Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. М. Бабич, М. А. Лялинов

О РАССЕЯНИИ ВОЛН РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

1. Введение

Изучение влияния движущейся границы рассеивающего тела на регулярное распространение волн может быть проведено с помощью пространственно-временного лучевого метода (ПВЛМ) [1]. При этом существенный интерес в задачах распространения нестационарных волн представляет описание волнового поля в окрестности фронта волны, рассеянной движущейся поверхностью. Решение соответствующей краевой задачи в окрестности фронта ищется в виде ПВЛ разложения [1]. Для однозначного определения коэффициентов разложения с помощью рекуррентной системы дифференциальных уравнений необходимо задать начальные условия, которые в конечном счете и определяют дифракционные коэффициенты (коэффициенты возбуждения) в лучевом разложении. Известно, что в стационарной задаче распространения волн от точечного источника [2] для определения дифракционных коэффициентов в старшем порядке успешно применяются соображения принципа локальности. Результаты настоящей работы позволяют найти дифракционный коэффициент для старшего члена ПВЛ разложения в окрестности фронта волны возмущения, возникающей при появлении рассеивающей поверхности.

Рассматривается следующая задача. Пусть волновой процесс описывается классическим волновым уравнением (соответствующую скорость мы принимаем равной единице) или уравнениями Максвелла (скорость света также принимаем равной единице). Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$ в плоском случае) во все моменты времени волновое поле определяется плоской волной. В начальный момент времени ($\tau = 0$) возникает поверхность (контур в двумерном случае) (Рис. 1), которая взаи-

Работа выполнена при поддержке РФФИ грантом 96-02-07089а и грантом 96-01-00666.

модействует с невозмущенной плоской волной и порождает возмущенную волну со сферическим (круговым в плоском случае фронтом).

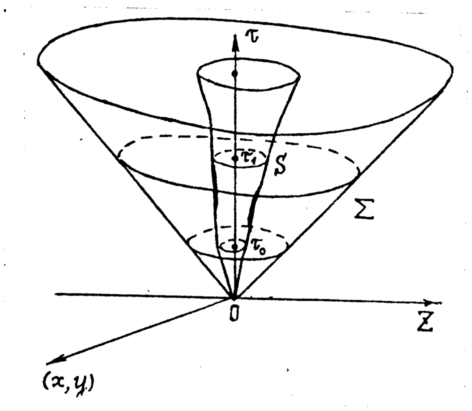

Рис. 1.

Положения рассеивающей поверхности во все моменты времени $\tau \geqslant 0$ задается поверхностью S в пространстве Минковского M_3 или M_4 (Рис. 1). Возмущенное поле отлично от нуля внутри светового конуса Г, $x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2 = 0$. Мы считаем, что на S задано условие Дирихле или Неймана, если рассматривается задача для акустического давления, либо условия на границе идеального движущегося проводника в соответствующей электромагнитной задаче. В силу того, что расширяющаяся поверхность возникает в момент времени $\tau = 0$ в начале координат, поверхность S имеет в начале координат пространства Минковского особую точку. Мы предполагаем, что в первом приближении вблизи начала координат поверхность S представляет собой конус (не обязательно круговой). Другое требование на S, накладывающее ограничение в частности на наклон образующих конуса, заключается в том, что поверхность S должна быть везде времениподобна. Пусть $\Psi(\tau, x, y, z) = 0$ ($\operatorname{grad}\Psi \neq 0$) уравнение S. В случае уравнений волнового или Максвелла времениподобность означает, что при $\Psi = 0$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 < 0.$$

Пусть S_τ – сечение поверхности плоскостью $\tau = \text{const}$. С кинематической точки зрения S_τ – расширяющаяся поверхность. Условие времениподобности означает, что нормальная скорость этого расширения нигде не превосходит единицу.

Пусть Σ поверхность светового конуса. В его окрестности решение ищется в виде нестационарного варианта лучевого разложения:

$$U(\tau, \vec{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(\tau, \vec{r})(\tau - \Phi_0)_+^{a+j}}{\Gamma(a+j+1)}, \quad \zeta_+^\delta = \begin{cases} \zeta^\delta & \zeta > 0 \\ 0 & \zeta \leqslant 0 \end{cases}.$$

Здесь Φ_0 – эйконал, a – постоянная, U_j – коэффициенты разложения, удовлетворяющие уравнениям переноса. Рассматривая задачу рассеяния в первом приближении вблизи начала координат, мы сможем на основании принципа локальности найти искомый дифракционный коэффициент. Разумеется эти построения имеют "физический" уровень математической строгости.

Сначала мы рассмотрим скалярную задачу первого приближения в M_3 в случае краевого условия Дирихле или Неймана. Затем изучаются скалярные задачи для четырехмерной области между конусами в M_4. Электромагнитная векторная задача для равномерно расширяющейся идеально проводящей сферы с помощью введения потенциалов редуцируется к двум скалярным задачам для волнового уравнения с однородными граничными условиями на S. В заключение мы исследуем единственность решения рассматриваемых задач.

2. Скалярная задача Дирихле в M_3 и метод Смирнова–Соболева. Задача Неймана

Возмущенное волновое поле $v(x, y, \tau)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box\, v := (\partial_\tau^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)v = 0, \tag{1}$$

граничному условию Дирихле на конусе $S = \{(x, y, \tau) : \phi(x/\tau, y/\tau) = 0\}$ $(\phi(x/\tau, y/\tau) = x^2/\tau^2 + y^2/\tau^2 - \beta^2 = 0$ для кругового конуса$)$

$$v\big|_S = -\exp(-ik(\tau - y))\big|_S, \tag{2}$$

где $U_i = \exp(-ik(\tau - y))$ невозмущенная плоская волна, k – волновое число. Искомое решение ищется в пространстве M^3 в области, граница которой имеет сингулярную точку – начало координат. В такого рода случаях нужны ограничения на сингулярность искомых решений. В противном случае решение не будет единственным и, более того, как правило не будет иметь физического смысла. Примером таких требований являются классические условия Мейкснера. В настоящем случае мы считаем, что в пределе при приближении к началу координат в пространстве Минковского решение должно совпадать с тем “решением в первом приближении”, которое далее будет получено. Это требование, которое авторам представляется естественным, содержит в себе ограничение на сингулярность решения в начале координат и играет здесь роль, аналогичную известному условию Мейкснера. Выполнение подобных “условий Мейкснера” мы будем подразумевать и в случае задачи в M_4, а также при рассмотрении уравнений Максвелла.

Вернемся к рассматриваемой задаче первого приближения. Считая, что решение ищется при малых τ и y, разложим выражение для плоской волны:

$$U_i = \exp(-ik(\tau - y)) = 1 - ik(\tau - y) + \dots . \tag{3}$$

В старшем порядке вместо условия (2) получим

$$v\big|_S = -1. \tag{2'}$$

Требуем еще, чтобы на световом конусе v обращалось в ноль. Это краевое условие, условие (2′) и уравнение (1) имеют следующее свойство однородности: если $v(\tau, x, y)$ удовлетворяет уравнению (1), краевому условию (2′) и обращается в ноль на световом конусе, то это верно и для $v(\alpha\tau, \alpha x, \alpha y)$ при любом $\alpha = \text{const} > 0$. Считая решение единственным, получим $v(\alpha\tau, \alpha x, \alpha y) \equiv v(\tau, x, y)$ при $\alpha > 0$, т.е. решение естественно искать среди однородных нулевой степени решений.

В тридцатых годах В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым был введен важный класс так называемых функционально инвариантных решений уравнения (1). Позднее С. Л. Соболевым было доказано, что класс однородных нулевой степени решений уравнения (1) является подклассом класса функционально инвариантных решений. Естественно попытаться искать искомое “решение первого порядка" методом функционально инвариантных решений см. [3]. В соответствии с этим методом любое вещественное однородное нулевой степени решение $v(x,y,\tau)=V(x/\tau,y/\tau)$ уравнения (1) может быть найдено в виде

$$V(x/\tau,y/\tau)=\mathrm{Re}\{f(z)\}, \tag{4}$$

$$\xi=x/\tau,\ \eta=y/\tau,\ z=(1-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2})(\xi+i\eta)/(\xi^2+\eta^2), \tag{5}$$

где $f(z)$ регулярная функция в области $\widetilde{\sigma}$, получаемой из области σ, ограниченной контурами $\xi^2+\eta^2=1$, $\Phi(\xi,\eta)=0$, в соответствии с отображением (5). В случае $\Phi(\xi,\eta)=\xi^2+\eta^2-\beta^2=0$ область σ есть кольцо. Решение задачи (1), (2′), (3) сводится к нахождению регулярной в $\widetilde{\sigma}$ функции $f(z)$, удовлетворяющей в соответствии с (2′) и (3) условиям

$$\mathrm{Re}\{f(z)\}\big|_{\Phi(\xi,\eta)=0}=-1, \quad \mathrm{Re}\{f(z)\}\big|_{|z|=1}=0.$$

Пусть нам известно конформное отображение $\alpha=g(z)$ области σ на кольцо $\Xi=\{\alpha:|\alpha|>r_0(\beta),|\alpha|<1\}$, где $r_0(\beta)$ радиус внутренней окружности кольца, который определяется соответствующим отображением образа кривой $\phi(\xi,\eta)=0$ при отображении (5) на эту окружность. (Рис. 2). Тогда искомое решение задачи имеет вид

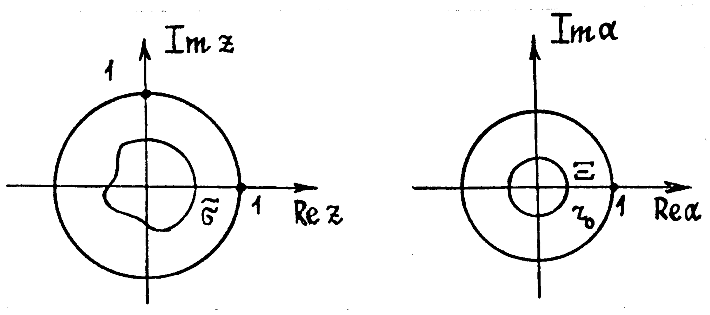

Рис. 2.

$$v(x,y,\tau)=(-1)\frac{\ln|g(z)|}{\ln r_0(\beta)},$$

где z связано с x, y, τ соотношениями (5)*). Для осесимметричного случая ($g(z)=z$) получаем

$$v(x,y,\tau) = -\ln\left(\frac{r}{\tau+\sqrt{\tau^2-r^2}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right), \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Решение (6) – это с точностью до множителя классическое решение Вольтерра волнового уравнения (1).

После элементарных вычислений из (6) находим:

$$v(x,y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\sqrt{2(\tau-r)}/\ln(\beta/(1+\sqrt{1-\beta^2}))\left(1+O\left(\sqrt{\frac{(\tau-r)}{r}}\right)\right), \qquad (\tau-r)\to 0.$$

При рассмотрении задачи Неймана вернемся к осесимметричному случаю. Граничное условие (2′) заменим условием Неймана

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{2=\beta\tau} = ik\left.\frac{\partial(\tau-y)}{\partial r}\right|_{r=\beta\tau} = -ik\sin\varphi, \tag{7}$$

$y=r\sin\varphi$, $x=r\cos\varphi$, где φ полярный угол на плоскости (x,y). Решение задачи (1), (7), (3) является функцией первой степени однородности и ищется в виде

$$v(x,y,\tau) = \tau U(\rho)\sin\varphi, \tag{8}$$

где $\rho = r/\tau$. После подстановки (8) в волновое уравнение (1) получаем уравнение для нахождения $U(\rho)$

$$(\rho^2-1)\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}U = 0. \tag{9}$$

Одно из линейно независимых решений уравнения (9) $U_1(\rho)=\rho$, а второе, которое нас и интересует, находится с помощью формулы Лиувилля. Требуя, чтобы выполнялось условие $U(1)=0$,

*) Интересно отметить, что рассмотренная здесь задача единственная известная авторам задача, которую без метода В. И. Смирнова–С. Л. Соболева не решить. Задачи, решенные до сего времени этим методом, допускали также решение методами Фурье или Винера–Хопфа.

получим

$$U(\rho) = CU_2(\rho) = C\rho \int_1^{\rho} \sqrt{1-x^2}/x^3 dx =$$
$$= C\left(-\sqrt{1-\rho^2}/(2\rho) + (\rho/4)\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{1-\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right),$$

где $C = \mathrm{const}$. Постоянную C мы найдем из условия (7):

$$C = \frac{-ik}{U_2'(\beta)}, \quad U_2'(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}/\beta + 1/4\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Подставляя найденные выражения в (8), после элементарных вычислений находим

$$v(x,y,\tau) = (-ik)\tau U(r/\tau)/U_2'(\beta)\sin\varphi =$$
$$= \frac{ik\sqrt{2}}{U_2'(\beta)}\sin\varphi\frac{(\tau-r)^{3/2}}{\tau^{1/2}}\left(1+O\left(\frac{\tau-r}{r}\right)\right). \quad (10)$$

Очевидно, что слабая особенность волнового поля возмущения на фронте в задаче Неймана (10) отличается от особенности в случае задачи Дирихле. Она на один порядок $(\tau - r)$ слабее.

3. Задачи Дирихле и Неймана в области между конусами в M_4

Волновое поле v, удовлетворяющее волновому уравнению

$$\Box v = -(\Delta - \partial_t^2)v = 0,$$

в задаче Дирихле на границе принимает значение

$$v\big|_{r=\beta\tau} = -1, \quad (11)$$

а в задаче Неймана

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=\beta\tau} = (-ik)\cos\theta, \quad (12)$$

где θ один из углов в сферической системе координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Мы считаем, что невозмущенная плоская волна распространяется вдоль оси OZ, и имеет место разложение

$$U_i = \exp(ik(\tau - z)) = 1 - ik(\tau - r\cos\theta) + \dots .$$

Решение задачи Дирихле ищется в виде однородной функции $v(x,y,z,\tau) = U(r/\tau)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Прямой подстановкой убеждаемся, что $U(\rho)$, $\rho = r/\tau$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{dU}{d\rho} - 2\rho\frac{dU}{d\rho} - \rho^2\frac{d^2U}{d\rho^2} = 0.$$

Решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее граничному условию (11), имеет вид $U(\rho) = C(1 - 1/\rho)$. Учитывая граничное условие, получим выражение

$$v = -(1 - \tau/r)/(1 - \beta^{-1}). \tag{13}$$

Решение (13) лишь постоянным множителем отличается от трехмерного варианта классического решения Вольтерра волнового уравнения.

Задача Неймана имеет своим решением однородную функцию первого порядка $v(x,y,z,\tau) = \tau V(\rho)\cos\theta$, $\rho = r/\tau$. Функция $V(\rho)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\rho^2 - 1)\frac{d^2V}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho}\,\frac{dV}{d\rho} + \frac{2}{\rho^2}\,V = 0$$

и с учетом граничного условия (12) записывается в виде

$$V(\rho) = (-ik)[(\rho^3 - 1)/(3\rho^2) + 1 - \rho]/[2/3(1-\beta^3)/\beta^3].$$

Элементарные вычисления приведут к искомому решению задачи Неймана

$$\begin{aligned} v(x,y,z,\tau) &= \frac{(-3/2)ik\beta^3}{1-\beta^3}\,\cos\theta\,[(r^3 - \tau^3)/(3r^2) + \tau - r] = \\ &= \frac{3/2\,ik\beta^3}{1-\beta^3}\,\cos\theta(\tau - r)^2/\tau\left(1 + O\left(\frac{\tau - r}{r}\right)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Из выражений (13) и (14) легко извлекаются дифракционные коэффициенты для старшего порядка ПВЛМ.

4. Задача рассеяния плоской электромагнитной волны равномерно расширяющейся идеально проводящей сферой

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси OZ, в декартовых координатах имеет вид

$$\vec{E}_i = \exp(-ik(\tau - z))\vec{e}_x, \quad \vec{H}_i = \exp(-ik(\tau - z))\vec{e}_y. \tag{15}$$

Рассеянное волновое поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0,$$
$$-\frac{\partial \vec{H}}{\partial \tau} = \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

граничному условию для касательных компонент

$$\left\{(\vec{E} + \vec{E}_i) + \frac{\vec{w}}{c} \times (\vec{H} + \vec{H}_i)\right\}_{\text{tang}} \Big|_S = 0 \tag{16}$$

на поверхности идеально проводящей равномерно расширяющейся сферы $r = \beta\tau$ ($\beta = |\vec{w}|/c$, $\vec{w}$ скорость расширения сферы) и стремится к нулю на световом конусе Г. Вводя сферические координаты r, θ, φ вместо декартовых x, y, z, мы запишем электромагнитное поле с помощью потенциалов Дебая [4, 5]

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{e}_r(\partial_r^2(ru) - \partial_\tau^2(ru)) + r^{-1}\nabla_\omega \partial_r(ru) + \nabla_\omega(\partial_\tau v) \times \vec{e}_r, \\
\vec{H} &= \vec{e}_r(\partial_r^2(rv) - \partial_\tau^2(rv)) + r^{-1}\nabla_\omega \partial_r(rv) - \nabla_\omega(\partial_\tau u) \times \vec{e}_r, \\
\nabla_\omega &= \vec{e}_\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\, \vec{e}_\varphi \partial_\varphi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Скалярные функции u и v удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box\, u = 0, \quad \Box\, v = 0.$$

С учетом выражений (17), если подчинить скалярные потенциалы u и v граничным условиям

$$\begin{aligned}
&(r^{-1}\partial_r(r[u + u_i]) - \beta\partial_r(u + u_i))\big|_{r=\beta\tau} = 0, \\
&(r^{-1}\partial_r(r[v + v_i]) - \beta^{-1}\partial_\tau(v + v_i))\big|_{r=\beta\tau} = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

легко показать, что граничное условие (16) для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будет выполнено. В условиях (18) u_i и v_i это потенциалы, определяющие плоскую падающую волну (15), причем

$$\left\{ \begin{matrix} ik\, u_i \\ ik\, v_i \end{matrix} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-i^n) \frac{2n+1}{n(n+1)}\, j_n(kr) \exp(-ik\tau) P_n^1(-\cos\theta) \left\{ \begin{matrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix} \right\}, \tag{19}$$

$j_n(x) = \sqrt{\pi/(2x)}\, J_{n+1/2}(x)$, $J_p(x)$ функция Бесселя, $P_n^1(t)$ присоединенная функция Лежандра, $P_s^1(-\cos\theta) = \sin\theta$. Потенциалы u и v и волновые поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ должны анулироваться при $(\tau - r) \to 0$. Принимая во внимание то, что нас интересуют малые времена τ, в старшем порядке из граничного условия (18) получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \bigg|_{r\beta\tau} &= \sin\theta \sin\varphi \\ \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \beta^{-1} \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \bigg|_{r=\beta\tau} &= \sin\theta \cos\varphi \end{aligned} \tag{20}$$

Потенциалы u и v – однородные функции первого порядка, ищем в виде

$$u = \tau U(r/\tau) \sin\theta \sin\varphi, \quad v = \tau V(r/\tau) \sin\theta \cos\varphi.$$

Непосредственной подстановкой в волновое уравнение убеждаемся, что U и V являются решениями уравнения

$$(\rho^2 - 1) \frac{d^2}{d\rho^2} \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} + \frac{2}{\rho^2} \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = 0$$

и имеют вид

$$\left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} C_1 \\ D_1 \end{matrix} \right\} ((\rho^3 - 1)/(3\rho^2) + (1 - \rho)), \quad \rho = r/\tau.$$

Константы C_1 и D_1 находим из граничных условий (20), принимающих вид

$$\begin{aligned} &\left[(\rho^{-1} - \beta) U + (1 + \beta\rho) \frac{\partial U}{\partial \rho} \right]_{\rho=\beta} = 1, \\ &\left[(\rho^{-1} - \beta^{-1}) V + (1 + \beta^{-1}\rho) \frac{\partial V}{\partial \rho} \right]_{\rho=\beta} = 1. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} C_1(\beta) &= 3\beta^3/(1 + 6\beta^2 - 4\beta^3 - 3\beta^4), \\ D_1(\beta) &= \frac{3/4\beta^3}{1 - \beta^3}. \end{aligned}$$

Наконец, используя явные выражения для u и v, находим старшие члены их асимптотики при $(\tau - r) \to 0$

$$\begin{aligned} u(\tau, r, \theta, \varphi) &= -C_1(\beta)\sin\theta\sin\varphi\,\tau(1 - r/\tau)^2(1 + O(1 - r/\tau)), \\ v(\tau, r, \theta, \varphi) &= -D_1(\beta)\sin\theta\cos\varphi\,\tau(1 - r/\tau)^2(1 + O(1 - r/\tau)). \end{aligned} \tag{21}$$

Представляет интерес поведение самого электромагнитного поля вблизи фронта возмущенной волны. Соответствующие выражения легко получаются подстановкой формул (21) в (17). Приведем лишь выражения для вектора электрической напряженности в старшем порядке:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{e}_\theta\{2(1-\tau/r)(-C_1(\beta)\cos\theta\sin\varphi + D_1(\beta)\sin\varphi)\}(1 + O(1-\tau/r)) + \\ + \vec{e}_\varphi\{2(1-\tau/r)(C_1(\beta)\cos\varphi - D_1(\beta)\cos\theta\cos\varphi)\}(1 + O(1-\tau/r)) + \\ + \vec{e}_r O((1-\tau/r)^2)\sin\theta\sin\varphi, \quad (1-\tau/r) \to 0. \end{aligned}$$

Более высокий порядок малости при $\vec{e}_r$ выражает факт поперечности в первом приближении электромагнитных волн.

5. О единственности решения задач

Для доказательства единственности решения задач естественно воспользоваться энергетическими соображениями. Важно отметить, однако, что доказательства основанные на энергетических соображениях удалось получить лишь для задачи Неймана и электромагнитной задачи. Единственность решения для задачи Дирихле в классе однородных функций доказывается с помощью соответствующего принципа максимума.

Обратимся к скалярной задаче Неймана. Будем считать, что на поверхности S выполняется однородное краевое условие Неймана, а на световом конусе имеет место тот порядок обращения решения в ноль, который рассматривался здесь ранее, т.е. $u = O(\tau - r)^{3/2})$ в плоском и $u = O((\tau - r)^2)$ в трехмерном случаях (имеются в виду число пространственных переменных). Обозначим S_τ и Σ_τ сечения поверхностей S и Σ плоскостью $\tau = \mathrm{const}$, а область, заключенную между этими поверхностями, $\Omega(\tau)$, $\partial\Omega(\tau) = S_\tau \cup \Sigma_\tau$. Нас интересуют задачи в областях Ω размерности $m = 2, 3$. Энергия волнового поля в области $\Omega(\tau)$ задается интегралом

$$E(\tau) = \int\limits_{\Omega(\tau)} \mathcal{E} d\Omega, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(u_\tau^2 + (\nabla u)^2), \tag{22}$$

где u решение волнового уравнения с условиями $\partial_n u\big|_{S_\tau} = 0$ и $u\big|_{\Sigma_\tau} = 0$. Покажем, что энергия $E(\tau)$ не возрастает, то есть

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} \leqslant 0. \tag{23}$$

Продифференцируем выражения (22) для $E(\tau)$

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{\partial\Omega(\tau)} -w\mathcal{E}\,ds + \int\limits_{\Omega(\tau)} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}\,d\Omega, \tag{24}$$

где w величина скорости движения соответствующей поверхности, $c > w > 0$ для S_τ и $w = -c$ для Γ_τ. Для преобразования второго слагаемого в (24) воспользуемся уравнением закона сохранения, которое следует из волнового уравнения,

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} + \operatorname{div}\vec{P} = 0, \tag{25}$$

где $\vec{P} = -u_\tau\nabla u$ вектор плотности потока энергии или вектор Умова–Пойнтинга. Подставим выражения для $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}$ из (25) во второе слагаемое в (24) и воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса, получим

$$\frac{dE}{d\tau} = -\int\limits_{\partial\Omega(\tau)} w\mathcal{E}\,ds + \int\limits_{\partial\Omega(\tau)} u_\tau(\nabla u\cdot\vec{n})ds. \tag{26}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (26) обращается в ноль на S_τ в силу условия $\partial_n u\big|_{S_\tau} = 0$, а на поверхности Σ_τ вследствие равенства $u\big|_{\Sigma_\tau} = 0$ и $u_\tau\big|_{\Sigma_\tau} = 0$. В результате, легко видеть, что правая часть (26) неположительна и, следовательно, имеет место неравенство (23). Предположим, что справедливо предельное условие

$$E(\tau_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(\tau_0)} (u_\tau^2 + (\nabla u)^2)d\Omega \to 0, \quad \tau_0 \to 0, \tag{27}$$

тогда из неравенства (23) и условия (27) следует тождество $E(\tau) \equiv 0$, из которого вытекает соотношение $u_\tau \equiv 0$. Равенство $u \equiv 0$ теперь простое следствие обращается u в ноль на световом конусе. Единственность решения доказана.

Заметим, что в нашем рассуждении условие (27) было аналогом условия Мейкснера. Условие (27) согласуется с "условием Мейкснера", обсуждавшимся во введении. Условие (27) имеет естественную физическую интерпретацию: энергия волны возмущения мала для малого времени, прошедшего после возникновения рассеивателя.

Доказательство единственности в электромагнитной задаче вполне аналогично, предложенному выше. Воспользуемся равенством

$$\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)} \mathcal{E}\, d\Omega\right) = -\int\limits_{\partial\Omega(\tau)} w\, CEds - \int\limits_{\partial\Omega(\tau)} (\vec{P}\cdot\vec{n})ds, \qquad (28)$$

где $\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$ плотность энергии электромагнитного поля, $\vec{P} = \frac{C}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$ вектор Умова–Пойнтинга. Соотношения (28) и формулы Остроградского–Гаусса. Заметим, что в силу равенств $\vec{E}\big|_{\Sigma_\tau} = 0$, $\vec{H}\big|_{\Sigma_\tau} = 0$ имеем $\vec{P}_n\big|_{\Sigma_\tau} = 0$, $\mathcal{E}\big|_{\Sigma_\tau} = 0$. Воспользуемся разложениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на компоненты

$$\vec{E}\big|_{S_\tau} = (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n}\big|_{S_\tau} + (\vec{E})_{\rm tang}\big|_{S_\tau},$$
$$\vec{H}\big|_{S_\tau} = (\vec{H}\cdot\vec{n})\vec{n}\big|_{S_\tau} + \vec{H}_{\rm tang}\big|_{S_\tau}.$$

В силу граничного условия (16) ($\vec{H}_i = 0$, $\vec{E}_i = 0$) получим

$$(P\cdot\vec{n})\big|_{S_\tau} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{n}\big|_{S_\tau} = \frac{c}{4\pi}(\vec{n}\times\vec{H})\cdot\vec{E}\big|_{S_\tau} =$$
$$= \frac{c}{4\pi}(\vec{n}\times\vec{H})\cdot(\vec{E})_{\rm tang}\big|_{S_\tau} = \frac{(-1)}{4\pi}(\vec{n}\times\vec{H})\cdot(\vec{w}\times\vec{H})_{\rm tang}\big|)_{S_\tau} =$$
$$= \frac{+w}{4\pi}(\vec{n}\times\vec{H})^2_{\rm tang} = \frac{+w}{4\pi}\vec{H}^2_{\rm tang},\ \vec{w}\big|_{S_\tau} = w(-\vec{n})\big|_{S_\tau},\ w>0,$$

$\vec{n}$ внешняя нормаль к $\partial\Omega(\tau)$. Из равенства (28) выводим

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega(\tau)} \mathcal{E}\, d\Omega = (-1)\int\limits_{S_\tau}\left(\frac{w}{8\pi}(\vec{H}^2+\vec{E}^2) + \frac{w}{4\pi}\vec{H}^2_{\rm tang}\right) ds \leqslant 0. \qquad (29)$$

Если дополнительно потребовать

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega(\tau_0)} (\vec{H}^2+\vec{E}^2)d\Omega \to 0, \quad \tau_0\to 0,$$

то из неравенства (29) легко выводится равенство энергии $\int\limits_{\Omega(\tau)} \mathcal{E}\, d\Omega$ нулю. Доказательство завершается так же как аналогичное доказательство единственности решения в случае краевого условия Неймана.

Рассмотрим задачу Дирихле для функции $u = u(x_1/\tau, x_2/\tau, \dots, x_m/\tau)$, которая есть решение волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$. Переходя к "однородным" переменным $\xi_i = x_i/\tau$, $i = 1, \dots, m$, убеждаемся, что волновое уравнение равносильно

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left((1 - \xi_i^2) \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right) = 0. \tag{30}$$

К уравнению (30) добавим граничные условия

$$\begin{aligned} u\big|_{\Phi(\xi_1,\dots,\xi_m)=0} &= 0, \\ u\big|_{\xi_1^2+\dots+\xi_m^2=1} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Единственность решения доказывается с помощью достаточно стандартного варианта применения принципа максимума.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Л. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны.* Ленинград: Изд. Ленинградского Университета, 1985.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М., 1972.
3. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* **3**, ч. 2, 1969.
4. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* М.: Наука, 1966.
5. J. R. Mentzer, *Scattering and diffraction of radio waves.* Pergamon Press, London-New York, 1955.
6. С. Л. Соболев, *Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных гиперболического типа.* — Матем. сборник **11(3)** (1942), 155–203.
7. M. A. Lyalinov, *Scattering of a plane wave by a circular cylinder with uniformly increasing radius.* — IEEE Trans. AP-42 no. 11 (1994), 1574–1577.

Babich V. M., Lyalinov M. A. On the scattering of waves by an expanding surface.

The perturbance of a harmonic plane wave by an obstacle, arising in a fixed point is considered. This obstacle expands and creates a wave with spherical front. The analitical expression of the scattered wave field in a

small neighborhood of the wave front is obtained as in scalar as well in electromagnetic case.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 сентября 1997 г.