Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

И. В. Андронов

ВОЛНЫ СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

1. Введение

В задаче дифракции на гладком выпуклом теле важную роль играют волны соскальзывания, дающие асимптотику дифрагированного поля в зоне тени. Известные результаты, полученные методом пограничного слоя, не позволяют объяснить некоторые свойства волн соскальзывания на сильно вытянутых телах. Математически задача дифракции состоит в построении коротковолновой асимптотики решения уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла, удовлетворяющего определенным краевым условиям. Ранее при анализе задач дифракции размеры тела по разным направлениям предполагались сравнимыми и асимптотическое разложение строилось по степеням единственного малого параметра $k^{-1/3}$, где k – волновое число. Если размеры тела в разных направлениях сильно отличаются друг от друга, еще один большой параметр – отношение этих размеров присутствует в формулировке задачи.

Целью этой работы является исследование волн соскальзывания на сильно вытянутых телах, когда бинормальная кривизна поверхности асимптотически велика. Решения, полученные в [1], показывают, что в случае обычного, невытянутого тела влияние бинормальной кривизны проявляется лишь в поправочном члене асимптотики для акустических волн на жестком теле и магнитной трансверсально поляризованной волны для уравнений Максвелла. Если кривизна в направлении бинормали велика и имеет порядок сравнимый с $k^{1/3}$, поправка [1] становится сравнимой со старшим членом и асимптотика, вообще говоря, перестает быть справедливой. Таким образом, в случае вытянутого тела необходим дополнительный анализ задач дифракции.

2. Система геодезических координат и анзац

Пусть поверхность вращения задается в цилиндрической системе координат (r, φ, z) уравнением $r = r(z)$. В случае сильно вытянутого тела функция $r(z)$ является медленно меняющейся. Мы предполагаем, что

$$r, r'(z) \ll 1. \tag{1}$$

В полуплоскости $\varphi = 0$ введем длину геодезической s и нормаль к поверхности n. Построение асимптотики волн соскальзывания будем проводить в системе координат (s, φ, n). Для того, чтобы переписать уравнение Гельгольца и систему уравнений Максвелла в координатах s, φ, n, потребуется матрица квадратичных форм g_{ij}. Обычно (см., например, [3]) для построения старшего члена асимптотики достаточно знать разложение этой матрицы по степеням n лишь до линейных членов. В нашем случае нам потребуется точное выражение

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2\left(1 + \frac{n}{\rho_t}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь ρ и ρ_t главные радиусы кривизны поверхности, величина h характеризует расходимость пучка геодезических и пропорциональна радиусу тела r. Радиусы кривизны выражаются через функцию $r(z)$ по формулам

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{r_{zz}}{(1 + r_z^2)^{3/2}}, \quad \rho_t = \frac{1 - r_z^2}{1 + r_z^2}.$$

Мы считаем, что масштаб z и, соответственно, s выбран таким образом, что $\rho(s) = O(1)$. Ограничения (1) приводят к малости ρ_t. Мы будем считать нормализованный радиус поперечной кривизны

$$\kappa = 2M^2\frac{\rho_t}{\rho}, \quad M = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}$$

величиной порядка $O(1)$.

Асимптотику волн соскальзывания (акустического давления в скалярной задаче дифракции и всех компонент электрического и магнитного векторов в задаче дифракции для уравнений Максвелла) будем искать в стандартном виде [3] метода пограничного слоя

$$u = \exp\{iks + ik^{1/3}p(s, \varphi)\} \sum U_j(s, \varphi, \nu_1)k^{-j/3}, \quad \nu_1 = k^{2/3}n. \tag{3}$$

Здесь ν_1 – растянутая нормаль, определяющая толщину пограничного слоя. Предполагается, что функции U_j не содержат быстрой зависимости от своих аргументов, то есть все производные U_j предполагаются порядка $O(1)$. Зависимость от времени дается множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опущен.

В [2] показано, что существенные физические эффекты проявляются в случае сильно вытянутого тела, когда отношение радиусов кривизн ρ/ρ_t сравнимо с квадратом большого параметра $M = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}$. В этом случае в зону пограничного слоя попадает все поперечное сечение тела и формулы теряют локальность по переменной φ. Для тела вращения произведем разложение поля в ряд Фурье по угловой переменной и далее будем предполагать зависимость от φ в виде $e^{im\varphi}$.

3. Скалярные волны

Подставляя выражение (3) в уравнение Гельмгольца, предварительно записанное в координатах (s, φ, n), и приравнивая члены одного порядка по k, получим систему рекуррентных уравнений для последовательного определения функций U_j. Отношение n/ρ_t в пограничном слое становится порядка единицы. В результате бинормальная кривизна появляется в первом уравнении рекуррентной системы

$$L_0 U_0 = 0, \quad L_0 U_1 + L_1 U_0 = 0 \quad \ldots,$$

где операторы имеют вид

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial \nu} + \left(\nu - \frac{m^2}{\nu^2} - \xi\right) \tag{4}$$

$$L_1 = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}\left(2i\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial \rho_t/\partial s}{\rho_t}\,\frac{\kappa}{\nu}\right). \tag{5}$$

Здесь введена смещенная нормальная координата

$$\nu = 2M^2\frac{\rho_t + n}{\rho}$$

и параметр ξ, связанный с функцией $p(s)$ из (3) формулой

$$p(s) = 2^{-1/3}\int\limits_0^s \frac{\xi - \kappa}{\rho^{2/3}}\,ds.$$

Уравнение $L_0U_0 = 0$ рассматривается на полуоси $\nu \geqslant \kappa$ при граничном условии

$$\frac{\partial U_0(s,\kappa)}{\partial \nu} + iMZU_0(s,\kappa) = 0 \tag{6}$$

и условии излучения на бесконечности. Это уравнение определяет зависимость поля волны соскальзывания от нормали

$$U_0(s,\nu) = A_0(s)V(\nu;\xi,m), \tag{7}$$

где функция V – решение задачи Штурма–Лиувилля для биконфлюентного уравнения Гойна [4]

$$V'' + \frac{1}{\nu}V' + \left(\nu - \xi - \frac{m^2}{\nu^2}\right)V = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет две сингулярные точки: одну регулярную при $\nu = 0$, другую иррегулярную на бесконечности. Асимптотика произвольного решения при больших ν содержит два слагаемых с экспоненциальными множителями $\exp\left(\pm\frac{2i}{3}\nu^{3/2}\right)$. Условие излучения отбирает слагаемое, имеющее экспоненту со знаком плюс.

Условие (6) становится уравнением на параметр ξ

$$V'(\kappa;\xi,m) + iMZV(\kappa;\xi,m) = 0. \tag{9}$$

Для получения равномерной по импедансу Z асимптотики, из которой предельными переходами $Z \to 0$ и $Z \to \infty$ получаются решения задачи Неймана и заддачи Дириле, величину MZ считаем порядка $O(1)$.

Уравнение в следующем порядке по k позволяет определить амплитуду $A_0(s)$ в (7). Задача Штурма–Лиувилля для функции U_1 записана на собственном значении и, следовательно, разрешима лишь при выполнении условия ортогональности правой части решению однородного союзного уравнения. Перепишем сначала уравнение Гойна в симметричной форме, не содержащей первой производной

$$L_0V(\nu;\xi) = \nu^{-1/2}\left[\frac{d^2}{d\nu^2} + \left(\frac{1/4 - m^2}{\nu^2} + \nu - \xi\right)\right](\nu^{1/2}V(\nu;\xi,m)) = 0. \tag{10}$$

Теперь условие разрешимости может быть записано в виде

$$\int_{\kappa}^{+\infty} V(\nu;\xi)\left(2i\frac{\partial U_0}{\partial s}+i\frac{\partial\rho_t/\partial s}{\rho_t}\,\frac{\kappa}{\nu}\,U_0\right)\nu d\nu=0.$$

Подставляя выражение для U_0 и проводя дифференцирование по s, после ряда преобразований условие разрешимости можноперееписать в виде дифференциального уравнения для амплитуды $A_0(s)$. Решение этого уравнения может быть получено в явном виде

$$A_0(s)=A_0(0)\sqrt[3]{\frac{\rho(0)}{\rho(s)}}\sqrt{\frac{I_1(0)}{I_1(s)}}. \tag{11}$$

Здесь введен интеграл

$$I_1=\int_{\kappa}^{+\infty} V^2(\nu;\xi,m)\nu d\nu.$$

Полученная асимптотика при $m=0$ совпадает с приведенной в [2]. Важную роль в асимптотическом разложении играет параметр ξ, мнимая часть которого характеризует скорость убывания волны соскальзывания. Результаты численного исследования уравнения (9) приведены в параграфе 4. Для умеренно вытянутого тела, в предположении $\kappa\gg 1$, величина ξ может быть получена из рассмотрения задачи для волн соскальзывания на поверхности, описываемой импедансным граничным условием с эффективным импедансом [5]

$$Z_{\text{eff}}=Z+\frac{i}{2\kappa M}.$$

3.1. Волны соскальзывания для уравнений Максвелла

Введем вспомогательные вектор-функции $\vec{E}=\sqrt{\varepsilon}\,\mathcal{E}$ и $\vec{H}=\sqrt{\mu}\,\mathcal{H}$. Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\operatorname{rot}\vec{E}=ik\vec{H},\quad \operatorname{rot}\vec{H}=-ik\vec{E},$$

где $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Все компоненты векторов будем искать в форме (3). Естественно предположить, что угловые компоненты E^{φ} и H^{φ} – асимптотически велики и имеют порядок $O(k^{2/3})$, что дает порядок тангенциальной компоненты $O(1)$. Таким образом, для удобства введем величины $E = k^{2/3}E^{\varphi}$ и $H = k^{2/3}H^{\varphi}$. Учитывая (2) для матрицы квадратичных форм, перепишем уравнения Максвелла для компонент электромагнитного вектора в координатах s, φ, n и после подстановки представления (3) приравняем члены одного порядка по большому параметру k. Часть полученных уравнений позволяет выразить компоненты E^n, E^s, H^n и H^s через E и H. Приведем лишь выражения в двух старших порядках

$$E_0^s = 0, \quad E_0^n = -(\kappa_1 + \nu_1)H_0, \quad E_1^s = -mE_0 - i(\kappa_1 + \nu_1)\frac{\partial H_0}{\partial \nu_1} - 2iH_0,$$

$$H_0^s = 0, \quad H_0^n = (\kappa_1 + \nu_1)E_0, \quad H_1^s = -mH_0 + i(\kappa_1 + \nu_1)\frac{\partial E_0}{\partial \nu_1} + 2iE_0.$$

Здесь введена $\kappa_1 = k^{2/3}\rho_t$. Оставшиеся уравнения образуют вырожденную систему, условия совместности которой могут быть записаны в виде обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент E и H. В старшем порядке имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 E_0 - \frac{2im}{\nu^2} H_0 = 0 \\ L_0 H_0 + \frac{2im}{\nu^2} E_0 = 0 \end{array} \right., \tag{12}$$

где

$$L_0 = \frac{d^2}{d\nu^2} + \frac{3}{\nu}\frac{d}{d\nu} + \left(\nu - \frac{m^2}{\nu^2} - \xi\right).$$

В следующем порядке система становится неоднородной

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 E_1 - \frac{2im}{\nu^2} H_1 = L_1 E_0 \\ L_0 H_1 + \frac{2im}{\nu^2} E_1 = L_1 H_0 \end{array} \right.. \tag{13}$$

Здесь

$$L_1 = i\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \left\{ 2\frac{\partial}{\partial s} + 3\frac{\rho_t'}{\rho_t}\,\frac{\kappa}{\nu} \right\}.$$

Системы уравнений (12), (13) и все последующие уравнения в рекуррентной системе рассматриваются для функций, удовлетворяющих условиям излучения, которые, аналогично случаю скалярных волн, фиксируют экспоненту $\exp(2i/3\nu^{3/2})$ в асимптотике на бесконечности, и граничным условиям. Эти граничные условия следуют из условий для электрического и магнитного векторов на импедансной поверхности

$$\vec{E} - \epsilon_n(\vec{E}, \epsilon_n) = Z\,\epsilon_n \wedge \vec{H},$$

где ϵ_n – единичный вектор нормали к поверхности и Z – импеданс. Подставляя выражения для компонент векторов, граничные условия могут быть переписаны следующим образом

$$\frac{dE_j}{d\nu} + \left(\frac{2}{\kappa} + i\frac{M}{Z}\right) E_j + \frac{im}{\kappa}\,H_j = 0 \tag{14}$$

и

$$\frac{dH_j}{d\nu} + \left(\frac{2}{\kappa} + iMZ\right) H_j - \frac{im}{\kappa}\,E_j = 0, \tag{15}$$

где j принимает значения 0 и 1.

Для $m = 0$ система распадается на две независимые задачи Штурма–Лиувилля для компонент E и H. Старшие члены асимптотики в этом случае могут быть построены аналогично скалярному случаю. Введем решение уравнения Гойна

$$W''(\nu;\xi,0) + \frac{3}{\nu}\,W'(\nu;\xi,0) + (\nu - \xi)W(\nu;\xi,0) - 0, \tag{16}$$

удовлетворяющее условию излучения. Тогда параметр ξ находится из граничных условий (14) или (15). В первом случае компонента H магнитного вектора равна нулю и в старшем порядке волна соскальзывания является трансверсально поляризованной электрической волной с параметром затухания, определяемым из уравнения

$$W'(\kappa;\xi,0) + \left(\frac{2}{\kappa} + iMZ^{-1}\right) W(\kappa;\xi,0) = 0. \tag{17}$$

Для другой волны нулю равна компонента E и в старшем порядке волна оказывается трансверсально поляризованной магнитной волной соскальзывания. Параметр затухания для этой волны находится из аналогичного уравнения, в котором Z^{-1} заменено на Z.

Амплитуды волн соскальзывания определяются из условий разрешимости для системы уравнений (13). Как и в случае скалярных волн, условие разрешимости записывается в виде дифференциального уравнения для амплитуд и его решение может быть найдено явно. Мы приводим формулу лишь для магнитной волны соскальзывания

$$H_0 = A_0(0)\rho^{-2/3} I_3^{-1} W(\nu;\xi,0), \tag{18}$$

где

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} W^2(\nu;\xi,0)\nu^3 d\nu.$$

Если $m \neq 0$, система дифференциальных уравнений и граничные условия не распадаются на две независимые задачи Штурма–Лиувилля, что является естественным, поскольку волны бегут по геодезическим с большим кручением порядка $k^{2/3}$, а члены, которые препятствуют разделению, как раз пропорциональны кручению. Тем не менее, вводя функции $\Psi_\pm$

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ E_0 \end{pmatrix} = A_0(s)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\Psi_+(\nu;\xi,m)}{\Psi_+(\kappa;\xi,m)} + B_0(s)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\Psi_-(\nu;\xi,m)}{\Psi_-(\kappa;\xi,m)},$$

систему (12) можно разделить на два независимых уравнения для функций $\Psi_\pm$

$$\left\{ L_0 \pm \frac{2m}{\nu^2} \right\} \Psi_\pm(\nu;\xi,m) = 0. \tag{19}$$

Из граничных условий следует система для амплитуд $A_0(s)$ и $B_0(s)$

$$\begin{cases} \left(\frac{\Psi'_+}{\Psi_+} + \frac{2-m}{\kappa} + iQ\right) A_0 + iPB_0 = 0 \\ iPA_0 + \left(\frac{\Psi'_-}{\Psi_-} + \frac{2+m}{\kappa} + iQ\right) B_0 = 0 \end{cases}. \tag{20}$$

где

$$Q = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{Z} + Z\right), \quad P = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{Z} - Z\right).$$

Нетрвиальное решение системы (20) существует, если определитель матрицы обращается в нуль. Это условие дает уравнение для параметра ξ, от которого зависит оператор L_0

$$\left(\frac{\Psi'_+(\kappa;\xi,m)}{\Psi_+(\kappa;\xi,m)} + \frac{2-m}{\kappa} + iQ\right)\left(\frac{\Psi'_-(\kappa;\xi,m)}{\Psi'_-(\kappa;\xi,m)} + \frac{2+m}{\kappa} + iQ\right) + P^2 = 0. \tag{21}$$

Здесь функция $\Psi_\pm$ удовлетворяют уравнением (19) и условию излучения. В случае идеально проводящего тела, аналогичные выкладки приводт к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + B_0 = 0 \\ \left(\frac{\Psi'_+(\kappa;\xi,m)}{\Psi_+(\kappa;\xi,m)} + \frac{2}{\kappa}\right) A_0 - \left(\frac{\Psi'_-(\kappa;\xi,m)}{\Psi_-(\kappa;\xi,m)} + \frac{2}{\kappa}\right) B_0 = 0 \end{array} \right. \tag{22}$$

и уравнению

$$\frac{\Psi'_+(\kappa;\xi,m)}{\Psi_+(\kappa;\xi,m)} + \frac{\Psi'_-(\kappa;\xi,m)}{\Psi_-(\kappa;\xi,m)} + \frac{4}{\kappa} = 0 \tag{23}$$

для параметра ξ. Ниже будет рассмотрен только этот случай.

В следующем порядке векторная задача Штурма–Лиувилля становится неоднородной и зависимость амплитуд A_0 и $B_0 = -A_0$ от s находится из условий разрешимости. Чтобы записать эти условия и уравнение переноса для амплитуды $A_0(s)$, перепишем оператор задачи в симметричной форме

$$\nu^{-3/2}\left\{\frac{d^2}{d\nu^2} + \nu - \frac{m^2 + 3/4 \mp 2}{\nu^2} - \xi\right\}(\nu^{3/2}\Psi_\pm(\nu;\xi,m)) = 0. \tag{24}$$

Условие разрешимости записывается в виде дифференциального уравнения для амплитуды $A_0(s)$. После громоздких преобразований, использующих интегрирование по частям и свойства функции $\xi(s)$ как решения уравнения (23), это уравнение может быть упрощено

$$A'_0(s) + \left(\frac{2\rho'(s)}{3\rho(s)} + \frac{1}{2}\,\frac{J'_3(s)}{2J_3(s)}\right) A_0(s) = 0,$$

где

$$J_3(s) = \int\limits_\kappa^{+\infty} \nu^3 \left(\frac{\Psi_+^2(\nu;\xi,m)}{\Psi_+^2(\kappa;\xi,m)} + \frac{\Psi_-^2(\nu;\xi,m)}{\Psi_+^2(\kappa;\xi,m)}\right) d\nu.$$

Окончательно в старшем порядке асимптотика электромагнитного поля может быть записана в следующей форме

$$\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} = A_0(0)\exp\left\{iks + im\varphi + ik^{1/3}\int\limits_0^s \frac{\xi(s) - \kappa(s)}{2^{1/3}\rho^{2/3}(s)}\right\}$$

$$\times \rho^{-2/3}(s) J_3^{-1/2}(s)\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\Psi_+(\nu;\xi,m)}{\Psi_+(\kappa;\xi,m)} + \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\frac{\Psi_-(\nu;\xi,m)}{\Psi_-(\kappa;\xi,m)}\right\}. \tag{25}$$

Амплитуда $A_0(0)$ в (25) – произвольная постоянная, определяемая падающим полем или источником.

4. Численный анализ дисперсионных уравнений

Рассмотрим дисперсионные уравнения для параметра затухания ξ. Для скалярных волн – (9), для “невращающихся” ($m=0$) электтромагнитных волн соскальзывания на идеально проводящем теле – (17) с $Z^{-1}=0$ или с $Z=0$. Для “вращающихся” волн соскальзывания параметр ξ определяется из уравнения (23).

Чтобы вычислить значение параметра ξ сначала надо найти удовлетворяющее условию излучения решение соответствующего уравнения Гойна. Для решений уравнения Гойна нет явного интегрального представления, поэтому численно решалось само дифференциальное уравнение при помощи метода Рунге–Кутта 4-го порядка. Затем итерационным методом Ньютона вычислялся параметр ξ как решение соответствующего трансцендентного уравнения. Для достижения быстрой сходимости метода Рунге–Кутта из искомого решения уравнения Гойна при больших ν выделялся быстро осциллирующий множитель. Например, для уравнений (19) функции $\Psi_\pm$ были представлены в виде

$$\Psi_\pm(\nu;\xi,m)=\nu^{-3/2}(\nu-\xi)^{-1/4}\exp\left(\frac{2i}{3}\,z\right)Z_\pm(z;\xi,m),\qquad z=(\nu-\xi)^{3/2}. \tag{26}$$

Тогда функции $Z_\pm$ должны удовлетворять уравнениям

$$Z''_\pm(z;\xi,m)+\frac{4i}{3}\,Z'_\pm(z;\xi,m)+$$

$$+\frac{1}{z^2}\left(\frac{5}{36}-\frac{4m^2+3\mp 8m}{9}\,(1+\xi z^{-2/3})^{-2}\right)Z_\pm(z;\xi,m)=0. \tag{27}$$

В численном отношении уравнения (27) предпочтительно решать для больших z. Когда z мало и $\nu\to\xi$, множитель в (26) имеет точку ветвления и аналогичная особенность присутствует в уравнении (27). Уравнение (24), напротив, более удобно в том случае, когда ν мало.

Построение решений $\Psi_\pm$ уравнений Гойна (19) проводилось в два этапа: сначала метод Рунге–Кутта применялся к задаче Коши для функций $Z_\pm(z;\xi)$ с начальными данными $Z_\pm=1$, $dZ_\pm/dz=0$ в $z=z_\infty\gg 1$. В результате удавалось приблизиться к области малых значений z и в некоторой точке $z=z_*$ происходил переход к численному решению уравнений (24). Затем при помощи метода Ньютона минимизировалась невязка в дисперсионном уравнении (23).

Вычисления были проведены для скалярных волн при $m = 0$ и электромагнитных волн при $m = 0$ и $m = 1$. Графики мнимой части параметра ξ от нормализованного радиуса поперечной кривизны κ приведены на Рис. Кривые b) и d) соответствуют скалярным волнам на акустически мягкой и акустически жесткой поверхностях. Кривые c) и e) отвечают электрической и магнитной волнам соскальзывания для $m = 0$. Легко заметить, что при больших значениях κ параметр затухания $\xi - \kappa$ приближается к корням функции Эйри w_1 или корням ее производной. Кривые, показанные тонкими линиями, дают асимптотику ξ, полученную при помощи эффективного импедансного граничного условия.

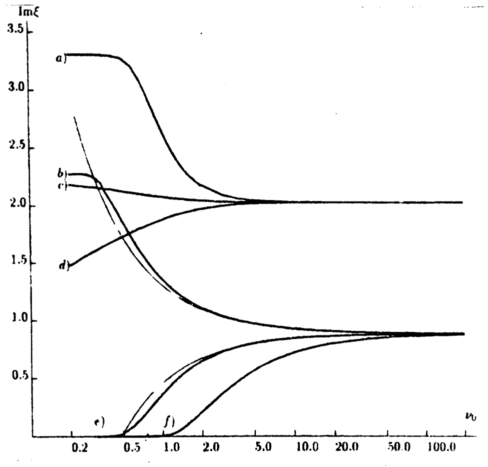

Рис. Зависимости $\mathrm{Im}\,\xi$, определяющей затухание волн соскальзывания, от нормализованного радиуса бинормальной кривизны κ.

Формулы в предыдущем параграфе были написаны в предположении $\Psi_\pm \neq 0$ на поверхности, при $\nu = \kappa$. Однако, в пределе больших κ часть решений дисперсионного уравнения (23) стремится к нулям функции Эйри $w_1(\xi)$ (кривая a)), в то время как оставшиеся решения приближаются к нулям ее производной (кривая f)). Соответствующие волны становятся электрической и магнитной трансверсально поляризованными волнами, когда $\kappa \to \infty$. При малых значениях нормализованного радиуса поперечной кривизны магнитная волна при $m = 0$ и квазимагнитная волна при $m = 1$ становятся почти незатухающими.

5. Заключение

Электромагнитные волны соскальзывания на сильно вытянутых телах имеют специфическую высокочастотную асимптотику, выражающуюся через биконфлюентные функции Гойна. В случае $m = 0$ продолжение электромагнитного поля волн соскальзывания внутрь тела сингулярно на оси вращения и соответствующие волны не возникают при падении регулярной пространственной волны. Однако можно вообразить возбуждение таких волн при помощи разности потенциалов, приложенных к поверхности тела.

Более естественными являются электромагнитные волны, зависящие от угла вращения посредством множителя $\epsilon^{i\varphi}$. Главным образом эти волны возбуждаются при падении плоской волны вдоль оси симметрии тела. Зависящие от угла посредством множителя $\epsilon^{im\varphi}$ волны соскальзывания на поверхности сильно вытянутого тела по своим свойствам отличаются от волн на обычном, невытянутом теле и от волн на сильно вытянутом теле, которые не зависят от угла $\varphi(m = 0)$. Эти волны не являются чисто электрической и чисто магнитной, и их поле в поперечном сечении выражается не одним решением уравнения Гойна, как в случае $m = 0$, а парой функций, удовлетворяющих двум разным уравнениям Гойна, отличающимся коэффициентом. Указанный эффект имеет простое физическое объяснение. Волны, содержащие угловую зависимость $\epsilon^{i\varphi}$, бегут по геодезическим вдоль винтовых линий вокруг сильно вытянутого тела. Кручение таких геодезических асимптотически велико, и перекрестные члены магнитного и электрического полей появляются уже в старшем порядке, а не в поправках, как в случае кручения порядка $O(1)$ на обычном теле. В результате вместо H и E появляются поля Ψ_+ и Ψ_-, в которых отличны от нуля трансверсальные компоненты и магнитного, и электрического полей.

Параметр затухания, играющий важную роль в асимптотике волн соскальзывания, определяется из более сложного уравнения, содержащего обе функции Ψ_+ и Ψ_-. Это дисперсионное уравнение справедливо как для квазиэлектрической, так и для квазимагнитной волн соскальзывания. Как показал численный анализ этого уравнения, при уменьшении радиуса поперечной кривизны параметр затухания квазимагнитной волны приближается к вещественной оси. Аналогичный эффект наблюдается и для независящей от угла φ магнитной волны.

Литература

1. S. Hong, *Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surfaces of variable curvature.* — J. Math. Physics **8**, No. **6** (1967), 1223–1232.
2. I. Andronov, D. Bouche, *Asymptotics of creeping waves on a strongly prolate body.* — Ann. Télécomm. **49**, Nos. **3–4** (1994), 205–210.
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Л., 1974.
4. S. Yu. Slavyanov, W. Lay, A. Seeger, *The classification of Heun's equation and its special and confluent cases.* in: A. Ronveaux, Ed., Heun Equation, Oxford University Press, 1995.
5. I. V. Andronov, D. Bouche, *Creeping waves on strongly prolate bodies.* Proc. of the 1995 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, pp. 404–406, St. Petersburg, May 1995.

Creeping waves on a strongly elongated body of revolution. Andronov I. V.

The creeping waves in the problem of diffraction by smooth convex body play an important role as they give the asymptotics of the diffracted field in the shaddow. The known results, obtained by the boundary layer method do not explain the properties of the creeping waves on strongly elongated bodies. In this paper the creeping waves on strongly elongated bodies when the binormal curvature is asymptoticaly large are studied. The derived asymptotics contains solutions of the Heun differential equation. The numerical analysis of the dispersion euqation is carried out and shows that magnetic creeping wave travels along the surface of elongated body with essentially smaller attenuation compared to the predication of usual theory.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 20 октября 1997 г.