Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

К. В. Шахбазян, Ю. Г. Шукурян

О ЯЗЫКАХ ПРОЦЕССОВ В КОНЕЧНЫХ ГРАФАХ

Введение

Каждому ориентированному конечному графу G соответствует некоторое множество $P(G)$ конечных и бесконечных графов частичного порядка [1]. Эти графы называются процессами в графе G и используются для описания конвейерных систем. При изучении множества процессов $P(G)$ естественно встает вопрос о распознаваемости автоматами подмножеств множества $P(G)$, т.е. языков процессов. При решении этой проблемы существенным является тот моноид, в котором рассматриваются эти языки. С одной стороны, процессы естественно вкладываются в коммутативный, счетнопорожденный моноид идемпотентов. С другой стороны, множество процессов отображается в моноид треков. Данная статья рассматривает обе эти возможности.

Основные результаты:

1. Изучены синтаксические конгруэнции языков в моноиде $2^{\mathbf{Z}}$ с операцией теоретико-множественного объединения, в который вкладывается множество всех процессов $P(G)$. Получены необходимые и достаточные условия конечности синтаксической конгруэнции для подмножеств процессов.

2. Доказана нераспознаваемость множества всех процессов в соответствующем моноиде треков.

1. Процессы в графах

Приведем сначала необходимые сведения о процессах в графах. Пусть $G = (V_G, E_G)$-конечный ориентированный граф, V_G-множество его вершин, E_G-множество дуг, X_G-множество вершин графа G, не имеющих заходящих дуг, т.е. входных вершин графа G.

Работа поддержана проектом ИНТАС-93-1702.

Назовем *графом развертки графа* G бесконечный ациклический граф $R(G) = (V_R, E_R)$, где множество вершин графа $R(G)$ есть множество пар $V_R = V_G \times \mathbf{Z} = \{v.t \mid v \in V_G,\ t \in \mathbf{Z}\}$ ($\mathbf{Z}$-множество всех целых чисел), а множество дуг графа $R(G)$ есть

$$E_R = \{(w, w') \mid w = v.t,\ w' = v'.t + 1,\ t \in \mathbf{Z}\ (v, v') \in E_G\}.$$

Обозначим через $\uparrow w$-множество всех предшественников вершины w в графе развертки $R(G)$, т.е. если $w = v.t$, то

$$\uparrow w = \{v'.t - 1 \mid (v', v) \in E_G\}.$$

Множество $p \subset V \times \mathbf{Z}$ (т.е. подмножество вершин графа развертки $R(G)$) мы будем называть *процессом в графе* G, если выполняются следующие условия замкнутости:

1) для каждой вершины $w \in V_R$ из $w \in p$ следует $\uparrow w \subset p$;

2) для каждой вершины $w \in V_R$, для которой $\uparrow w \neq \emptyset$, из $\uparrow w \subset p$ следует $w \in p$.

Будем обозначать через $\overline{p}$ замыкание по условиям 1) и 2) произвольного подмножества $p \subset V_R \times \mathbf{Z}$, т.е. $\overline{p}$-процесс, порождаемый множеством p.

Через $P(G)$ будем обозначать множество всех процессов в графе G. Далее мы будем рассматривать каждый процесс либо как подмножество вершин графа $R(G)$, либо как подграф (p, E_p) в графе $R(G)$,натянутый на эти вершины.

Пример 1. Рассмотрим граф G на рис.1 и несколько процессов в графе G.

Пусть $p_1 = \{a, t_0\}$. Легко видеть, что $\overline{p_1} = \{a.t \mid t \leq t_0\} \cup \{x.t \mid t \leq t_0 - 1\}$. Пусть $p_2 = \{x.t_1, x.t_2\}$. В этом случае $\overline{p_2} = p_2$.

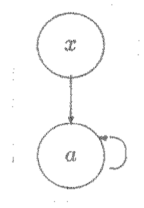

Рис. 1. Граф G.

Легко видеть, что в графе G каждый процесс имеет либо вид $p = \{x.t \mid t \in Z'\}$, где $Z' \subseteq \mathbf{Z}$ произвольное подмножество, либо вид $p = \{a.t \mid t \leq t_0\} \cup \{x.t \mid t \in Z'\}$, где t_0, произвольное целое число, а $Z' \subset \mathbf{Z}$ и содержит множество $\{\, t \mid t \leq t_0 - 1\} \subset Z'$. □

Теорема 1 [1]. *Множество $P(G)$ образует полную ограниченную дистрибутивную решетку по отношению к теоретико-множественному включению. Решеточные операции суть*

$$p \wedge p' = p \cap p',\ p \vee p' = \overline{p \cup p'}.\square$$

Теорема 2 [1]. *Пусть B-непустой сильно связный граф. Множество процессов $P(B)$ образует конечную булеву решетку. Атомами решетки $P(B)$ являются бесконечные периодические процессы, попарно подобные и непересекающиеся.* □

Обозначим через $P_0(B)$-множество атомов решетки $P(B)$, где B-сильно связный граф. Пусть $B_1, ..., B_n$-непустые сильно связные бикомпоненты произвольного графа G. Рассмотрим множество $W(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_0(B_i)$ атомных процессов в бикомпонентах графа G. Множество $c(p) = \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \in W(G),\ p \cap \mathcal{W} \neq \emptyset\}$ называется *стволом процесса p*. Множество $C(G) = \{c(p) \mid p \in P(G)\}$ всех стволов процессов в графе G является конечным множеством, упорядоченным по включению, и образует конечную дистрибутивную решетку.

Каждому процессу $p \in P(G)$ сопоставим пару $\varphi(p) = (c(p), X(p))$, где $c(p)$-ствол процесса p и $X(p) = p \cap (X_G \times \mathbf{Z})$, т.е. $X(p)$-множество входных вершин процесса p. Очевидно, $\varphi(p) \in C(G) \times 2^{X_G \times \mathbf{Z}}$. Остановимся подробнее на отображении φ.

Прежде всего напомним понятие алгебры пар [2]. Подрешетка $\Delta \subset A \times B$, где A, B-ограниченные дистрибутивные решетки, называется *алгеброй пар,* если для каждого $a \in A$ выполняется $(a, 1_B) \in \Delta$ и для каждого $b \in B$ выполняется $(O_A, b) \in \Delta$. Заметим, что в каждой алгебре пар множество $\Phi_a = \{b \mid (a, b) \subset \Delta\}$ является фильтром решетки B.

Теорема 3 [2]. *Пусть G-произвольный граф с $X_G \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi : P(G) \to C(G) \times 2^{X_G \times \mathbf{Z}}$, где $\varphi(p) = (c(p), X(p))$ есть вложение. Образ $P(G)$ при вложении φ есть $\varphi(P(G))$-алгебра пар, удовлетворяющая следующему условию: для каждого $c \in C(G)$ существует счетное множество $X_c \subset X_G \times \mathbf{Z}$ такое, что*

1) *если* $c \cap c' = c''$, *то* $X_c \cap X_{c'} = X_{c''}$;

2) *множество* $(X_G \times \mathbf{Z}) \setminus \bigcup_{c \in C(G)} X_c$ *счетно;*

3) *фильтр* $\Phi_c \subset 2^{X_G \times \mathbf{Z}}$ *есть множество таких подмножеств* $\mathbf{Z}$, *которые не содержат разве лишь конечное число элементов множества* X_c, *т.е. если* $X \in \Phi_c$, *то* $X_c \setminus X$*-конечно.* □

Ниже мы рассматриваем множества конечных процессов с точки зрения их распознаваемости. Очевидно, что каждый конечный процесс p имеет ствол $c(p) = \emptyset$.

2. Синтаксические конгруэнции языков конечных процессов

Как следует из вышеизложенного, рассмотрение конечных языков процессов и их синтаксических конгруэнций равносильно рассмотрению конечных языков в счетнопорожденном коммутативном моноиде идемпотентов. Как известно, такой моноид в свою очередь изоморфен моноиду, элементами которого являются конечные подмножества множества $\mathbf{Z}$, а действием-операция теоретико-множественного объединения.Пусть M-именно такой моноид. Ниже мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [4].

Для языка $L \subset M$ обозначим через ρ_L его синтаксическую конгруэнцию:

$$x \rho_L y \Longleftrightarrow \mathrm{Cont}_L(x) = \mathrm{Cont}_L(y),$$

где $\mathrm{Cont}_L(x) = \{u \mid u \in M,\ ux \in L\}$-контекст элемента $x \in M$. Через $M(L)$ обозначим синтаксический моноид языка L, т.е. фактор-моноид M/ρ_L моноида M по конгруенции ρ_L.

Рассмотрим следующие операции над языками в M.

$$L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \cup L_2\}\text{-объединения},$$

$$L_1 \circ L_2 = \{x \cup y \mid x \in L_1,\ y \in L_2\}, \text{-операция композиции}$$

$$L^* = L \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots, \text{ где } L^2 = L \circ L \text{и т.д. -итерация.}$$

Отметим, что операция $*$ отличается от обычной операции Клини тем, что L^* не содержит пустого множества, если оно не содержится в L.

Лемма 1. *Множество языков в моноиде M, обладающих синтаксическими конгруэнциями конечного индекса, замкнуто относительно операций $\cup, \circ, *$.*

Доказательство. Пусть языки L_1 и L_2 таковы, что ρ_{L_1} и ρ_{L_2} имеют конечный индекс. Очевидно, для любого $x \in M$ имеет место $\mathrm{Cont}_{L_1 \cup L_2}(x) = \mathrm{Cont}_{L_1}(x) \cup \mathrm{Cont}_{L_2}(x)$. Отсюда следует $\rho_{L_1 \cup L_2} = \inf\{\rho_{L_1}, \rho_{L_2}\}$, т.е. $\rho_{L_1 \cup L_2}$ имеет конечный индекс.

Рассмотрим операцию композиции. Для каждого $x \in M$

$$\mathrm{Cont}_{L_1 \circ L_2}(x) = \bigcup_{\substack{cx' \subseteq x \\ x'' \subseteq x \\ x' \cup x'' = x}} \mathrm{Cont}_{L_1}(x') \circ \mathrm{Cont}_{L_2}(x'') \tag{1}$$

отсюда очевидно следует, что $\rho_{L_1 \circ L_2}$ имеет конечный индекс.

Рассмотрим, наконец, операцию итерации. Пусть L-язык с синтаксической конгруэнцией ρ_L конечного индекса. Для каждого $x \in M$ имеет место

$$\mathrm{Cont}_{L^*}(x) = \mathrm{Cont}_L(x) \cup \mathrm{Cont}_{L^2}(x) \cup \ldots$$

Каждый член этого разложения представим согласно (1) в виде композиции контекстов языка L, а именно $\mathrm{Cont}_{L^n}(x) = \bigcup_{(x_1,\ldots,x_n)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Cont}_L(x_i)$, где операция $\prod$-композиция выполняется по всем $x_1, \ldots, x_n \subseteq x$ таким, что $\bigcup_{i=1}^{n} x_i = x$. Отсюда следует конечность ρ_{L^*}. $\square$

Рассмотрим произвольный язык L в моноиде M.

Лемма 2. *Пусть $i, j \in \mathbf{Z}$, $z \subset \mathbf{Z}$ таковы, что $ijz \in L$ и $\mathrm{Cont}_L(i) = \mathrm{Cont}_L(j)$. Тогда $iz \in L$ и $jz \in L$.*

Доказательство. Из $ijz \in L$ следует, что $jz \in \mathrm{Cont}_L(i) = \mathrm{Cont}_L(j)$. Следовательно, $jjz \in L$ и $jz \in L$.$\square$

Каждое слово $z \in L$ можно представить в виде

$$z = z_1 \cup \ldots \cup z_s, \tag{2}$$

где $z_i \neq \emptyset$, $z_i \subset \mathbf{Z}$ и множества z_i таковы, что из $k, l \in z_i$ следует $\mathrm{Cont}_L(k) = \mathrm{Cont}_L(l)$, т.е. в одно множество z_i входят символы, имеющие одинаковый контекст.

Следствие 1. *Если* $z \in L$ *имеет вид* (2),*то для любых подмножеств* $z'_i \subset z_i$, $z'_i \neq \emptyset$, $i = 1, ...s$ *верно* $z' = z'_1 \cup ... \cup z'_s \in L$. □

Лемма 3. *Пусть* $i, j \in \mathbf{Z}$ *такие* $\mathrm{Cont}_L(i) = \mathrm{Cont}_L(j)$ *и* $jz \in L$. *Тогда* $iz \in L$.

Доказательство. Пусть $ijz \notin L$. Отсюдо следует, что $jz \notin \mathrm{Cont}_L(i) = \mathrm{Cont}_L(j)$ и следовательно $jjz = jz \notin L$, что противоречит условию леммы следовательно $ijz \in L$ и утверждение леммы вытекает из следствия 1. □

Рассмотрим теперь разбиение множества $\mathbf{Z}$, индуцированное конгруэнцией ρ_L. Обозначим класс разбиения, содержащий i, через $[i]$, где $i \in \mathbf{Z}$.

Следствие 2. *Если* $z \in L$ *и имеет вид* (2), *то* $[i_1]^* \circ ... \circ [i_s]^* \subset L$. *Здесь* $i_j \in z_j$ $(j = 1, ...s)$. □

Следствие 3. *Пусть* L *имеет конечную конгруэнцию* ρ_L *и пусть* $\mathbf{Z} = z_1 \cup ... \cup z_n$*-разбиение* $\mathbf{Z}$, *индуцированное конгруэнцией* ρ_L. *Тогда существует конечное множество наборов индексов* $I_1, ..., I_k$, *где* $I_j \neq I_i$, $I_j \subset \{1, ..., n\}$, $j = 1, ..., k$ *такое, что*

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} \prod_{j \in I_i} z_j^*. \ \square$$

Теорема 4. *Язык* $L \subset M$ *имеет конечную синтаксическую конгруэнцию тогда и только тогда, когда существует разбиение* $\mathbf{Z} = Z_1 \cup ... \cup Z_n$ *и конечное множество наборов индексов* $I_1, ..., I_k$, *где* $I_j \subset \{1, ..., n\}$, $I_i \neq I_j$, $j = 1, ..., k$ *такие, что*

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} \prod_{j \in I_i} z_j^* \tag{3}$$

Доказательство. Если язык L имеет конечную синтаксическую конгруэнцию, то по следствию 3 он имеет вид (3). Пусть теперь L имеет вид (3). Докажем, что для каждого подмножества $Z \subset \mathbf{Z}$ язык $L = Z^*$ имеет конечную конгруэнцию. Действительно, для каждого $x \in Z^*$: $\mathrm{Cont}_L(x) = Z^*$. Для каждого $x \notin Z^*$: $\mathrm{Cont}_L(x) = \emptyset$. Следовательно ρ_{Z^*} имеет индекс 2. Отсюда и иэ леммы 1 следует, что ρ_L имеет конечный индекс. □

Возвращаясь теперь к процессам в графе G, полученные результаты можно переформулировать так. Пусть в алфавите $X_G \times \mathbf{Z}$ выделено конечное множество непересекающихся подмножеств $Y_1, ..., Y_k \subset X_G \times \mathbf{Z}$, где Y_i-конечно или счетно. Тогда язык конечных процессов

$$L = \{\varphi^{-1}(x, \emptyset) \mid x \subset X_G \times \mathbf{Z},\ x \cap Y_i \neq \emptyset,\ i = 1, ..., k\} \tag{4}$$

является подполугруппой в $P(G)$ и имеет конечную синтаксическую конгруэнцию.

Язык L конечных процессов в $P(G)$ имеет синтаксическую конгруэнцию конечного индекса тогда и только тогда, когда он является объединением языков вида (4). Язык L всех конечных процессов, в частности, имеет конгруэнцию ρ_L конечного индекса.

3. Процессы и треки

Рассмотрим граф $G = (V_G, E_G)$ и произвольный процесс p в этом графе: $p \in P(G)$. Графу p сопоставим помеченный граф $\widetilde{p} = (p, \lambda)$, где λ метящая функция $\lambda : V_G \times \mathbf{Z} \to V_G$ и $\lambda(v.t) = v$. Будем также обозначать буквой λ и функцию $\lambda : (V_G \times \mathbf{Z})^* \to V_G^*$, где $\lambda(z) = \lambda(z_1)...\lambda(z_n)$. Т.е. если $z = z_1...z_n$ – некоторая последовательность вершин графа развертки $R(G)$, то $\lambda(y)$ – соответствующая последовательности меток этих вершин.

Введем в рассмотрения язык $L(p) \subset V_G^*$, связанный с процессом $p = (V_p, E_p)$. Обозначим через $p^* = (V_p, E_{p^*})$ граф транзитивного замыкания графа p. Тогда определим

$$L(p) = \{\lambda(z) | z \in V_p^* \text{ и если } (z_i, z_j) \in E_{p^*}, \text{ то } i < j\}.$$

Здесь y_i-i-ая буква слова y.

Далее, с каждым подмножеством процессов $P' \subset P(G)$ свяжем язык $L(P') = \bigcup\limits_{p \in P'} L(p)$. Нас будут интересовать языки $L(P')$, порождаемые языками процессов $P' \subset P(G)$.

С другой стороны, каждому процессу $p \in P(G)$ можно сопоставить некоторое множество графов зависимости в моноиде $\mathrm{Dep}\,(V_G, D(G))$, где

$$D(G) = \{(v_1, v_2) | (v_1, v_2) \in E_G, \text{ или } (v_2, v_1) \in E_G, \text{ или } v_1 = v_2\}$$

– отношение независимости, построенное по графу G. (Укажем, что здесь мы пользуемся понятием и обозначениями из [4]). Действительно, выполним следующее построение. От процесса p перейдем к помеченному графу $\widetilde{p}$. Граф $\widetilde{p}$ является ациклическим графом, но, вообще говоря, отличается от графа зависимости, т.к. в нем могут присутствовать такие пары вершин $((v.t),(v'.t'))$, метки которых зависимы, т.е. $(v,v')\in D(G))$, но между ними нет пути в графе $\widetilde{p}$. Обозначим через $S(\widetilde{p})$ множество таких пар в графе $\widetilde{p}$, т.е.

$$S(\widetilde{p})=\{(v.t,v'.t')|(v,v')\in D(G),\ (v.t,v'.t')\notin E_{p^*}\text{ и }(v.'t',v.t)\notin E_{p^*}\}.$$

Если $S(\widetilde{p})=\emptyset$, то $\widetilde{p}\in \mathrm{Dep}\,(V_G,D(G))$, т.е. является графом зависимости. Если же $S(\widetilde{p})\neq\emptyset$, то существует $2^{|S(\widetilde{p})|}$ способ ориентировать множество неориентированных пар $S(\widetilde{p})$. Пусть избран один из таких способов. Обозначим через $\overrightarrow{S}(\widetilde{p})$ множество ориентированных пар. Рассмотрим граф $\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(\widetilde{p})}=(V_{\widetilde{p}},E_{\widetilde{p}}\cup\overrightarrow{S}(\widetilde{p}))$. Если этот граф ацикличен, то он является графом зависимости и $\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(\widetilde{p})}\in \mathrm{Dep}\,(V_G,D(G))$. Рассмотрим множество всех таких ориентаций $\overrightarrow{S}$ множества $\overrightarrow{S}(\widetilde{p})$, которые порождают ациклические графы $\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(\widetilde{p})}$. Тогда

$$T(p)=\{\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(\widetilde{p})}|\overrightarrow{S}(\widetilde{p})\ \in\overrightarrow{S},\overrightarrow{S}(\widetilde{p})\ \in \mathrm{Dep}\,(V_G,D(G))\}.$$

Предположим, что в множесво $T(p)$ включаются графы с точностью до изоморфизма. Будем язык графов зависимости $T(p)$ сопоставлять процессу p.

Итак, каждому процессу $p\in P(G)$ оказались сопоставленными язык $L(p)\subset V_G^*$ и язык графов зависимости $T(p)\subset \mathrm{Dep}\,(V_G,D(G))$.

Пример 2. Рассмотрим граф G_0 на рис.2 и процесс

$$p=\{a.t,b.t+1,a.t+2,b.t+3\}\in P(G_0).$$

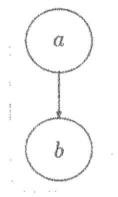

Рис. 2. Граф G_0.

Граф $\widetilde{p}$ изображен на рис.3. Отношение зависимости, построенное по графу G_0 есть

$$D(G_0) = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}.$$

Множество неориентированных пар графа $\widetilde{p}$ есть

$$S(\widetilde{p}) = \{(a.t, b.t+3), (a.t+2, b.t+1), (a.t, a.t+2), (b.t+1, b.t+3)\}.$$

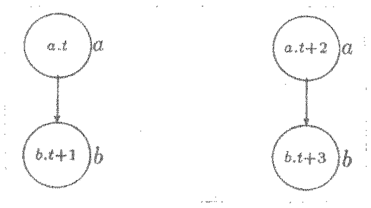

Рис. 3. Граф $\widetilde{p}$.

Множество графов зависимости, составляющих язык $T(p)$ изображено на рис.4.

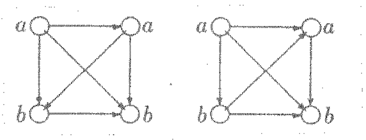

Рис. 4. Язык $T(p)$.

Язык $T(p)$, состоит из двух графов. Этим графом зависимости соответствуют треки $\psi^{-1}(t_1)$ и $\psi^{-1}(t_2)$, где ψ-естественный изоморфизм моноида треков $M(V_{G_0}, D(G_0))$ в моноид графов зависимости $\mathrm{Dep}\,(V_{G_0}, D(G_0))$. Очевидно: $\psi^{-1}(t_1) = \{aabb\}$, $\psi^{-1}(t_2) = \{abab\}$. $\square$

Лемма 4. *Для любого графа G и процесса $p \in P(G)$*

$$L(p) = \bigcup_{t \in T(p)} \psi^{-1}(t),$$

где ψ – естественный изоморфизм моноида треков в моноид графов зависимости $\mathrm{Dep}\,(V_G, D(G))$.

Доказательство. Пусть $p \in P(G)$, и $l \in L(p)$, $l = l_1 ... l_n$. Тогда существует последовательность вершин $w = w_1, ..., w_n$, принадлежащих процессу p такая, что $l = \lambda(w)$, $\lambda_i = \lambda(w_i)$ и w не противоречит частичному порядку, индуцированному процессом p на множестве его вершин V_p. Рассмотрим $\widetilde{p}$ и множество пар $S(\widetilde{p})$. Для каждой пары $(w', w'') \in S(\widetilde{p})$ существуют i, j такие, что $w' = w_i$, $w'' = w_j$. Если $i < j$, то будем считать w' первым элементом ориентированной пары. Если же $j < i$, то первым элементом пары будем считать w''. Выполнив такую ориентацию для каждой пары из $S(\widetilde{p})$, мы получим ориентацию $\overrightarrow{S(\widetilde{p})}$ всех пар и граф $\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(p)}$, являюшийся графом зависимости. Следовательно, $l \in \psi^{-1}(\widetilde{p}_{\overrightarrow{S}(p)})$. Обратное включение очевидно.□

Теорема 5. *Множество всех конечных процессов в связном графе с числом вершин ≥ 2, имеющем входные вершины, нераспознаваемо конечным автоматом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала граф G_0 на рис.2. Каждый конечный процесс в этом графе представляет собой граф, состоящий из конечного числа компонент вида

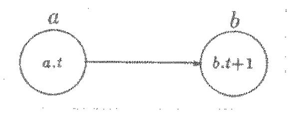

Рис. 5. Процесс p_m.

Очевидно, что $L(p_m)$ есть множество слов в алфавите $A = a, b$ такое, что

$$L(p_m) = \{l \mid l \in \{a,b\}^*,\, n(l) = 2m, s = \overline{1, 2m}, n_b(l_s) \\ \leq n_a(l_s), n_b(l) = n_a(l) = m\}.$$

Здесь $n(l)$ обозначает длину слова l, $n_a(l)$-число вхождений буквы a в слово l.

Как известно, язык $\bigcup_m L(p_m) = L(G_0)$ нераспознаваем конечным автоматом.

Рассмотрим теперь связный граф G, имеющий хотя бы одну входную вершину v. Пусть v' вершина, инцидентая вершине v. Тогда проекция языка $L(P^+(G))$, где $P^+(G)$-множество конечных процессов в графе G, в алфавит $\{a, b\}$ есть язык $L(P^+(G_0))$, генерированный конечными процессами графа G_0. Отсюда следует утверждение. □

Литература

1. К. В. Шахбазян, *Алгебра процессов в графах.* — Кибернетика **6** (1988), 38–42.
2. К. В. Шахбазян, *Представление решетки процессов в графе алгеброй пар.* — Кибернетика **4** (1990), 114–116.
3. J. Hartmanis, R. E. Stearns, *Pair algebra and its application to automata theory.* — Information and Cont rol, **7** (1964), 485–507.
4. V. Diekert, *Combinatorics on traces.* — Lect. Notes Comp. Sci. **454** (1990).

Shakhbazyan K. V., Shoukouryan Yu. H. On process languages in finite graphs.

Processes in an arbitrary graph and languages of processes provide descriptions of processes in pipeline systems. The properties of syntactic congruences of process languages are studied. A necessary and sufficient condition for the finiteness of a syntactic congruence is obtained. The set of finite languages of the trace monoid, which corresponds to finite processes in the graph, is considered. The unrecognizability of this set by finite automata is established.

Институт информатики АН
Армения

Поступило 2 декабря 1996 г.