Я. И. Белопольская

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О. А. Ладыженской с глубоким уважением посвящается

1. Введение

Уравнения Навье–Стокса представляют собой классический объект исследования математической физики, изучение которого в течение многих лет стимулирует развитие новых методов и постановку новых задач в самых разных областях как теоретической, так и прикладной математики. Изучению системы Навье–Стокса посвящен ряд замечательных монографий [1, 2] и огромное количество работ, связанных с исследованием краевых задач для этой системы. Тем не менее в этой области все еще остается немало открытых вопросов. В этой работе мы отвечаем на один из таких вопросов, который может быть сформулирован следующим образом. Как построить случайный (диффузионный) процесс, такой, что решение краевой задачи для системы Навье–Стокса можно было бы представить в виде континуального интеграла на траекториях этого процесса.

В учебниках гидродинамики (смотри, например, [3, 4]) изложение предмета обычно начинают с изучения системы Стокса, в которой отсутствуют члены, содержащие вторые производные по пространственной переменной. При этом важную роль играют линии тока или интегральные кривые векторного поля скорости течения идеальной жидкости. При переходе к изучению вязкой жидкости об этом объекте как бы забывают. Забвение это, повидимому, связано с тем, что аналогом линии тока для вязкой жидкости является траектория специального диффузионного процесса, который конструируется в настоящей работе. Отметим, что в терминах рассматриваемого здесь случайного процесса естественно формулируются и задачи статистической гидромеханики

[5]. При этом следует рассматривать диффузионный процесс со случайными начальными условиями.

Система уравнений Навье–Стокса представляет собой квазилинейную систему уравнений в частных производных второго порядка. Начиная с семидесятых годов, квазилинейные параболические системы второго порядка изучались с использованием методов и результатов теории диффузионных процессов. В частности, были получены вероятностные представления решений различных краевых задач для таких систем в виде функционалов от диффузионных процессов [6–8]. При естественных условиях (например, гарантирующих существование и единственность достаточно гладких решений краевых задач) существует возможность конструктивно построить случайный процесс как решение стохастического уравнения и затем с его помощью предъявить решение соответствующей краевой задачи. Однако результаты такого типа не удавалось получить при рассмотрении задач гидродинамики. В настоящей работе мы заполняем этот пробел и конструируем вероятностное представление решения первой начально-краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса. В нашей предыдущей работе [9] аналогичное представление было получено для решения задачи Коши.

Построенное представление сводит решение системы Навье–Стокса к решению системы стохастических уравнений (представляющих в некотором смысле аналог обыкновенных дифференциальных уравнений) и может быть использовано для численного решения соответствующих гидродинамических задач.

В работе Арнольда [10] было сформулировано утверждение, что движение идеальной несжимаемой жидкости можно описать в терминах геодезических на группе $\mathcal{D}_\mu(M)$ диффеоморфизмов компактного многообразия M, сохраняющих объем. Затем в работе Эбина и Марсдена [11] были исследованы необходимые для этого дифференциально геометрические структуры на $\mathcal{D}_\mu(M)$. Поскольку решение системы Навье–Стокса уже не удается представить как геодезическую на рассматриваемой группе, в работе [11] для описания движения вязкой несжимаемой жидкости используется мультипликативная формула Далецкого–Троттера (смотри, например, Далецкий [12]), позволяющая склеить сильно непрерывные эволюционные семейства с производяшими операторами A, B в сильно непрерывное эволюционное семейство с производящим оператором $A+B$ в случае некоммутирующих неограниченных операторов A, B.

В этой работе развивается иной подход к описанию движения несжимаемой жидкости, основанный на построении диффузионного процесса на группе $\mathcal{D}_\mu(M)$ и дальнейшем использовании его для представления решения краевых задач гидродинамических уравнений. Отличие этого подхода от принятого в [11] можно пояснить на простом примере. Рассмотрим многообразие $\mathcal{D}$, снабженное аффинной связностью и пусть Γ – локальные коэффициенты этой связности (символы Кристоффеля), ∇ – соответствующая ковариантная производная. Уравнение для геодезических на $\mathcal{D}$ в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2\gamma_i(t)}{dt} = \Gamma_i^{jk}(\gamma(t))\frac{d\gamma_j(t)}{dt}\frac{d\gamma_k(t)}{dt}. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже мы считаем выполненным предположение о суммировании по повторяющимся индексам.

Пусть $\gamma(t,x)$ – решение задачи Коши для (1.1) с начальными условиями $\gamma(0,x)=x$, $\frac{d\gamma(t,x)}{dt}|_{t=0}=\phi(x)$ и

$$u(t,x) = \frac{\partial\gamma(t,x)}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Нетрудно проверить, используя уравнение геодезической и соотношение $\nabla_{u(t)}u(t)=0$, имеющее в локальных координатах вид

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \Gamma_i^{kj}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0,$$

что функция $u(t,x)$ вида (1.2) удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0, \quad u(0,x)=\phi(x) \tag{1.3}$$

на $\mathcal{D}$.

Заметим, что можно построить и другое представление решения задачи Коши (1.3), используя теорию характеристик (в иной терминологии линий тока) для квазилинейных гиперболических уравнений. Рассмотрим для этого систему

$$\frac{d\gamma}{dt} = u(t),\ \gamma(0)=x, \quad u(t,x)=\phi(\gamma(t,x)),\ u(0,x)=\phi(x). \tag{1.4}$$

Если существует гладкое решение этой системы, то функция $u(t,x)$, как нетрудно проверить, удовлетворяет (1.3).

При переходе от рассмотрения гиперболической системы (1.3) к параболической первое уравнение в (1.4) следует заменить соответствующим стохастическим уравнением, при этом второе уравнение приобретает вид

$$u(t,x) = E\phi(\xi(t)),$$

а усреднение берется по траекториям случайного процесса, являющегося решением стохастического уравнения.

Попытка построить случайный процесс связанный в некотором смысле с системой уравнений Навье–Стокса была предпринята Гликлихом [13]. Соотвествующий случайный процесс конструировался в терминах стохастического исчисления Нельсона на группе $\mathcal{D}_\mu(M)$, что требовало предварительного решения системы Навье–Стокса. В настоящей работе предложена иная конструкция, позволяющая независимо строить случайный процесс на группе $\mathcal{D}_\mu(M)$ и с его помощью получать вероятностные представления решений краевых задач для уравнения Навье–Стокса. При этом мы используем методы и результаты работ Далецкого и Белопольской [6, 7], посвященных изучению случайных процессов, ассоциированных с квазилинейными параболическими уравнениями и системами на бесконечномерных многообразиях, а также результаты Баксендейла [14] и Элворти [15] о конструкции диффузионных процессов на группе диффеоморфизмов.

2. Дифференциальная геометрия группы диффеоморфизмов компактного многообразия

В этом параграфе мы приводим описание необходимых для наших целей дифференциально геометрических объектов на группе диффеоморфизмов компактного многообразия. Более подробное их описание содержится в работах [11, 16].

Пусть M – компактное n-мерное (C^∞) многообразие с краем ∂M, представляющим собой $n-1$-мерное (C^∞) многообразие. Пусть $\pi : E \to M$ – конечномерное векторное расслоение над M. Для натурального числа s обозначим $H^s(E)$ пространство сечений расслоения E, обладающих тем свойством, что все их (обобщенные) производные до порядка s квадратично интегрируемы (на картах). Пусть $C^k(E)$ обозначает банахово пространство сечений E класса C^k с нормой, индуцирующей топологию равномерной сходимости всех производных до порядка k включительно.

Из теорем вложения Соболева следует, что если $n = \dim M$, $k \geqslant 0$ и $s > \frac{n}{2} + k$, то $H^s(E) \subset C^k(E)$ и включение непрерывно. Очевидно, $C^k(E) \subset H^k(E)$. Если $s > \frac{n}{2}$, то множество $H^s(M)$ всех H^s отображений $g : M \to M$ представляет собой гильбертово многообразие.

Всюду ниже мы будем предполагать, что на M задана риманова метрика G и обозначим $K_M : T^2M \to TM$ отображение связности, соответствующее этой метрике. При этом говорят, что M снабжено RMC структурой. Обозначаем $\nabla_X Y = K_M \circ TY \circ X$ ковариантную производную векторного поля Y вдоль векторного поля X, опуская иногда индекс M.

Пусть μ обозначает элемент объема на M. Зададим скалярное произведение в пространстве $C^\infty(TM)$ соотношением

$$(X, Y)_0 = \int\limits_M G_x(X(x), Y(x))\mu(dx).$$

Заметим, что $C^k(M)$ и $C^k(F)$ – банаховы многообразия и при $s > \frac{n}{2} + k$ имеет место плотное непрерывное вложение $H^s(M) \subset C^k(M)$.

Обозначим $C^k(TM)$ банахово пространство с нормой

$$|\xi|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in M} \|\nabla^j \xi(x)\|$$

и $L^p_k(TM)$ -банахово пространство с нормой

$$\|\xi\|_{(p,k)} = (\sum_{j=0}^{k} \int\limits_M \|\nabla^j \xi(x)\|^p \mu(dx))^{\frac{1}{p}}.$$

Основным пространством в этой работе является пространство $H^s(TM) = L^s_2(TM)$, представляющее собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y)_k = \sum_{j=0}^{k} (\nabla^j X, \nabla^j Y)_0.$$

Для натурального s обозначим

$$\|X\|_s = \sup_{Y \in C^\infty(TM)} \frac{(X,Y)_0}{\|Y\|_k}$$

и пусть $H^s(TM)$ – замыкание $C^\infty(TM)$ в этой норме. Обозначим $H^{-s}(TM)$ пространство двойственное к $H^s(TM)$ относительно $(,)_0$. Заметим, что для достаточно больших k

$$H^s(TM) = \mathcal{H}_+ \subset H^0(TM) = \mathcal{H}_0 \subset H^{-s}(TM) = \mathcal{H}_-$$

– оснащенное гильбертово пространство с плотным компактным вложением.

Пусть $\exp^M : TM \to M$ – экспоненциальное отображение соответствующее римановой метрике G на M. Существует естественный способ задания атласа многообразия $H^s(M)$. Пусть $g \in H^s(M)$ и $\tau : TM \to M$ – каноническая проекция, тогда

$$T_g H^s(M) = \{X \in H^s(M, TM) : \tau \circ X = g\}$$

– гильбертово пространство. Обозначим $TH^s(M) = H^s(M, TM) = \cup T_g H^s(M)$ и определим $\theta_{\exp} : T_g H^s(M) \to H^s(M)$ соотношением $X \mapsto \exp \circ X$. Мы зададим таким образом отображение некоторой окрестности нуля в $T_g H^s(M)$ на окрестность точки $g \in H^s(M)$. При этом на множестве $H^s(M)$ вводится структура многообразия и эта структура не зависит от выбора метрики.

Пусть $h : M \to M$ – гладкое отображение. Отображение $\theta_h : H^s(M) \to H^s(M)$ вида $\theta_h : f \mapsto h \circ f$ является C^∞ отображением. Если h ис C^{k+l}, то θ_h является отображением класса $C^l, l \geqslant 0$. Производная θ_h имеет вид θ_{Th}, где $Th : TM \to TM$ – производная h.

Рассмотрим композицию справа отображений класса C^k. Пусть $h : M \to M$ – функция класса C^k. Тогда отображение $\alpha_h : C^k(M) \to C^k(M)$ вида $f \mapsto f \circ h$ является отображением класса C^∞ с производной α_h. Это однако неверно для случая H^k, поскольку композиция H^k отображений может не быть отображением класса H^k.

Пусть M – многообразие без края и $C^1\mathcal{D}$ обозначает множество C^1 диффеоморфизмов многообразия M. Это множество открыто в $C^1(M)$ и представляет собой топологическую группу. Пусть $s > \frac{n}{2} + 1$, и $\mathcal{D}^s = H^s(M) \cap C^1\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{D}^s \subset H^s(M)$ топологическая группа и

$$\mathcal{D}^s = \{g \in H^s(m) : g \text{ биективно и } g^{-1} \in H^s(M)\}.$$

Как и в случае C^k, умножение справа

$$R_g : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s, \quad R_g\zeta = \zeta \circ g$$

является отображением класса C^∞ с производной α_h для каждой $g \in \mathcal{D}^s$ и если $g \in \mathcal{D}^{s+l}$, то

$$L_g : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s, \quad L_g\zeta = g \circ \zeta$$

является отображением класса C^l. Таким образом $TR_g : X \mapsto X \circ g$ и $TL_g : X \mapsto Tg \circ X$.

Итак, $H^s \times \mathcal{D}^s \to H^s$ – непрерывное отображение, тогда как $H^{s+l} \times \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ – отображение класса C^l. Для $g \in \mathcal{D}^s$, $\alpha_g : h \to h \circ g$ является отображением класса C^∞ из H^s в H^s с производной α_g и для $h \in H^{s+l}$, $\theta_h : g \to h \circ g$ является отображением класса $C^l (0 \leqslant l \leqslant \infty)$ с производной θ_{Th}. Для того, чтобы $h \circ g$ было отображением класса H^s нужно, чтобы g было локальным изоморфизмом т.е. $Tg(m) = T_m g$ должно быть биективным отображением в каждой точке.

Обратное отображение $g \to g^{-1}$ является непрерывным на $\mathcal{D}^s$. Если $g(t)$ – C^1 кривая в $\mathcal{D}^{s+l}$, $l \geqslant 1$, то

$$\frac{d}{dt} g(t)^{-1} = -T(g(t)^{-1}) \circ \{\frac{d}{dt} g(t)\} \circ g(t)^{-1} \in T_{g(t)^{-1}} \mathcal{D}^s.$$

Заметим, что $\mathcal{D}^s \subset H^s(M)$ – открытое множество, $T_e\mathcal{D}^s$ – пространство всех векторных полей на M класса H^s и $T_e\mathcal{D}^s = H^s(TM)$.

Поскольку умножение справа – гладкое отображение, можно говорить о правоинвариантных векторных полях на $\mathcal{D}^s$. Для $X \in H^{s+l}(TM) = T_e\mathcal{D}^{s+l}, g \to X \circ g$ яаляется C^l отображением из $\mathcal{D}^s$ в $T\mathcal{D}^s$. При этом, если $l \geqslant 0$, то пространство правоинвариантных векторных полей класса C^l на $\mathcal{D}^s$ изоморфно $H^{s+l}(TM)$ и X принадлежит классу H^{s+l}, если $\tilde{X}(g) = X \circ g$ принадлежит классу C^l. Пусть $l \geqslant 1$ и для $X, Y \in H^{s+l}(TM)$, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ – соответственно правоинвариантные векторные поля на $\mathcal{D}^s$. Тогда $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = [X, Y]$.

Дифференцируемая структура на группе $\mathcal{D}$ диффеоморфизмов многообразия M класса C^∞, задается с помощью C^∞ топологии определяемой как предел топологий в $\mathcal{D}^s$

$$\mathcal{D} = \cap_{s > \frac{n}{2}} \mathcal{D}^s.$$

При этом говорят, что на $\mathcal{D}$ задана структура ILH (гильбертов обратный предел) группы Ли.

Вообще говоря, если многообразия M и N снабжены описанной выше структурой,

$$\mathcal{M} = \cap \mathcal{M}^s, \quad \mathcal{N} = \cap \mathcal{N}^s,$$

то отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ принадлежит классу C^k тогда и только тогда, когда для всех s существует $j(s)$ такое, что f обладает C^k продолжением $f^s : \mathcal{M}^{j(s)} \to \mathcal{N}^s$. Таким образом на $\mathcal{D}$ композиция и обращение являются гладкими отображениями, так что в этом смысле $\mathcal{D}$ является группой Ли с алгеброй Ли

$$T_e\mathcal{D} = H^\infty(TM) = C^\infty(TM).$$

Пусть M – компактное многообразие с краем ∂M. Вложим M в компактное многообразие $\tilde{M}$ без края так, чтобы $\mathrm{int}(M)$ и ∂M являлись подмногообразиями и ∂M было топологической границей M. В качестве $\tilde{M}$ можно выбрать дубль M. Гладкое многообразие $H^s(M, \tilde{M})$ при этом может быть описано с помощью приведенной выше конструкции (следует отметить, что $H^s(M, M)$ не является более многообразием, поскольку оно имеет бесконечномерные углы). Пусть $\mathcal{D}$ обозначает группу диффеоморфизмов многообразия M и

$$\mathcal{D}_p = \{\eta \in \mathcal{D} : \eta(x) = x \text{ для всех } x \in \partial M\}.$$

Тогда $\mathcal{D}_p$ является ILH подгруппой $\mathcal{D}$ алгебра Ли которой состоит из векторных полей на M обращающихся в нуль в точках ∂M. Мы предполагаем, что метрика на $\tilde{M}$ выбрана так, что край ∂M является вполне геодезическим подмногообразием. Пусть $\eta \in \mathcal{D}^s(M) \subset H^s(M, \tilde{M})$ и

$$\exp : U \subset T_\eta H^s(M, \tilde{M}) \to H^s(M, \tilde{M})$$

экспоненциальная карта в окрестности η. Тогда

$$\mathcal{X}^s_\eta(M) = \{X \in H^s(M, T\tilde{M}) :$$
$$X \text{ накрывает } \eta \text{ и } X(x) \in T_x\partial M \text{ для всех } x \in \partial M\}$$

является замкнутым подпространством в $H^s(M, T\tilde{M}) = TH^s(M, \tilde{M})$. При этом exp отображает $U \cap \mathcal{X}^s_\eta$ на окрестность η в $\mathcal{D}^s(M)$ и задает карту подмногообразия.

Важную роль при изучении задач гидродинамики играет разложение Ходжа. Для компактного ориентированного n-мерного риманова (C^∞) многообразия с краем ∂M разложение Ходжа может быть описано следующим образом.

Пусть $i : \partial M \to \tilde{M}$ – отображение включения. Тогда $i^*\alpha$ определено корректно, если α является отображением класса H^s для $s \geqslant 1$. Назовем k-форму $\alpha \in H^s$, $\quad s \geqslant 1$ параллельной или касательной к границе тогда и только тогда, когда $n\alpha = i^*(*\alpha) = 0$ и нормальной к границе в том и только в том случае, если $t\alpha = i^*\alpha = 0$. Здесь $*$ – это отображение из множества k-форм в множество $n-k$-форм.

Переходя к координатам, нетрудно проверить, что следующие утверждения эквивалентны.

а) X параллельно ∂M $(X(x) \in T_x\partial M$ для всех $x \in \partial M)$,

б) $\tilde{X}$ параллельно ∂M,

в) для любого элемента объема μ на M, $i_X\mu$ нормально к ∂M.

Здесь $\tilde{X}$ обозначает 1-форму, полученную из X с помощью метрики. Если кроме того $t\alpha = 0$, то $td\alpha = 0$, а если $n\beta = 0$, то $t\delta\beta = 0$.

Обозначим Λ^k расслоение k-форм над M и пусть индексы t или n обозначают соответственно форму касательную или нормальную к ∂M, тогда как индекс 0 соответствует форме, обращающейся в ноль на границе ∂M. Таким образом, если $s \geqslant 1$, то H^s_t, H^s_n и H^s_0 – замкнутые подпространства пространства $H^s(\Lambda^k)$.

Пусть $\mathcal{H}^s$ обозначает множество гармонических полей, то есть полей $\alpha \in H^s$ таких, что $d\alpha = 0$ и $\delta\alpha = 0$ (более узкое пространство, чем множество гармонических форм $\Delta\alpha = 0$). Обозначим $\mathcal{C}^s$ множество козамкнутых форм $\delta\alpha = 0$ и $\mathcal{E}^s$ множество замкнутых форм $d\alpha = 0$ в H^s. Заметим, что если $\alpha \in \mathcal{H}^s$, то α принадлежит классу C^∞ на $\mathrm{int}(M)$, но может терять гладкость на границе.

Важное утверждение содержится в следующей теореме [11].

Теорема 1.1. *Следующие разложения являются ортогональными разложениями в норме H^0:*

а) $H^s(\Lambda^k) = d(H^{s+1}_n(\Lambda^{k-1})) \bigoplus \delta(H^{s+1}_t(\Lambda^{k+1}) \bigoplus \mathcal{H}^s$,

б) $H^s(\Lambda^k) = d(H^{s+1}_0(\Lambda^k)) \bigoplus \delta(H^{s+1}_0(\Lambda^{k+1})) \bigoplus \mathcal{H}^s$,

в) $H^s(\Lambda^k) = d(H^{s+1}(\Lambda^{k-1})) \bigoplus \mathcal{C}^s_t(\Lambda^k)$,

г) $H^s(\Lambda^k) = \delta(H^{s+1}(\Lambda^{k+1})) \bigoplus \mathcal{E}^s_t(\Lambda^k)$.

При этом соответствующие проекторы непрерывны (то есть эти подпространства замкнуты).

Замечание. Важным следствием пункта в) является следующий классический результат [1].

Пусть X -векторное поле класса H^s на M, $s \geqslant 0$. Существует H^{s+1} – функция f и параллельное ∂M соленоидальное векторное поле Y класса H^s такое, что $X = \operatorname{grad} f + Y$. При этом проекторы $P(X) = Y$ и $Q(X) = \operatorname{grad} f$ являются непрерывными линейными отображениями на $H^s(TM)$.

Пусть μ – фиксированный элемент объема на M. Основным объектом в этой работе является множество

$$\mathcal{D}^s_\mu = \{g \in \mathcal{D}^s | g^*(\mu) = \mu\}.$$

Напомним, что если $\mathcal{D}$ является банаховым многообразием, то слабая риманова структура γ на $\mathcal{D}$ – это отображение, сопоставляющее каждому $g \in \mathcal{D}$ непрерывную положительно определенную симметричную билинейную форму $\gamma(g) \in L^2(T_g\mathcal{D}; R)$ гладко зависящую от $g \in \mathcal{D}$ (непрерывность билинейных форм на $T_g\mathcal{D}$ понимается при этом в смысле обычной топологии связанной с нормой). Другими словами, для любой координатной окрестности U точки g и индуцированной карты $U \times T_g\mathcal{D}$ сужения $T\mathcal{D}|_U$ отображение

$$\gamma : U \to L^2(T_g(\mathcal{D}), R)$$

является гладким отображением.

Определим билинейную форму на $T_g\mathcal{D}^s = \{V \in H^s(M, TM) : \tau \circ V = g\}$, $s > \frac{n}{2}$ соотношением

$$(V, W) = \int\limits_M \langle V(m), W(m)\rangle_{g(m)}\mu(m). \tag{2.1}$$

Здесь μ – элемент объема, индуцированный метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на M.

При этом

1. Форма $(,)$ определяет слабую риманову структуру на $\mathcal{D}^s$.

2. Форма $(,)$ порождает (единственную) аффинную связность без кручения $\overline{\nabla}$.

3. Пусть $\exp^M : TM \to M$ – экспоненциальное отображение соответствующее связности ∇^M на M. Тогда отображение $\exp^{\mathcal{D}} : T\mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$, задаваемое формулой

$$\exp^{\mathcal{D}}(V) = \exp^M \circ V,$$

является экспоненциальным отображением соответствующим связности $\nabla^{\mathcal{D}}$. Отображение $\exp^{\mathcal{D}}$ определено лишь в окрестности нулевого сечения расслоения $T\mathcal{D}^s$ и является C^∞ отображением на окрестность единичного элемента $e \in \mathcal{D}^s$.

Предложение 2.1. *Риманова структура (,) сохраняется при действии группы $\mathcal{D}^s_\mu$ на $\mathcal{D}^s$ правым умножением. Более того $\nabla^{\mathcal{D}}$ и $\exp^{\mathcal{D}} \circ TR_g = R_g \circ \exp^{\mathcal{D}}$ при $g \in \mathcal{D}^s$ инвариантны относительно действия группы $\mathcal{D}^s$ на самой себе с помощью правого умножения. Здесь R_g обозначает умножение справа на g.*

Пусть форма (,) определена формулой (2.1) так, что она задает слабую риманову метрику на $\mathcal{D}^s_\mu$. Эта форма инвариантна относительно действия $\mathcal{D}^s_\mu$ и для каждого $g \in \mathcal{D}^s_\mu$ ортогональный проектор

$$P_g : T_g(\mathcal{D}^s) \to T_g(\mathcal{D}^s_\mu) \tag{2.2}$$

является непрерывным сюръективным отображением. При этом

$$P_g = TR_g \circ P_e \circ TR_{g^{-1}}, \tag{2.3}$$

где $P_e : T_g(\mathcal{D}^s) \to T_g(\mathcal{D}^s_\mu)$ – ортогональный проектор на первое слагаемое в разложении Ходжа

$$T_e(\mathcal{D}^s) = H^s(TM) = T_e(\mathcal{D}^s_\mu) \oplus \operatorname{grad} H^{s+1}(\Lambda^0(M)) \tag{2.4}$$

(ортогональность понимается по отношению к H^0 метрике).

Ниже нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть M компактное многообразие без края. Тогда (,) является $\mathcal{D}^s_\mu$ право инвариантной метрикой на $\mathcal{D}^s_\mu$. Она индуцирует гладкую аффинную связность $\overline{\nabla} = P \circ \nabla^{\mathcal{D}}$ и экспоненциальное отображение $\overline{\mathrm{Exp}}$ на $\mathcal{D}^s_\mu$ инвариантные относительно правого действия группы $\mathcal{D}^s_\mu$.*

Риманову метрику на M можно продолжить до римановой метрики на дубле $\tilde{M}$ многообразия M. При этом, если $g \in H^s(M, \tilde{M})$, то

$$T_g H^s(M, \tilde{M}) = \{X \in H^s(M, T\tilde{M}) : \pi \circ X = g\}$$

– гладкое многообразие и соотношение (2.1) задает на нем слабую риманову метрику. При этом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ понимается как метрика на $\tilde{M}$, а μ – элемент объема на M. Аффинную связность $\bar{\nabla}$ и экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp}\,(X) = \exp \circ X$ на $H^s(M, \tilde{M})$ можно задать аналогично тому, как это было сделано выше. Здесь

$\exp : T\tilde{M} \to \tilde{M}$ экспоненциальное отображение многообразия $\tilde{M}$). Таким образом, $H^s(M,\tilde{M})$ снабжено структурой полного слабого риманова многообразия. Поскольку $\mathcal{D}^s_\mu(M) \subset \mathcal{D}^s(M) \subset H^s(M,\tilde{M})$, то хотя exp не определено на TM, тем не менее можно определить экспоненциальное отображение на $\mathcal{D}^s_\mu(M)$, задав ортогональный проектор $P : TH^s(M,\tilde{M})|_{\mathcal{D}^s_\mu} \to T\mathcal{D}^s_\mu$ в метрике $(,)$.

Ортогональный проектор

$$P_e : T_eH^s(M,\tilde{M}) \to T_e\mathcal{D}^s_\mu,$$

заданный как оператор проектирования на первое слагаемое в разложении Ходжа (2.4) является оператором ортогонального проектирования относительно $(,)$ и отображение $P_g : T_eH^s(M,\tilde{M}) \to T_g\mathcal{D}^s_\mu$ задается соотношением

$$P_g = TR_g \circ P_e \circ TR_{g^{-1}}$$

для $g \in \mathcal{D}^s_\mu$.

Таким образом, если M компактное многообразие с гладким краем ∂M и $(,)$ определено на $\mathcal{D}^s_\mu$ соотношением (2.1) для $X, Y \in T\mathcal{D}^s_\mu$, то $(,)$ является правоинвариантной слабой римановой метрикой на $\mathcal{D}^s_\mu$, индуцирующей гладкую аффинную связность $\tilde{\nabla} = P \circ \bar{\nabla}$ и гладкое экспоненциальное отображение $\tilde{\mathrm{Exp}}$, определенное в окрестности нулевого сечения $T\mathcal{D}^s_\mu$. При этом $\tilde{\mathrm{Exp}}, \tilde{\nabla}$ инвариантны относительно правого умножения на $\mathcal{D}^s_\mu$ и $\tilde{\mathrm{Exp}}|_{T\mathcal{D}^s_\mu}$ накрывает окрестность точки $e \in \mathcal{D}^s_\mu$.

Важную роль для дальнейших рассмотрений играет гладкость отображения расслоений $P : T\mathcal{D}^s \to T\mathcal{D}^s$, установленная в работе [11].

Заметим, что, вообще говоря, отображение вида $T_g = TR_g \circ T_e \circ TR_g^{-1}$, определенное на $T\mathcal{D}^s$ не является гладким по g. Для того, чтобы обеспечить эту гладкость нужно специальным образом сконструировать отображение T_e.

Рассмотрим с этой целью точную последователнькость гладких векторных расслоений над M

$$\mathcal{E} \xrightarrow{r} F \xrightarrow{s} G,$$

полагая $r = s = Id$ на M. Тогда $\ker r, \operatorname{im} r$ и $\operatorname{im} s$ являются подрасслоениями расслоений $\mathcal{E}$ и F соответственно.

Пусть $\pi : Q \to M$ – конечномерное векторное расслоение, обозначим $\alpha_\pi : H^s(M,Q) \to H^s(M), \alpha_h(r) = \pi \circ r$ отображение расслоений и выберем $Q = \Lambda^k$ – расслоение $k-$ форм. Определим $\bar{d} : H^s(M,\Lambda^k)|_{\mathcal{D}^s} \to H^{s-1}(M,\Lambda^{k+1})|_{\mathcal{D}^s}$ соотношением $\bar{d}_g = R_g \circ d \circ R_{g^{-1}}$. Тогда $\bar{d}$ – гладкое отображение векторных расслоений, поскольку умножение H^s отображений гладко. Аналогичное утверждение справедливо и для отображения $\bar{\delta} : H^s(M,\Lambda^k)|_{\mathcal{D}^s} \to H^{s+1}(M,\Lambda^{k-1})|_{\mathcal{D}^s}$, заданного соотношением $\bar{\delta} = R_g \circ \delta \circ R_{g^{-1}}$.

Если $\mathcal{K} \subset H^s(\Lambda^k)$ – конечномерное подпространство, элементы которого принадлежат классу C^∞, и $\mathcal{R} : H^s(\Lambda^k) \to \mathcal{K}$ – непрерывная проекция, то при $l \leqslant s$

1. Выбирая $\mathcal{K}_g = \{f \in H^l(M,\Lambda^k) : f \in R_g\mathcal{K}\}$ и $\mathcal{E} = \cup_{g\in\mathcal{D}^s}\mathcal{K}_g$, мы получаем, что $\mathcal{E}$ является подрасслоением расслоения $H^l(M,\Lambda^k)|_{\mathcal{D}^s}$,

2. Отображенеие $\bar{\mathcal{R}}$ вида $\bar{\mathcal{R}}_g = R_g \circ \mathcal{R} \circ R_{g^{-1}}$ является гладким отображением расслоений. Таким образом $\mathcal{E} = \mathrm{im}\bar{\mathcal{R}}$ и $\ker\bar{\mathcal{R}}$ являются подрасслоениями так же как $\mathrm{im}\,(Id - \bar{\mathcal{R}})$ и $\ker\,(Id - \bar{\mathcal{R}})$.

Аналогичные утверждения справедливы и для $\ker\bar{d}$ и $\mathrm{im}\,\bar{\delta}$, что вытекает из свойств отображений точных последовательностей гладких векторных расслоений

$$H^s(M,\Lambda^k)|_{\mathcal{D}^s} \xrightarrow{\bar{d}} \mathrm{im}(Id - \bar{\mathcal{R}}) \xrightarrow{\bar{d}} H^{s-1}(M,\Lambda^{k+1})|_{\mathcal{D}^s},$$

где $\mathcal{R} : H^{s-1}(\Lambda^k) \to H^{s-1}(\Lambda^k)$ – H^s ортогональная проекция на гармонические формы. В заключение опишем специальный вид отображения P_e, о котором шла речь выше.

Лемма 2.1. *Пусть $P_e : H^s(\Lambda^1) \to H^s(\Lambda^1)$ – ортогональный проектор определенный разложением Ходжа* (2.4). *Тогда*

$$P_e(\nu) = \mathcal{R}\nu + \delta\Delta^{-1}d\nu,$$

где $\mathcal{R}$ – (H° ортогональный) проектор на гармонические формы.

Доказательство. Пусть $\nu \in H^s(\Lambda^1)$, тогда в силу (2.4)

$$\nu = \Delta(\Delta^{-1}(\nu - \mathcal{R}\nu)) + \mathcal{R}\nu$$

и

$$P_e\nu = \delta d(\Delta^{-1}(\nu - \mathcal{R}\nu)) + \mathcal{R}\nu$$

соответствует бездивергентным векторным полям. Поскольку $d\Delta^{-1} = \Delta^{-1}d$ и $d\mathcal{R}\nu = 0$, мы получаем требуемый результат.

Наконец, для того, чтобы показать, что P – гладкое отображение расслоений достаточно показать, что $R_g\delta\Delta^{-1}dR_{g^{-1}} = R_g\delta\Delta^{-1}R_{g^{-1}}\bar{d}$ гладко зависит от g.

Рассмотрим $d : H^s(\Lambda^k)) \to H^{s-1}(\Lambda^{k-1}))$. Тогда сужение $d|_{\mathrm{im}\,\delta}$: $\delta H^{s+1}(\Lambda^k)) \to H^s(\Lambda^k))$ является изоморфизмом также как и обратное отображение $\delta\Delta^{-1}$. Обозначим $\mathcal{F} = \delta(H^{s+1}(\Lambda^k)) = \ker\delta \ominus \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – множество гармонических полей и $\ominus$ обозначает взятие H^0 ортогонального дополнения. Отсюда $\mathcal{F} = \mathrm{im}(Id - \mathcal{R})$, где $\mathcal{R} : \ker\delta \to \mathcal{K}$ – проектор на $\mathcal{K}$. Пусть

$$\bar{F} = \vee \mathcal{F}_g, \quad \mathcal{F}_g = \{f \in H^s(M, \lambda^k) : f \in R_g\mathcal{F}\}.$$

Тогда $\bar{F}$ – подрасслоение расслоения $H^s(M, \Lambda^k)|_{\mathcal{D}^s}$. Кроме того, $\bar{d} : \bar{F} \to \mathrm{im}\bar{d}$ – изоморфизм расслоений, имеющий гладкий обратный $\overline{\delta\Delta^{-1}}$, где $\overline{\delta\Delta^{-1}} = = R_g\delta\Delta^{-1}R_{g^{-1}}$.

Если M – многообразие с краем, то необходимо учитывать влияние граничных условий. С этой целью, рассматривая многообразие $H^s(M, \tilde{M})$, отождествим $H^s(M, \Lambda^k(\tilde{M}))|_{\mathcal{D}^s}$ с $H^s(M, \Lambda^k(M))|_{\mathcal{D}^s}$ и проверим что $H^s_t(M, \Lambda^k(M))|_{\mathcal{D}^s}$ – гладкое расслоение. Напомним, что индекс t выделяет элементы расслоения $H^s(M, \Lambda^k(\tilde{M}))|_{\mathcal{D}^s}$ касательные к ∂M (после правого сдвига в единицу). То, что при этом мы получаем гладкое подрасслоение расслоения $H^s(M, \Lambda^k(M))|_{\mathcal{D}^s}$ можно установить используя метрику, превращающую ∂M в тотально геодезическое подмногообразие при определении дифференциальной структуры.

После этого выберем

$$P_e : H^s(\Lambda(M)) \to H^s_t, \quad P_e(\nu) = \mathcal{R}\nu + \delta d\Delta_t^{-1}(\nu - \mathcal{R}_t\nu)$$

и заметим, что достаточно иметь дело с этим последним выражением, поскольку

$$\delta d\Delta_t^{-1}(\nu - \mathcal{R}_t\nu) = d\Delta_t^{-1}d\nu.$$

В отличие от случая многообразия без края, Δ_t^{-1} не всегда коммутирует с d или δ [11].

С учетом описанных модификаций приведенные выше утверждения о гладкости проектора P_g остаются в силе и для многообразия с краем.

3. Нелинейная диффузия на бесконечномерных многообразиях

В этом параграфе мы изложим кратко результаты по теории случайных процессов, ассоциированных с квазилинейными уравнениями в частных производных на гильбертовых многообразиях, развитой в работах Далецкого и Белопольской [6, 7]. Мы приведем их в форме, удобной для построения диффузионного процесса, ассоциированного с системой уравнений Навье–Стокса.

Пусть $\mathcal{P}$ гильбертово многообразие, снабженное RMC структурой и гильбертово пространство B служит его моделью. Предположим, что на касательном расслоении $T\mathcal{P}$ задана гильберто-шмидтова структура, или другими словами, что модельное пространство представляет собой оснащенное гильбертово пространство $B_+ \subset B \subset B_-$. Пусть далее задан метрический тензор G_z, определяющий $\|X\|_z = (G_z(X,X))^{\frac{1}{2}}$, $z \in \mathcal{P}$, $X \in T_z\mathcal{P}$. Обозначим $\exp^{\mathcal{P}}$ соответствующее экспоненциальное отображение.

Пусть $H_+ \subset H \subset H_-$ – оснащенное гильбертово пространство, $\kappa : \mathcal{T} = \mathcal{P} \times H \to \mathcal{P}$ – тривиальное векторное расслоение над $\mathcal{P}$, $\gamma : L_{12}(\mathcal{T}, T\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ расслоение операторов Гильберта-Шмидта, действующих из $\mathcal{T}$ в $T\mathcal{P}$ и согласованных со структурами оснащения слоев [7].

Обозначим $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полное вероятностное пространство и пусть $w(t)$ – стандартный винеровский процесс в гильбертовом пространстве $H \subset H_-$. Для любой случайной величины ξ обозначим $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$.

Пусть A – гладкое сечение расслоения $\gamma : L_{12}(\mathcal{T}, T\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$, $v(s,z)$ и $\phi(z)$ гладкие ограниченные векторные поля на $\mathcal{P}$. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\beta = \exp^{\mathcal{P}}_{\beta(\tau)}(-v(t-\tau, \beta(\tau))d\tau + A(\beta(\tau))dw(\tau)) \tag{3.1}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\beta(0) = z \in \mathcal{P}. \tag{3.2}$$

Как известно [7], существует единственное решение задачи (3.1)–(3.2), представляющее собой диффузионный процесс $\beta(t) \in \mathcal{P}$ и векторное поле $u(t,z)$ вида

$$u(t,z) = E\phi(\beta(t)) \tag{3.3}$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_v\, u = \frac{1}{2}\Delta^A_{\mathcal{P}} u, u(0,z) = \phi(z). \tag{3.4}$$

Здесь

$$\Delta^A_{\mathcal{P}} u = \mathrm{Tr}\,[\nabla^{\mathcal{P}}_A \nabla^{\mathcal{P}}_A u - \nabla^{\mathcal{P}}_{\nabla^{\mathcal{P}}_A A} u] =$$

$$= \sum_{k,j,i=1}^{\infty} [A_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_j} A_{ij} - \sum_{s=1}^{\infty} \Gamma^{ij}_s A_{jk} A_{ki} \frac{\partial u}{\partial z_s}]$$

и Γ^{ij}_s – символы Кристоффеля RMC структуры на $\mathcal{P}$.

Если, кроме того, $\mathcal{P}$ обладает структурой группы Ли, $\mathcal{J} = T_e(\mathcal{P})$ – ее алгебра Ли, $e \in \mathcal{P}$ – единичный элемент, а $u(t,g) = u(t) \circ g$, $u(t) = u_e(t) \in \mathcal{J}$ и $A(g)h = Ah \circ g$ правоинвариантные векторные поля на $\mathcal{P}$, причем $\mathrm{Tr}\, AA^* < C_0$. Перепишем (3.1) в виде

$$d\beta = \mathrm{Exp}\,(-v(t-\tau)d\tau + Adw(\tau))R_{\beta(\tau)}, \qquad (3.5)$$

где Exp -экспоненциальное отображение группы $\mathcal{P}$. Напомним, что $\exp^{\mathcal{P}}_{\beta} \circ TR_{\beta} = \mathrm{Exp}\ R_{\beta}$.

При этом в локальных координатах

$$d\beta = (-v(t-\tau)d\tau + \frac{1}{2}A^2 d\tau + Adw(\tau))\beta(\tau). \qquad (3.6)$$

и рассмотрение уравнения (3.1) можно заменить рассмотрением уравнения (3.5).

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений

$$d\beta = \exp^{\mathcal{P}}_{\beta(\tau)}(-u(t-\tau,\beta(\tau))d\tau + A(\beta(\tau))dw(\tau)), \quad \beta(0) = z, \qquad (3.7)$$

$$u(t,z) = E\phi(\beta(t)). \qquad (3.8)$$

полученной из (3.1), (3.3) с помощью замыкающего соотношения $v(t,z) = u(t,z)$.

Система (3.7), (3.8) представляет собой частный случай систем, рассмотренных в [7].

Мы тем не менее проведем здесь доказательство ее разрешимости с тем, чтобы убедиться в том, что все рассуждения будут верны также в случае, когда $\mathcal{P} = \mathcal{D}^s_{\mu}$.

Пусть на многообразии $\mathcal{P}$ задана гладкая RMC структура и касательное расслоение $T\mathcal{P}$ также снабжено гладкой RMC структурой, согласованной с RMC структурой на $\mathcal{P}$. Построим решение системы (3.7) (3.8) с помощью метода последовательных приближений. Рассмотрим с этой целью соотношения

$$d\beta^n = \exp^{\mathcal{P}}_{\beta^n(\tau)}(-u^n(t-\tau,\beta^n(\tau))d\tau + A(\beta^n(\tau))dw(\tau)), \qquad (3.9)$$

$$u^{n+1}(t,z) = E\phi(\beta^n(t)), \quad \beta^n(0) = z, \tag{3.10}$$

описывающие последовательные приближения, и заметим, что решение уравнения (3.9) можно склеить из решений локализованных стохастических уравнений.

Поскольку многообразие $\mathcal{P}$ снабжено RMC структурой, оно обладает равномерным атласом [7]. В частности, отсюда следует, что в каждой точке $z \in \mathcal{P}$ можно задать тройку окрестностей $U_z^2 \subset U_z^1 \subset U_z$ так, чтобы $U_z^2 \subset U_y^1$ для $y \in U_z^2$.

Пусть $q : s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = t$ – разбиение интервала $[0,t]$ и для любого $y \in \mathcal{P}$ $\lambda_y(z)$ – гладкая функция на $\mathcal{P}$, обладающая следующими свойствами

$$\lambda_y(z) = 0, \qquad \text{если } z \notin U_y, \quad \lambda_y(z) = 1, \qquad \text{если } z \in U_y^1.$$

Обозначим

$$v_y(t,z) = \lambda_y(z)v(t,z), \quad A_y(z) = \lambda_y(z)A(z).$$

Нетрудно проверить, что существует локализованное случайное эволюционное семейство $S_y(t,\tau)$, порожденное решением локализованного уравнения

$$d\beta = \exp^{\mathcal{P}}_{\beta(\tau)}(-v_y(t-\tau,\beta(\tau))d\tau + A_y(\beta(\tau))dw(\tau)),$$

такое, что $\beta(t) = S_y(t,0)\circ z \in U_y$, если $z \in U_y$.

Зададим стохастический процесс на $\mathcal{P}$ соотношениями

$$S^q(s,t)z = S_{\beta^{n-1}(t_{n-1})}(t,t_{n-1})\circ\beta^{n-1}(t_{n-1}),$$
$$\beta^k(\tau) = S_{\beta^{k-1}(t_{k-1})}(\tau,t_{k-1})\circ\beta^{k-1}(t_{k-1}),\ t_{k-1}\leqslant\tau\leqslant t_k,\ \beta^0(s) = z. \tag{3.11}$$

При этом (3.9), (3.10) задают последовательные приближения к решению уравнения

$$u_\beta(t-\tau) = Eu_0(\beta_{\tau,\beta(\tau)}(t)) = \Phi(\tau,\beta,u(t-\tau)). \tag{3.12}$$

Для доказательства сходимости u_β^n к решению u_β уравнения (3.12) нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Наряду со случайным процессом $\beta(t)$, порождающим эволюционное семейство $S_y(t,s)$ рассмотрим случайное эволюционное семейство $Y(t,s) : \alpha(s) \mapsto \alpha(t)$ на $T\mathcal{P}$, порожденное решением $\alpha(t)$ уравнения

$$d\alpha = \exp^{T\mathcal{P}}_{\alpha(t)}(B(t-\tau,\alpha(\tau))d\tau + L(\alpha(\tau))dw),$$

коэффициенты которого заданы соотношениями

$$B(\tau, \alpha(\tau)) = (-v(t-\tau, \beta(\tau)), -\nabla_\alpha v(t-\tau, \beta(\tau))$$

и $L(\alpha(\tau)) = (A(\beta(\tau)), \nabla_\alpha A(\beta(\tau)))$.

Для того, чтобы получить необходимые оценки для случайного процесса $\alpha(t)$, воспользуемся мультипликативным представлением (3.11) решения (3.1).

Обозначим Θ пространство C^1-гладких ограниченных векторных полей на $\mathcal{P}$ с нормой $|\cdot|_0$.

Пусть $\Phi : T_z\mathcal{P} \to T_z\mathcal{P}$ – отображение, заданное соотношением

$$u(t,z) = E\phi(\beta(t)) = \Phi(t, z, u(t)).$$

Для того, чтобы проверить, что Φ действует в Θ определим положительную скалярную функцию $\gamma(s)$ такую, что оценка

$$|\nabla_h^{\mathcal{P}} v(t-s)|_0 \leqslant \gamma(t-s)|h|_0 \qquad (3.15)$$

влечет за собой оценку

$$|\nabla_h^{\mathcal{P}} u(t-s)|_0 \leqslant \gamma(t-s)|h|_0 \qquad (3.16)$$

для функции $u(t,z)$ заданной соотношением (3.8).

Для каждого $t \in [0,T]$ обозначим $K_1^u(t)$ минимальную константу такую, что

$$|\nabla_h^{\mathcal{P}} u(t)|_0 \leqslant K_1^u(t)|h|_0.$$

Из свойств решений локализованных стохастических уравнений и (3.11) следует, что

$$E|\alpha(t)|_0 \leqslant |h|_0 e^{t\int_0 [C_0 + K_1^u(t-\tau)]d\tau}. \qquad (3.14)$$

Простые вычисления показывают, что

$$|\nabla_h^{\mathcal{P}} u(t-s)|_0^2 \leqslant |\nabla^{\mathcal{P}} u_0|_0 E|\alpha(t)|_0^2 \leqslant |h|_0^2 K_0\, e^{\int_s^t [C_0 + K_1^v((t-\tau)]d\tau} \qquad (3.16)$$

Из соотношений (3.13)–(3.16) следует оценка

$$K_1^u(t) \leqslant K_0\, e^{\int_0^t [K_1^v(t-\tau) + C_0]d\tau}. \qquad (3.17)$$

Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения

$$\gamma(t-s) = \gamma(s) e^{\int_s^t [\gamma(t-\tau) + C_0]d\tau}, \quad \gamma(0) = K_0. \qquad (3.18)$$

Нетрудно проверить, что $\gamma(t)$ удовлетворяет также следующей задаче Коши

$$-\frac{d\gamma(t-s)}{ds}=\gamma(t-s)[\gamma(t-s)+C_0]\,,\quad \gamma(0)=K_0 \tag{3.19}$$

и, следовательно, имеет вид

$$\gamma(t-s)=\frac{C_0K_0e^{C_0(t-s)}}{C_0+K_0-K_0e^{C_0(t-s)}}. \tag{3.20}$$

Последнее соотношение показывает, что $\gamma(t-s)$ ограничена для всех $s\in[l,t]$ при условии, что длина этого отрезка $\tau=|t-l|$ подчиняется оценке

$$\tau<\frac{1}{C_0}ln(1+\frac{C_0}{K_0}). \tag{3.21}$$

Таким образом, мы построили интервал $[l,t]$ и функцию $\gamma(t-s)$, $s\in[l,t]$ такие, что если $K_1^v(\tau)\leqslant\gamma(\tau)$, то $K_1^u(\tau)\leqslant\gamma(\tau)$.

Другими словами, мы доказали, что $u(t-s)\circ g(s)\in\Theta$, если $v(t-s)\circ g(s)\in\Theta$, где Θ обозначает пространство S^1 – гладких ограниченных векторных полей на $\mathcal{P}$. Кроме того, отображение Φ вида

$$u(s,z)=\Phi(s,z,u(t-s))=E\phi(\beta_{s,z}(t)), \tag{3.22}$$

(где $\beta_{s,z}(t)$ – решение уравнения (3.7), удовлетворяющее условию $\beta_{s,z}(s)=z$) действует на Θ.

Обозначим $\mathcal{N}$ множество непрерывных ограниченных отображений интервала $[l,t]$, заданного выше, в множество Θ и пусть

$$\|u\|_{\mathcal{N}}=\sup_{s\in[l,t]}|u(t-s)|_0.$$

Из приведенных выше оценок следует, что $\Psi:u\mapsto\Psi(z,u)$ вида (3.22) действует в $\mathcal{N}$. Мы покажем, что существует положительное число N такое, что для всех $n>N$ отображение Ψ^n является сжатием. Пусть

$$\kappa_n(\tau)=\|\Phi^n(\tau,v_1(\tau))-\Phi^n(\tau,v(\tau))\|_{\Theta}.$$

Из соотношений (3.9), (3.10) и (3.12)–(3.22) вытекает, что

$$\kappa_1(s)\leqslant K_0(t-s)e^{K_1(t-s)}\|v_1\|_{\mathcal{N}}$$

и
$$\kappa_n(s) \leqslant \frac{{K_0}^n(t-s)^n K_1^n}{n!}\|v - v_1\|_{\mathcal{N}}.$$

Наконец,
$$\|\Psi^n(v_1) - \Psi^n(v)\|_{\mathcal{N}} = \sup_{s\in(l,t]} \|\Phi^n(s, v_1(s)) - \Phi^n(s, v(s))\|_{\Theta} \leqslant Q_n\|v - v_1\|_{\mathcal{N}}$$

где $Q_n = \frac{{K_0}^n(t-s)^n K_1^n}{n!}$.

Поскольку для фиксированных K_0, K_1, l существует целое число N такое, что $Q_n < 1$ при $n > N$, то отсюда следует, что Ψ^n – сжимающее отображение в $\mathcal{N}$ и, следовательно, Ψ также является сжатием. При этом существование единственного решения уравнения (3.8) является следствием теоремы о сжимающих отображениях.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $A(g) \in L_{12}(\mathcal{T}, T_g\mathcal{P})$ – правоинвариантное векторное поле, $u_0, \nabla\phi$ – гладкие ограниченные векторные поля. Тогда существует единственное решение системы* (3.7), (3.8), *определенное на интервале $[l, t]$, если $\tau = t - l$ подчиняется оценке* (3.21).

Доказательство. Существование единственного гладкого решения $u(t, z)$ уравнения (3.8) доказано выше. Далее, если u заданное гладкое ограниченное веторное поле, то, как вытекает из общих резельтатов теории стохастических уравнений, существует единственный случайный процесс $\beta(t)$, удовлетворяющий (3.7).

В заключение отметим, снова ссылаясь на общие результаты [7], что поле $u(t, z)$ заданное соотношением (3.8) является (слабым) решением задачи Коши
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = \frac{1}{2}\Delta^A_{\mathcal{P}} u, u(0, z) = \phi(z). \tag{3.23}$$

Если же начальная функция ϕ достаточно гладкая, то $u(t, z)$ – классическое решение задачи (3.23), заданное возможно на меньшем временном интервале.

4. Диффузионные процессы на многообразии отображений

В этом параграфе мы воспользуемся результатами предыдущей главы для построения диффузионного процесса на многообразиях $\mathcal{D}^s$ и $\mathcal{D}^s_\mu$, снабженных дифференциально геометрическими структурами описанными в п. 2.

Мы начнем изложение с напоминания ряда результатов из [14, 15], касающихся описания диффузионных процессов на M, $\mathcal{D}^s$ и $\mathcal{D}^s_\mu$.

Пусть M – C^∞ компактное риманово многообразие размерности $\dim M = n$ и $H = R^n$, $\mathcal{H}$ – тривиальное расслоение $H \times M \to M$. Стохастической динамической системой (СДС) называют пару (X, z) на M, состоящую из сечения X расслоения $L(\mathcal{H}, TM)$ над M и стохастического процесса z со значениями в H. Здесь $L(\mathcal{H}, TM)$ расслоение, слоем которого является множество линейных отображений $L(H, T_xM)$ из H в T_xM.

Пусть $A \in L(\mathcal{H}, TM)$ и $w(t)$ винеровский процесс в $H = R^n$ и (A, w) – СДС на M такая, что каждое векторное поле $A(\cdot)h$ ($h \in H$) является элементом из $H^{s+2}(M, TM)$. Все такие векторные поля лежат в касательном пространстве $T_e\mathcal{D}^{s+2}$ Таким образом возникает непрерывное линейное отображение $A(\cdot) : H \to T_e\mathcal{D}^{s+2}$ Всюду в этом параграфе мы полагаем, что $s > \frac{n}{2} + 1$. С помощью правых сдвигов СДС (A, w) можно продолжить до СДС $(\hat{A}, w)$ на $\mathcal{D}^s$. Зададим $\hat{A} : \mathcal{D}^s \times H \to T\mathcal{D}^s$ соотношением $\hat{A}(g, h) = T_eR_g(A_e)$. Тогда, если ψ_r обозначает умножение

$$\psi_r : H^{s+r}(M, TM) \times \mathcal{D}^s \to H^s(M, TM), \quad \psi_r(f, g) = f \circ g,$$

то $\hat{A}(g, h)(x) = A(g(x), h) = \psi_2(Ah, g)(x)$, $\quad x \in M$. В дальнейшем мы будем опускать шапочку над A, если это не будет приводить к недоразумениям.

Пусть (U, ϕ) – C^∞ – карта многообразия $\mathcal{D}^s$ в окрестности единицы. Например, пусть $\phi : U \to T\mathcal{D}^s$ задана соотношением $\phi_g(f)(x) = \exp^{-1}_{g(x)} f(x)$, $\quad f \in U$, $\quad x \in M$. Тогда для каждого $g \in \mathcal{D}^s$ мы получаем новую карту $\Phi_g : R_g[U] \to T\mathcal{D}^s$, где $\Phi_g = \phi \circ R_{g^{-1}}$. Поскольку умножение справа – C^∞ отображение, Φ_g также является отображением C^∞. При этом $\{(R_g[U], \Phi_g)\}_g$ задает равномерное покрытие многообразия $\mathcal{D}^s$. Аналогичная картина имеет место и в случае многообразия с краем, рассмотренного в параграфе 2 при замене M на $\widetilde{M}$.

Пусть M компактное многообразие без края ∂M. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$dg = \exp^D_{g(\tau)}(-u(t-\tau) \circ g(\tau)d\tau + A_{g(\tau)}dw), \quad g(0) = e \tag{4.1}$$

на $\mathcal{D}^s_\mu(M)$ и предположим, что векторное поле $u(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu$ задано соотношением

$$u(t) = E\,P_{g(t)}u_0 \circ g(t), \tag{4.2}$$

где $u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu$. Здесь $\exp^D$ – экспоненциальное отображение на группе $\mathcal{D}^s(M)$, описанное в параграфе 2.

Системы вида (4.1), (4.2) были изучены в предыдущем параграфе в предположении, что $w(t)$ – винеровский процесс в оснащенном гильбертовом пространстве $H \subset H_-$. В этом параграфе $H = R^n$ и $w(t) \in R^n$ – конечномерный винеровский процесс. Очевидно, это не нарушает справедливости результатов предыдущего параграфа, если мы имеем дело с соответствующей СДС.

Поскольку проектор P – гладкое отображение (смотри параграф 2) мы находимся в рамках условий теоремы 3.2, если все оценки понимать в смысле слабой метрики на $\mathcal{D}^s$ и, следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Существует интервал $[0,T]$ такой, что величина $T > 0$ зависит от начального условия $u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu$ и при этом для любого $t \in [0,T]$ существует единственное решение $(g(t), u(t))$ системы* (4.1), (4.2), *такое, что $g(t) \in \mathcal{D}^s$, а $u(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu$.*

Остается лишь пояснить связь между парой $(g(t), u(t))$ и решением $(u(t,x), p(t,x))$ системы уравнений Навье–Стокса.

Напомним, что в силу разложения Ходжа (2.4), для $u(t) = EP_{g(t)}u_0R_{g(t)} \in T_e\mathcal{D}^s_\mu$ имеет место представление $u(t) = E[u_0(g(t)) + \int\limits_0^t \nabla p(t-\tau, g(\tau))d\tau]$. Выберем grad f в виде grad $f = -\int_0^t \nabla p(t-s)ds$.

Перепишем (4.1), (4.2), положив $\xi_x(t) = x \circ g(t)$ и $A(x) = \sigma\sqrt{G(x)}$, где $G(x)$ – метрический тензор многообразия M. Тогда

$$d\xi_x(s) = \exp^M_{\xi(s)}(-u(t-s, \xi(s))ds + \sigma\sqrt{G(\xi(s))}dw), \tag{4.3}$$

$$u(t,x) = E\left[u_0(\xi(t)) + \int\limits_0^t \nabla p(t-\tau, \xi(\tau))d\tau\right]. \tag{4.4}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{4.5}$$

Предположим на время, что M имеет евклидову метрику то есть, что $G_{ij}(x) = \delta^j_i$ (символ Кронекера) и exp при этом является тождественным отображением. Например, пусть $M = T^n$- n-мерный тор. Для того, чтобы получить результаты для общего случая следует провести аналогичные рассуждения, но при этом вычисления окажутся более громоздкими.

Покажем, что векторное поле $u(t,x)$, заданное соотношением (4.4), удовлетворяет системе уравнений в частных производных следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla u) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u - \nabla p \tag{4.6}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{4.7}$$

где ∇ соответствует градиенту, а Δ -оператор Лапласа.

Теорема 4.2. *Пусть $s > 3 + \frac{n}{2}$ и u_0 – векторное поле класса H^s на M. Тогда существует интервал $[0,\tau)$, длина которого зависит от u_0 и такой, что для любого $t \in [0,\tau]$ существует единственное решение $(\xi(t), u(t,x))$ системы (4.3)–(4.5), где $\xi(t)$ – марковский процесс на M, а $u(t,x)$ – векторное поле класса H^s на M, удовлетворяющее системе уравнений Навье–Стокса (4.6), (4.7). При этом $u(t,x)$ обладает непрерывными ограниченными производными u_t и u_x.*

Доказательство. Существование и единственность решения $(g(t), u(t))$ системы (4.1)–(4.2) на интервале $[0,T]$ влечет за собой существование и единственность решения $(\xi(t), u(t,x))$ системы (4.6)–(4.7). Марковское свойство процесса $\xi(t)$, получаемое в наследство от процесса $g(t)$, обеспечивает справедливость равенства $Eu_0(\xi_{s,x}(t)) = Eu(\tau, \xi_{\tau,\xi(\tau)}(t))$. При этом функция $u_t(s,x) = u(t-s,x)$ удовлетворяет соотношению

$$u_t(s+\Delta s, x) - u_t(s,x) = -E\Big[u_t(s+\Delta s, \xi(s+\Delta s)) - u(s+\Delta s, x) + \\ + \int\limits_s^{s+\Delta s} \nabla p(t-\tau, \xi(\tau))d\tau\Big]$$

Используя формулу Ито и устремляя $\Delta s \to 0$, мы получаем

$$-\frac{\partial u(t-s)}{\partial s} = \frac{\partial u(t-s)}{\partial t} =$$

$$= [-(u(t-s,x), \nabla u(t-s,x)) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta u(t-s,x)] - \nabla p(t-s,x).$$

Наконец, полагая $s = 0$, мы имеем

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (u, \nabla u(t,x)) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u(t,x) - \nabla p(t,x),$$

откуда следует, что функция $u(t,x)$ заданная соотношением (4.4) представляет собой решение (4.6). Справедливость соотношений (4.7) вытекает из конструкции.

Возвращаясь к общему случаю и проводя соответствующие вычисления, нетрудно проверить что векторное поле $u(t,x)$ вида (4.4) удовлетворяет (4.7) и уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^M_u u = \frac{\sigma^2}{2}\Delta_M u - \nabla^M p,$$

где ∇^M – ковариантная производная и Δ_M – оператор Бельтрами–Лапласа.

Пусть теперь M – многообразие с краем ∂M. Приведенные выше результаты распространяются и на этот случай, если в качестве D^s выбрать множество диффеоморфизмов дубля $\tilde{M}$, оставляющих неподвижными точки ∂M, а в качестве начальной функции выбрать поле $u_0(x)$ обращающееся в ноль на границе ∂M. Соответствующие структуры описаны в параграфе 2. При этом уравнения (4.1)–(4.3) и (4.5) сохраняют свой вид, а уравнение (4.4) приобретает вид

$$u(t,x) = E\left[u_0(\xi(t_\tau)) + \int_0^{t_\tau} \nabla p(t-s, \xi(s))ds\right],$$

где τ – момент первого выхода процесса $\xi(t)$ на границу ∂M и $t_\tau = \min(t,\tau)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-01199 и 97-01-0112.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Физматгиз. 1961, второе изд. М. Наука, 1970.
2. Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса.* Мир. 1981.
3. Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа.* Изд 6-е М. Наука, 1987.
4. A. Chorin A., J. Marsden, *A mathematical introduction to fluid mechanics.* 3rd ed. Springer-Verlag, 1992.
5. М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики.* М. Наука, 1980.

6. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем с помощью марковских случайных процессов.* Изв. ВУЗ Математика, No. 12 (1978), 6–17.
7. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.* Киев, Выща школа. 1989.
8. M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations.* Princeton Univ. Press. 1985.
9. Ya. Belopolskaya, *Diffusion on groups of diffeomorphisms and motion of incompressible fluiid.* Труды XXV школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем" С.Петербург (1997) 140–155.
10. V. Arnold, *Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses aplications a l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Ann. Inst. Fourier **16**, No. 1 (1966) 319–361.
11. D. Ebin, J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.* Annals of Mathematics **92**, No. 1 (1970), 102–163.
12. Ю. Л. Далецкий, *Континуальные интегралы связанные с операторными эволюционными уравнениями.* УМН **17**, No. 5 (1962) 3–115.
13. Gliklikh Yu. Ordinary and stochastic differential geometry as a tool for mathematical physics, Kluwer Acad. Publ., 1996.
14. P. Baxendale, *Wiener processes on manifolds of maps.* Proc. Royal Soc. Edinburgh **87A** (1980) 127–152.
15. D. Elworthy, *Stochastic differential equations on manifolds.* (London Mathematical Society Lecture Notes Series V.70), P. 325, Cambridge Univ. Press, 1982.
16. H. Eliasson, *Geometry of manifolds of maps.* J. Differential Geometry **1**, No. 2 (1967) 169–194.

Belopolskaya Ya. I. Probabilistic representation of solutions to boundary-value problems for hydrodynamics equations.

Links between random processes and partial differential equation theory allow to receive new nontrivial results both about stochastic processes and properties of boundary-value problems for parabolic and elliptic PDE. It makes to be natural to look for probabilistic representations of solutions to boundary-value problems for the Navier–Stokes system and other equations describing incompressible fluid motions such as Bussinesque, Burgers or magnitohydrodynamics equations. In this paper we costruct the probabilistic representation for solutions of boundary-value problems for the Navier–Stokes system.

С.-Петербургский
Государственный
Архитектурно-Строительный
Университет

Поступило 27 октября 1997 г.