Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. В. Залипаев

РАССЕЯНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ-ЭШЕЛЕТ

1. Введение. Обширная литература посвящена рассеянию плоской волны на периодической структуре-эшелете. Свойства такой дифракционной решетки хорошо известны в оптике. Прежде всего, задача рассеяния волн на эшелете имеет практический интерес в оптике благодаря возможности сконцентрировать всю энергию отраженного поля в один дифракционный порядок, для которого эффективность достигает единицы (эффект полного блеска).

В настоящее время для большинства оптических приборов применяются дифракционные решетки по схеме Литтрова (автоколлимационная схема), при котором направление рассеяния назад совпадает с одним из дифракционных порядков. При наблюдении эффекта полного блеска для эшелета волновой вектор падающей плоской волны перпендикулярен одной из граней клина как элемента дифракционной решетки. Другими словами грань оказывается полностью освещенной падающим полем, в то время как другие находятся полностью в тени, и фактически дают нулевой вклад в отраженное поле. Поэтому, при некоторых условиях, описанных ниже, решетка становится идеальным зеркалом [1].

Более того, в оптических экспериментах при рассеянии света на эшелете с использованием схемы Литтрова именно дифракционные порядки отраженного поля с большими номерами оказываются более эффективными для различных приложений. С другой стороны, хорошо известно, что для реализации больших дифракционных порядков необходимо, чтобы период решетки был бы много больше длины волны падающего поля (высокочастотное приближение). Применение численных методов в этом случае затруднительно, так как высокочастотные осцилляции поля приводят к тому, что порядок системы линейных уравнений становится очень высоким, и вычисления требуют огромного машинного времени. В этой ситуации естественно использовать асимптотические методы геометрической теории дифракции (ГТД) (см. [2, 3]), то есть методы равномерных асимптотических разложений для полей рассеянных на кромке клина, и метод суммирования многократно дифрагированных полей (МДП), который уже был успешно применен в задачах дифракции на открытом конце волновода [2, 5] и в коротковолновом скользящем рассеянии на гладкой периодической границе [6, 7]. Следует заметить, что в последнем случае ГТД применялась впервые при решении задачи рассеяния волн на дифракционных решетках.

В этой работе предлагается обобщение асимптотического анализа рассеяния на эшелете в высокочастотном приближении (длина волны падающего поля много меньше периода решетки), который был развит ранее в [8, 9], для описания эффекта полного блеска в схеме Литтрова, когда падающая плоская волна скользит вдоль грани клина. Прежнее асимптотическое решение не пригодно в этой ситуации. Демонстрируются кратко основные моменты асимптотического анализа рассеяния на эшелете, большинство громоздких математических деталей опущены.

В этой задаче падающая плоская волна генерирует первичное дифракционное поле при падении на каждую кромку решетки, его асимптотическое разложение известно [2, 3]. Это поле рассеивается на соседних кромках, расположенных слева и справа, генерируя поля двукратной дифракции, и так далее. Рассмотрение последовательных МДП осложняется тем фактом, что направления рассеяния вперед и назад на новую кромку совпадают с границей света и тени. Поэтому для расчета МДП используется методика равномерных асимптотических разложений. Для суммы ряда МДП получен строгий результат на основе процедуры, которая использует решение интегрального уравнения типа Винера–Хопфа [6].

Главный результат работы – асимптотические формулы (старший член) для коэффициентов Релея однородных волн, уходящих в верхнюю полуплоскость, для отраженного поля в случае эффекта полного блеска в схеме Литтрова. Этот результат выводится из асимптотического разложения волнового поля, которое конструируется на основе суммирования МДП. В предыдущих публикациях [8, 9] были приведены результаты сравнения численных расчетов для коэффициентов Релея между асимптотическим решением и точными значениями, полученными на основе метода интегрального уравнения, исключая схему Литтрова. Было показано, что результаты совпадают с высокой точностью даже на границе высокочастотного и резонансного диапазонов. Стоит заметить, что предлагаемое асимптотическое решение, как аналитический результат, при непосредственном анализе дало возможность обнаружить информацию физического характера, актуальную при проведении оптических экспериментов, чего численные методы не в состоянии сделать.

2. Постановка задачи. Рассмотрим идеально отражающую поверхность S дифракционной решетки эшелета, которая является периодической вдоль направления оси x и цилиндрической вдоль оси z (см. рис. 1). Пусть эта поверхность освещается плоской электромагнитной волной с волновым вектором перпендикулярным оси z (задача двумерная). Предполагается всюду, что временная зависимость величины волнового поля имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Тогда полное волновое поле $u(x,y)$ как скалярная функция (z компонента электрического или магнитного полей) удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ выше границы S (k – волновое число), и граничным условиям Дирихле или Неймана на границе S

$$u\big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

в соответствии с поляризацией падающего поля.

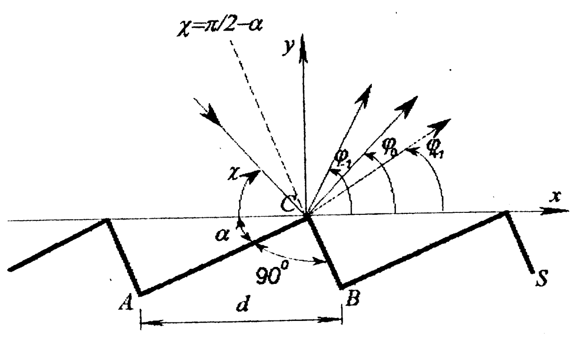

Рис. 1. Рассеяние плоской волны на эшелете.

Пусть падающая плоская волна описывается выражением $u_i(M) = \exp[ik(x\cos\chi - y\sin\chi)]$, где χ – угол скольжения. Хорошо известно, что для отраженного (дифракционного) поля $u_d = u - u_i$ при $y > 0$ справедливо представление Релея в виде ряда по плоским волнам (дифракционным порядкам), уходящим в верхнюю полуплосксоть

$$u_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\{ik(x\cos\psi_n + y\sin\psi_n)\}, \tag{2.1}$$

$$\cos\psi_n = 2\pi n/kd + \cos\chi,$$

$$\sin\psi_n = \sqrt{1-(2\pi n/kd+\cos\chi)^2},$$

где d – период решетки, и ветвь квадратного корня фиксируется условием $\operatorname{Im}\sqrt{\ } \geqslant 0$. Здесь через R_n обозначены коэффициенты Релея, ψ_n – дифракционный угол (угол наблюдения соответствующего дифракционного порядка), $0 \leqslant \psi_n \leqslant \pi$. В случае $|\cos\psi_n| < 1$ мы имеем конечное число однородных дифракционных плоских волн. При условии $|\cos\psi_n| > 1$ соответствующие волны становятся экспоненциально малыми при $y \to \infty$, и называются неоднородными. Если рассмотреть величину эффективности дифракционного порядка по формуле

$$e_n = |R_n|^2 \sin\psi_n / \sin\chi, \tag{2.2}$$

то можно доказать, что имеет место закон сохранения энергии для однородных волн

$$\sum_{n_1}^{n_2} e_n = 1. \tag{2.3}$$

Эффективность e_n имеет смысл энергии дифракционного порядка, и соотношение (2.3) используется для контроля численных расчетов коэффициентов R_n.

Ограничим рассмотрение задачи на случай коротковолнового приближения, то есть, когда $kd \gg 1$. Предлагаемый в работе асимптотический анализ дает возможность построить асимптотическое разложение для коэффициентов Релея R_n однородных волн в виде

$$R_n = R_n^{(0)} + R_n^{(1)}/p + O(p^{-2}), \tag{2.4}$$

где $p = \sqrt{kd} \gg 1$. Это асимптотическое решение задачи регулярно в окрестности $\chi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (см. рис. 1, плоская волна скользит вдоль грани CB).

Идея вывода асимптотического разложения для R_n основана на использовании соотношения между коэффициентом Релея и диаграммой рассеяния элемента решетки S_0

$$R_n = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{i\pi/4}}{kl \sin\psi_n}\, \Phi_0(\psi_n) \tag{2.5}$$

(мы предполагаем, что $\sin\psi_n \neq 0$). Сама же диаграмма рассеяния связана с отраженным полем следующим образом

$$u_d = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{kr_m}}\, \Phi_m(\varphi_m) + o((kr_m)^{-1/2}). \tag{2.6}$$

Здесь дифракционное поле описывается бесконечной суммой цилиндрических волн в терминах полярных координат r_m, φ_m, связанных с центрами C_m, и считается, что $y(M) \to \infty$ и $kr_m \to \infty$. Так как отраженное поле является квазипериодической функцией по x, то диаграмма рассеяния $\Phi_m(\psi_m)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\Phi_m(\psi_m) = e^{i\mu m}\Phi_0(\psi_m),$$

где $\mu = kd\cos\chi$, $\exp(i\mu)$ – множитель Флоке.

В следующих параграфах мы получим асимптотическое разложение для $\Phi_0(\psi)$, опираясь на асимптотическое решение $u_d(M)$, построенное с помощью метода суммирования МДП.

3. Первичная дифракция. Пусть падающая плоская волна облучает клин S_0 (см. рис. 2). В результате возникает поле первичной дифракции, которое мы обозначим через $u_1(r,\varphi)$, где r,φ полярные координаты, связанные с точкой C. Равномерная асимптотика $u_1(r,\varphi)$, регулярная при $\chi = \pi/2 - \alpha$, имеет вид (см. [2])

$$\begin{aligned} u_1 = -e^{ikr\cos(\varphi+\chi)}F\left(-\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi+\chi}{2}\right)\mp \\ \mp e^{ikr\cos(\varphi-2\alpha-\chi)}F\left(\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}\right) \\ \mp e^{ikr\cos(\varphi+\tilde\chi)}F\left(-\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi+\tilde\chi}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$+\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{kr}\,\sqrt{2\pi}}\left\{V(\varphi,\chi) + \frac{1}{\sin\frac{\varphi+\chi}{2}} \pm \frac{1}{\sin\frac{\varphi+\tilde\chi}{2}} \mp \frac{1}{\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}}\right\} + O(k^{-3/2}),$$

где используются следующие обозначения: интеграл Френеля и его асимптотика описываются формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} i} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{it^2} dt = \theta(x) + \frac{e^{ix^2 + i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \Big(-\frac{1}{x} + O(x^{-3/2}) \Big), \quad (3.2)$$

$\theta(x) = 1$, если $x \geqslant 0$ или 0, если $x < 0$, $\chi = \pi/2 - \alpha - \delta$ $(0 < \chi < \pi - \alpha)$, $\tilde{\chi} = \pi/2 - \alpha + \delta$ (см. рис. 2).

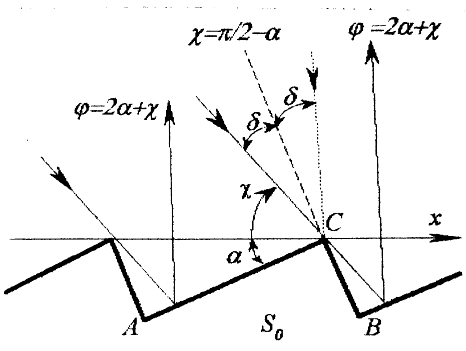

Рис. 2. Первичная дифракция на клине S_0.

Функция $V(\varphi, \chi)$ представляет собой дифракционный коэффициент Келлера, которая для клина с прямым углом имеет вид

$$V = \frac{2}{3}\Big\{ \operatorname{ctg}\Big(\frac{\varphi + \chi - 2\pi}{3}\Big) \mp \operatorname{ctg}\Big(\frac{\varphi - 2\alpha - \chi + \pi}{3}\Big) -$$

$$- \operatorname{ctg}\Big(\frac{\varphi + \chi}{3}\Big) \pm \operatorname{ctg}\Big(\frac{\varphi - 2\alpha - \chi}{3}\Big) \Big\}. \quad (3.3)$$

Верхний (нижний) знаки в формулах (3.1)–(3.3) относятся к случаю краевого условия Дирихле (Неймана). Это правило знаков подразумевается повсюду в статье.

Асимптотическое решение (3.1) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и краевым условиям для сторон AC и BC. Важно, что разложение является регулярным на двух границах света и тени при $\varphi = -\chi$, $\varphi = 2\alpha + \chi$, так как сингулярности для $V(\varphi, \chi)$ компенсируются двумя полюсами в (3.1). Оно также регулярно при $\chi = \pi/2 - \alpha$ и $\varphi = -\chi$, так как имеет место компенсация сингулярностей в членах $\sin^{-1}[(\varphi+\chi)/2]$ и $\sin^{-1}[(\varphi+\tilde{\chi})/2]$. Таким образом третий интеграл Френеля в (3.1) обеспечивает необходимую регуляризацию в окрестности $\chi = \pi/2 - \alpha$, и если его аргумент становится большим, разложение (3.1) упрощается в виду того, что интеграл Френеля может быть заменен асимптотикой (3.2). В результате сокращения некоторых членов мы получаем неравномерную асимптотику решения по отношению χ. Так, если $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \chi > 0$ и δ не является малой величиной при $k \to +\infty$ (плоская волна освещает только одну грань клина), мы получаем

$$u_1 = -e^{ikr\cos(\varphi+\chi)}\left(-\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi+\chi}{2}\right)\mp$$

$$\mp e^{ikr\cos(\varphi-2\alpha-\chi)}\left(\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}\right)$$

$$+\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{kr}\,\sqrt{2\pi}}\left\{V(\varphi,\chi)+\frac{1}{\sin\frac{\varphi+\chi}{2}}\mp\frac{1}{\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}}\right\}+O(k^{-3/2}).$$

Если $\delta < 0$ (плоская волна освещает обе грани клина), соответствующий результат имеет вид

$$u_1 = \mp e^{ikr\cos(\varphi+\tilde{\chi})}\left(-\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi+\tilde{\chi}}{2}\right)\mp$$

$$\mp e^{ikr\cos(\varphi-2\alpha-\chi)}\left(\sqrt{2kr}\,\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}\right)$$

$$+\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{kr}\,\sqrt{2\pi}}\left\{V(\varphi,\chi)\pm\frac{1}{\sin\frac{\varphi+\tilde{\chi}}{2}}\mp\frac{1}{\sin\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{2}}\right\}+O(k^{-3/2}).$$

Когда точка наблюдения находится далеко от границ света и тени, то разложение (3.1) упрощается, так как аргументы интегралов Френеля становятся большими и, после их замены на асимптотики, происходит компенсация соответствующих вкладов. Например, при $\delta > 0$, мы получаем неравномерную асимптотику $u_1(r,\varphi)$ по отношению χ и φ

$$\begin{aligned} u_1 = -e^{ikr\cos(\varphi+\chi)}\theta(-\chi-\varphi) \mp e^{ikr\cos(\varphi-2\alpha-\chi)}\theta(\varphi-2\alpha-\chi) \\ +\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{kr}\,\sqrt{2\pi}}V(\varphi,\chi)+O(k^{-3/2}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Сумма первых двух слагаемых, описывающих результат геометрического отражения падающей плоской волны от граней клина, и третий член в (3.4), цилиндрическая краевая волна, удовлетворяют краевым условиям при $\varphi = \alpha - \pi/2$, $\varphi = \pi + \alpha$, на каждой грани клина в отдельности.

Стоит отметить, что дифракционная решетка-эшелет с прямым зубом представляет особый случай, при котором не возникает дифракии на угле B (см. рис. 2), и краевая волна с центром в этой точке не возникает. Именно такой случай, как правило, и реализуется на практике в оптических экспериментах. Другой случай, когда плоская волна облучает решетку при асимптотически малом угле скольжения ($0 < \chi \ll 1$), является более сложным, и будет рассмотрен в следующей публикации.

4. Равномерная асимптотика МДП. Формальная схема последовательного конструирования МДП проиллюстрирована на рис. 3. Падающая плоская волна облучает каждый клин эшелета. В результате поля первичной дифракции $u_1(r_m, \varphi_m)$ (см. параграф 3), цилиндрические краевые волны с центрами C_m, действуют как падающее поле на соседние клинья, распространяясь в направлении налево и направо. Рассмотрим три смежных клина с кромками C_0, C_{+1}, C_{-1} (см. рис. 3). Пусть точка наблюдения $M(x, y)$ находится в вертикальной полосе, соответствующей элементу решетки S_0. Падающее поле первичной дифракции есть сумма двух цилиндрических волн с центрами $C_{\pm 1}$ и распространяющимися в направлении налево и направо. Оно может быть представлено как

$$u_i^{(1)} = e^{-i\mu} u_1(r_{-1}, \varphi_{-1}) + e^{i\mu} u_1(r_{+1}, \varphi_{+1}). \tag{4.1}$$

Падающее поле $u_i^{(1)}$ генерирует двукратно дифрагированное поле $u_2(r_0, \varphi_0$. Тогда $u_i^{(1)} + u_2$ удовлетворяет краевому условию на границе S_0. В случае $y \leqslant 0$, поле u_2 должно быть объединено в одном аналитическом выражении с соответствующей частью падающего поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{u}_2(r_0, \varphi_0) &= u_2(r_0, \varphi_0) + e^{-i\mu} u_1(r_{-1}, \varphi_{-1}), \quad x > 0, \\ \hat{u}_2(r_0, \varphi_0) &= u_2(r_0, \varphi_0) + e^{+i\mu} u_1(r_{+1}, \varphi_{+1}), \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

На следующей стадии падающее поле двукратной дифракции

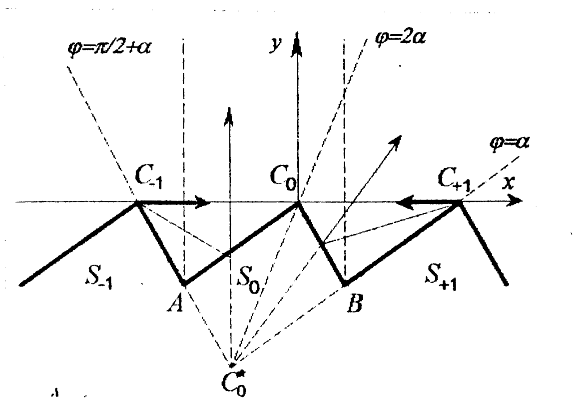

Рис. 3. Схема конструирования МДП.

в виду (4.2) может быть представлено в виде

$$u_i^{(2)} = e^{-i\mu}\hat{u}_2(r_{-1}, \varphi_{-1}) + e^{i\mu}\hat{u}_2(r_{+1}, \varphi_{+1}). \tag{4.3}$$

В результате мы получаем поле трехкратной дифракции $u_3(r_0, \varphi_0)$. Сумма $u_i^{(2)} + u_3$ удовлетворяет краевому условию на S_0. Как и ранее, при $y \leqslant 0$, поле u_3, объединяется в одном выражении вместе с соответствующей частью падающего поля

$$\begin{aligned} \hat{u}_3(r_0, \varphi_0) &= u_3(r_0, \varphi_0) + e^{-i\mu}\hat{u}_2(r_{-1}, \varphi_{-1}), \quad x > 0, \\ \hat{u}_3(r_0, \varphi_0) &= u_3(r_0, \varphi_0) + e^{+i\mu}\hat{u}_2(r_{+1}, \varphi_{+1}), \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Тогда падающее поле $(n-1)$-го порядка

$$u_i^{(n-1)} = e^{-i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{-1}, \varphi_{-1}) + e^{i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{+1}, \varphi_{+1}) \tag{4.5}$$

генерирует n-го порядка дифракционное поле $u_n(r_0, \varphi_0)$, так что сумма $u_i^{(n-1)} + u_n$ удовлетворяет краевому условию на S_0. При $y \leqslant 0$, поле $u_n(r_0, \varphi_0)$ объединяется в одном выражении соответствующей частью падающего поля $u_i^{(n+1)}$

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(r_0, \varphi_0) &= u_n(r_0, \varphi_0) + e^{-i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{-1}, \varphi_{-1}), \quad x > 0, \\ \hat{u}_n(r_0, \varphi_0) &= u_n(r_0, \varphi_0) + e^{+i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{+1}, \varphi_{+1}), \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Этот процесс можно продолжить шаг за шагом до бесконечности.

Ниже с помощью ГТД мы построим равномерные асимптотические разложения для МДП любого порядка в следующих секторах $\alpha-\pi/2 \leqslant \varphi_0 \leqslant \alpha$, $\alpha \leqslant \varphi_0 \leqslant \alpha+\pi/2$ и $\alpha+\pi/2 \leqslant \varphi_0 \leqslant \alpha+\pi$. Прежде всего рассмотрим формулы главного члена асимптотических разложений МДП в случае, когда плоская волна освещает только одну грань клина: $\delta=\pi/2-\alpha-\chi>0$ и δ не является малой величиной. Для этого следует дать ответы на два вопроса. Какие члены в выражении поля первичной дифракции (3.1) определяют асимптотику МДП? Какие члены в (3.1) должны быть учтены при выводе разложения (2.6) для поля $u_d(M)$ при $y\to\infty$? Оказывается, что этот вклад в (3.1) определяется только краевой волной (см. [9])

$$u_1(r,\varphi)=\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}\,2\sqrt{2\pi}}\,V(\varphi,\chi)+O(k^{-3/2}). \tag{4.7}$$

Здесь и ниже индексы для r_0,φ_0 опущены для простоты обозначений.

На новом шаге мы должны учесть отражение поля $u_1(r,\varphi)$ от граней AC_0 и BC_0. В соответствии с законами геометрической оптики это дает дополнительную цилиндрическую волну $u_1^*(r^*,\varphi^*)$ с центром в точке C_0^*, которая учитывается только в секторе $\alpha\leqslant\varphi^*\leqslant\alpha+\pi/2$ и описывается следующими формулами:

$$u_1^*(r^*,\varphi^*)=\frac{e^{ikr^*+i\pi/4}}{\sqrt{kr^*}\,2\sqrt{2\pi}}\,V_{1,2}(\varphi^*,\chi)+O(k^{-3/2}), \tag{4.8}$$

$$V_1(\varphi,\chi)=\frac{2}{3}\Big\{\pm\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi+\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi+\pi}{3}\right)+$$
$$+\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi-\pi}{3}\right)\mp\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi-\pi}{3}\right)\Big\}.$$

$$V_2(\varphi,\chi)=\frac{2}{3}\Big\{\pm\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi-\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi-\pi}{3}\right)+$$
$$+\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi}{3}\right)\mp\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{3}\right)\Big\},$$

где $V_1(\varphi,\chi)$ предполагается для сектора $\alpha\leqslant\varphi^*\leqslant 2\alpha$, и $V_2(\varphi,\chi)$ в секторе $2\alpha\leqslant\varphi^*\leqslant\alpha+\pi/2$.

Далее, падающее поле $u_i^{(1)}$, описываемое формулами (4.1), (4.7), порождает поле двукратной дифракции $u_2(r,\varphi)$. На основе ГТД в секторе $\alpha-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ для него может быть получено следующее представление

$$u_2=\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\left\{-f(0)\Omega_1 I_1(r,\gamma)+a_1 I_1\left(\frac{r}{2\cos\alpha},\,\tilde{\gamma}_1\right)+O(k^{-1/2})\right\},\ \gamma\geqslant 0,$$
$$\hat{u}_2=\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\left\{f(0)\Omega_1 J_1(r,\gamma)+O(k^{-1/2})\right\},\ \gamma\leqslant 0, \tag{4.9}$$

где использованы следующие обозначения: $\gamma=\varphi\sqrt{kd/2}$, $\tilde{\gamma}_1=(\varphi-\alpha)\sqrt{kd\cos\alpha}$, и

$$f(\varphi)=V(\varphi,\chi)/2\sqrt{2\pi},\quad \Omega_{1,2}=\exp[ikd(1\mp\cos\chi)],$$

$$a_1=\frac{e^{2ikd\cos\alpha-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}}\,V_1(\alpha,\chi).$$

Под символом $O(k^{-1})$ мы понимаем члены порядка $O(kd)^{-1}$, $(kr)^{-1})$. Интегралы J_1, I_1 определяются выражениями

$$J_1(r,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\varphi(z,r,\gamma)}\,dz,\quad I_1(r,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\varphi(z,r,\gamma)}\,dz,$$

где $\varphi(z,r,\gamma)=z^2\left(\frac{d}{r}+1\right)-2z\gamma$. С помощью простых преобразований они приводятся к интегралам Френеля. Для интервала $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha+\pi/2$ поле u_2 имеет вид

$$u_2=\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\left\{-f(0)\Omega_1 I_1(r,\gamma)+f(\pi)\Omega_2 J_1(r,-\gamma)-a_1 J_1\left(\frac{r}{2\cos\alpha},\,\tilde{\gamma}_1\right)+\right.$$
$$\left.+O(k^{-1/2})\right\},\ \gamma\leqslant 0, \tag{4.10}$$

$$u_2=\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\left\{f(0)\Omega_1 J_1(r,\gamma)-f(\pi)\Omega_2 I_1(r,-\gamma)-a_2 J_1\left(\frac{r}{2\sin\alpha},\,\tilde{\gamma}_2\right)+\right.$$
$$\left.+O(k^{-1/2})\right\},\ \gamma\geqslant 0,$$

где $\gamma_2 = (\varphi - 2\alpha)\sqrt{kd/2}$, $\tilde{\gamma}_2 = (\alpha + \pi/2 - \varphi)\sqrt{kd\sin\alpha}$ и

$$a_2 = \frac{e^{2ikd\sin\alpha - i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} V_2(\alpha + \pi/2, \chi).$$

В секторе $\alpha + \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha + \pi$ мы имеем

$$u_2 = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\bigg\{ -f(\pi)\Omega_2 J_1(r,\gamma) + a_2 I_1\left(\frac{r}{2\sin\alpha},\, \tilde{\gamma}_2\right) + \\ + O(k^{-1/2})\bigg\},\ \gamma \geqslant 0, \qquad (4.11)$$

$$u_2 = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\bigg\{ f(\pi)\Omega_2 I_1(r,\gamma) + O(k^{-1/2})\bigg\},\ \gamma \leqslant 0,$$

где $\gamma_3 = (\pi - \varphi)\sqrt{kd/2}$. Следует заметить, что в случае краевого условия Дирихле коэффициенты a_1, a_2 равны нулю.

Аналогичным образом с помощью техники равномерных асимптотических разложений ГТД выписываются формулы для дифракционных полей n-го порядка дифракции в соответствующих секторах. Получается, что главный член асимптотики u_n выражается через интеграл Френелевского типа кратности $(n-1)$ таким же образом, как это имело место в задаче коротковолнового скользящего рассеяния на гладкой периодической границе (см. [6, 7]). Это представление находится в полном согласии с приближением Кирхгофа в апертурном варианте [2], если его применять в нашей задаче для расчета МДП с помощью формулы Грина при интегрировании соответствующих полей вдоль апертуры C_0y (см. рис. 3).

В результате в секторе $\alpha - \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ мы имеем

$$u_n = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\bigg\{ -f(0)\Omega_1^{n-1} J_{n-1}(r,\gamma) + O(k^{-1/2})\bigg\},\ \gamma \geqslant 0, \qquad (4.12)$$

$$\hat{u}_n = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}}\bigg\{ f(0)\Omega_1^{n-1} I_{n-1}(r,\gamma) + O(k^{-1/2})\bigg\},\ \gamma \leqslant 0,$$

где $\gamma = \varphi\sqrt{kd/2}$, и интегралы J_n, I_n имеют вид

$$J_n(r,\gamma) =$$

$$= \frac{1}{(\pi i)^{n/2}} \int\limits_0^\infty dz_1 \int\limits_0^\infty dz_2 \ldots \int\limits_0^\infty dz_{n-1} \int\limits_{-\infty}^0 dz_n \exp[i\varphi(z_1, \ldots, z_n, r, \gamma)], \tag{4.13}$$

$$I_n(r, \gamma) =$$

$$= \frac{1}{(\pi i)^{n/2}} \int\limits_0^\infty dz_1 \int\limits_0^\infty dz_2 \ldots \int\limits_0^\infty dz_{n-1} \int\limits_0^\infty dz_n \exp[i\varphi(z_1, \ldots, z_n, r, \gamma)], \tag{4.14}$$

где

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n, r, \gamma) = 2z_1^2 - 2z_1 z_2 + 2z_2^2 - 2z_2 z_3 + \ldots + z_n^2(d/r + 1) - 2z_n\gamma.$$

Заметим, что интегралы J_n, I_n имеют почти такой же вид, как и их аналоги в известной задаче рассеяния на открытом конце плоского волновода [2]. В интервале $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha + \pi/2$ поле u_n имеет вид

$$\begin{gathered} u_n = \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \Big\{ - f(0)\Omega_1^{n-1} I_{n-1}(r, \gamma) + f(\pi)\Omega_2^{n-1} J_{n-1}(r, -\gamma) + \\ + O(k^{-1/2}) \Big\}, \quad \gamma \leqslant 0, \\ u_n = \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \Big\{ f(0)\Omega_1^{n-1} J_{n-1}(r, \gamma) - f(\pi)\Omega_2^{n-1} I_{n-1}(r, -\gamma) + \\ + O(k^{-1/2}) \Big\}, \quad \gamma \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где $\gamma = (\varphi - 2\alpha)\sqrt{kd/2}$. В секторе $\alpha + \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha + \pi$ мы имеем

$$u_n = \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \Big\{ - f(\pi)\Omega_2^{n-1} J_{n-1}(r, \gamma) + O(k^{-1/2}) \Big\}, \ \gamma \geqslant 0, \tag{4.16}$$

$$\hat{u}_n = \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \Big\{ f(\pi)\Omega_2^{n-1} I_{n-1}(r, \gamma) + O(k^{-1/2}) \Big\}, \ \gamma \leqslant 0,$$

и $\gamma = (\pi - \varphi)\sqrt{kd/2}$.

Следует заметить, что выражение для старшего члена асимптотики u_n при $n > 2$ содержит добавочное слагаемое, которое представляет собой результат отражения поля

$$u_i^{(n-1)} = e^{-i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{-1},\varphi_{-1}) + e^{i\mu}\hat{u}_{n-1}(r_{+1},\varphi_{+1})$$

от обоих граней клина S_0. Для простоты изложения мы не будем приводить соответствующих формул.

Пусть теперь плоская волна освещает обе грани клина ($\delta = \pi/2 - \alpha - \chi < 0$, δ не является малой величиной). В этом случае плоская волна после отражения от BC_{+1} дает дополнительный вклад в поле первичной дифракции как результат рассеяния на кромке C_0 (см. рис. 4). Единственное отличие рассматриваемой ситуации от предыдущей заключается в появлении этого поля в формулах асимптотического разложения первичной дифракции. Это добавочное дифракционное поле имеет вид

$$\tilde{u}_1(r,\varphi) = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{kr}\,2\sqrt{2\pi}}\,\tilde{V}(\varphi,\chi) + O(k^{-3/2}), \tag{4.17}$$

$$\tilde{V} = \frac{2}{3}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi-2\pi}{3}\right) \mp \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi-\pi}{3}\right) - \right.$$
$$\left. -\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi+\chi-\pi}{3}\right) \pm \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-2\alpha-\chi}{3}\right)\right\}.$$

Оно порождает дополнительные МДП, которые полностью аналогичны уже рассмотренным выше, и мы не предъявляем соответствующих формул.

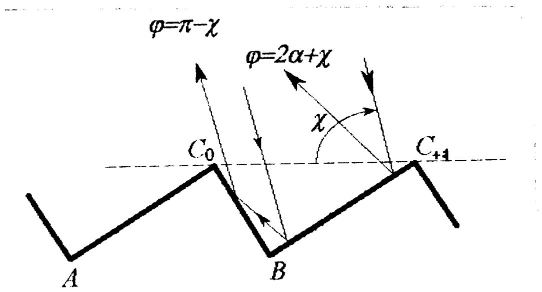

Рис. 4. Плоская волна освещает обе грани клина.

Нам осталось рассмотреть случай, когда плоская волна скользит или почти параллельно распространяется вдоль грани C_0B ($\delta = \pi/2 - \alpha - \chi$, $\delta = 0$ или является малой величиной). В этом случае мы должны учесть вклад новых дифракционных полей. Первое среди них это поле возникающее как результат отражения первых двух интегралов Френеля в формуле (3.1) от грани BC_{+1}. С помощью полярных координат r_1^*, φ_1^*, связанных с центром C_{+1}^* (см. рис. 5), оно вновь описывается интегралами Френеля

$$\nu_1 = \mp e^{ikr_1^* \cos(\varphi_1^* - \alpha - \pi/2 + \delta)} F\left(-\sqrt{2kr_1^*} \sin \frac{\varphi_1^* - \alpha - \pi/2 + \delta}{2} \right) \quad (4.18)$$
$$+ e^{ikr_1^* \cos(\varphi_1^* - \alpha - \pi/2 - \delta)} F\left(\sqrt{2kr_1^*} \sin \frac{\varphi_1^* - \alpha - \pi/2 - \delta}{2} \right)$$

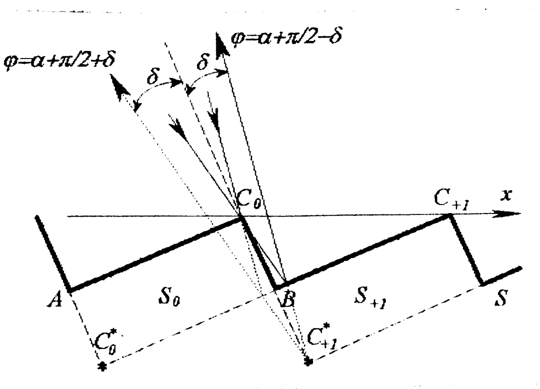

Рис. 5. Двукратная дифракция в случае скольжения плоской волны вдоль грани клина.

В результате дифракции поля ν_1 мы получаем дополнительный вклад в поле двукратной дифракции. Обозначим его через $\nu_2(r, \varphi)$. С помощью равномерных асимптотических разложений ГТД получено выражение для старшего члена асимптотики ν_2 в следующем виде: для сектора $2\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$

$$\nu_2 = \frac{e^{ikr + 2ikd \sin \alpha}}{\sqrt{kr}} \left\{ \sqrt{2kd \sin \alpha}\, [\pm P_1(r, \gamma, \gamma_c) \mp P_2(r, \gamma, \gamma_c)] + \right.$$

$$+\tilde{G}(\varphi) + O(k^{-1/2})\Big\}, \tag{4.19}$$

где $\gamma = (\alpha + \pi/2 - \varphi)\sqrt{kd\sin\alpha}$, $\gamma_c = \delta\sqrt{kd\sin\alpha}$, и

$$P_1(r,\gamma,\gamma_c) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^0 dz_2 \exp[i\phi_1(z_1,z_2,r,\gamma,\gamma_c)],\ \gamma > 0,$$

$$P_1(r,\gamma,\gamma_c) = -\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^0 dz_2 \exp[i\phi_1(z_1,z_2,r,\gamma,\gamma_c)],\ \gamma < 0, \tag{4.20}$$

$$P_2(r,\gamma,\gamma_c) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^0 dz_1 \int_{-\infty}^0 dz_2 \exp[i\phi_2(z_1,z_2,r,\gamma,\gamma_c)],\ \gamma > 0,$$

$$P_2(r,\gamma,\gamma_c) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^0 dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp[i\phi_2(z_1,z_2,r,\gamma,\gamma_c)],\ \gamma < 0,$$

$$\phi_{1,2} = \pm 2\gamma_c z_1 + z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2\left(\frac{d}{r}+1\right) - 2z_2\gamma.$$

Для сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\alpha$ поле ν_2 описывается цилиндрической волной

$$\nu_2 = \frac{e^{ikr+2ikd\sin\alpha}}{\sqrt{kr}}\{G(\varphi) + O(k^{-1/2})\}. \tag{4.21}$$

В случае краевого условия Дирихле получаем, $\tilde{G}(\varphi)$, $G(\varphi) = O((kd)^{-1/2})$, а для краевого условия Неймана соответствующие формулы для $\tilde{G}(\varphi)$, $G(\varphi)$ имеют вид

$$\tilde{G}(\varphi) = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,J_1(\gamma_c)\frac{1}{\alpha+\pi/2-\varphi} + G(\varphi),$$

$$G(\varphi) = \frac{e^{i\pi/4}}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,J_1(\gamma_c)\Big\{\mathrm{ctg}\left(\frac{\varphi-\alpha-\pi/2}{3}\right) - \mathrm{ctg}\left(\frac{\varphi-\alpha-3\pi/2}{3}\right)\Big\},$$

где

$$J_1(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int_{-\infty}^0 e^{i\varphi(z,\gamma)}dz, \quad \varphi(z,\gamma) = z^2 - 2z\gamma.$$

Следует сказать, что при рассмотрении задачи в случае условия Дирихле добавочное поле двукратной дифракции $\nu_2(r,\varphi)$ не приводит к появлению дополнительных вкладов в МДП при $n > 2$. Но в ситуации с условием Неймана описание МДП усложняется, и мы должны учесть дополнительные дифракционные вклады, возникающие из-за ν_2, таким же образом, как это было для $u_1(r,\varphi)$. Эти детали мы тоже опускаем для простоты изложения.

5. Асимптотические формулы для коэффициентов Релея. На основании анализа асимптотических формул для МДП, описанных в предыдущем параграфе, мы теперь можем построить разложение (2.6). Выражение для диаграммы излучения $\Phi_0(\psi_m)e^{im\mu}$ элемента решетки S_m может быть получено из соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(r_m,\varphi_m) = \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{kr_m}}\,\Phi_0(\varphi_m) + o((kr_m)^{-1/2}), \qquad (5.1)$$

так как асимптотические формулы для u_n уже известны.

Таким образом мы получаем асимптотическое разложение для диаграммы излучения $\Phi_0(\varphi_m)$ элемента решетки и коэффициентов Релея, если воспользоваться результатом (2.1). Соответствующие формулы содержат следующие ряды (см. (4.7)–(4.21) для u_n при $r = r_m \to \infty$)

$$J(\gamma,\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^n J_n(\gamma), \quad I(\gamma,\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^n I_n(\gamma), \qquad (5.2)$$

где кратные интегралы $J_n(\gamma)$, $I_n(\gamma)$ описываются формулами (4.11), (4.12) с фазовой функцией

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n,\gamma) = 2z_1^2 - 2z_1z_2 + 2z_2^2 - 2z_2z_3 + \ldots + z_n^2 - 2z_n\gamma. \quad (5.3)$$

Используя методику Винера–Хопфа для решения интегрального уравнения

$$\Psi(\tau) = e^{-\tau^2} + \frac{\Omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\tau-s)^2}\Psi(s)ds, \qquad (5.4)$$

и описанную в работе [6], мы получаем явные формулы для сумм

$J(\gamma,\Omega)$, $I(\gamma,\Omega)$ рядов (5.2)

$$J(\gamma,\Omega)=\frac{\Omega}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-2i\gamma\tau e^{i\pi/4}}\Psi(\tau)d\tau=-W(\varphi,q),$$
$$I(\gamma,\Omega)=\frac{\Omega}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-2i\gamma\tau e^{i\pi/4}}\Psi(\tau)d\tau=W(\varphi,q), \tag{5.5}$$

где $W(\varphi,q)=\exp[U(\varphi\sqrt{kd},\,q)]-1$, и $\Omega=\exp(2\pi iq)$, $\gamma=\varphi\sqrt{kd/2}$, а выражение $U(s,q)$ представляет специальную функцию Вайнштейна, хорошо известную в теории волноводов, и описываемую с помощью интеграла типа Коши

$$U(s,q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(1-e^{2\pi iq-t^2/2})}{t-se^{i\pi/4}}\,dt. \tag{5.6}$$

Опираясь на предъявленные выше факты, мы готовы дать описание старшего члена асимптотики коэффициентов Релея $R_n^{(0)}$. Пусть φ_n обозначает угол наблюдения n-го дифракционного порядка (в формуле (2.5) $\varphi_n=\psi_n$). Когда плоская волна освещает только одну грань клина ($\delta=\pi/2-\alpha-\chi>0$, δ не является малой величиной) формулы $R_n^{(0)}$ в разных секторах угла φ_n имеют вид

$$R_n^{(0)}=\frac{i}{2kd\sin\varphi_n}\{V(\varphi_n,\chi)+T(\varphi_n,\chi)\}, \tag{5.7}$$

где

$$T(\varphi_n,\chi)=V(0,\chi)W(\varphi_n,q_1)+b_1I_1(\tilde\gamma_1),\ \ 0\leqslant\varphi_n\leqslant\alpha,$$
$$T(\varphi_n,\chi)=V(\pi,\chi)W((\pi-\varphi_n),q_2)+b_2I_1(\tilde\gamma_2),\ \ \alpha+\pi/2\leqslant\varphi_n\leqslant\pi, \tag{5.8}$$

$$T(\varphi_n,\chi)=-\{V(0,\chi)W((\varphi_n-2\alpha),q_1)+V(\pi,\chi)W((2\alpha-\varphi_n),q_2)$$
$$-b_1I_1(\tilde\gamma_1)-e^{i\Delta_1}V_1(\varphi_n,\chi)+e^{i\Delta_1}V((\pi,\chi)W((\varphi_n-2\alpha),q_2)\},$$
$$\alpha\leqslant\varphi_n\leqslant2\alpha, \tag{5.9}$$

$$T(\varphi_n,\chi)=-\{V(0,\chi)W((\varphi_n-2\alpha),q_1)+V(\pi,\chi)W((2\alpha-\varphi_n),q_2)$$
$$-b_2J_1(\tilde\gamma_2)-e^{i\Delta_2}V_2(\varphi_n,\chi)+e^{i\Delta_2}V((0,\chi)W((2\alpha-\varphi_n),q_1)\},$$
$$2\alpha\leqslant\varphi_n\leqslant\pi/2+\alpha, \tag{5.10}$$

причем $\Delta_1 = kd[\cos(\varphi_n - 2\alpha) + \cos\chi]$, $q_{1,2} = kd(1 \pm \cos\chi)/2\pi$, $\tilde{\gamma}_1 = (\varphi_n - \alpha)\sqrt{kd\cos\alpha}$ и

$$\tilde{\gamma}_2 = (\alpha + \pi/2 - \varphi_n)\sqrt{kd\sin\alpha},$$

$$b_1 = \exp[ikd(2\cos\alpha + \cos\chi - \cos\varphi_n)]V_1(\alpha,\chi),$$

$$b_2 = \exp[ikd(2\cos\alpha - \cos\chi + \cos\varphi_n)]V_2(\alpha + \pi/2,\chi).$$

Следует заметить, что в случае краевого условия Дирихле коэффициенты b_1, b_2 равны нулю. Формулы (5.7)–(5.10) описывают старший член асимптотики R_n коэффициенты Релея для однородных плоских волн в каждом секторе угла наблюдения φ_n, и при переходе от одного сектора к другому они равномерно переходят в друг друга.

В случае, когда плоская волна освещает обе грани клина ($\delta = \pi/2 - \alpha - \chi < 0$, $|\delta|$ не является малой величиной) главный член $R_n^{(0)}$ представляется в виде

$$R_n^{(0)} = \frac{i}{2kd\sin\varphi_n}\{V(\varphi_n,\chi) + T(\varphi_n,\chi) - e^{i\sigma_n}[\tilde{V}(\varphi_n,\chi) + \tilde{T}(\varphi_n,\chi)]\},$$
$$\sigma_n = kd(2\sin\alpha\sin(\alpha+\chi) + \cos\varphi_n - \cos\chi), \tag{5.11}$$

где добавочный член $\tilde{V}(\varphi_n,\chi) + \tilde{T}(\varphi_n,\chi)$ появляется в результате учета дополнительных МДП, вызванных появлением $\tilde{u}_1(r,\varphi)$ (см. (4.17)). При этом член $\tilde{T}(\varphi_n,\chi)$ описывается формулами (5.8)–(5.10), если заменить функцию $V(\varphi,\chi)$ на $\tilde{V}(\varphi,\chi)$.

Теперь рассмотрим наиболее важную ситуацию с точки зрения задач оптики, а именно, когда падающая плоская волна скользит вдоль одной из граней клина: $\delta = \pi/2 - \alpha - \chi \approx 0$. Предъявленные выше формулы для $R_n^{(0)}$ в (5.7), (5.11) непригодны в окрестности $\chi = \pi/2 - \alpha$ из-за сингулярностей, возникающих при $\chi = \pi/2 - \alpha$. Для того, чтобы получить равномерную асимптотику R_n в этом случае, следует учесть дополнительный вклад $\nu_2(r,\varphi)$ в двукратно дифракционное поле, который описывается формулами (4.19)–(4.21). Если мы обозначим этот вклад, вызванный появлением $\nu_2(r,\varphi)$, через $S(\varphi_n,\chi)$, то получим для $R_n^{(0)}$ следующее выражение

$$
\begin{gathered}
R_n^{(0)} = \frac{i}{2kd\sin\varphi_n}\{V(\varphi_n,\chi)+T(\varphi_n,\chi)+S(\varphi_n,\chi)\}, \ \ \delta\geqslant 0,\\
R_n^{(0)} = \frac{i}{2kd\sin\varphi_n}\{V(\varphi_n,\chi)+T(\varphi_n,\chi)+S(\varphi_n,\chi)-\\
-e^{i\sigma_n}[\tilde V(\varphi_n,\chi)+\tilde T(\varphi_n,\chi)]\}, \ \ \delta\leqslant 0,
\end{gathered}
\tag{5.12}
$$

где $S(\varphi_n,\chi)=S_1(\varphi_n,\chi)+S_2(\varphi_n,\chi)$. Член $S(\varphi_n,\chi)$ в формуле (5.12) обеспечивает компенсацию сингулярностей в выражениях (5.7), (5.11), возникающих при $\chi=\pi/2-\alpha$, $\varphi_n=\alpha+\pi/2$. Первое слагаемое $S_1(\varphi_n,\chi)$ есть результат дифракции поля ν_1 (см. (4.18)–(4.21)) на кромке C_0 и может быть представлен в виде

$$
\begin{gathered}
S_1(\varphi_n,\chi)=e^{i\eta_n}\bigl\{\sqrt{\pi kd\sin\alpha}[\pm P_1(\gamma,\gamma_c)\mp P_2(\gamma,\gamma_c)]+2\sqrt{2\pi}\,\tilde G(\varphi)\bigr\},\\
2\alpha\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\
S_1(\varphi_n,\chi)=2\sqrt{2\pi}\,e^{i\eta_n}G(\varphi), \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\alpha,
\end{gathered}
\tag{5.13}
$$

где $\eta_n=\pi/4+2kd\sin\alpha+kd(\cos\varphi_n-\cos\chi)$, причем двукратные интегралы $P_{1,2}(\gamma,\gamma_c)$ описываются формулами (4.19) с $\phi_{1,2}=\pm 2\gamma_c z_1+z_1^2-2z_1z_2+z_2^2-2z_2\gamma$. Замечательно то, что оба интеграла с помощью методики Винера–Хопфа могут быть преобразованы в выражения, содержащие обычные интегралы Френеля (см. [2]). В формуле (5.13) следует учесть, что в случае краевого условия Дирихле получаем, что $\tilde G(\varphi), G(\varphi)=O((kd)^{-1/2})$, и это слагаемое можно не учитывать. Не сложно было бы предъявить выражения для члена $S_2(\varphi_n,\chi)$, который представляет собой дифракцию поля

$$
\nu_2=\frac{e^{ikr+2ikl\sin\alpha}}{\sqrt{kr}}\{G(\varphi)+O(k^{-1/2})\}
$$

на кромках эшелета. Эти формулы для $S_2(\varphi_n,\chi)$ описываются с помощью равенств (5.8)–(5.10), если в них заменить $V(\varphi,\chi)$ на функцию $e^{2ikd\sin\alpha}G(\varphi)$, и в данном случае мы опустим выражения для $S_2(\varphi_n,\chi)$.

6. Новые оптические свойства эшелета и анализ численных результатов. Полученные выше асимптотические формулы для коэффициентов Релея R_n дают возможность осуществить численные расчеты для эффективности дифракционных порядков однородных волн (см. [2.2]). Время счета при использовании компьютерной программы для расчета R_n, основанной на применении асимптотических формул, описанных выше, существенно меньше затрат времени, необходимых для соответствующей реализации классических численных методов (см. [1]). Эта программа была тщательно проверена на выполнение закона сохранения энергии (оптическая теорема) и теоремы взаимности. В работах [8, 9] было продемонстрировано, что результаты счета эффективности дифракционных порядков однородных волн полученные на основе асимптотического анализа и метода интегрального уравнения оказались в полном согласии с точностью до сотых долей процента, что в некотором смысле оправдывает описанный выше асимптотический анализ.

В заключительной части статьи предлагается описание новых и важных с точки зрения применения в оптике свойств эшелета, которые могут быть получены явным образом из асимптотических формул для коэффициентов Релея в коротковолновом пределе ($\lambda \to 0$, $kd \to \infty$). Сперва рассмотрим случай наклонного падения плоской волны на решетку, когда освещается только одна грань клина $0 < \chi < \pi/2 - \alpha$. Исходя из простых соображений, основанных на приближении геометрической оптики, можно ожидать, что самый мощный по эффективности дифракционный порядок наблюдается в направлении зеркального отражения падающей на решетку плоской волны от грани AC (см. рис. 2), то есть при $\varphi_n = 2\alpha + \chi$ (имеется в виду n-й дифракционный порядок с максимальным значением e_n). Таким образом, если $\varphi_n = 2\alpha + \chi$, то второе уравнение (1) приводит к соотношению между параметрами задачи

$$2d \sin(\alpha + \chi) \sin \alpha = -n\lambda, \quad n = -1, -2, \ldots, \tag{6.1}$$

которое называется в оптике условием блеска. Из уравнения (6.1) следует, что если $\lambda \to 0$, то номер соответствующего дифракционного порядка становится бесконечно большим ($|n| \gg 1$).

Рассмотрим подробнее коротковолновый предел ($\lambda \to 0$, $kd \to \infty$) в формуле (5.7) при $\varphi_n = 2\alpha + \chi$. Легко видеть, что члены, содержащие $W(\varphi, q)$, становятся величинами порядка $o((kd)^{-1/2})$ вследствие асимптотического разложения функции Вайнштейна

$U(s,q)$

$$U(s,q) = \frac{e^{-i3\pi/4}}{s\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi nqi}}{n^{3/2}} + O(s^{-3/2}). \tag{6.2}$$

Остальные члены, стоящие в фигурных скобках в (5.7), имеют порядок $O(1)$ при $kd \to \infty$, за исключением сингулярных членов при $\varphi_n = 2\alpha + \chi$, содержащих $\operatorname{ctg}((\varphi - 2\alpha - \chi)/3)$, которые присутствуют в выражениях для $V(\varphi,\chi)$ и $V_2(\varphi,\chi)$ при $2\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha + \pi/2$. В результате предельного перехода мы приходим к тому, что

$$\lim_{kd\to\infty} R_n = \lim_{kd\to\infty} \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{(\varphi_n - 2\alpha - \chi)}{3}\right)\frac{i(1-e^{i\Delta_2})}{2kd\sin\varphi_n} = \frac{\sin\chi}{\sin(2\alpha+\chi)}. \tag{6.3}$$

Для эффективности n-го дифракционного порядка, удовлетворяющего условию блеска (6.1), соответственно, получаем простое предельное значение

$$\lim_{\lambda\to 0} e_n = \frac{\sin\chi}{\sin(2\alpha+\chi)} \tag{6.4}$$

для обоих краевых условий.

Пусть плоская волна освещает обе грани клина: $\pi/2 - \alpha < \chi < \pi - 2\alpha$, и $|\delta| = |\pi/2 - \alpha - \chi|$ не является малой величиной. Нетрудно видеть, что в этом случае возникают два разных направления для дифракционных порядков с максимальным значением эффективности e_n. Первое из них представляет собой направление зеркального отражения от грани BC_{+1} и ему соответствует $\varphi_n = 2\alpha + \chi$, второе есть направление зеркального отражения от двугранного угла C_0BC_{+1} (см. рис. 4), и для него $\varphi_n = \pi - \chi$. В первом случае условие блеска имеет прежний вид (6.1). Во втором случае мы имеем направление рассеяния назад. В оптике эта ситуация называется схема Литтрова (автоколлимационная схема). Если $\varphi_n = \pi - \chi$, то условие блеска приобретает вид

$$2d\cos\chi = -n\lambda, \quad n = -1, -2, \ldots. \tag{6.5}$$

Переход к коротковолновому пределу $kd \to \infty$ в асимптотическом решении (5.11) для $\pi/2 - \alpha < \chi < \pi - 2\alpha$ приводит к результатам

$$\lim_{\lambda\to 0} e_n = \frac{\sin(2\alpha+\chi)}{\sin\chi}, \quad \varphi_n = 2\alpha + \chi, \tag{6.6}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} e_n = 4\frac{\cos^2(\alpha+\chi)\sin^2\alpha}{\sin^2\chi}, \quad \varphi_n = \pi - \chi. \tag{6.7}$$

Причем эти пределы верны для обоих краевых условий. Оказывается, что формулы (6.4), (6.6), (6.7) дают достаточно точные значения эффективности дифракционного порядка, отвечающего условию блеска, уже при не очень больших значениях отношения d/λ. Например, разность между значением e_n, сосчитанным по формуле (6.4) и точным, есть величина порядка $0,5\%$ для краевого условия Дирихле и $1,5\%$ для краевого условия Неймана, при следующих значениях параметров задачи $n = -20$, $d/\lambda = 11,5$. Естественно, что скорость сходимости e_n к предельному значению зависит от параметров χ и λ.

Теперь рассмотрим наиболее важный случай, когда плоская волна скользит вдоль клина, то есть $\chi = \pi/2 - \alpha$. Дифракционный порядок максимальной эффективности e_n имеет направление $\varphi_n = \pi/2 + \alpha$. Это особый случай схемы Литтрова, когда направление рассеяния назад совпадает с одним из дифракционных порядков. В этой ситуации одна грань оказывается полностью освещенной падающей на решетку плоской волной, другая грань, находясь в тени, практически не дает никакого вклада в отраженное поле. Условие блеска в этом случае приобретает новую форму

$$2d\sin\alpha = -n\lambda, \quad n = -1, -2, \ldots. \tag{6.8}$$

Осуществляя аналогичным образом коротковолновый предельный переход для эффективности e_n для n-го дифракционного порядка вычисляемой по формулам (5.12) и удовлетворяющего условию (6.8), мы получаем эффект полного блеска $e_n \to 1$. Соответствующие номера n имеют большие значения ($|n| \gg 1$). Оказывается, что в этой ситуации эшелет становится идеальным отражающим зеркалом, а точнее говоря, идеальным узкополостным фильтром, так как асимптотически полное отражение происходит на длине волны, удовлетворяющей условию (6.8).

Для случая краевого условия Неймана, предлагаемый асимптотический анализ подтверждает хорошо известную теорему Маришаля–Строка (Marechal and Stroke, см. [1.3] глава 6.2.1). Эта теорема утверждает, что для эшелета идеальной проводимости эффект полного блеска $e_n = 1$ наблюдается для n-го дифракционного порядка удовлетворяющего условию (6.8) при $\chi = \pi/2 - \alpha$. Этот факт является строгим результатом и может быть доказан на основе очень простых рассуждений без помощи асимптотического анализа.

Если теперь применить предельный переход к формуле (6.7) в случае схемы Литтрова при $\chi = \pi - 2\alpha$, $\varphi_n = 2\alpha$ (плоская волна после отражения от граней AC_0 и BC_0 распространяется далее вдоль оси χ налево и направо), то соответствующее условие блеска приобретает вид

$$2d\cos 2\alpha = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{6.9}$$

Из анализа формулы (6.7) вытекает, что эффект полного блеска эшелета $e_n \to 1$ при $\lambda \to 0$ также возникает при выполнении (6.9) для обоих краевых условий. Это явление не было ранее известно в теории дифракционных решеток. Заметим, что именно предлагаемый асимптотический анализ дал возможность обнаружить эту новую особенность отражения эшелета.

Полученные на основе ГТД асимптотические формулы для коэффициентов Релея однородных плоских волн были реализованы в виде алгоритмов быстрого и точного вычисления эффективности дифракционных порядков на ПЭВМ. Это дало возможность анализировать описанные выше закономерности в отраженном поле эшелета на основе данных численных расчетов на ЭВМ. Так на рис. 6 и 7 проиллюстрирована зависимость эффекта полного блеска от асимметрии в форме поверхности эшелета в схеме Литтрова при $\chi = \pi/2 - \alpha$, $\varphi = \pi/2 + \alpha$. Оказывается, что для малых значений угла α (эшелет с высокой асимметрией) эффект полного блеска в коротковолновом пределе начинает проявляться гораздо ранее, то есть соответствующая эффективность дифракционного порядка стремится к единице более быстро.
Стоит заметить, что дифракционные порядки, которые примыкают к максимальному, имеют при этом ничтожно малые значения эффективности. Например, при полном блеске эшелета с параметрами $\alpha = 10°$, $\chi = 80°$, $n = -100$, $d/\lambda \approx 290$ величины e_{-101}, e_{-99} оказываются порядка 10^{-4}.

На рис. 8 продемонстрирована спектральная зависимость эффективности e_n дифракционного порядка с номером $n = -100$ как функции отношения $\lambda/d \cdot 1000$ при $\alpha = 10°$ и обоих краевых условий. На рис. 9 эффект полного блеска демонстрируется в окрестности $\chi = \pi/2 - \alpha$. Пусть длина волны λ удовлетворяет условию блеска (6.8). Изменим незначительно угол падения плоской вол-

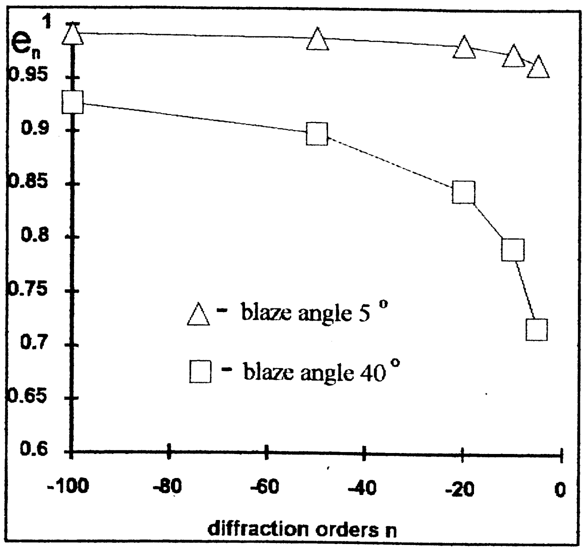

Рис. 6. Эффективности различных дифракционных порядков e_n для двух значений $\alpha = 5°$ и $\alpha = 40°$ (условие Дирихле).

ны так чтобы выполнялось соотношение

$$2d\cos\delta\sin\alpha = -n\lambda, \qquad n = -1, -2, \ldots \tag{6.10}$$

для $\chi = \pi/2 - \alpha - \delta$, $\varphi_n = \alpha + \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$, причем угол отклонения δ мал, так как $|n| \gg 1$. На рисунке видно, что при увеличении δ соответствующие значения эффективности медленно убывают, оставаясь в окрестности единицы (при этом отношение d/λ меняется; α, n – фиксированы). Это говорит об устойчивости реализации эффекта полного блеска для эшелета в схеме Литтрова.

Таким образом в настоящей статье продемонстрирован качественный анализ асимптотического решения, описывающего коротковолновое рассеяние на эшелете. Получены закономерности поведения отраженного поля, которые актуальны в экспериментах по прикладной оптике. В дальнейших публикациях предполагается исследовать случаи скользящего рассеяния плоской волны на эшелете и импедансного краевого условия. В заключении

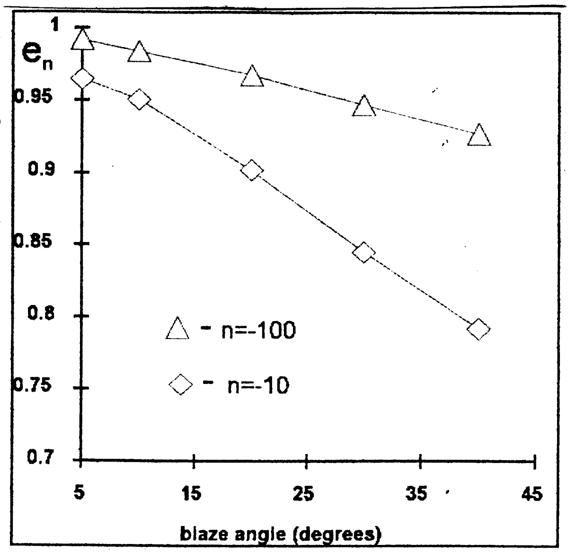

Рис. 7. Эффективность дифракционных порядков e_n для $n = -10$, $n = -100$ в зависимости от угла α (условие Дирихле).

автор выражает глубокую благодарность М. М. Попову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Литература

1. R. Pelit, (ed.), *Electromagnetic Theory of Gratings*. Vol. 22 of Topics in Current Physics, Springer, Berlin, 1980.
2. V. A. Borovikov, B. Ye. Kinber, *Geometrical Theory of Diffraction*. IEE Electromagnetic Waves Series 37, The Institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 1994.
3. J. B. Keller, *Geometrical theory of diffraction*. J. Opt. Soc. Amer. **52** (1962), 116–130.
4. J. Boersma, *Ray-optical analysis of reflection in an open-ended parallel-plane waveguide*. I: TM case. SIAM J. Appl. Math. **29** (1975), 164–195.
5. H. Y. Yee, L. B. Felsen, J. B. Keller, *Ray theory of reflection from the open end of a waveguide*. SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 268–300.
6. В. В. Залипаев, М. М. Попов, *Коротковолновое скользящее рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. II*. В кн.: Матем. вопр. теор. распр. волн. 18. Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), 60–86.
7. В. В. Залипаев, *Асимптотическое разложение коэффициентов возбуждения плоских волн в задаче рассеяния на гладкой периодической границе*. В

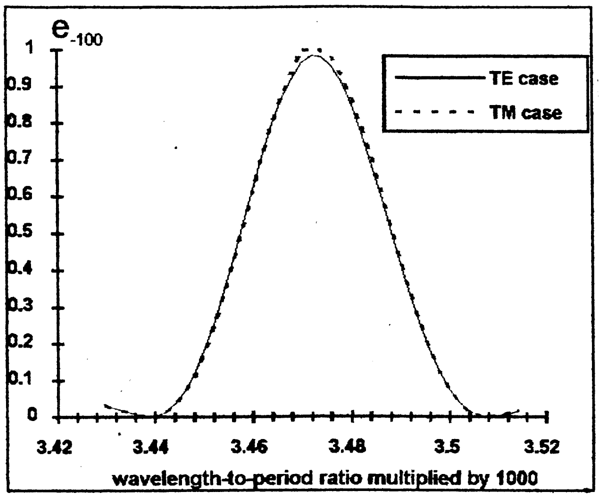

Рис. 8. Спектральная зависимость эффективности дифракционного порядка для $n = -100$ как функции отношения длины волны к периоду, умноженная на 1000, для угла $\alpha = 10°$.

кн.: Матем. вопр. теор. распр. волн. 20. Зап. научн. семин. ЛОМИ **186** (1990), 71–86.

8. V. V. Zalipaev, *Calculation of the wave field scattered by an echelette-grating in the short-wave approximation.* International Symposium on Electromagnetic Theory. URSI. St.-Petersburg, Russia, 1995.
9. V. V. Zalipaev, *Ray optical analysis of the plane wave scattering by an echelette-diffraction grating.* SIAM J. Appl. Math. (в печати).
10. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации.* М.: Сов. радио, 1966.

Zalipaev V. V. Shortwave scattering by echelette diffraction grating.

The two-dimensional problem of a plane wave scattering by a periodic perfectly conducting grating – an echelette with a right angle is considered in the case of high-frequency approximation (the wave length is assumed to be small compared with the period of grating). The situation where the incident plane wave glides along one of the faces of a wedge is discussed. The ray optical solution to the problem (short-wave asymptotic result) is derived on the basis of the method of summation of multiple diffrated fields, which is well known in the geometric theory of diffraction. The main result of the paper is simple formulas for the efficiency of

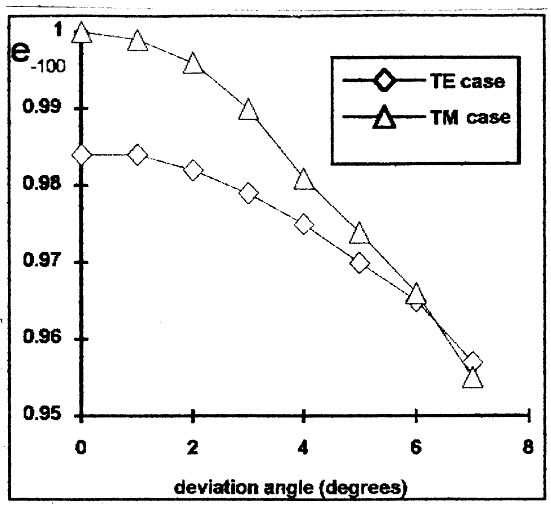

Рис. 9. Эффективность дифракционного порядка для $n = -100$ в зависимости от угла отклонения δ при $\alpha = 10°$.

diffraction order with maximum value derived in the short-wave approximation. Numerical results are presented and important optical properties resulted from asymptotic analysis are described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 ноября 1997 г.