С. А. Назаров

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ В ОБЛАСТЯХ, ИМЕЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВЫХОДЫ НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

1. Введение. Рассматриваются матрицы дифференциальных операторов специальной структуры, вообще говоря, не самосопряженные формально. Пусть порядки скалярных операторов $\Lambda_{h_j}(x, D_x)$, элементов матрицы $\Lambda(x, D_x)$ размером $N \times T$, равны $t_j \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ и

$$\mathcal{L}(x, D_x) = \Lambda(x, D_x)^*(A(x) + iB(x))\Lambda(x, D_x). \tag{1}$$

Здесь A и B – симметрические матрицы-функции, имеющие размеры $N{\times}N$ (N и T – натуральные числа), A положительно определена при всех $x \in \mathbb{R}^n$; Λ^* – оператор, формально сопряженный с Λ, $D_x = -i\,\mathrm{grad}$, $i = \sqrt{-1}$. Считаем, что коэффициенты всех возникающих операторов являются гладкими функциями переменных $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ (t – знак транспонирования; векторы интерпретируются как столбцы). Ясно, что элементы $\mathcal{L}_{h_j}$ матрицы (1) имеют порядки $t_k + t_j$.

Предположим, что матрица Λ *алгебраически комплектна*, т.е. для любой строки полиномов $P = (P_1, \dots, P_T)$, подчиненной условию обобщенной однородности с показателем $\rho \geqslant \rho_\Lambda \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$P_k(z\xi) = z^{t_k+\rho}\, P_k(\xi) \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}_+,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

найдется строка дифференциальных операторов $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$, такая, что

$$P(D_x) = Q(x, D_x)\Lambda(x, D_x). \tag{2}$$

Как показано в [1], это условие обеспечивает неравенство Гординга–Корна. Именно, пусть $u = (u_1, \dots, u_T)^t \in \mathcal{D}^0 H(\Xi)$, причем Ξ – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\overline{\Xi}$ и при $\ell \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{D}^\ell H(\Xi) = H^{\ell+t_1}(\Xi)\times\ldots\times H^{\ell+t_T}(\Xi). \tag{3}$$

Тогда для формы

$$a(u,v;\Xi) = (A\Lambda u, \Lambda v)_\Xi + i(B\Lambda u, \Lambda v)_\Xi \tag{4}$$

справедливо неравенство

$$\|u;\mathcal{D}^0 H(\Xi)\|^2 \leqslant c\left\{\mathrm{Re}(a(u,u;\Xi)) + \|u;L_2(\Xi)^T\|^2\right\}. \tag{5}$$

В (4) и далее под $(\ ,\ )_\Xi$ подразумевается скалярное произведение в $L_2(\Xi)^s$ (или его расширение) при любом s.

Известно (см. [2, 3] и др.), что из (5) вытекает корректность обобщенной постановки краевых задач с оператором (1).

В [4] установлено, что алгебраическая комплектность Λ гарантирует *полиномиальное свойство формы* (4), т.е. следующее утверждение: для любой области $\Xi \in \mathbb{R}^n$ с гладкой границей

$$a(u,u;\Xi) = 0,\ \ u \in C^\infty(\overline{\Xi})^T \iff u \in \mathcal{P}\big|_\Xi; \tag{6}$$

здесь $\mathcal{P}$ – некоторый конечномерный линеал векторных полиномов. (Формула (6) вытекает из (2), (4) и положительности матрицы A, причем $\mathcal{P}$ не зависит от A, B и состоит из полиномов $p = (p_1,\ldots,p_T)^t$, для которых $\Lambda p = 0$. Кроме того, $\deg p_k \leqslant \rho_\Lambda + t_k$.) Отметим, что понятие *полиномального свойства пары* $\{\mathcal{L}, a\}$ приспособлено в [4] к операторам более общей структуры, нежели (1), в частности, к оператору Стокса (см., например, [5]).

Полиномиальное свойство весьма полезно для описания многих атрибутов краевых задач в областях с кусочно гладкой границей или с выходами на бесконечность (см. [6–8], а также гл. 5–8, 13 книги [9]). Все известные результаты относятся к случаю формально самосопряженных матричных операторов. Идея доказательств проста: функция u выбирается так, чтобы при подстановке на обе позиции в формулу Грина часть слагаемых исчезала и получалось равенство $a(u,u;\Xi) = 0$, означающее, что $U \in \mathcal{P}$ в силу (6). Последнее включение используется либо для идентификации ядра оператора краевой задачи, либо для отрицания предположенного свойства (если u – заведомо не полином). К сожалению, такая идея не годится для несамосопряженных дифференциальных операторов, поскольку зачастую она подразумевает, что используемая функция u обязана удовлетворять обеим, и исходной и формально сопряженной, задачам, которые различаются для оператора $\mathcal{L}$ при $B \neq 0$. В настоящей статье предлагаются новые соображения, позволяющие перенести ряд установленных ранее теорем на случай оператора (1), но основное внимание уделяется задаче в области с цилиндрическими выходами на бесконечность. Подчеркнем, что операторы вида (1) встречаются в прикладных дисциплинах, в частности, в теории упругости пьезоэлектрических тел (см., например, [10] и конец статьи).

2. Краевая задача и ее эллиптичность. Оператор (1), где i заменено на $\pm i$, обозначаем $\mathcal{L}^{\pm}$; аналогично истолковываем символы $a^{\pm}$ (см. (4)). Для $u,\ v \in C^{\infty}(\Xi)^T$ справедлива формула Грина

$$(\mathcal{L}^{\pm} u, v)_{\Xi} + (\mathcal{N}^{\pm} u, \mathcal{D} v)_{\partial\Xi} = a^{\pm}(u, v; \Xi), \tag{7}$$

где $\mathcal{D}$ – система Дирихле, $\mathcal{N}^{\pm}$ – оператор краевых условий Неймана (разумеется, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}^{\pm}$ связываются с областью Ξ, но это не указывается в обозначениях). Имеет место представление

$$\mathcal{N}^{\pm}(x, D_x) = \mathcal{N}^0(x, D_x)\ (A(x) \pm iB(x))\Lambda(x, D_x), \tag{8}$$

где оператор $\mathcal{N}^0$, как и $\mathcal{D}$, не зависит от знака “$\pm$”. Размеры матриц $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}^{\pm}$ и $\mathcal{N}^0$ равны $m \times T$ и $m \times N$ соответственно; здесь $m = t_1 + \ldots + t_T$.

Образуем $m \times T$-матрицы $\mathcal{B}^{\pm}$ и $\mathcal{T}^{\pm}$ из строк $\mathcal{B}^{\pm}_q$ и $\mathcal{T}^{\pm}_q$, выбранных одним из следующих двух способов:

$$\mathcal{B}^{\pm}_q = \mathcal{N}^{\pm}_q,\ \mathcal{T}^{\pm}_q = \mathcal{D}_q \quad \text{или} \quad \mathcal{B}^{\pm}_q = \mathcal{D}_q,\ \mathcal{T}^{\pm}_q = -\mathcal{N}^{\pm}_q \tag{9}$$

(своим для каждого $q = 1, \ldots, m$, но не меняющимся при переходе от “+” к “−”). Положим $\operatorname{ord} \mathcal{B}^{\pm}_{qj} = r_q + t_j$.

Пусть сначала Ω – подобласть $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей и компактным замыканием. В согласии с (7) при $\Xi = \Omega$ и (9) построим операторы $\mathcal{B}^{\pm}$ смешанных краевых условий и рассмотрим пару краевых задач

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\pm}(x, D_x) u(x) &= f(x),\ x \in \Omega, \\ \mathcal{B}^{\pm}(x, D_x) u(x) &= g(x),\ x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

в которых $f = (f_1, \ldots, f_T)^t$ и $g = (g_1, \ldots, g_m)^t$. Если $\mathcal{B}^{\pm} = \mathcal{D}$ или $\mathcal{B}^{\pm} = \mathcal{N}^{\pm}$, то получаем задачи Дирихле или Неймана.

Из (7) и (9) вытекает "полная" формула Грина

$$(\mathcal{L}^+ u, v)_\Omega + (\mathcal{B}^+ u, \mathcal{T}^+ v)_{\partial\Omega} - (u, \mathcal{L}^- v)_\Omega - (\mathcal{T}^- u, \mathcal{B}^- v)_{\partial\Omega} = 0, \qquad (11)$$

т.е. задачи (10;+) и (10;−) формально сопряжены.

Полиномиальное свойство (6) обеспечивается ограничениями, наложенными на Λ и A (от B требуется лишь симметричность), и потому имеется в обоих случаях "$\pm$". Допустим, что оно наследуется при замораживании коэффициентов в операторе $\mathcal{L}^\pm$ и форме $a^\pm$ (например, при всех $x^0 \in \overline{\Omega}$ матрица $\Lambda^0(D_x)$, составленная из главных в точке x^0 частей операторов $\Lambda_{h_j}(x, D_x)$, сохраняет алгебраическую комплектность). Тогда по существу дословное повторение доказательств теорем 4.1 и 4.2 из [4] приводит к следующему утверждению.

Теорема 1. *Задача* (10) *эллиптическая и ее оператор*

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_\ell^\pm : \mathcal{D}^\ell H(\Omega) \to \mathcal{R}^\ell H(\Omega, \partial\Omega) \equiv \\ \equiv \prod_{k=1}^{T} H^{\ell - t_k}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{m} H^{\ell - r_q - 1/2}(\partial\Omega) \end{gathered} \qquad (12)$$

является фредгольмовым при $\ell \geqslant \max\{t_1, \dots, t_T, r_1{+}1, \dots, r_m{+}1\} \equiv \ell_0$ *и обладает нулевым индексом. К тому же,*

$$\begin{aligned} \ker \mathcal{A}_\ell^\pm &= \mathcal{P}_\Omega \equiv \left\{ p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}^\pm p = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \right\}, \\ \operatorname{coker} \mathcal{A}_\ell^\pm &= \left\{ (p, \mathcal{T}^\pm p\big|_{\partial\Omega}) : p \in \mathcal{P}_\Omega \right\}, \end{aligned} \qquad (13)$$

т.е. любое решение однородной задачи (10) *оказывается полиномом из* $\mathcal{P}_\Omega$, *а условия разрешимости неоднородной задачи имеют вид*

$$(f, p)_\Omega + (g, \mathcal{T}^\pm p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_\Omega. \qquad (14)$$

Подчеркнем, что линеал $\mathcal{P}_\Omega$, определенный в (13), безразличен к выбору знака "$\pm$". В самом деле, строки $\mathcal{B}_q^\pm = \mathcal{D}_q$ одинаковы и благодаря (8) обе строки $\mathcal{B}_q^\pm = \mathcal{N}_q^\pm$ аннулируют *любой* полином из $\mathcal{P}$.

Далее под Ω понимается область с цилиндрическими выходами на бесконечность. Пусть Q^μ – цилиндры $\{(y^\mu, z^\mu) \in \mathbb{R}^n : y^\mu \in \omega^\mu, z^\mu \in \mathbb{R}^2\}$, где ω^μ – область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой границей и компактным замыканием, а (y^μ, z^μ) – декартовы системы координат, свои для каждого $\mu = 1, \dots, M$. Введем полуцилиндры

$Q^\mu_+ = \{(y^\mu, z^\mu) \in Q^\mu : z^\mu > 0\}$ и предположим, что они попарно непересекающиеся. Теперь Ω – область с гладкой границей, совпадающая вне некоторого шара с объединением $Q^1_+ \cup \ldots \cup Q^M_+$.

В Ω ставится краевая задача (10) с оператором

$$\mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} : \mathcal{D}^\ell_\beta W(\Omega) \to \mathcal{R}^\ell_\beta W(\Omega, \partial\Omega), \tag{15}$$

причем векторные пространства конструируются из $W^\ell_\beta(\Omega)$ и $W^{\ell-1/2}_\beta(\partial\Omega)$ при помощи формул, аналогичных (3) и (12). Сам класс $W^\ell_\beta(\Omega)$ определяется как пополнение $C^\infty_0(\Omega)$ по норме $\|w; W^\ell_\beta(\Omega)\| = \|\rho_\beta w; H^\ell(\Omega)\|$, где ρ_β – гладкая и положительная на $\overline{\Omega}$ весовая функция, равная $\exp(\beta z^\mu)$ на $Q^\mu_+ \setminus \Omega$, $j = 1, \ldots, J$. Если $\ell \in \mathbb{N}$, то $W^{\ell-1/2}_\beta(\partial\Omega)$ – следовое пространство с ествественной нормой

$$\|v; W^{\ell-1/2}_\beta(\partial\Omega)\| = \inf\left\{\|w; W^\ell_\beta(\Omega)\| \mid w = v \quad \text{на} \quad \partial\Omega\right\}.$$

В случае стабилизации коэффициентов дифференциальных операторов $\mathcal{L}^\pm$ и $\mathcal{B}^\pm$ на бесконечности (в каждом из выходов) отображение (15) непрерывно при натуральном $\ell \leqslant \ell_0$ и любом весовом индексе $\beta \in \mathbb{R}$. Условия его фредгольмовости, вытекающие из результатов [11] (см. также гл. 3, 5 [9]), обсуждаются в следующих разделах.

Формулы Грина (7) и (11) в Ω выполняются изначально для u, $v \in C^\infty_0(\overline{\Omega})^T$. По непрерывности они распространяются на пары $u \in \mathcal{D}^\ell_\beta W(\Omega)$ и $v \in \mathcal{D}^\ell_{-\beta} W(\Omega)$. Таким образом, $\mathcal{A}^+_{\ell,\beta}$ и $\mathcal{A}^-_{\ell,-\beta}$ – операторы формально сопряженных задач.

3. Операторные пучки. Предположим, что в $Q^+_j \setminus \Omega$ оператор $\Lambda(x, D_x)$ и матрицы $A(x)$, $B(x)$ с экспоненциальной скоростью $O(\exp(-\delta_1 z^\mu))$ стабилизируются к $\Lambda^\mu(y^\mu, D_{y^\mu}, D_{x^\mu})$ и $A^\mu(y^\mu)$, $B^\mu(y^\mu)$ соответственно (в частности, $|D^\alpha_x(A_{pq}(x) - A^\mu_{pq}(y^j))| \leqslant c_\alpha \exp(-\delta_1 z^\mu)$ при любом мультииндексе α; $\delta_1 > 0$, $p, q = 1, \ldots, N$). По прежней схеме из Λ^μ и A^μ, B^μ сооружаются дифференциальные операторы $\mathcal{L}^{\mu\pm}$, $\mathcal{B}^{\mu\pm}$ и формы $a^{\mu\pm}$ в цилинде Q^μ. Предположим еще, что матрицы Λ^μ и A^μ наследуют соответственно свойства алгебраической комплектности и положительной определенности. Тогда $a^{\mu\pm}$ обладает полиномиальным свойством, однако линеал $\mathcal{P}^\mu$ может отличаться от линеала $\mathcal{P}$ из (6). Как и ранее, $\mathcal{P}^\mu_Q = \{p \in \mathcal{P}^\mu : \mathcal{B}^{\mu\pm} p = 0 \text{ на } \partial Q^\mu\}$.

Введем полиномиальный пучок

$$\mathbb{C} \ni \lambda \to \mathfrak{A}_\mu^\pm(\lambda) = \{\mathcal{L}^{\mu\pm}(y^\mu, D_{y^\mu}, \lambda), \mathcal{B}^{\mu\pm}(y^\mu, D_{y^\mu}, \lambda\} : \\ \mathcal{D}^\ell H(\omega^\mu) \to \mathcal{R}^\ell H(\omega^\mu, \partial\omega^\mu), \quad (16)$$

порожденный модельной задачей в цилиндре

$$\mathcal{L}^{\mu\pm} u = f \quad \text{в} \quad Q^\mu, \quad \mathcal{B}^{\mu\pm} u = g \quad \text{на} \quad \partial Q^\mu. \quad (17)$$

Известно (см. [12, 11], а также гл. 1, 3 [9]), что собственные числа пучка $\mathfrak{A}_\mu^\pm$ являются нормальными, а спектр $\Sigma_\mu^\pm$ не имеет конечных точек сгущения и принадлежит множеству $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\lambda| < \gamma_\mu |\operatorname{Im}\lambda|$ или $|\operatorname{Re}\lambda| < R_\mu\}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (γ_μ и R_μ – некоторые положительные числа). При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu^\pm$ отображение из (16) – изоморфизм.

Пусть $\lambda_0^\pm$ – собственное число пучка $\mathfrak{A}_\mu^\pm$. Соответствующая жорданова цепочка длиной $\varkappa$ состоит из собственного $\Phi^{0\pm}$ и присоединенных $\Phi^{1\pm}, \dots, \Phi^{\varkappa-1\pm}$ векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathfrak{A}_\mu^\pm(\lambda_0^\pm)\Phi^{k\pm} = -\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} \frac{\partial^h \mathfrak{A}_\mu^\pm}{\partial \lambda^h}(\lambda_0^\pm)\Phi^{k-h\pm}. \quad (18)$$

Согласно лемме 3.1.3 [9] функции $U^{k\pm}$, определенные формулой

$$U^{k\pm}(y^\mu, z^\mu) = \exp(i\lambda_0^\pm z^\mu) \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}(iz^\mu)^h \, \Phi^{k-h\pm}(y^\mu), \\ k = 0, \dots, \varkappa - 1, \quad (19)$$

удовлетворяют однородной задаче (17) (являются ее экспоненциальными решениями). Пусть $\mathfrak{L}_\mu^\pm(\lambda_0^\pm)$ – линеал всевозможных экспоненциальных решений с показателем $\lambda_0^\pm$. Размерность $\dim \mathfrak{L}_\mu^\pm(\lambda_0^\pm)$ совпадает с полной алгебраической кратностью собственного числа $\lambda_0^\pm$ ($\mathfrak{L}_\mu^\pm(\lambda) = \{0\}$ в случае $\lambda \notin \sum_\mu^\pm$). По многим причинам наибольший интерес представляет изучение линеала $\mathfrak{L}_\mu^\pm(0)$, который будем называть основным.

Обозначим $q_\mu^0(u, v; Q^\mu)$ левую часть формулы Грина (11), где $\mathcal{L}^\pm$, $\mathcal{B}^\pm$ и Ω заменены на $\mathcal{L}^{\mu\pm}$, $\mathcal{B}^{\mu\pm}$ и Q^μ. Пусть $\Delta = (b_-, b_+)$ и $Q^\mu(\Delta)$ – усеченный цилиндр $\{(y^\mu, z^\mu) \in Q^\mu : z^\mu \in \Delta\}$ с боковой поверхностью $(\partial Q^\mu)(\Delta)$. В $Q^\mu(\Delta)$ выполняется такая формула Грина:

$$q_\mu^0(u, v; Q^\mu(\Delta)) + r_\mu^0(u, v; b_+) - r_\mu^0(u, v; b_-) = 0 \quad (20)$$

(см. доказательства теорем 3.2.1 и 3.4.8 в [9] и §6 [4]). В (20) при использовании символов $\mathcal{L}^{\mu\pm}(y^\mu, D_{y^\mu}, \lambda)$ и т.п. (см. (16))

$$
\begin{aligned}
r^0_\mu(u,v;b) = i\sum_{q\geqslant 1}\frac{1}{q!}\sum_{p=0}^{q-1}\Big\{\Big(\frac{\partial^q \mathcal{L}^{\mu+}}{\partial\lambda^q}\Big|_{\lambda=0} D^{q-1-p}_{z^\mu}u, D^p_{z^\mu}v\Big)_{\omega^\mu} + \\
+\Big(\frac{\partial^q \mathcal{B}^{\mu+}}{\partial\lambda^q}\Big|_{\lambda=0} D^{q-1-p}_{z^\mu}u, D^p_{z^\mu}\mathcal{T}^{\mu+}v\Big)_{\partial\omega^\mu} - \\
-\Big(\frac{\partial^q \mathcal{T}^{\mu-}}{\partial\lambda^q}\Big|_{\lambda=0} D^{q-1-p}_{z^\mu}u, D^p_{z^\mu}\mathcal{B}^{\mu-}v\Big)_{\partial\omega^\mu}\Big\}\Big|_{z=b}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Проверка (20) осуществляется заменой в обычной формуле Грина на Q^μ первого элемента пары $\{u,v\}$ произведением $X_\varepsilon u$ и предельным переходом $\varepsilon\to+0$ (X_ε – "сглаженная ступенька", полученная из характеристической функции X_0 интервала Δ). На этом же пути из (7) выводится еще одна формула Грина в усеченном цилиндре

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^{\mu\pm}u, v)_{Q^\mu(\Delta)} + (\mathcal{N}^{\mu\pm}u, \mathcal{D}^\mu v)_{(\partial Q^\mu)(\Delta)} + \\
r^\pm_\mu(u,v;b_+) - r^\pm_\mu(u,v;b_-) = a^{\mu\pm}(u,v;Q^\mu(\Delta)).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

При этом $r^\pm_\mu$ – форма на $\omega^\mu\times\partial\omega^\mu$, подобная (21). Ее явный вид не потребуется – важно лишь то, что, как и в (21), дифференциальные операторы, входящие в интегралы по ω^μ и $\partial\omega^\mu$, не зависят от переменной z^μ.

Предложение 1. *Найдется такое $\delta_0>0$, что в полосе $\Pi=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\operatorname{Im}\lambda|<\delta_0\}$ расположено единственное собственное число $\lambda=0$ пучка $\mathfrak{A}^\pm_\mu$. Всякий собственный вектор, отвечающий $\lambda=0$, является полиномом из $\mathcal{P}^{\mu 0}_Q=\{p\in\mathcal{P}^\mu_Q : p$ не зависит от $z\}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda^\pm_0\in\mathbb{R}$ – собственное число и $\Phi^{0\pm}$ – отвечающий ему собственный вектор. Подставим экспоненциальное решение $U^{0\pm}(y^\mu,z^\mu)=\exp(i\lambda^\pm_0 z^\mu)\Phi^{0\pm}(y^\mu)$ на обе позиции в формулу Грина (22). Первые два скалярных произведения равны нулю, поскольку $\mathcal{L}^{\mu\pm}U^{0\pm}=0$ в Q^μ и $\mathcal{B}^{\mu\pm}U^{0\pm}=0$ на ∂Q^μ (см. также (9)). Ввиду вещественности $\lambda^\pm_0$ величина $r^\pm_\mu(U^{0\pm},U^{0\pm})$ не зависит от z^μ (так как $\exp(i\lambda^\pm_0 z^\mu)\overline{\exp(i\lambda^\pm_0 z^\mu)}=1$), т.е. слагаемые из второй пары справа в (22) взаимно уничтожаются. Следовательно, $a^{\mu\pm}(U^{0\pm},U^{0\pm};Q^\mu(\Delta))=0$ и $U^{0\pm}$ – полином из $\mathcal{P}^\mu_Q$. Отсюда вытекает, что $\lambda_0^{\pm} = 0$ (иначе $U^{0\pm}$ не полином) и $U^{0\pm} \in \mathcal{P}_Q^{\mu 0}$. Теперь существование нужного δ_0 следует из уже названных общих свойств спектра $\Sigma_\mu^{\pm}$. •

Предложение 2. *Полная алгебраическая кратность $\varkappa^\mu(0)$ собственного числа $\lambda = 0$ пучка $\mathfrak{A}_\mu^{\pm}$ равна $2\dim \mathcal{P}_Q^\mu$.*

Доказательство. В случае $B = 0$ это утверждение известно (см., к примеру, теорему 5.4.2 в [9]). Введем пучок $\mathfrak{A}_\mu^{\pm}(\lambda; t)$ с дополнительным параметром $t \in [0,1]$, получающийся заменой $A \pm iB$ на $A \pm itB$. При каждом t справедливо предложение 1 (с общим $\delta > 0$, поскольку при вариации t собственные числа претерпевают непрерывные возмущения и область изменения t – компакт). Теперь теорема о сохранении полной алгебраической кратности при непрерывном возмущении пучков (см. [13]) доставляет нужное утверждение. •

4. О структуре основного линеала экспоненциальных решений. Фиксируем индекс $\mu = 1, \dots, M$ и не будем указывать его в обозначениях. Пусть $\{\Phi^{j,k\pm} \mid j = 1, \dots, J, k = 0, \dots, \varkappa_j - 1\}$ – каноническая система жордановых цепочек, отвечающая собственному числу $\lambda_0^{\pm} = 0$ пучка $\mathfrak{A}^{\pm}$ (у $\mathfrak{A}^{+}$ и $\mathfrak{A}^{-}$ одинаковые наборы $\{\varkappa_1, \dots, \varkappa_J\}$ частных нулевых кратностей потому, что задачи (17;+) и (17;−) формально сопряжены). В силу предложений 1 и 2 получаем $J = \dim\ker \mathfrak{A}^{\pm}(0)$ и $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_J = 2\dim \mathcal{P}_Q$, причем по определению $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_J$. Согласно (19) выстраивается базис $\{U^{j,\varkappa\pm}\}$ в $\mathfrak{L}^{\pm}(0)$ (лемма 3.1.3 [9]). Так как в (19) $\lambda_0^{\pm} = 0$, имеем

$$D_z\, U^{j,k\pm} = U^{j,k-1\pm}, \quad k = 1, \dots, \varkappa_j - 1. \tag{23}$$

Пусть χ – срезающая функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(z) = 1$ при $z > b$ и $\chi(z) = 0$ при $z < -b$. Для любой пары решений u^+ и u^- однородных модельных задач (17) положим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(u^+, u^-) = \big(\mathcal{L}^+(\chi u^+), \chi u^-\big)_Q + \big(\mathcal{B}^+(\chi u^+), \mathcal{T}^+(\chi u^-)\big)_{\partial Q} - \\ -\big(\chi u^+, \mathcal{L}^-(\chi u^-)\big)_Q - \big(\mathcal{T}^-(\chi u^+), \mathcal{B}^-(\chi u^-)\big)_{\partial Q}. \end{aligned} \tag{24}$$

Один из сомножителей в каждом из скалярных произведений имеет компактный носитель, т.е. форма $\mathbf{q}^0$ принимает конечные значения. В соответствии с (20) и (11) $\mathbf{q}^0(u^+, u^-) = q^0(\chi u^+, \chi u^-; Q)$.

Лемма 1. *Форма (24) не зависит от выбора срезки χ и, к тому же,* $\mathbf{q}^0(u^+,u^-)=q^0(\chi u^+,u^-;Q)=q^0(u^+,\chi u^-;Q)$.

Доказательство. Для сокращения формул не будем явно выписывать скалярные произведения в $L_2(\partial Q)$, заменяя их многоточием. Имеем

$$\mathbf{q}^0(u^+,u^-)=(\mathcal{L}^+(\chi u^+),u^-)_Q-(\chi u^+,\mathcal{L}^-u^-)_Q+\ldots-$$
$$-\big\{(\mathcal{L}(\chi u^+),(1-\chi)u^-)_Q-(\chi u^+,\mathcal{L}^-((1-\chi)u^-))_Q+\ldots\big\}.$$

Так как $\chi u^+=0$ при $z\leqslant -b$ и $(1-\chi)u^-=0$ при $z\geqslant b$, формула Грина (20) с $b_\pm=\pm b$ показывает, что фигурная скобка обращается в нуль. Следовательно, выполняются равенства, выделенные в формулировке леммы. Если X – еще одна срезка, то

$$\mathbf{q}^0(u^+,u^-)=q^0(\chi u^+,\chi u^-;Q)=q^0(Xu^+,u^-;Q)+q^0((\chi-X)u^+,u^-;Q).$$

Поскольку $\chi-X\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, последнее слагаемое исчезает по тем же причинам, что и ранее. $\bullet$

Лемма 2 (см. [6] и лемму 7.4.4 [9]). *Справедливо равенство*

$$\mathbf{q}^0(D_z\,u^+,u^-)=\mathbf{q}^0(u^+,D_z\,u^-). \tag{25}$$

Доказательство. В прежних обозначениях

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^0(D_z\,u^+,u^-)&=q^0(\chi D_z\,u^+,u^-;Q)=\\&=\big(D_z\,\mathcal{L}^+(\chi u^+),u^-\big)_Q-\big(D_z(\chi u^+),\mathcal{L}^-\,u^-\big)_Q+\ldots-\\&-\big\{(\mathcal{L}^+[D_z,\chi]u^+,u^-)_Q-([D_z,\chi]u^+,\mathcal{L}^-\,u^-)_Q+\ldots\big\}.\end{aligned}$$

(напоминаем, что коэффициенты операторов $\mathcal{L}^\pm$ и $\mathcal{B}^\pm$, $\mathcal{T}^\pm$ не зависят от z). Так как $[D_z,\chi]=\chi'\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, фигурная скобка равна нулю в силу (19). Осталось "перебросить" производную D_z. $\bullet$

Из равенств (23) и (25) вытекает

Следствие 1. *При* $j,\,r=1,\ldots,J$ *и* $k=1,\ldots,\varkappa_j-1$, $\rho=0,\ldots,\varkappa_r-2$ *выполняется соотношение* $\mathbf{q}^0(U^{j,k+},U^{r,\rho-})=\mathbf{q}^0(U^{j,k-1+},U^{r,\rho+1-})$.

Всякий полином из $\mathcal{P}_Q$ является экспоненциальным решением обеих задач (17) из основных линеалов $\mathfrak{L}^\pm(0)$. Поскольку в модельных задачах коэффициенты не зависят от z, дифференцирование D_z не выводит полином из линеала $\mathcal{P}_Q$. Поэтому при учете предложения 1 в $\mathcal{P}_Q$ можно найти такой базис $\{p^{j,k}|j=1,\dots,J,$ $k=0,\dots,\tau_j-1\}$, что $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\dots\leqslant\tau_J$ и

$$D_z\,p^{j,k}=p^{j,k-1},\quad k=1,\dots,\tau_j-1 \tag{26}$$

(сравни с (23)). Пусть еще

$$1=J_0<J_1<\dots<J_S<J_{S+1}=J+1,$$

$$\tau_{J_s}=\tau_{J_s+1}=\dots=\tau_{J_{s+1}-1}<\tau_{J_{s+1}},\quad s=0,\dots,S.$$

Следующее утверждение, являющееся центральным в данном разделе и ключевым для всей статьи, известно для формально самосопряженных операторов (см., к примеру, теорему 5.4.2 в [9]), а его доказательство в случае $B\neq 0$ потребует вспомогательных определений и построений.

Предложение 3. *Частные нулевые кратности $\varkappa_j$ пучков $\mathfrak{A}^{\pm}$, отвечающие $\lambda=0$, вычисляются по формулам*

$$\varkappa_j=2\tau_{J-j+1},\quad j=1,\dots,J. \tag{27}$$

Фиксируем знак "+" (для определенности). В согласии с (26) формулы $\Phi^{j,k}(y)=p^{j,k}(y,0)$ задают жордановы цепочки длиной τ_j. По возможности продолжим их: $\Phi^{j,0},\dots,\Phi^{j,\sigma_j-1}$; здесь $\sigma_j\geqslant\tau_j$. Равенствами (19) введем экспоненциальные решения $U^{j,0},\dots,U^{j,\sigma_j-1}$ однородной задачи (17), элементы линеала $\mathfrak{L}^{+}(0)$. При этом

$$U^{j,k}\in\mathcal{P}_Q,\quad k=0,\dots,\tau_j-1. \tag{28}$$

Рассмотрим задачу (18), где $\Phi^{k-h\pm}=\Phi^{j,k-h}$. Согласно предложению 1 условиями ее разрешимости служат соотношения

$$\begin{gathered}\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h!}\Big\{\Big(\frac{\partial^h\mathcal{L}^{+}}{\partial\lambda^h}\Big|_{\lambda=0}\Phi^{j,k-h},p^{r,0}\Big)_{\omega}+\\ +\Big(\frac{\partial^h\mathcal{B}^{+}}{\partial\lambda^h}\Big|_{\lambda=0}\Phi^{j,k-h},\mathcal{T}^{+}\Big|_{\lambda=0},p^{r,0}\Big)_{\partial\omega}\Big\}=0,\end{gathered} \tag{29}$$

где $r=1,\dots,J$. При выполнении всех условий (29) существует присоединенный вектор $\Phi^{j,k}$ и цепочка $\Phi^{j,0},\dots,\Phi^{j,k-1}$ продолжима.

Лемма 3. *Если $k \leqslant \tau_j + \tau_r - 1$, то соотношение* (29) *выполняется автоматически.*

Доказательство. Ввиду формулы Грина (20) выражение $\mathbf{q}^0(U^{j,k-1}, p^{r,0})$ совпадает с $-r^0(U^{j,k-1}, p^{r,0}; b)$ (интеграл по сечению $\{(y,z) \in Q : z = -b\}$ пропадает, так как $\chi(z) = 0$ при $z \leqslant -b$). Кроме того, это выражение не зависит от b (достаточно большого) и потому в выражении $-r^0(\dots; b)$ при вычислении интегралов по ω и $\partial\omega$ можно оставить только свободные члены во всех продифференцированных полиномах от z. В (21) заменим решение $U^{j,k-1}$ его разложением (19) по степеням z и после несложных преобразований увидим, что $i\mathbf{q}^0(U^{j,k-1}, p^{r,0})$ совпадает с левой частью (29). Итак, при учете следствия 1 и формул (23), (26) и (25) заключаем, что равенство (29) эквивалентно такому:

$$0 = \mathbf{q}^0(U^{j,k-1}, p^{r,0}) \equiv \mathbf{q}^0(U^{j,k-1-\rho}, p^{r,\rho}).$$

Поскольку $k \leqslant \tau_j + \tau_r - 1$, в силу (28) число $\rho \leqslant \tau_r - 1$ можно выбрать так, чтобы $U^{j,k-1-\rho} \in \mathcal{P}_Q$. Теперь достаточно убедиться в том, что $\mathbf{q}^0(P, p) = 0$ при всех P, $p \in \mathcal{P}_Q$. Сравнивая формулы Грина (20) и (22), обнаруживаем, что

$$r^0(P, p; b) = r^+(P, p; b) - \overline{r^-(p, P; b)} \tag{30}$$

(см. также (4)). Положим $u = P$, $v = \chi p$ в (22;+) и $u = p$, $v = \chi P$ в (22;−). Так как $\Lambda P = 0$ и $\Lambda p = 0$, скалярные произведения, содержащие $\mathcal{L}^\pm$ и $\mathcal{N}^\pm$, и форма $a^\pm$ обращаются в нуль. Кроме того, из-за срезки χ исчезает и вычитаемое $r^\pm(\dots; -b)$. Следовательно, равны нулю оба слагаемых справа в (30). Осталось упомянуть, что $\mathbf{q}^0(P, p) = r^0(P, p; b)$ в соответствии с формулой Грина (20). •

Ограничим индекс j пределами 1 и $J_1 - 1$; тогда $\tau_1 = \tau_j < \tau_r$ при $r = J_1, \dots, J$. По лемме 3 все цепочки имеют длины, не меньшие $2\tau_1$. Поэтому, перестраивая цепочки $\Phi^{j,0}, \dots, \Phi^{j,2\tau_j-1}$ (т.е. добавляя к присоединенным векторам $\Phi^{j,k}$ и $\Phi^{j,k+h}$ линейные комбинации собственных векторов $p^{1,0}, \dots, p^{J,0}$ и соответствующие комбинации присоединенных векторов $\Phi^{1,h}, \dots, \Phi^{J,h}$), добиваемся выполнения условий ортогональности

$$(\Phi^{j,k}, p^{r,0})_\omega = 0, \ \ j = 1, \dots, J_1, \ \ r = 1, \dots, J, \ \ k = 1, \dots, 2\tau_j - 1. \tag{31}$$

Такая перестройка может изменить базис $\{p^{r,m}\}$ в $\mathcal{P}_Q$, но включения (28), а значит, и сказанное выше, остаются в силе.

Пусть $\{\zeta^1, \dots, \zeta^J\}$ и $\{p^{1,0}, \dots, p^{J,0}\}$ – системы, биортогональные в $L_2(\omega)^T$, т.е. $(\zeta^m, p^{r,0})_\omega = \delta_{m,r}$ (символ Кронекера). При $s = 1, \dots, S$ определим ортогональный проектор $\mathfrak{P}_s$ в $L_2(\omega)^T$ равенством

$$\mathfrak{P}_s\, u = u - \sum_{r=J_s}^{J} \left(u, p^{r,0}\right)_\omega \zeta^r.$$

Пусть еще

$$\mathfrak{Q}_s\{f, g\} = \Big\{f - \sum_{r=J_s}^{J} \Big[(f, p^{r,0})_\omega + (g, \mathcal{T}^+\Big|_{\lambda=0} p^{r,0})_{\partial\omega}\Big]\, \zeta^r, g\Big\}.$$

Введем пучок, зависящий от дополнительного параметра $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{C} \ni \lambda \to \mathfrak{B}_s(\lambda; t) = \mathfrak{Q}_s\, \mathfrak{A}^+(\lambda; t)\mathfrak{P}_s : \mathfrak{P}_s\, \mathcal{D}^\ell\, H(\omega) \to \mathfrak{Q}_s\, \mathcal{R}^\ell\, H(\omega, \partial\omega).$$

Число $\lambda = 0$ является собственным для пучка $\mathfrak{B}_1(\lambda; 1)$ и ему, как нетрудно проверить, исходя из (18) и (29), (31), соответствуют цепочки $\{\Phi^{j,0}, \dots, \Phi^{j,2\tau_j - 0}\}$, $j = 1, \dots, J_1 - 1$ (если $r \leqslant J_1$, то $p^{r,0} \notin \mathfrak{P}_1\, \mathcal{D}^\ell\, H(\omega)$). Кроме того, его полная алгебраическая кратность равна $2\tau_1(J_1 - 1)$; в самом деле, такая кратность у собственного числа $\lambda = 0$ пучка $\mathfrak{B}(\,\cdot\,; t)$ не может зависеть от $t \in [0,1]$ (та же аргументация, что и в доказательстве предложения 2) и пучок $\mathfrak{B}_1(\,\cdot\,; 0)$ имеет в точности $J_1 - 1$ жорданову цепочку длиной $2\tau_1$, отвечающую $\lambda = 0$ и начинающуюся с $p^{j,0}(y)$, $p^{j,1}(y, 0), \dots, p^{j,\tau_j - 1}(y, 0)$ (теорема 5.4.2 из [9], обслуживающая случай $B = 0$). Итак, цепочки $\{\Phi^{j,0}, \dots, \Phi^{j,2\tau_j - 1}\}$ пучка $\mathfrak{B}_1(\,\cdot\,; 1)$ продолжить нельзя и потому оказывается неособенной $(J_1 - 1){\times}(J_1 - 1)$-матрица $\mathfrak{M}^1$, элементы $\mathfrak{M}^1_{jr}$ которой равны левой части соотношений (29) при $k = 2\tau_1 = \tau_j + \tau_r$ (проекторы $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{Q}_1$ исчезают благодаря условиям ортогональности).

Прежде чем заняться следующей группой цепочек ($j = J_1, \dots, J_2 - 1$), напомним, что по лемме 3 $\sigma_m \geqslant \tau_m + \tau_1 = \tau_m + \tau_{J_1 - 1}$. Покажем, что длины цепочек с номерами $m \geqslant J_1$ можно увеличить до $\sigma_m \geqslant \tau_m + \tau_{J_1}$. С этой целью добавим к $\Phi^{m,q+h}$ линейные комбинации векторов $\Phi^{1,h}, \dots, \Phi^{J_1 - 1,h}$, где $h \in [0, 2\tau_1 - 1]$ и $q \geqslant (\tau_m + \tau_1) - 2\tau_1$ (коэффициенты комбинаций не зависят от h). Из неравенства $q + h \leqslant \tau_m - 1$ вытекает, что $h \leqslant \tau_1 - 1$, но векторы $\Phi^{1,h}, \dots, \Phi^{J_1 - 1,h}$ с такими h порождены полиномами из

$\mathcal{P}_Q$. Следовательно, указанные добавления не нарушают включений (28). Вместе с тем, благодаря неособенности матрицы $\mathfrak{M}^1$ выбор коэффициентов комбинаций векторов $\Phi^{1,q+h}, \dots, \Phi^{J_1-1,q+h}$ обеспечивает условия (29) при $r = 1, \dots, J_1 - 1$, $j = J_1, \dots, J$ и $k = q + 2\tau_1 \leqslant \tau_m + \tau_{J_1} - 1$. Наконец, все та же лемма 3 гарантирует выполнение (29) для $r \geqslant J_1$ и прежних j, k. В итоге получаем, что действительно $\sigma_m \geqslant \tau_m + \tau_{J_1}$ в случае $m = J_1, \dots, J$.

Вторая группа цепочек $\{\Phi^{j,0}, \dots, \Phi^{j,\sigma_j-1}\}$, где $j = J_1, \dots, J_2 - 1$, обладает длинами σ_j, не меньшими $2\tau_j = 2\tau_{J_1}$. К тому же, перестраивая их при помощи элементов цепочек с номерами $m \geqslant J_2$, добиваемся соблюдения условий ортогональности (31) при следующих значениях индексов: $j = J_1, \dots, J_2 - 1$, $r = J_1, \dots, J$ и $k = 1, \dots, 2\tau_j - 1$. Теперь манипуляции с проекторами $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$ и пучками $\mathfrak{B}_2(\lambda; t)$ по той же схеме, что и для первой группы цепочек, демонстрируют непродолжимость обсуждаемых жордановых цепочек.

Переберем по очереди группы цепочек (увеличивая от шага к шагу числа $\tau_{J_s}, \dots, \tau_{J_{s+1}-1}$). В результате будет построена система J жордановых цепочек с длинами $2\tau_1, 2\tau_2, \dots, 2\tau_J$. Вследствие предложения 2 эта система переделывается в каноническую (необходима перенумерация в порядке невозрастания длин). Таким образом, предложение 3 доказано.

Сформулируем еще одно утверждение, установленное попутно (сравни с теоремой 5.4.2 [9]).

Следствие 2. *Пусть $\Phi^{0,\pm}, \dots, \Phi^{\varkappa-1\pm}$ – жорданова цепочка, отвечающая собственному числу $\lambda_0^\pm = 0$ пучка $\mathfrak{A}^\pm$, а $U^{0+}, \dots, U^{\varkappa-1\pm}$ – экспоненциальные решения* (19). *Тогда $U^k \in \mathcal{P}_Q$ для $k \leqslant -1 + \varkappa/2$. Если цепочка непродолжима, то $U^k \notin \mathcal{P}_Q$ при $k \geqslant \varkappa/2$.*

Замечание 1. Пучки, подобные только что изученным, возникают и при осреднении краевых задач в тонких областях (см. [8, 14]), причем полиномиальное свойство обеспечивает априорное описание основных атрибутов осредненной системы (размеры, порядки элементов), а также ее эллиптичность. Предложение 3 и следствие 2 дают возможность распространить результаты [8] на несамосопряженные матричные дифференциальные операторы вида (1). Кроме того, полиномиальное свойство доставляет необходимую информацию о строении спектра пучков, порожденных формально самосопряженными краевыми задачами в конусах (см. [7] и §6.1 [9]). Соображения, приведшие к доказательству предложений 1–3, позволяют получить аналогичную информацию в несамосопряженном случае и, таким образом, конкретизировать для класса операторов (1) условные результаты теории эллиптических задач в областях с коническими (угловыми) точками и ребрами на границе (см. [11, 15, 16, 7, 9] и др.).

5. Краевая задача в неограниченной области. В соответствии с предложением 1 и общими фактами из [11] (см. теоремы 3.1.1, 5.1.4(1) из [9]) оператор (15) задачи (10) является фредгольмовым в случае $\beta \in (-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)$ и теряет это свойств при $\beta = 0$ (на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \beta$ имеются собственное число $\lambda = 0$ пучков $\mathfrak{A}^{\pm}_{\mu}$). Фиксируем $\beta \in (0, \min\{\delta_0, \delta_1\})$ ($\delta_0 > 0$ указано в предложении 1, а $\delta_1 > 0$ взято из условия стабилизации, упомянутого в начале п. 3). В силу [15] (см. также теорему 5.1.4(3) из [9]) при $\gamma = \pm\beta$ имеем

$$\operatorname{coker} \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\gamma} = \left\{ \left(v, \mathcal{T}^{\pm} v\big|_{\partial\Omega}\right) : v \in \ker \mathcal{A}^{\mp}_{\ell,-\gamma} \right\}. \tag{32}$$

Кроме того, по теореме о приращении индекса (теоремы 4.3.3, 5.1.4(4) из [9]) при учете предложения 3 получаем

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,-\beta} = \operatorname{Ind} \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} + \sum_{\mu=1}^{M} \varkappa_\mu(0) = \operatorname{Ind} \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} + 2\sum_{\mu=1}^{M} \dim \mathcal{P}^{\mu}_{Q}. \tag{33}$$

Наконец, если $v \in \ker \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta}$, то подстановка v на обе позиции в формулу Грина (7) приводит к равенству $a^{\pm}(v, v; \Omega) = 0$, а значит, $v \in \mathcal{P}_\Omega$ благодаря (6). Только тривиальный полином принадлежит пространству $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta} W(\Omega)$ с положительным β (экспоненциально затухает на бесконечности), и потому

$$\ker \mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} = \{0\}. \tag{34}$$

Введем пространство $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta} \mathbf{W}(\Omega)$ функций $u = (u_1, \dots, u_T)^t$, допускающих представление

$$u = u^0 + \sum_{\mu=0}^{M} \chi_\mu\, p^\mu,$$

где $u^0 \in \mathcal{D}^{\ell}_{\beta} W(\Omega)$, $p^\mu \in \mathcal{P}^{\mu}_{Q}$, а $\chi_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ – срезающая функция, равная нулю при $x \in \overline{\Omega} \setminus Q^{\mu}_{+}$ и единице на Q^{μ}_{+} при $z^\mu > R$ (R

достаточно велико). Норма в $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)$, *весовом пространстве с отделенной асимптотикой*, равна сумме

$$\|u^0;\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,W(\Omega)\| + \|p^1;\mathcal{P}^1_Q\| + \ldots + \|p^M;\mathcal{P}^M_Q\|,$$

где $\|\cdot;\mathcal{P}^{\mu}_Q\|$ – какая-либо норма в конечномерном линеале $\mathcal{P}^{\mu}_Q$ (евклидовом пространстве). Очевидно, что выбор этих норм и срезок χ_{μ} не влияет на $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)$ ни алгебраически, ни топологически.

Для u, $v \in \mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)$ сохраняются формулы Грина (7) и (11). В самом деле, сначала нужно написать формулы (22) и (20) в усеченной области

$$\Omega = \Big(\Omega \setminus \bigcup_{\mu=1}^{M} Q^{\mu}_{+}\Big) \cup \bigcup_{\mu=1}^{M} \left\{(y^{\mu}, z^{\mu}) \in Q^M_{+} : z^{\mu} < T\right\},$$

а затем, заметить, что интегралы по сечениям $\{(y^{\mu}, z^{\mu}) \in Q^M_{+} : z^{\mu} = T\}$ и их границам суть бесконечно малые $o(e^{-\beta T/2})$ (напоминаем что все слагаемые в (30) равны нулю при $p, P \in \mathcal{P}^{\mu}_Q$).

Нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega) \subset \mathcal{D}^{\ell}_{-\beta}\,W(\Omega)$. Обозначим через $\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta}$ сужение оператора $\mathcal{A}^{\pm}_{\ell,-\beta}$ на $\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)$. Так как главные части $\mathcal{L}^{\mu\pm}$, $\mathcal{B}^{\mu\pm}$ операторов $\mathcal{L}^{\pm}$, $\mathcal{B}^{\pm}$ аннулируют линеал $\mathcal{P}^{\mu}_Q$, отображение

$$\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta} : \mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega) \to \mathcal{R}^{\ell}_{\beta}\,W(\Omega, \partial\Omega)$$

непрерывно. По теоремам 3.1.4, 5.1.4(2) из [9] выполняется неравенство

$$\|u;\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)\| \leqslant c\left(\|(\mathcal{L}^{\pm}u, \mathcal{B}^{\pm}u);\mathcal{R}^{\ell}_{\beta}\,W(\Omega,\partial\Omega)\| + \|u;L_2(G)^T\|\right),$$

где G – компакт в $\overline{\Omega}$. Таким образом, оператор $\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta}$ наследует фредгольмово свойство от $\mathcal{A}^{\pm}_{\ell,-\beta}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta} &= \operatorname{Ind}\mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} + \dim\left(\mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega) \setminus \mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,W(\Omega)\right) = \\ &= \operatorname{Ind}\mathcal{A}^{\pm}_{\ell,\beta} + \dim\mathcal{P}^1_Q + \ldots + \dim\mathcal{P}^M_Q.\end{aligned} \tag{35}$$

Теорема 2. *Пусть матрицы A и B вещественные. Тогда* $\operatorname{Ind}\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta} = 0$ *и справедливы формулы* (13) *с заменой $\mathcal{A}^{\pm}_{\ell}$ на $\mathbf{A}^{\pm}_{\ell,\beta}$, т.е. любое решение $u \in \mathcal{D}^{\ell}_{\beta}\,\mathbf{W}(\Omega)$ однородной задачи* (10) *попадает в линеал*

$\mathcal{P}_\Omega$, *а при* $(f,g)\in\mathcal{R}^\ell_\beta W(\Omega,\partial\Omega)$ *условие разрешимости задачи в пространстве* $\mathcal{D}^\ell_\beta\,\mathbf{W}(\Omega)$ *имеют вид* (14).

Доказательство. Ввиду вещественности A и B имеем

$$\ker\mathcal{A}^+_{\ell,-\beta}=\overline{\ker\mathcal{A}^-_{\ell,-\beta}}. \tag{36}$$

Положим $K=\dim\ker\mathcal{A}^\pm_{\ell,-\beta}$. При учете (32) и (34) получаем

$$\operatorname{Ind}\mathcal{A}^\pm_{\ell,\beta}=0-\dim\operatorname{coker}\mathcal{A}^\pm_{\ell,\beta}=0-\dim\ker\mathcal{A}^\mp_{\ell,-\beta}=0-K=-K,$$
$$\operatorname{Ind}\mathcal{A}^\pm_{\ell,-\beta}=K-\dim\operatorname{coker}\mathcal{A}^\pm_{\ell,-\beta}=K-\dim\ker\mathcal{A}^\mp_{\ell,\beta}=K-0=K.$$

Следовательно, в силу (33) и (35)

$$K=\sum_{\mu=1}^{M}\dim\mathcal{P}^\mu_Q\quad\text{и}\quad\operatorname{Ind}\mathbf{A}^\pm_{\ell,\beta}=0.$$

К тому же, благодаря формуле (7) в Ω и полиномиальному свойству (6) $\ker\mathbf{A}^\pm_{\ell,\beta}=\mathcal{P}_\Omega$, т.е., в частности,

$$\dim\operatorname{coker}\mathbf{A}^\pm_{\ell,\beta}=\dim\mathcal{P}_\Omega. \tag{37}$$

Наконец, формула Грина (11), где $v\in\ker\mathbf{A}^\mp_{\ell,\beta}$, демонстрирует необходимость условий разрешимости (14), а их достаточность подтверждается равенством (37). $\bullet$

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 сохраняется и без предположения о вещественности матриц A и B. Его проверка осуществляется, например, при помоши техники, разработанной в §§ 5.4, 5.5, 6.2 [9]. Так, операторы $\mathbf{A}^+_{\ell\beta}$ и $\mathbf{A}^-_{\ell,\beta}$ оказываются операторами задач, сопряженных относительно *обобщенной формулы Грина* (см. предложение 6.2.5 в [9]). При этом вытекающее из сказанного равенство $\operatorname{Ind}\mathbf{A}^+_{\ell,\beta}=-\operatorname{Ind}\mathbf{A}^-_{\ell,\beta}$ заменяет соотношение (36), которое замкнуло систему формул (32)–(35) и позволило вычислить эти индексы.

Энергетический функционал $a^\pm(u,u;\Omega)$ является конечным при всех $u\in\mathcal{D}^\ell_\beta\,\mathbf{W}(\Omega)$. Поэтому решение уравнения $\mathbf{A}^\pm_{\ell,\beta}u=(f,g)\in\mathcal{R}^\ell_\beta W(\Omega,\partial\Omega)$ следует именовать *энергетическим решением* задачи (10). Как и в гл. 5, 6 [9], вопрос о существовании решения $u\in\mathcal{D}^\ell_\beta W(\Omega)$, *экспоненциально затухающего на бесконечности*, решается на основе формулы (32), поскольку ядро оператора $\mathcal{A}^\mp_{\ell,-\beta}$ конструируется при участии экспоненциальных решений из основных линеалов $\mathfrak{L}^\mp_\mu(0)$, иследованных в предыдущем разделе.

6. Пример. Деформированное состояние линейно упругого электропроводящего тела (см., например, [10]) описывается посредством системы дифференциальных уравнений с матричным оператором

$$\mathcal{M}(x, D_x) = \Lambda(D_x)^* \, M(x) \, \Lambda(D_x),$$

где

$$\Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & -M_{22} \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha = 2^{-1/2};$$

M_{11} и M_{22} – симметрические, положительно определенные, вещественные матрицы размерами 6×6 и 3×3 соответственно, а $M_{12} = M_{21}^t$ – вещественная 6×3-матрица. При этом $u = (v_1, v_2, v_3, \varphi)^t$ и v_j – смещения в теле вдоль осей x_j, $j = 1, 2, 3$, а φ – электрический потенциал.

Алгебраическая комплектность матрицы $\Lambda(\xi)$ сомнений не вызывает. Вместе с тем, из-за "неправильного" знака при блоке M_{22} матрица M не является положительно определенной, т.е. оператор $\mathcal{M}$ не обладает свойством формальной положительности [1]. Однако, переобозначив $u = (v_1, v_2, v_3, i\varphi)^t$ и

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

приходим к эквивалентной системе дифференциальных уравнений с оператором (1), у которого имеются все постулированные свойства. Итак, для задач теории электроупругости оказываются верными все результаты, полученные в настоящей статье, причем в (6) фигурирует линеал $\mathcal{P} = \{p(x) = (a + b\times x, c) : a, b \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}$, где крестом обозначено векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Если из матрицы Λ удалить последние строку и три столбца, а матрицу M урезать до блока M_{11}, то возникает матричный оператор системы уравнений обычной теории упругости, изученной детально в § 5.7 [9].

Литература

1. J. Nečas, *Lés méthodes directes en théorie des èquations elliptiques.* Masson, Paris, 1967, 351 p.
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973, 408 с.
3. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, М., 1971, 371 с.
4. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы.* — В кн.: Проблемы матем. анализа. Вып. 16, Изд-во СПбГУ, 1996, С. 167–192.
5. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М., 1967, 288 с.
6. С. А. Назаров, *Весовые функции и инвариантные интегралы.* — Вычисл. механика деформируемого твердого тела **1** (1990), 17–31.
7. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей.* — Тр. Ленингр. Матем. Об-ва **1** (1990), 174–211.
8. С. А. Назаров, *Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких.* — Алгебра и анализ **7, No. 5** (1995), 1–92.
9. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic boundary value problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994, 524 p.
10. В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев, *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.* Наука, М., 1988, 472 с.
11. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Тр. Моск. Матем. Об-ва **16** (1967), 209–292.
12. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* — Усп. матем. наук **19, No. 3** (1964), 53–160.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М., 1965, 448 с.
14. С. Н. Леора, С. А. Назаров, А. В. Проскура, *Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ.* — Журн. вычисл. матем. и матем. физики **26, No. 7** (1986), 1032–1048.
15. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
16. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей.* — В кн.: Тр. симп. по мех. сплошн. сред и родственным пробл. анализа, Т. 1, Мецниереба, Тбилиси, 1973, с. 171–181.

Nazarov S. A. Nonselfadjoint elliptic problems with the polynomial property in domains possessing cylindrical outlets to infinity.

Solvability of mixed boundary value problems in domains with cylindrical outlets to infinity is investigated for a class of nonselfadjoint differential operator-matrices. The structure of these matrices is such that the corresponding asymmetric quadratic forms possess the polynomial property, i.e., they degenerate only on finite-dimensional lineals of vector polynomials. With the help of elementary algebraic operations, this property provides to indicate the attributes of boundary value problems, namely, to calculate the operator index, to describe the kernel and cokernel of the operator, to find out the asymptotic behavior of solutions at infinity, etc.

Государственная морская
академия им. адм. С. О. Макарова

Поступило 21 сентября 1997 г.