{-\tau z^\beta} \right] \Bigg|_{z = \bar\lambda_j} \mathcal{F}^*_{j,k,l}(g)\, \psi^j_{k,l+p} \Biggr\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Biggl[\sum_{\substack{\alpha_n \leqslant \operatorname{Re} \bar\lambda_j < \alpha_{n+1} \\ k,l}} {g^*}^j_{k,l}(\tau) \psi^j_{k,l} \Biggr]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{F}_{j,k,l}$, $\mathcal{F}^*_{j,k,l}$, $j = 1, 2, \dots$; $k = 1, \dots, r_j$; $l = 1, \dots, n^j_k$, – это коэффициенты Фурье функций f, $g \in L^2(M)$. Тогда эти коэффициенты однозначно определяют $\langle\, f, g \,\rangle_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Используя L^2-сходимость рядов (3.7), (3.24), находим $\langle\, f_\tau, g_\tau \,\rangle_{\mathcal{H}}$, $\tau > 0$. Но $\langle\, f_\tau, g_\tau \,\rangle \underset{\tau \to +0}{\longrightarrow} \langle\, f, g \,\rangle$.

§4. Обобщенные собственные функции на границе

В рассмотрениях §§4–8 мы будем предполагать, что наряду с $\{\partial M; g_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ нам известна мера dS на ∂M, порожденная метрикой g. Однако, в конце §8 (теорема 17 и следствие 18) мы покажем, что ГСДГ определяют dS.

Определение. *Набор данных* $\{\partial M, dS, \{\lambda_j\}, \{\varphi^j_{k,l}\big|_{\partial M}, \psi^j_{k,l}\big|_{\partial M}\}, j = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, r_j; l = 1, \ldots, n^j_k\}$ *называется граничными спектральными данными (ГСД) оператора A вида* (1.1), (1.5), (1.6).

Мы напоминаем, что $\{\varphi^j_{k,l}\}$, $\{\psi^j_{k,l}\}$ – это биортогональный базис в $L^2(M)$, порождающий жорданово представление матриц A_j, соответствующих $A\big|_{H_j}$.

В настоящем параграфе мы покажем, что ГСД определяются по ГСДГ.

Лемма 5. *Пусть* $\{\partial M; g_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ *– ГСДГ оператора A вида* (1.1), (1.5), (1.6) *и dS – метрика на ∂M, порожденная оператором A. Эти данные определяют λ_j и $T^j_p(x, y)$, x, $y \in \partial M$, $j = 1, 2, \ldots$; $p = 1, \ldots, \mu_j$, однозначно. Здесь T^j_p – это оператор T^j_p вида* (2.24), *соответствующий $\lambda = \lambda_j$.*

Доказательство. В силу (2.23), для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$

$$(A - z)^{-1} = \widehat{G}_z - \sum_{\lambda_j \in K} \sum_{p=1}^{\mu_j} \frac{T^j_p}{(z - \lambda_j)^p}, \tag{4.1}$$

причем $\widehat{G}_z$ аналитична на K. Используя (4.1) запишем решение задачи Неймана

$$a(x, D)\, u^f_z - z\, u^f_z = 0, \quad B\, u^f_z\big|_{\partial M} = f, \tag{4.2}$$

имеет вид

$$u^f_z(x) = \int\limits_{\partial M} \widehat{G}_z(x, y)\, f(y)\, dS$$

$$- \sum_{\lambda_j \in K} \sum_{p=1}^{\mu_j} (z - \lambda_j)^{-p} \int\limits_{\partial M} T^j_p\,(x, y)\, f(y)\, dS. \tag{4.3}$$

В частности,

$$g_z\, f = u_z^f\Big|_{\partial M} = \int\limits_{\partial M} \widehat{G}_z(x,y)\, f\,(y)\, dS$$

$$-\sum_{\lambda_j \in K}\ \sum_{p=1}^{\mu_j} (z-\lambda_j)^{-p} \int\limits_{\partial M} T_p^j\,(x,y)\, f\,(y)\, dS. \tag{4.4}$$

Первый интеграл в (4.4) определяет аналитическую на K функцию z, принадлежащую $C^\infty(\partial M)$ при $f \in C^\infty(\partial M)$. Таким образом, полюса на K – это подмножество $\sigma(A) \cap K$. Используя разложения Лорана $g_z f$, $z \in K$, мы можем определить интегралы $\int_{\partial M} T_p^j(x,y) f(y) dS$ и соответствующие λ_j.

Для этого необходимо, чтобы существовала функция $f \in C^\infty(\partial M)$, такая что $\int_{\partial M} T_p^j(x,y) f(y) dS \neq 0$.

Рассмотрим $p = \mu_j$ и $f = \psi_{k,\mu_j}^j$ для некоторого k: $n_k^j = \mu_j$. Тогда

$$\int\limits_{\partial M} T_{\mu_j}^j(x,y) f(y) dS = \sum_{c:n_c^j = \mu_j} a_c\, \varphi_{c1}^j(x), \tag{4.5}$$

где

$$a_c = \left(\psi_{k,\mu_j}^j,\ \psi_{c,\mu_j}^j\right)_{L^2(\partial M)}; \quad a_k \neq 0. \tag{4.6}$$

Так как функции $\{\varphi_{c1}^j\}_{c=1}^{\mu_j}$ линейно независимы,

$$\int\limits_{\partial M} T_{\mu_j}^j\,(x,y)\, \psi_{k,\mu_j}^j\,(y)\, dS \neq 0.$$

Таким образом, g_z определяет все $\lambda_j \in K$, и, меняя $f \in C^\infty(\partial M)$, мы находим все ядра $T_p^j(x,y)$, x, $y \in \partial M$.

Нашей следующей целью является определение $\varphi_{k,l}^j\big|_{\partial M}$, $\psi_{k,l}^j\big|_{\partial M}$ из $T_p^j(x,y)$, x, $y \in \partial M$. Поскольку каждое λ_j будет рассматриваться независимо от других, мы будем в дальнейшем опускать индекс j.

Теорема 6. *Пусть $T_p(x,y)$, $p = 1,\ldots,\mu$, – ядра Шварца операторов T_p вида* (2.25), (2.26). *Тогда $T_p(x,y)$, x, $y \in \partial M$, определяют*

$$\{\varphi_{k,l}\big|_{\partial M},\ \psi_{k,l}\big|_{\partial M}\}, \quad k = 1,\ldots,r; \quad l = 1,\ldots,n_k,$$

с точностью до преобразования из группы J.

Доказательство. Заметим, что функции $\{\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}\}_{k=1}^{r}$ линейно независимы, равно как $\{\psi_{k,n_k}\big|_{\partial M}\}_{k=1}^{r}$.

Для реконструкции $\{\varphi_{k,l}\big|_{\partial M}\}$, $\{\psi_{k,l}\big|_{\partial M}\}$ воспользуемся следующей рекуррентной процедурой.

1. Пусть $p=\mu$. В силу (2.26)

$$T_\mu(x,y)=\sum_{k=1}^{p_\mu}\varphi_{k,1}\overline{\psi_{k,\mu}(y)}=\sum_{k=1}^{p_\mu}\varphi_{k,1}\otimes\psi_{k,\mu}. \tag{4.7}$$

T_μ порождает p_μ-мерный оператор в $L^2(\partial M)$, причем $R(T_\mu)$ натянуто на $\{\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}\}_{k=1}^{p_\mu}$. Таким образом мы в состоянии определить $\{\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}\}_{k=1}^{p_\mu}$ с точностью до преобразования из группы J. Поскольку

$$T_\mu f=\sum_{k=1}^{p_\mu}\left(f,\psi_{k,\mu}\big|_{\partial M}\right)_{L^2(\partial M)}\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}, \tag{4.8}$$

где $\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}$ уже определены, лемма Рисса позволяет однозначно определить $\psi_{k,\mu}\big|_{\partial M}$, $k=1,\dots,p_\mu$.

2. Предположим, что мы уже восстановили о.с.в., входящие в $T_{n+1}(x,y),\dots,T_\mu(x,y)$, $x,\,y\in\partial M$. Рассмотрим $T_n(x,y)$ и отметим, что неизвестные члены в T_n можно записать в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_n(x,y):=&\sum_{k:n_k=n}\varphi_{k,1}(x)\,\overline{\psi_{k,n}(y)}\\ &+\sum_{k:n_k>n}\left\{\underline{\underline{\varphi_{k,1}(x)}}\,\overline{\psi_{k,n}(y)}+\varphi_{k,n_k+1-n}(x)\,\underline{\underline{\overline{\psi_{k,n_k}(y)}}}\right\}=\\ =&\sum_{k:n_k=n}\varphi_{k,1}\otimes\psi_{k,n}+\sum_{k:n_k>n}\left\{\underline{\underline{\varphi_{k,1}}}\otimes\psi_{k,n}+\varphi_{k,n_k+1-n}\otimes\underline{\underline{\overline{\psi_{k,n_k}}}}\right\},\end{aligned}\tag{4.9}$$

где подчеркнутые члены соответствуют уже восстановленным о.с.в. и $\widetilde{T}_n(x,y)$, $x,\,y\in\partial M$, известно.

Заметим, что, с точностью до преобразования из группы J, функции $\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}$, $k:n_k=n$, и $\varphi_{k,n_k+1-n}\big|_{\partial M}$, $k:n_k>n$, ортогональны $\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}$, $k:n_k>n$, в $L^2(\partial M)$. Поэтому

$$\int\limits_{\partial M}\widetilde{T}_n(x,y)\,\varphi_{j,1}\,(x)\,dS_x$$

$$= \sum_{k:n_k>n} \big(\varphi_{k,1}, \varphi_{j,1}\big)_{L^2(\partial M)} \overline{\psi_{k,n}(y)}, \quad j : n_j > n. \tag{4.10}$$

Так как матрица $\big[(\varphi_{k,1}\, \varphi_{j,1})\big]_{j,k=1}^{p_\mu+\ldots+p_{n+1}}$ невырождена, функции $\psi_{k,n}\big|_{\partial M}$, $k : n_k > n$, определяются из (4.10) единственным образом. Отщепляя члены с $\psi_{k,n}\big|_{\partial M}$, $k : n_k > n$, мы приходим к уравнению

$$\tilde{\tilde{T}}_n(x,y) = \sum_{k:n_k=n} \varphi_{k,1} \otimes \psi_{k,n} + \sum_{k:n_k>n} \varphi_{k,n_k+1-n} \otimes \underline{\underline{\psi_{k,n}}}, \tag{4.11}$$

причем $\tilde{\tilde{T}}_n(x,y)$, $x,\ y \in \partial M$, $\psi_{k,n_k}(y)$, $y \in \partial M$, $k : n_k > n$, известны. Используя тот факт, что, с точностью до преобразования из группы J, функции $\psi_{k,n_k}\big|_{\partial M}$, $k : n_k = n$, ортогональны $\psi_{k,n_k}\big|_{\partial M}$, $k : n_k > n$, мы определяем интегралы

$$\int\limits_{\partial M} \tilde{\tilde{T}}_n\,(x,y)\, \psi_{j,n_j}\,(y)\, dS_y$$

$$= \sum_{k:n_k>n} \big(\psi_{j,n_j}, \psi_{k,n_k}\big)_{L^2(\partial M)}\, \varphi_{k,n_k+1-n}(x), \tag{4.12}$$

при $j : n_j > n$. Те же рассуждения, что и выше показывают, что (4.12) определяют однозначно все функции $\varphi_{k,n_k+1-n}\big|_{\partial M}$, $k : n_k > n$.

В результате мы приходим к уравнению на $\sum_{k:n_k=n} \varphi_{k,1}\big|_{\partial M} \otimes \psi_{k,n}\big|_{\partial M}$. Используя те же рассуждения, что и в части 1, мы восстанавливаем $\varphi_{k,1}\big|_{\partial M}$, $\psi_{k,n}\big|_{\partial M}$ с точностью до линейного преобразования из $GL(p_n, \mathbb{C})$.

§5. Коэффициенты Фурье волн, порожденных граничными источниками

Пусть $u(x,t) = u^F(x,t)$ – решение начально-краевой задачи

$$u_{tt} + a(x,D)u = 0, \quad (x,t) \in M \times [0,T^*], \tag{5.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad Bu\Big|_{\partial M\times[0,T^*]} = F \in L^2\big(\partial M \times [0,T^*]\big).$$

Рассмотрим разложение Фурье волны $u^F(\,\cdot\,,t)$ в момент t

$$u^F(\,\cdot\,,t) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{r_j}\ \sum_{l=1}^{n_k^j}\ \mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big)\, \varphi_{k,l}^j, \tag{5.2}$$

где сходимость понимается в смысле Абеля–Лидского.

Предложение 7. *Если ГСД и мера dS известны, то коэффициенты Фурье $\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big)$ определяются однозначно.*

Доказательство. По определению

$$\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big) = \Big\langle\, u^F(t), \psi^j_{k,l} \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \int\limits_M u^F(x,t)\ \overline{\psi^j_{k,l}(x)}\ dx.$$

Дифференцируя это тождество дважды по t и используя (5.1), нетрудно получить уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big) + \lambda_j\,\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big) = -\int\limits_{\partial M} F(x,t)\ \overline{\psi^j_{k,l}(x)}\ dS + \mathcal{F}_{j,k,l+1}\big(u^F(t)\big). \tag{5.3}$$

Дополняя (5.3) начальными условиями

$$\mathcal{F}_{j,k,l}(0) = \frac{d}{dt}\,\mathcal{F}_{j,k,l}(0) = 0,$$

мы получаем рекуррентную систему задач Коши для $\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big)$.

Следствие 8. *ГСД и dS однозначно определяют сопряженные коэффициенты Фурье волн $v^G(x,t)$:*

$$v^G_{tt} + a^*(x,D)v^G = 0, \quad (x,t)\in M\times[0,T^*], \tag{5.4}$$

$$v^G\Big|_{t=0} = v^G_t\Big|_{t=0} = 0, \quad B^*\,v^G\Big|_{\partial M\times[0,T^*]} = G\in L^2\big(\partial M\times[0,T^*]\big).$$

Замечание 5. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u^F(t)\big) = \mathcal{F}_{j,k,l}\left(u^F(t)\right),$$

ГСД и dS определяют коэффициенты Фурье волны $u^F_t(t)$.

§6. Точная и приближенная управлемость

При $F\in L^2(\partial M\times[0,T^*])$

$$u^F(\cdot,t)\in C\big([0,T^*];\,H^1(M)\big)\cap C^1\big([0,T^*];\,L^2(M)\big) \tag{6.1}$$

(см., например, [15, 18]). Обозначим через U^t линейный ограниченный оператор $U^t : F\to\big(u^F(\cdot,t), u^F_t(\cdot,t)\big)$:

$$U^t : L^2\big(\partial M\times[0,t]\big)\to H^1(M)\times L^2(M). \tag{6.2}$$

Теорема 9 (Бардо–Лебо–Раух [15]). *Пусть (M, A) удовлетворяет условию BLR. Тогда при $t > T$*

$$R(U^t) = H^1(M) \times L^2(M). \tag{6.3}$$

Мы напоминаем, что условие BLR и значение T определены в Определении 2. Поскольку условие BLR зависит только от главной части оператора A, пара (M, A^*) удовлетворяет этому условию вместе с (M, A), причем $T(A^*) = T(A)$.

Следствие 10. *Пусть (M, A) удовлетворяет условию BLR. Тогда при $t > T$*

$$R(V^t) = H^1(M) \times L^2(M), \tag{6.4}$$

где

$$V^T : G \to \big(v^G(t),\, v_t^G(t)\big). \tag{6.5}$$

Лемма 11. *Пусть (M, A) удовлетворяет условию BLR. Тогда ее ГСД $\{\partial M; \lambda_j, \varphi^j_{k,l}\big|_{\partial M}, \psi^j_{k,l}\big|_{\partial M}\}$ и dS определяют $\mathcal{F}(L^2(M))$ и $\mathcal{F}^*(L^2(M))$ однозначно.*

Доказательство. Мы разберем только случай отображения $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ рассматривается аналогично.

В силу Предложения 7 и Замечания 5, мы в состоянии найти коэффициенты Фурье

$$\mathcal{F}_{j,k,l}\big(u_t^F(t)\big) \quad \text{при} \quad F \in L^2\big(\partial M \times [0,t]\big), \quad t > T. \tag{6.6}$$

В силу (6.3) мы тем самым восстанавливаем все $\mathcal{F}(L^2(M))$.

Пусть $\Gamma \subset \partial M$ – открыто и $F \in L^2(\Gamma \times [0, T^*])$, т.е. $F \in L^2(\partial M \times [0, T^*])$ и $\operatorname{supp} F \subset \overline{\Gamma} \times [0, T^*]$. (В дальнейшем, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, мы обозначаем через $L^2(\Omega_1)$ подпространство $L^2(\Omega_2)$, состоящее из функций с носителем в $\overline{\Omega}_1$ – замыкания Ω_1.)

Обозначим через $M(\Gamma, t)$ множество вида

$$M(\Gamma, t) = \big\{x \in M : \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leqslant t\big\}. \tag{6.7}$$

Очевидно, что при $F \in L^2(\Gamma \times [0,t])$, $u^F(\cdot, t) \in L^2(M(\Gamma, t))$. Обозначим через $\Lambda(\Gamma, t)$ линеал

$$\Lambda(\Gamma, t) = \big\{u^F(\cdot, t);\, F \in L^2(\Gamma \times [0,t])\big\} \subset L^2\big(M(\Gamma, t)\big). \tag{6.8}$$

Аналогично

$$\Lambda^*(\Gamma, t) = \big\{v^G(\cdot, t);\, G \in L^2(\Gamma \times [0,t])\big\} \subset L^2\big(M(\Gamma, t)\big). \tag{6.9}$$

Теорема 12 [25]. *Пусть* $a(x, D)$, B *имеют вид* (1.1), (1.5). *Для любого открытого* $\Gamma \subset \partial M$ *и* $t > 0$

$$\mathrm{cl}_{L^2(M)} \Lambda(\Gamma, t) = \mathrm{cl}_{L^2(M)} \Lambda^*(\Gamma, t) = L^2\big(M(\Gamma, t)\big). \tag{6.10}$$

Предложение 13. *ГСД и* dS *однозначно определяют* $\mathcal{F}\Lambda(\Gamma, t)$ *и* $\mathcal{F}^* \Lambda^*(\Gamma, t)$ *при любых (открытых)* $\Gamma \subset \partial M$ *и* $t > 0$.

Доказательство. Предложение 13 – это частный случай Предложения 7 и Следствия 8.

§7. Геометрические подпространства в $\mathcal{F} L^2(M)$ и $\mathcal{F}^* L^2(M)$

Начнем с простого функционально-аналитического результата. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство и $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ – преобразование Фурье и сопряженное преобразование Фурье, порожденные биортогональным базисом Абеля–Лидского, $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$:

$$\mathcal{F} u = (u_1, u_2, \dots) \in C^\infty, \quad \mathcal{F}^* v = (v_1^*, v_2^*, \dots) \in \mathbb{C}^\infty.$$

В силу Предложения 4

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \, \overline{v_j^*}, \tag{7.1}$$

где сумма в правой части (7.1) понимается в смысле Абеля–Лидского.

Лемма 14. *Пусть* Λ *– линеал в* $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ *известно. Тогда* $\mathcal{F}(\Lambda)$ *однозначно определяет* $\mathcal{F}^*(\mathcal{H} \ominus \mathrm{cl}\,\Lambda)$. *Аналогичный результат справедлив при перемене ролей* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{F}^*$.

Доказательство. Используя сходимость по Абелю–Лидскому, мы можем построить подпространство $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ биортогональное к $\mathcal{F}(\Lambda)$. В силу (7.1) оно состоит из сопряженных преобразований Фурье векторов, ортогональных к Λ и, тем самым, к $\mathrm{cl}\Lambda$.

Пусть Γ_i, $i = 1, \dots, I$, – конечное семейство открытых подмножеств ∂M, $t_i^+ > t_i^-$, $i = 1, \dots, I$, – неотрицательные числа.

Обозначим через $M_I \subset M$ подмножество

$$M_I = \bigcap_{i=1}^{I} M\big(\Gamma_i, t_i^+, t_i^-\big),$$

$$\text{где} \quad M\big(\Gamma, t^+, t^-\big) = M\big(\Gamma, t^+\big) \setminus M(\Gamma, t^-).$$

Лемма 15. *ГСД и dS однозначно определяют $\mathcal{F} L^2(M_I)$ и $\mathcal{F}^* L^2(M_I)$.*

Доказательство. С помощью Предложения 13 и Леммы 14 мы строим подпространства

$$\mathcal{F}\, L^2\big(M \setminus M(\Gamma_i,\, t_i^{\pm})\big) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}^*\, L^2\big(M \setminus M(\Gamma_i,\, t_i^{\pm})\big), \quad i = 1, \dots, I.$$

Еще раз используя Лемму 14, мы строим подпространства

$$\mathcal{F}\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{\pm})\big) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}^*\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{\pm})\big).$$

Поскольку

$$\mathcal{F}\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{+}) \setminus M(\Gamma_i, t_i^{-})\big) = \mathcal{F}\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{+})\big) \cap \mathcal{F}\, L^2\big(M \setminus M(\Gamma_i, t_i^{-})\big),$$

мы в состоянии определить $\mathcal{F}\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{+}, t_i^{-})\big)$, $i = 1, \dots, I$. Аналогично, мы в состоянии определить $\mathcal{F}^*\, L^2\big(M(\Gamma_i, t_i^{+}, t_i^{-})\big)$. Но

$$\mathcal{F}\, L^2(M_I) = \bigcap_{i=1}^{I} \mathcal{F}\, L^2\left(M\big(\Gamma_i, t_i^{+}, t_i^{-}\big)\right),$$

$$\mathcal{F}^*\, L^2(M_I) = \bigcap_{i=1}^{I} \mathcal{F}^*\, L^2\left(M\big(\Gamma_i, t_i^{+}, t_i^{-}\big)\right).$$

В заключение настоящего параграфа отметим, что условие $\mathcal{F}\, L^2(M_I) = \{0\}$ эквивалентно условию, что $\operatorname{vol}(M_I) = 0$.

§8. Отображение $\mathcal{R}$ и восстановление риманова многообразия

В настоящем параграфе мы описываем процедуру восстановления M и римановой метрики g на M. Эта процедура аналогична самосопряженному случаю (см.§§7, 8 [10]).

Пусть (M, g) – риманово многообразие, $\partial M \neq \varnothing$. При $x \in M$ определим функцию $r_x \in C^{0,1}(\partial M)$:

$$r_x(y) = \operatorname{dist}(x, y), \quad y \in \partial M. \tag{8.1}$$

Отображение $\mathcal{R} : M \to L^\infty(\partial M)$ имеет вид

$$\mathcal{R}(x) = r_x(\cdot). \tag{8.2}$$

Легко видеть (см. [10] для общего случая и [26] для случая акустического уравнения), что $\mathcal{R}$ инъективно и, следовательно,

$$\mathcal{R} : M \to \mathcal{R}(M) \subset L^\infty(\partial M) - \tag{8.3}$$

гомеоморфизм. При этом метрика на $\mathcal{R}(M)$ – это метрика, индуцированная $L^\infty(\partial M)$.

Пусть $r_0 \in \mathcal{R}(M)$ – образ $x_0 \in M$, причем $x_0 \bar{\in} \omega$, где ω – точка раздела M. Тогда функция r_0 однозначно определяет полугеодезические координаты (τ_0, y_0) точки x_0. Действительно, $\tau_0 = \min\limits_{y \in \partial M} r_0(y)$ и y_0 – это единственная точка на ∂M, где этот минимум достигается. Таким образом, мы в состоянии определить функцию $r(z; \tau, y)$, $z \in \partial M$, $(\tau, y) \in \Omega$, где Ω – это выкройка M (см., например, [27]). Поскольку r – это функция расстояния, $|\nabla_{\tau,y}\, r(z; \tau, y)| = 1$ (в точках гладкости $r(z; \tau, y)$). Варьируя z в окрестности y, мы в состоянии восстановить метрический тензор g всюду на $\mathcal{R}(M \setminus \omega)$, т.е., по существу, $M \setminus \omega$. Наконец, для продолжения g на ω мы используем Лемму 2.2 [28].

Таким образом, задача восстановления (M, g) сводится к задаче восстановления $\mathcal{R}(M)$. Пусть $x \in M_I$, тогда

$$\operatorname{dist}(x, y) \in \left[\, t_i^-, t_i^+ + \operatorname{diam}\Gamma_i \,\right] \quad \text{при} \quad y \in \Gamma_i. \tag{8.4}$$

Пусть $\{\Gamma_i, i = 1, \ldots, I\}$, $\operatorname{diam}\Gamma_i < \varepsilon$ – открытое покрытие ∂M; $t_i^\pm = (n_i \pm 1)\varepsilon$, $n_i = 0, 1, \ldots$. Очевидно, что соответствующие M_I образуют покрытие M. Введем в рассмотрение кусочно-постоянные функции $r_I \in L^\infty(\partial M)$:

$$r_I(y) = n_i \cdot \varepsilon \quad \text{при} \quad y \in \Gamma_i. \tag{8.5}$$

Выберем $r_I(\cdot)$, соответствующие подмножествам M_I с $\operatorname{vol}(M_I) \neq 0$, т.е. с $\mathcal{F} L^2(M_I) \neq \{0\}$. Пусть $\mathcal{R}_I$ – конечное множество в $L^\infty(\partial M)$, состоящие из таких r_I. Тогда $\operatorname{Dist}_{L^\infty(\partial M)}(\mathcal{R}_I, \mathcal{R}(M)) < 3\varepsilon$. Рассматривая предел при $\varepsilon \to 0$, мы получаем $\mathcal{R}(M)$. Из предыдущих рассуждений вытекает

Лемма 16. *Пусть*

$$\left\{\partial M,\, \lambda_j,\, \varphi^j_{k,l}\big|_{\partial M},\, \psi^j_{k,l}\big|_{\partial M},\; j = 1, \ldots;\; k = 1, \ldots, r_j;\; l = 1, \ldots, n^j_k\right\}$$

– ГСД оператора A. Если граничная мера dS, индуцированная A, известна, то эти данные определяют однозначно (M, g).

Если dS неизвестна, введем произвольную невырожденную меру dm на ∂M:

$$dm = \eta\, dS, \quad \eta \in C^\infty(\partial M), \quad \eta > 0. \tag{8.6}$$

Анализируя доказательство Леммы 5, мы видим, что задание dm вместо dS приводит к замене ядра $T_p^j(x,y)$ на ядро

$$T_{p,\eta}^j(x,y) = T_p^j(x,y)\,\eta(y)^{-1}. \tag{8.7}$$

С помощью процедуры, описанной в Теореме 6, мы восстанавливаем $\varphi_{k,l}^j\big|_{\partial M}$, $\psi_{k,l}^j\big|_{\partial M} \cdot \eta^{-1}$. Используя эти данные для определения коэффициентов Фурье $u^F(\cdot,t)$ и сопряженных коэффициентов Фурье $v^G(\cdot,t)$, мы, фактически, определяем коэффициенты Фурье $u^F(\cdot,t)$, однако вместо сопряженных коэффициентов Фурье $v^G(\cdot,t)$ мы определяем сопряженные коэффициенты Фурье $v^{\eta G}(\cdot,t)$.

Однако, поскольку преобразование $G \to \eta G$ – это преобразование подобия на $L^2(K)$, $K \subset \partial M \times \mathbb{R}_+$, мы приходим к тем же самым пространствам $\mathcal{F}^* L^2(M)$, $\mathcal{F}^* \Lambda^*(\Gamma,t)$ и $\mathcal{F} L^2(M)$, $\mathcal{F}\Lambda(\Gamma,t)$, что и в случае $dm = dS$.

Так как процедура восстановления (M,g) использует только эти пространства, мы получаем

Теорема 17. *Пусть $\{\partial M; g_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ – ГСДГ пары (M,A). Тогда, если (M,A) удовлетворяет условию BLR, то эти данные определяют однозначно риманово многообразие (M,g), где метрика g порождена A.*

Следствие 18. *В условиях Теоремы* 17 *ГСДГ однозначно определяют ГСД.*

§9. Восстановление коэффициентов младшего порядка

Процедура восстановления членов младшего порядка, в основном, повторяет схему самосопряженного случая [9]. В связи с этим, мы опишем ее весьма кратко, акцентируя внимание на тех отличиях, которые связаны с несамосопряженностью. Кроме того, мы приводим новую конструкцию группы допустимых преобразований, позволяющую избежать использование техники Ходжа–Кодаиры.

Представим $\mathcal{F} L^2(M)$ в виде суммы

$$\mathcal{F} L^2(M) = \mathcal{F} L^2(M_I) \dot{+} \mathcal{F} L^2(M \setminus M_I). \tag{9.1}$$

В дальнейшем мы возвращаемся к использованию одного индекса p вместо трех – j, k, l, так что $\varphi^j_{k,l} \to \varphi_p$ и т.д.

Очевидно, любая о.с.ф. φ_p может быть представлена в виде

$$\varphi_p = \varphi_p^I + \hat\varphi_p^I, \quad \varphi_p^I \in L^2(M_I), \quad \hat\varphi_p^I \in L^2(M \setminus M_I). \tag{9.2}$$

Тогда

$$\left\langle \varphi_p^I, \psi_k \right\rangle_{L^2(M)} = \int\limits_{M_I} \varphi_p(x)\, \overline{\psi_k(x)}\, dx. \tag{9.3}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{F}\, \varphi_p = e_p = \big(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ое} \\ \text{место}}}{1}, 0, \dots\big); \tag{9.4}$$

$$\mathcal{F}^*\, \psi_k = h_k = \big(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ое} \\ \text{место}}}{1}, 0, \dots\big). \tag{9.5}$$

Используя разложение (9.1), мы находим элементы

$$e_p^I = \mathcal{F}\, \varphi_p^I \in \mathcal{F}\, L^2(M_I), \quad \hat e_p^I = \mathcal{F}\, \hat\varphi_p^I \in \mathcal{F}\, L^2(M \setminus M_I).$$

В силу Предложения 4, мы можем определить $\langle \varphi_p^I, \psi_k \rangle$ через их коэффициенты (и сопряженные коэффициенты) Фурье. При этом

$$\langle \varphi_p^I, \psi_k \rangle_{L^2(M)} = \big(e_p^I\big)_k, \tag{9.6}$$

где $\big(e_p^I\big)_k$ – это k-ый член в разложении Фурье e_p^I.

Сравнивая (9.3) и (9.6), мы видим, что ГСД определяют интегралы в правой части (9.3). Деля на $\mathrm{vol}(M_I)$ и рассматривая предел при $M_I \to x_0$, где x_0 – произвольная точка M, мы получаем

Лемма 19. *ГСД пары (M, A), удовлетворяющей условию BLR, однозначно определяют функции вида*

$$\varphi_p(x)\, \overline{\psi_k(x)}, \quad p,\ k = 1, 2, \dots; \quad x \in M. \tag{9.7}$$

Используя Лемму 3, можно доказать существование конечной суммы

$$\Phi = \sum_{p=1}^{P} \alpha_p\, \varphi_p, \tag{9.8}$$

такой что

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in M \tag{9.9}$$

(см. [9]). Так как $\varphi_p\big|_{\partial M}$ известны, $\Phi\big|_{\partial M}$ так же известна. Более того, коэффициенты α_p можно выбрать таким образом, что

$$\|\, \Phi - 1 \,\|_{c(\partial M)} < \frac{1}{2}. \tag{9.10}$$

В силу Леммы 19, мы в состоянии построить функции

$$\chi_p(x) = \frac{\varphi_p(x)}{\Phi(x)}, \quad x \in M, \quad p = 1, 2, \dots . \tag{9.11}$$

Ясно, что χ_p – о.с.ф. оператора $\Phi^{-1} \circ A \circ \Phi$. В частности,

$$a_\Phi(x, D)\, \chi_p(x) = \lambda_p\, \chi_p(x) + \chi_{j(p)}(x), \quad p = 1, 2, \dots . \tag{9.12}$$

В силу Леммы 3, система $\{\chi_p\}_{p=1}^{\infty}$ полна (в C^∞-топологии) в окрестности любой точки $x \in \operatorname{Int} M$. Поэтому уравнения (9.12) однозначно определяют $a_\Phi(x, D)$.

Пусть

$$\varkappa = \widetilde{\Phi}\, \Phi^{-1}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\Phi}\big|_{\partial M} = \Phi\big|_{\partial M} \quad \text{и} \quad \widetilde{\Phi}(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in M.$$

Тогда $\varkappa\big|_{\partial M} = 1$, $\varkappa(x) = 0$ при $x \in M$.

Рассмотрим оператор $\widetilde{A} = \widetilde{\Phi} \circ \Phi^{-1} \circ A \circ \Phi \circ \widetilde{\Phi}^{\,-1} = \varkappa \circ A \circ \varkappa^{-1}$ – калибровочное преобразование оператора A с

$$\widetilde{a}(x, D) = \widetilde{\Phi}\,(x) \circ a_\Phi\,(x, D) \circ \widetilde{\Phi}\,(x). \tag{9.13}$$

Таким образом, ГСД определяют $a(x, D)$ с точностью до калибровочного преобразования.

Наконец, рассматривая пределы $\widetilde{\Phi}\, \chi_p$ и $\partial_n(\widetilde{\Phi}\, \chi_p)$ на ∂M мы определяем σ с точностью до калибровочного преобразования.

Суммируя предыдущие построения и учитывая Следствие 18 и Лемму 19, получаем

Теорема 20. *Пусть* $\{\partial M; g_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ *– ГСДГ пары* (M, A)*, где* M *– дифференцируемое многообразие и* A *– оператор на* M *вида* (1.1), (1.5), (1.6)*. Если* (M, A) *удовлетворяет условию BLR, то эти данные определяют* M *однозначно, а* A *– с точностью до обобщенного калибровочного преобразования.*

Теорема A, равно как и Следствия B и C, вытекают из Теоремы 20.

Замечание 6. Используя результат [29] о точной управляемости, можно показать, что Следствие C остается в силе, когда $a^{jl}(x)$ близко к δ^{jl} в C^1-метрике.

Замечание 7. Поскольку g_λ – мероморфная операторно-значная функция λ, все результаты остаются в силе, когда g_λ известна на подмножестве $\mathbb{C}$, имеющем предельную точку.

Замечание 8. В случае, когда BLR – условие выполнено на части $\Gamma \subset \partial M$, т.е. точная управляемость имеет место с части Γ границы, Теорема A остается в силе и в том случае, когда ГСДГ A_1 и A_2 совпадают лишь на Γ, т.е. $R_\lambda^{(1)}(x,y) = R_\lambda^{(2)}(x,y)$, x, $y \in \Gamma$. Индексы (1), (2) соответствуют операторам A_1, A_2. При этом исходно мы не предполагаем, что $\partial M_1 = \partial M_2$. Единственное отличие будет в том, что $\varkappa\big|_{\partial M \setminus \Gamma}$ может не быть тождественной 1.

Замечание 9. В случае квадратичного пучка операторов $a(x,D)$ $+b(x)\omega + \omega^2$, соответствующего волновому уравнению с поглощением: $u_{tt} + b(x)\, u_t + a(x,D)u$, удается показать, что ГСДГ, т.е., по-прежнему, $R_\omega(x,y)$, x, $y \in \partial M$, однозначно определяют (M,g) и b. Что же касается $a(x,D)$, то, как и в случае $b = 0$, этот символ определен с точностью до обобщенного калибровочного преобразования. Этот результат верен при условии, что (M,g) удовлетворяет условию BLR. В силу специфики квадратичного пучка, доказательство в этом случае заметно отличается от изложенного в настоящей работе и будет приведено в последующей статье.

Авторы выражают признательность М. С. Аграновичу, К. Бардосу, А. П. Качалову, Г. Накамуре, Р. Ола, Э. Сомерсало и Д. Татару за стимулирующие дискуссии и дружескую поддержку. Мы весьма благодарны организации Фольксваген–Штифтунг (RiP-программа в Обервольфахе) за финансовую поддержку.

Литература

1. Ю. М. Березанский, *Обратная спектральная задача для оператора Шредингера.* — ДАН СССР **105, No. 2** (1955), 197–200.
2. A. Nachman, J. Sylvester, G. Uhlmann, *An n-dimensional Borg–Levinson theorem.* — Comm. Math. Phys. **115, No. 4** (1988), 595–605.
3. Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, *$\overline{\partial}$-уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния.* — УМН **42, No. 1** (1987), 93–152.
4. P. Ola, L. Paivarinta, E. Somersalo, *Inverse boundary value problems in electrodynamics.* — Duke Math. J. **70, No. 3** (1993), 563–579.

5. G. Nakamura, Z. Sun, G. Uhlmann, *Global identifiability for an inverse problem for the Schrödinger operator with maghetic field.* — Math. Ann. **303, No. 3** (1995), 377–388.
6. S. Takashiro, *An inverse problem for the wave equation with first-order perturbation.* — Am. J. Math **107** (1985), 241–251.
7. M. Lassas, *Non-selfadjoint spectral inverse problems and their applications to random bodies.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Dissertations **103** (1995).
8. Ya. V. Kurylev, *Inverse boundary problems on Riemannian manifolds.* — Contemp. Math. **173** (1994), 181–192.
9. Ya. V. Kurylev, *An inverse boundary problem for the Schrödinger operator with magnetic field.* — J. Math. Phys. **36, No. 6** (1995), 2761–2776.
10. Ya. V. Kurylev, *Multidimensional Gel'fand inverse problem and boundary distance map*. Inverse Problems Related with Geometry (ed. H. Soga), Ibaraki (1997), 1–15.
11. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения.* — ДАН СССР **297, No. 3** (1987), 524–527.
12. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* Препринт ЛОМИ Р-1-90, Ленинград (1990), 41 с.
13. М. И. Белишев, Я. В. Курылев, *Boundary control, wave field continuation and inverse problems for the wave equation.* — Comp. Math. Appl. **22, No. 4–5** (1991), 27–52.
14. I. M. Gel'fand, *Some aspects of functional analysis and algebra.* — Proc. Intern. Cong. Math., Amsterdam **1** (1954), 253–277.
15. C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary.* — SIAM J. Control Opt. **30, No. 5** (1992), 1024–1065.
16. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов в частных производных.* Т. 4, Мир, М. (1988).
17. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы.* Мир, М. (1985).
18. J. L. Lions, *Controllabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systemes Distribués.* V. 1, Masson, Paris (1988).
19. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М. (1965).
20. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* ЛГУ, Л. (1980).
21. М. С. Агранович, *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях.* Совр. пробл. матем., Т. 63.
22. M. S. Agranovich, *Elliptic boundary problems.* Encycl. Math. Sci., Springer, Berlin–New York (1997), 1–140.
23. В. Б. Лидский, *О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора.* — Мат. Сб. **57, No. 2** (1962), 137–150.
24. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* Гостехиздат, М. (1956).
25. D. Tataru, *Unique continuation of solutions to PDE's: between Hörmander's theorem and Hölmgren's theorem.* — Comm. Part. Diff. Eq. **20, No. 5–6** (1995), 855–884.

26. М. И. Белишев, Я. В. Курылев, *Нестационарная обратная задача для многомерного волнового уравнения "в большом"*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 21–30.
27. M. I. Belishev, Ya. V. Kurylev, *To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method)*. — Comm. Part. Diff. Eq. **17, No. 5–6** (1992), 767–804.
28. A. P. Katchalov, Ya. V. Kurylev, *Multidimensional Gel'fand inverse problem with incomplete boundary spectral data*. Preprint No. 1831, TH Darmstadt (1996), 104 p.
29. D. Tataru, *Boundary controllability for conservative PDE's*. — Appl. Math. Optim. **31** (1995), 257–295.

Kulylev Ya. V., Lassas M. Abel–Lidskii bases in non-selfadjoint inverse boundary problem.

Let M be a manifold with bondary $\partial M \neq \varnothing$. Let A be a 2-nd order elliptic PDO on M. Denote by $R_\lambda(x,y)$, x, $y \in M$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ the Schwartz kernel of $(A-\lambda I)^{-1}$. We consider the Gel'fand inverse boundary problem of the reconstruction of (M, A) via given $R_\lambda(x,y)$, x, $y \in \partial M$, $\lambda \in \mathbb{C}$. We prove that if the main symbol of A satisfies some geometrical condition (Bardos–Lebeau–Rauch condition) then these data determine M uniquely and A to within the group of the generalized gauge transformations on M. The above mentioned geometric condition means, roughly speaking, that any geodesics (in the metric generated by A) leaves M.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Ин-т Р. Неванлинны
Хельсинки, Финляндия

Поступило 16 октября 1997 г.