Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

В. Н. Кублановская

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ IV

Резюме. Рассматривается решение системы из m нелинейных алгебраических уравнений от $q \geqslant 2$ переменных (СНАУ-q).

Предлагается метод вычисления всех конечных нульмерных решений исходной СНАУ, не требующий знания начальных приближений к ним. В основе метода лежат идеи ранее предложенного автором подхода для решения СНАУ-2 и СНАУ-3, (см. [2]).

Приводится теоретическое обоснование этого подхода и обобщение его на случай решения СНАУ от произвольного числа $q \geqslant 2$ переменных. Базой предлагаемого метода является алгоритм ΔW- q факторизации полиномиальной q-параметрической матрицы [1] и алгоритм относительной факторизации полинома от многих переменных [3].

Введение. В статье рассматривается решение системы из m алгебраических уравнений от $q \geqslant 2$ переменных. Предлагается метод, позволяющий вычислять все конечные нульмерные решения СНАУ-q, не требуя начальных приближений к ним. Полином от q-переменных, определяющий $(q-1)$-мерные решения, другими словами, общий наибольший делитель решаемой СНАУ-q, представляется в факторизованном виде.

Статья состоит из четырех параграфов. В §1 рассматривается постановка задачи, приводится алгоритм, позволяющий от исходной СНАУ-q переходить к СНАУ-q, не содержащей полиномов от $t = 1, \dots, q-1$ переменных своими общими делителями или, другими словами, не содержащий $(q-1)$-мерных решений с $t = 1, \dots, q-1$ произвольными координатами.

В §2 приводятся теоретические предпосылки для предлагаемого подхода решения СНАУ-q, проводится анализ и обобщение этого подхода на произвольное $q \geqslant 2$ число переменных.

Описание метода решения СНАУ-q рассмотрено в §3. В §4 метод иллюстрируется на частных случаях выбора $q = 2$ и $q = 3$, т.е. на решении систем нелинейных алгебраических уравнений от

$q = 2$ и $q = 3$ переменных.

§1. Постановки задачи

Пусть

$$F(\bar{\mu}) \equiv F(\mu_1, \dots, \mu_q) = \begin{pmatrix} f_1(\mu_1, \dots, \mu_q) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(\mu_1, \dots, \mu_q) \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.1)$$

заданная система m нелинейных уравнений с q переменными. Никаких ограничений на числа m и q не накладывается.

Будем использовать так же запись матрицы $F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ в виде матричного полинома, выбрав один из параметров, например, $\lambda := \mu_1$ в качестве ведущего

$$F(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) \equiv F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$$
$$= C_s(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^s + C_{s-1}(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^{s-1} + \dots + C_0(\bar{\mu}_{q-1}).$$

Здесь

$$C_i(\bar{\mu}_{q-1}) = (a_i^{(1)}(\bar{\mu}_{q-1}), \dots, a_i^{(m)}(\bar{\mu}_{q-1}))^T,$$

$i = s, \dots, 0$, суть одностолбцовые матрицы, $\lambda := \mu_1$; $\bar{\mu}_{q-1} := \mu_2, \dots, \mu_q$; $f_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) \equiv f(\mu_1, \dots, \mu_q) = \lambda^s a_s^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1}) + \dots + a_0^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1})$, $k = 1, \dots, m$ суть скалярные полиномы с коэффициентами, полиномиально зависящими от $(q-1)$ параметров $\mu_2, \dots, \mu_q$; s-максимальная степень полиномов $f_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ по переменной λ.

Решениями СНАУ-q (1.1) являются $(q-k)$-мерные корни, $k = 1, \dots, \min(m, q)$ (см. напр., [5]).

$(q-k)$-мерный корень СНАУ-q определяется, как ненулевое решение системы из k нелинейных алгебраических уравнений от q-переменных вида

$$g_j(\mu_1, \dots, \mu_q) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \qquad (1.2)$$

При этом выполняются следующие два условия:

- Система (1.2) не имеет $(q-l)$-мерных решений (или что то же, $(q-l)$-мерных корней) для $l < k$. (1.3)
- Имеют место соотношения

$$f_i^{r_i}(\mu_1, \dots, \mu_q) = \sum_{j=1}^{k} g_j(\mu_1, \dots, \mu_q) h_{ij}(\mu_1, \dots, \mu_q), \qquad (1.4)$$

где r_i – некоторые положительные целые числа, $h_{ij}(\mu_1,\dots,\mu_q)$ суть полиномы от q-переменных.

К системе (1.2), удовлетворяющей условиям (1.3) и (1.4), будем ссылаться как к системе, определяющей $(q-k)$-мерные решения СНАУ-q. Так $(q-1)$-мерное решение определяется как решение уравнения

$$\widehat{\delta}(\mu_1,\dots,\mu_q) := g_1(\mu_1,\dots,\mu_q) = 0,$$

где $\widehat{\delta}(\mu_1,\dots,\mu_q)$ есть ОНД полиномов $f_i(\mu_1,\dots,\mu_q)$, $i=1,\dots,m$; при этом

$$f_i^{r_i}(\mu_1,\dots,\mu_q) = \widehat{\delta}(\mu_1,\dots,\mu_q) h_{i_1}(\mu_1,\dots,\mu_q)$$

r_i есть целое число $h_{i_1}(\mu_1,\dots,\mu_q)$, $i=1,\dots,m$ последовательность взаимно простых полиномов от q-переменных.

Нульмерное решение определяется как решение системы вида (1.2) из $k=q$-уравнений, удовлетворяющих условиям вида (1.3) и (1.4) при $k=q$.

Все решения СНАУ-q будем делить на регулярные и сингулярные.

К регулярным относятся все $(q-1)$-мерные корни, т.е. корни уравнения $\widehat{\delta}(\mu_1,\dots,\mu_q)=0$.

К сингулярным решениям будем относить все $(q-k)$-мерные корни, $k=2,\dots,q$, т.е. корни СНАУ-q вида

$$P_i(\mu_1,\dots,\mu_q) = \frac{f_i(\mu_1,\dots,\mu_q)}{\widehat{\delta}(\mu_1,\dots,\mu_q)} = 0, \quad i=1,\dots,m,$$

где $P_i(\mu_1,\dots,\mu_q)$, $i=1,\dots,m$, суть взаимно простые полиномы от q-переменных.

При этом заметим, что так как каждый из $(q-k)$-мерных корней удовлетворяет некоторой системе из k уравнений от q-переменных, то $(q-k)$ координат точек $(q-k)$-мерного корня всегда являются свободными (произвольными). Нульмерный корень состоит из набора $(\mu_1^*,\dots,\mu_q^*)$ чисел и не имеет свободных координат.

В статье рассматривается задача построения методов вычисления конечных нульмерных корней; составления уравнения, определяющего $(q-1)$-мерные решения СНАУ-q.

Замечание 1. В дальнейшем будем считать, что СНАУ-q, подлежащая решению, не имеет $(q-1)$-мерных корней со свободными

$t = 1, \ldots, q-1$ параметрами. Другими словами, ОНД системы не имеет своими делителями полиномов от $t = 1, \ldots, q-1$ переменных.

Это предположение не умаляет общности, так как использование алгоритма относительной факторизации (см. [3]) позволяет исключить из полиномов $f_k(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ $k = 1, \ldots, m$ исходной СНАУ (1.1), все полиномы от t-переменных $1 \leqslant t \leqslant q-1$, являющиеся их общими делителями.

Для этого должны быть выполнены следующие операции.

(1) Каждый полином $f_k(\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $i = 1, \ldots, m$ представить в виде относительной факторизации

$$f_k(\mu_1, \ldots, \mu_q) \equiv f_k(\bar{\mu}) = \prod_{i=1}^{q} f_i^{(k)}(\mu_i) \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant q} f_{i_1 i_2}^{(k)}(\mu_{i_1} \mu_{i_2}) \ldots$$
$$\prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{q-1} \leqslant q} f_{i_1, \ldots, i_{q-1}}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_{q-1}}) f_{1, \ldots, q}^{(k)}(\mu_1, \ldots, \mu_q).$$

Здесь $f_{i_1, \ldots, i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t})$ – полином от t-переменных $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}$, не имеющий полиномов от любых i переменных $\mu_1, \ldots, \mu_q$ $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$ своими делителями.

(2) Каждый полином $f_k(\bar{\mu})$ представляется в виде

$$f_k(\bar{\mu}) = \prod_{t=1}^{q-1} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant q} \delta_{i_1, \ldots, i_t}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}) \widehat{f}_k(\bar{\mu}).$$

Здесь $\delta_{i_1 \ldots i_t}(\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_t})$ есть ОНД полиномов $f_{i_1, \ldots, i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t})$, $k = 1, \ldots, m$, так что справедливы равенства

$$f_{i_1 \ldots i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}) = \delta_{i_1 \ldots i_t}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}) \omega_{i_1 \ldots i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}),$$

где $\{\omega_{i_1 \ldots i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t})\}$ – последовательность взаимно простых полиномов;

$$\widehat{f}_k(\bar{\mu}) \equiv \widehat{f}(\mu_1, \ldots, \mu_q) =$$
$$\prod_{t=1}^{q-1} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant q} \omega_{i_1 \ldots i_t}^{(k)}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_t}) f_{1 \ldots q}^{(k)}(\mu_1, \ldots, \mu_q).$$

Выполнение операции (2) может быть осуществлено с помощью алгоритма вычисления ОНД полиномов от $1 \leqslant t \leqslant q-1$ переменных (см., напр., [1]).

В дальнейшем в качестве исходной СНАУ-q будем брать систему вида:

$$\widehat{F}(\mu_1,\dots,\mu_q)\equiv\widehat{F}(\bar\mu)=[\widehat{f}_1(\bar\mu),\dots,\widehat{f}_m(\bar\mu)]^T=0. \tag{1.5}$$

Замечание 2. Рассмотрим уравнение

$$f(\mu_1,\dots,\mu_q)=0, \tag{1.6}$$

где $f(\mu_1,\dots,\mu_q)$ есть полином от q-переменных ($g\geqslant 2$).

Пусть

$$f(\mu_1,\dots,\mu_q)=\prod_{i=1}^{q}f_i(\mu_i)\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant q}f_{i_2,i_2}(\mu_i,\mu_2)\dots \\ \dots\prod_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant q}f_{i_1\dots i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k}) \tag{1.7}$$

есть относительная факторизация полинома $f(\mu_1,\dots,\mu_q)$.

Из (1.7) выделение цепочки из q полиномов вида

$$f_{k+1}(\mu_{k+1}),f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2})\dots,f_{k+1,\dots,q}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q), \tag{1.8}$$

$$f_{k,\dots,q}(\mu_k,\dots,\mu_q),f_{k-1,\dots,q}(\mu_{k-1},\dots,\mu_q),\dots,f_{1,\dots,q}(\mu_1,\dots,\mu_q),$$

($k=0,\dots,q-1$), каждый из которых нетривиален относительно своих переменных.

Точку $(\mu_1^*,\dots,\mu_q^*)$, не содержащую свободных координат, назовем q-кратным узловым корнем уравнения (1.6), если она удовлетворяет нераспадающейся нелинейной системе из q алгебраических уравнений, т.е. системе решения которой не имеют свободных координат. Уравнения упомянутой системы составлены из полиномов (и их делителей), входящих в относительную факторизацию (1.7). Так что q-кратный узловой корень уравнения (1.6) можно рассматривать как точку пересечения цепочки из q нетривиальных относительно своих переменных полиномов (и их делителей), входящих в относительную факторизацию (1.7).

Типичным представителем таких цепочек являются цепочки видов

$$f_{k+1}(\mu_{k+1}),f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}),\dots,f_{k+1,\dots,q}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q),\\ f_{k,k+1,\dots,q}(\mu_k,\dots,\mu_q),f_{k-1,k,\dots,q}(\mu_{k-1},\dots,\mu_q),f_{1\dots q}(\mu_1,\dots,\mu_q);\\ (k=0,1,\dots,q-1),$$

или цепочки в более общего вида:

$$\begin{cases} f_{k+1}(\mu_{k+1}, f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}), \ldots, f_{k+1,\ldots,r}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_r), \\ f_{k,\ldots,r}(\mu_k,\ldots,\mu_r), f_{k-1,\ldots,r}(\mu_{k-1},\ldots,\mu_r), \ldots, f_{1,\ldots,r}(\mu_1,\ldots,\mu_r), \\ f^{(1)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q), f^{(2)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q), \ldots, f^{(q-r)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q), \end{cases} \tag{1.9}$$

$k = 0, 1, \ldots, q-r$; $r = q, q-1, \ldots, q-k$.

Здесь $f^{(t)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q)$, $t = 1,\ldots,q-r$, суть делители полинома $f_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q) \equiv f^{(0)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q)$:

$$f_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q) = \prod_{t=1}^{q-r} f^{(t)}_{1,\ldots,q}(\mu_1,\ldots,\mu_q).$$

В частности при $k = 0$, $r = q$ получаем следующую систему для определения координат узловых q-кратных корней уравнения (1.6):

$$\begin{cases} f_1(\mu_1) = 0 \\ f_{1,2}(\mu_1^*, \mu_2) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{1,\ldots,q}(\mu_1^*,\ldots,\mu_{q-1}^*,\mu_q) = 0. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы есть полином от одной переменной. Через μ_i^* обозначен фиксированный корень уравнения $f_{1,\ldots,i}(\mu_1^*,\ldots,\mu_{i-1}^*,\mu_i) = 0$. Так что одна и та же цепочка определяет наборы q-кратных узловых корней, число которых зависит от степеней полиномов, входящих в решаемую систему.

Теорема 1. *Для существования q-кратного узлового корня у уравнения* (1.6) *необходимо и достаточно существование, по крайней мере, одной из цепочек полиномов вида* (1.9) *в относительной факторизации* (1.7) *полинома $f(\mu_1,\ldots,\mu_q)$.*

Справедливость теоремы следует из определения q-кратного узлового корня.

Следствие. *Система из q-нелинейных алгебраических уравнений, определяющая q-кратный узловой корень $(\mu_1^*,\ldots,\mu_q^*)$ уравнения*

(1.6), *типичным представителем которой является система вида*

$$\left.\begin{aligned}
&f_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0\\
&f_{k+1,k+2}(\mu^*_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{k+1,\ldots,q}(\mu^*_{k+1}, \ldots, \mu^*_{q-1}, \mu_q) = 0\\
&f_{k,\ldots,q}(\mu_k, \mu^*_{k+1}, \ldots, \mu^*_q) = 0\\
&f_{k-1,\ldots,q}(\mu_{k-1}, \mu^*_k, \ldots, \mu^*_q) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{1,\ldots,q}(\mu_1, \mu^1_2, \ldots, \mu^*_q) = 0,
\end{aligned}\right\}, \tag{1.10}$$

не имеет корней с произвольной выбранными координатами.

Справедливость следует из свойств полиномов, входящих в (1.10) как множителей относительной факторизации полинома $f(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ нетривиально зависящих от своих переменных. Действительно система (1.10) не распадается на подсистемы для определения координат $\mu^*_1, \ldots, \mu^*_q$, так как каждый полином $f_{i,\ldots,i_k}(\mu_{i_1,\ldots,i_k})$ не имеет своими делителями полиномов от меньшего числа переменных.

§2. Теоретические предпосылки

Предлагаемый ниже метод решения СНАУ (1.5) основан на использовании ΔW-q алгоритма для построения, так называемой, ΔW-q факторизации матричного полинома от q-переменных.

Пусть

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\lambda, \mu_{q-1}) &:= [\widehat{f}_1(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}), \ldots, \widehat{f}_m(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})] =\\
&= \widehat{C}_s(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^s + \widehat{C}_{s-1}(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^{s-1} + \ldots + \widehat{C}_0(\bar{\mu}_{q-1})
\end{aligned}$$

есть матричный полином с коэффициентами $\widehat{C}_k(\bar{\mu}_{q-1})$, $k = 0, \ldots, s$, которые суть $1\times m$ полиномиальные матрицы от $q-1$ параметров $\mu_2, \ldots, \mu_q$; $\lambda := \mu_1$.

Под ΔW-q факторизацией матричного полинома $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ (с ведущим параметром $\lambda = \mu_1$) понимается разложение вида*)

$$\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = [\Delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}), 0\ldots 0]. \tag{2.1}$$

*) Алгоритм ΔW-q факторизация см. [1].

Здесь $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) \equiv [W_1(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}), W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})]$ есть регулярная q-параметрическая полиномиальная $m \times m$ матрица, унимодулярная по ведущему параметру λ, так что $\det W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ не зависит от λ; $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ есть $m \times (m-1)$ подматрица $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. Столбцы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ образуют базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$; $\Delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ есть скалярный полином от q-переменных $\lambda = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, конечные корни которого суть объединение конечного регулярного спектра $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ и той части спектра матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, которая не принадлежит спектру матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$.

Рассмотрим разложение полинома $\Delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ следующего вида:

$$\Delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}). \tag{2.2}$$

Здесь конечные корни полинома $\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \delta(\mu_1, \dots, \mu_q)$ совпадают с конечными собственными значениями регулярного спектра матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. При этом полином $\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ не имеет своими делителями полиномов от любых i ($1 \leqslant i \leqslant q-1$ переменных $\mu_2, \dots, \mu_q$. Корни полинома $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1}) \equiv \varphi_1(\mu_2, \dots, \mu_q)$ принадлежат той части спектра матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, которая не принадлежит спектру матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$.

Рассмотрим следующее разложение матричного полинома $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$:

$$W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = U_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})\Phi(\bar{\mu}_{q-1}). \tag{2.3}$$

Здесь $\Phi(\bar{\mu}_{q-1}) \equiv \Phi(\mu_2, \dots, \mu_q)$ есть регулярная полиномиальная матрица спектр которой принадлежит спектру матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$; $U_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ есть q-параметрическая полиномиальная матрица, не имеющая своими правыми делителями регулярных матриц, полиномиально зависящих от любых i ($1 \leqslant i \leqslant q-1$) переменных $\mu_2, \dots, \mu_q$. При этом столбцы $U_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ образуют базис нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$.

Пусть

$$\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1}) = \prod_{k=2}^{q} \prod_{1 \leqslant i_2 < \dots < i_k \leqslant q} \Psi_{i_2 \dots i_k}(\mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_2}) \Psi_{2 \dots q}(\mu_2, \dots, \mu_q) \tag{2.4}$$

есть относительная факторизация*) полинома $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$. Здесь $\Psi_{i_2\ldots i_k}(\mu_{i_2},\ldots,\mu_{i_k})$ полином от $(k-1)$ переменных $\mu_{i_2}\ldots,\mu_{i_k}$ не имеющий своими делителями полиномов от любых i $(1\leqslant i\leqslant k-2)$ переменных $\mu_2,\ldots,\mu_q$; $\Psi_{2\ldots q}(\mu_2,\ldots,\mu_q)$ полином от $(q-1)$ переменных, не имеющий своими делителями полиномов от любых i $(1\leqslant i\leqslant q-2)$ переменных $\mu_2,\ldots,\mu_q$.

Справедливы следующие утверждения.

1^0. Конечные корни СНАУ (1.5) совпадают с конечными собственными значениями матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$.

$(q-1)$-мерные корни СНАУ (1.5) или, что то же корни полинома $\delta(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$, отразуют конечный регулярный спектр матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$;

$(q-k)$-мерные корни, $k>1$, СНАУ (1.5) образуют конечный сингулярный спектр матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$.

Справедливость следует из определения спектра многопараметрической полиномиальной матрицы [1].

2^0. Конечный сингулярный спектр матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ принадлежит конечному спектру матрицы, столбцы которой образуют правое нуль-пространство из полиномиальных решений матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$. Справедливость следует из Теоремы 3.1, см. [4], устанавливающей связь между сингулярным спектром многопараметрической матрицы, с одной стороны, и спектрами матриц, образующих базисы нуль-пространств из полиномиальных решений ее, с другой стороны.

3^0. $(q-1)$-мерные корни СНАУ (1.5) являются корнями полинома $\delta(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ разложения (2.2) матрицы $\widehat{\Delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$;

$(q-k)$-мерные корни СНАУ (1.5) при $k>1$ принадлежат спектру матрицы $W_0(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ разложения (2.1) матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$.

Справедливость следует из свойств ΔW-q факторизации матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ и утверждения 2^0.

4^0. Полином*) $\delta(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ в равенстве (2.2) является ОНД поли-

---

*) Алгоритм относительной факторизации полинома от многих переменных см. [3].

*) Если исходная СНАУ (1.1) имела $(q-1)$-мерные корни со свободными параметрами, то с учетом Замечания 1 из §1 ОНД исходной СНАУ будет

$$\widehat{\delta}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q)=\prod_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant q-1}\delta_{i_1,\ldots,i_t}(\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_t})\delta(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}).$$

номов исходной СНАУ (1.5); полином $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$ имеет своими корнями все конечные собственные значения матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, не вошедшие в спектр матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. Справедливость следует из свойств $\Delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ в ΔW-q разложений матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ (см. [1]).

5^0. Столбцы матрицы $U_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ равенства (2.3) образуют базис нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, матрица из столбцов которого не содержит точек регулярного спектра матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. Справедливость следует из свойств матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ и равенства (2.3).

6^0. Конечный спектр матрицы $U_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ совпадает с конечным сингулярным спектром матрицы $\widehat{F}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, или, что то же, с конечными $(q-k)$-мерными $(k>1)$ корнями СНАУ (1.5).

Справедливость следует из утверждения 1^0 и 5^0.

7^0. Точки $(q-k)$-мерного $(k \neq q)$ корня СНАУ (1.5) имеют свободные координаты.

Справедливость следует из определения $(q-k)$-мерного корня СНАУ-q: координаты точек $(q-k)$-мерного корня СНАУ-q удовлетворяют СНАУ-q вида (1.2) из k уравнений.

8^0. Конечные корни системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\widehat{P}_i(\mu_1, \dots, \mu_q) = \frac{\widehat{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_q)}{\delta(\mu_1, \dots, \mu_q)} \quad i = 1, \dots, m$$

совпадают с конечными сингулярными корнями исходной СНАУ (1.1).

Справедливость следует из утверждения 4^0 и совпадения конечных сингулярных корней систем (1.1) и (1.5).

В предположении, что набор координат $\bar{\mu}^*_{q-1} = (\mu^*_2, \dots, \mu^*_q)$, входящий в сингулярное собственное значение $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ не является одновременно и точкой $\bar{\mu}^*_{q-1}$ регулярного спектра матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Для того, чтобы точка $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ была нульмерным решением СНАУ-(1.5), необходимо и достаточно выполнение условий:*

(a) *$(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ является точкой спектра матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$;*

(b) $\bar{\mu}_{q-1} \equiv (\mu_2^*, \dots, \mu_q^*)$ *есть* $(q-1)$*-кратный узловой корень скалярного алгебраического уравнения*

$$\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1}) = 0, \tag{2.5}$$

где $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$ *есть полином, корни которого совпадают с конечными собственными значениями матрицы* $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$*, не принадлежащими спектру матрицы* $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$*;*

(c) λ_* *является корнем алгебраического полинома* $\nabla(\lambda)$*, т.е. корнем ОНД полиномов*

$$\hat{P}_k(\lambda) = \frac{\hat{f}_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*)}{\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*)}, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.6}$$

Доказательство необходимости. Пусть (λ, μ_{q-1}^*) есть нульмерные решение СНАУ-(1.5). В силу свойств 2^0 и 3^0 из §2 точка $(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*)$ принадлежит сингулярному спектру матрицы $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$:

$$W_0(\lambda_*, \bar{\mu}_{q-1})x_* = 0 \quad x_* \neq 0.$$

С учетом, что матрица $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ составлена из столбцов регулярной матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, унимодулярной по λ, имеем

$$W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*) \begin{pmatrix} 0 \\ x_* \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. $\bar{\mu}_{q-1}^*$ есть также точки спектра матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. По сделаенному предположению, $\bar{\mu}_{q-1}^*$ не является точкой регулярного спектра $W_0(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. Отсюда $\bar{\mu}_{q-1}^*$ есть корень уравнения (2.5) причем, так как нульмерный корень $(\lambda_*, \bar{\mu}_{q-1}^*)$ не имеет свободных координат, $\bar{\mu}_{q-1}$ есть $(q-1)$-кратный узловой корень уравнения (2.5). Для доказательства (c) рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений от одной переменной:

$$P_k(\lambda) = \frac{\hat{f}_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*)}{\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}^*)} = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.7}$$

Здесь $\delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ есть ОНД полиномов $\hat{f}_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, $k = 1, \dots, m$; точка $(\lambda_*, \bar{\mu}_{q-1}^*)$ есть нульмерный корень СНАУ-(1.5), так что

$$\hat{f}_k(\lambda_*, \bar{\mu}_{q-1}^*) = 0, \quad k = 1, \dots, m;$$
$$\delta(\lambda_*, \bar{\mu}_{q-1}^*) \neq 0.$$

Отсюда $\lambda = \lambda_*$ есть решение СНАУ-(2.7), т.е. ОНД полиномов (2.6). Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть выполнены условия (a)–(c). Докажем, что $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ является нульмерным решением СНАУ-(1.5). Из (a), с учетом свойств 1^0–3^0 из §2, следует, что $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ принадлежит сингулярному решению СНАУ-(1.5). Для установления принадлежности $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$ нульмерному решению достаточно доказать, что среди координат этой точки нет произвольно выбираемых. Справедливость следует из условий (b) и (c). Действительно, из (b) следует, что среди координат $\bar{\mu}^*_{q-1}$ нет произвольных, так как $\bar{\mu}^*_{q-1}$ есть узловой корень уравнения (2.5); из (c) следует, что λ_* есть корень уравнения $\nabla(\lambda) = 0$ от одной переменной, а потому не может быть произвольно выбранной координатой набора $(\lambda_*, \bar{\mu}^*_{q-1})$. Сказанное завершает доказательство достаточного условия. Справедливость теоремы установлена.

§3. Метод вычисления нульмерных корней СНАУ-q

Ниже рассматриваются три варианта метода вычисления нульмерных решений и ОНД исходной системы.

Первые два варианта основаны на применении алгоритма ΔW-q факторизации матрицы решаемой СНАЕ, не требуют при этом вычисления матрицы $W(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, реализующей это разложение. Полином $\hat{\delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, т.е. ОНД решаемой СНАУ-q (1.1), представляется в первом варианте в виде относительной факторизации

$$\hat{\delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \prod_{k=1}^{q} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant q} \delta_{i_1, \ldots, i_k}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k});$$

во втором варианте в виде факторизации

$$\hat{\delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \delta(\bar{\mu}_{q-1}) \tilde{\delta}(\lambda, \mu_{q-1}).$$

Третий вариант основан на применении алгоритма ∇V-факторизации матрицы $F^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$.

Рассмотрим более подробно каждый из вариантов.

3.1. Первый вариант метода состоит в выполнении следующих операций.

(1) От исходной СНАУ (1.1) перейти к СНАУ (1.5), используя алгоритм относительной факторизации полиномов от многих переменных [3] (см. Замечание 1, §1).

(2) Найти скалярные полиномы $\varphi_1(\bar\mu_{q-1})$ и $\delta(\lambda,\bar\mu_{q-1})$. Для этого выполняются следующие операции

(2i) Матрица $\widehat F(\lambda,\bar\mu_{q-1}) := [\widehat f_1(\lambda,\bar\mu_{q-1}),\dots,\widehat f_m(\lambda,\bar\mu_{q-1})]$, составленная из левых частей СНАУ (1.5), записывается как матричный полином по степеням ведущего параметра $\lambda=\mu_1$. Имеем

$$\widehat F(\lambda,\bar\mu_{q-1}) = \widehat C_s(\widehat\mu_{q-1})\lambda^s+\ldots+\widehat C_0(\bar\mu_{q-1}). \tag{3.1}$$

(2ii) Находится полином $\Delta(\lambda,\bar\mu_{q-1})$. Для чего к матричному полиному $F(\lambda,\bar\mu_{q-1})$ применяется алгоритм ΔW-q факторизации [1]. В результате имеем разложение вида

$$\widehat F(\lambda,\bar\mu_{q-1})W(\lambda,\bar\mu_{q-1}) = [\Delta(\lambda,\bar\mu_{q-1}),0,\dots,0]. \tag{3.2}$$

(2iii) Скалярный полином

$$\Delta(\lambda,\bar\mu_{q-1}) = a_s(\bar\mu_{q-1})\lambda^s+\ldots+a_0(\bar\mu_{q-1})$$

представляется в виде

$$\Delta(\lambda,\bar\mu_{q-1}) = \varphi_1(\bar\mu_{q-1})\delta(\lambda,\bar\mu_{q-1}). \tag{3.3}$$

Для этого находится $\varphi_1(\bar\mu_{q-1})$, т.е. ОНД скалярных полиномов $a_s(\bar\mu_{q-1}),\dots,a_0(\bar\mu_{q-1})$, и разложения вида

$$a_k(\bar\mu_{q-1}) = \varphi_1(\bar\mu_{q-1})\widehat a_k(\bar\mu_{q-1}),\quad k=0,\dots,s,$$

где $\{\widehat a_k(\bar\mu_{q-1})\}$ есть последовательность взаимно простых полиномов.

В качестве искомого полинома $\delta(\lambda,\bar\mu_{q-1})$ берется полином вида

$$\delta(\lambda,\bar\mu_{q-1}) = \sum_{k=0}^{s}\widehat a_k(\bar\mu_{q-1})\lambda^k. \tag{3.4}$$

(3) Используя алгоритм относительной факторизации, находится относительная факторизация полинома $\varphi_1(\bar\mu_{q-1})\equiv\varphi_1(\mu_2,\dots,\mu_q)$:

$$\varphi_1(\bar\mu_{q-1}) = \prod_{k=1}^{q}\prod_{2\leqslant i_2<\ldots<i_t\leqslant q}\Psi_{i_2,\dots,i_t}(\mu_{i_2},\dots,\mu_q). \tag{3.5}$$

(4) Находятся наборы параметров

$$\bar\mu^*_{q-1} := (\mu^*_2,\dots,\mu^*_q),$$

каждый из которых является $(q-1)$-кратным узловым корнем уравнения $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1}) = 0$. Так, например, используя разложение (3.5), выписывается СНАУ из $(q-1)$ уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l}
\Psi_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0, \\
\Psi_{k+1.k+2}(\mu^*_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Psi_{k+1,\dots,q}(\mu^*_{k+1}, \dots, \mu_q) = 0, \\
\Psi_{k,\dots,q}(\mu_k, \mu^*_{k+1}, \dots, \mu^*_q) = 0, \\
\Psi_{k-1,\dots,q}(\mu_{k-1}, \mu^*_k, \dots, \mu^*_q) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Psi_{2,\dots,q}(\mu_2, \mu^*_3, \dots, \mu^*_q) = 0.
\end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

Система вида (3.6) составляется для $k = 1, 2, \dots, q-1$. При $k = 1$ СНАУ (3.6) имеет вид $\Psi_2(\mu_2) = 0$, $\Psi_{23}(\mu_2, \mu_3) = 0, \dots, \Psi_{2\dots q-1}(\mu_2, \dots, \mu_q) = 0$. При $k > 1$ сначала находятся наборы параметров $\bar{\mu}^*_{q-k} = (\mu^*_{k+1}, \dots, \mu^*_q)$ путем решения СНАУ-k вида

$$\begin{array}{l}
\Psi_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0,\ \Psi_{k+1,k+2}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0, \dots, \\
\Psi_{k,\dots,q}(\mu_{k+1}, \dots, \mu_q) = 0.
\end{array}$$

Затем для каждого фиксированного набора $\bar{\mu}^*_{q-k} = (\mu^*_{k+1}, \dots, \mu^*_q)$ решается СНАУ из $(q-k+1)$ уравнения вида

$$\begin{array}{l}
\Psi_{k,\dots,q}(\mu_k, \bar{\mu}^*_{q-k}) = 0, \Psi_{k+1,\dots,q}(\mu_{k+1}, \bar{\mu}^*_k, \bar{\mu}^*_{q-k}) = 0, \dots \\
\Psi_{2\dots q}(\mu_2, \mu^*_3, \dots, \mu^*_k, \bar{\mu}^*_{q-k}) = 0.
\end{array}$$

(5) Для каждого фиксированного набора $\bar{\mu}^*_{q-1} = (\mu^*_2, \dots, \mu^*_q)$, найденного в операции (4), вычисляется параметр μ^*_1, как корень СНАУ вида

$$\widehat{P}_i(\lambda) = \frac{\widehat{f}_i(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-1})}{\delta(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-1})} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

или, что то же, как корень уравнения

$$\nabla(\lambda) = 0,$$

где $\nabla(\lambda)$ есть ОНД полиномов $\widehat{P}_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$.

Объединение всех таким образом найденных наборов $(\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*) = (\mu_1^*, \bar{\mu}_{q-1}^*)$ образует все конечные нульмерные корни СНАУ (1.5), а следовательно, и исходной СНАУ (1.1).

Замечание 3. Алгоритм вычисления нульмерных корней исходной СНАУ (1.1) позволяет также вычислить $\widehat{\delta}(\mu_1, \ldots, \mu_q)$, т.е. ОНД полиномов, входящих в левую часть СНАУ (1.1), в следующем факторизованном виде

$$\widehat{\delta}(\mu_1, \ldots, \mu_q) =$$
$$= \prod_{i=1}^{q} \delta_i(\mu_i) \prod_{1 \leqslant i_i < i_r \leqslant q} \delta_{i_1 i_2}(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}) \ldots$$
$$\ldots \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{q-1} \leqslant q} \delta_{i_1 \ldots i_{q-1}}(\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_{q-1}}) \delta(\mu_1, \ldots, \mu_q).$$

Здесь все множители $\delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}(\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_{k-1}})$ получены с помощью алгоритма, изложенного в Замечании 1 из §1; полином $\delta(\mu_1, \ldots, \mu_q) \equiv \delta(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, есть ОНД полиномов $\widehat{f}_i(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, $i = 1, \ldots, m$ получен выполнением операций (2) и (3) метода вычисления нульмерных корней.

Замечание 4. Конечные $(q-k)$-мерные корни $(1 < k < q)$ СНАУ (1.5), а следовательно, и СНАУ (1.1), определяются как решения следующей системы из k нелинейных уравнений от q-переменных

$$\left.\begin{aligned} g_1(\mu_2, \ldots, \mu_{q-k+1}) &:= \Psi_{2, \ldots, q-k+1}(\mu_2, \ldots, \mu_{q-k+1}) = 0 \\ g_2(\mu_3, \ldots, \mu_{q-k+2}) &:= \Psi_{3, \ldots, q-k}(\mu_3, \ldots, \mu_{q-k+2}) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(\mu_k, \ldots, \mu_q) &:= \Psi_{k, \ldots, q}(\mu_k, \ldots, \mu_q) = 0 \\ g_k(\mu_1, \ldots, \mu_{q-k}) &:= \nabla(\mu_1, \ldots, \mu_{q-k}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Здесь первые $(k-1)$ уравнений СНАУ (3.7) не зависят от переменной μ_1 и определяют точку $(\mu_2, \ldots, \mu_{q-k}, \mu_{q-k+1}^*, \ldots, \mu_q^*)$, у которой, скажем, координаты $\mu_2, \ldots, \mu_{q-k}$ являются свободными. Полином $g_k(\mu_1, \ldots, \mu_{q-k})$ последнего уравнения системы (3.7) есть ОНД полиномов

$$\widehat{P}_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q-k}, \mu_{q-k+1}^*, \ldots, \mu_q^*) =$$
$$= \frac{\widehat{f}_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q-k}, \mu_{q-k+1}^*, \ldots, \mu_q^*)}{\delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q-k}, \mu_{q-k+1}^*, \ldots, \mu_q^*)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Второй вариант метода состоит в выполнении следующих операций.

(1) От исходной СНАУ-q (1.1) осуществляется переход к СНАУ-q вида

$$G(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = (g_1(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}, \dots, g_m(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}))^T = 0 \tag{3.8}$$

не содержащий решений не зависящих от параметра λ. Для этого выполняются следующие шаги.

(1i) Каждый из полиномов

$$f_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \sum_{t=0}^{s} a_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^k$$

представляется в виде

$$f_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \delta_k(\bar{\mu}_{q-1}) \sum_{t=0}^{s} \hat{a}_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^k, \tag{3.9}$$

где

$$a_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1}) = \delta_k(\bar{\mu}_{q-1})\hat{a}_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1}),$$

$\delta_k(\bar{\mu}_{q-1})$ есть ОНД последовательности полиномов $a_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1})$, $t = 0, 1, \dots, s$; $\{\hat{a}_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1)\}}$, есть последовательность взаимно простых полиномов

(1ii) Находится $\tilde{\delta}(\bar{\mu}_{q-1})$ и разложения вида

$$\delta_k(\bar{\mu}_{q-1}) = \tilde{\delta}(\bar{\mu}_{q-1})b_k(\bar{\mu}_{q-1}), \tag{3.10}$$

где $\tilde{\delta}(\mu_{q-1})$ есть ОНД последовательности полиномов $\{\delta_k(\bar{\mu}_{q-1})\}$, $k = 1, \dots, m$; $\{b_k(\bar{\mu}_{q-1})\}$ последовательность взаимно простых полиномов

(1iii) С учетом (3.9) и (3.10) вычисляются полиномы $f_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \tilde{\delta}(\bar{\mu}_{q-1})g_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$, где

$$g_k(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = b_k(\bar{\mu}_{q-1}) \sum_{t=0}^{s} \hat{a}_t^{(k)}(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^t. \tag{3.11}$$

(2) Находятся скалярные полиномы $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$ и $\tilde{\delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$. Для этого выполняются следующие шаги

(2i) К матричному полиному $G^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ применяется алгоритм ΔW-q факторизации:

$$G^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})\tilde{W}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = [\tilde{\Delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}), 0, \dots, 0].$$

(2ii) Скалярный полином

$$\tilde{\Delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = \tilde{a}_s(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^s + \ldots + \tilde{a}_0(\bar{\mu}_{q-1})$$

представляется в виде

$$\tilde{\Delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = \varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})\tilde{\delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}),$$

где $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$ есть ОНД полиномов $\{\tilde{a}_t(\bar{\mu}_{q-1}),\ t = 0,1,\ldots,s\}$, так что

$$\tilde{a}_t(\bar{\mu}_{q-1}) = \varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})\hat{a}_t(\bar{\mu}_{q-1}), \quad t = 0,\ldots,s;$$

$$\tilde{\delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = \sum_{t=0}^{s}\hat{a}_t(\bar{\mu}_{q-1})\lambda^k.$$

$\{\hat{a}_t(\bar{\mu}_{q-1})\}$ – последовательность взаимно простых полиномов;

(3) Используя как и в первом варианте относительную факторизацию полинома $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$, находятся наборы параметров $\bar{\mu}^*_{q-1} = (\bar{\mu}^*_2,\ldots,\bar{\mu}^*_q)$, образующие узловые $(q-1)$-кратные корни $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$.

(4) Для каждого фиксированного $\bar{\mu}^*_{q-1}$ вычисляются параметры λ_*, как корни СНАУ-1 вида:

$$\tilde{P}_i(la) = \frac{g_i(\lambda,\bar{\mu}^*_{q-1})}{\tilde{\delta}(\lambda,\bar{\mu}^*_{q-1})}, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{3.12}$$

Объединение всех таким образом найденных наборов $(\lambda_*,\bar{\mu}^*_{q-1})$ образует все конечные нульмерные корни исходной СНАУ-(1.1) ОНД системы (1.1), т.е. полином определяющее конечные $(q-1)$-мерные корни, имеет вид

$$\hat{\delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = \tilde{\delta}(\bar{\mu}_{q-1})\tilde{\delta}(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}). \tag{3.13}$$

Третий вариант метода состоит в выполнении следующих операций.

(1) От исходной СНАУ-q (1.1) осуществляется переход к СНАУ-q вида

$$V^T(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = (v_1(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}),\ldots,v_m(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}))^T = 0, \tag{3.14}$$

где $v_k(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$, $k = 1,\ldots,m$ – последовательность взаимно простых полиномов. С этой целью к матрице $F^T(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})$ применяется алгоритм ∇V-факторизации [1]

$$F^T(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}) = \nabla(\lambda,\bar{\mu}_{q-1})V(\lambda,\bar{\mu}_{q-1}),$$

где $\nabla(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = \hat{\delta}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ есть ОНД СНАУ (1.1);

$$V^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) \equiv (v_1(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}), \ldots, v_m(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}))^T = 0$$

есть искомая СНАУ-q (3.14), конечные решения которой совпадают с сингулярными решениями исходной системы (1.1). Для вычисления нульмерных решений СНАУ (3.14) следует выполнить шаги:

(2) Найти полином $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$, применив к $V^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})$ алгоритм ΔW-q факторизации. Имеем

$$V^T(\lambda, \bar{\mu}_{q-1})\bar{W}(\lambda, \bar{\mu}_{q-1}) = [\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1}, 0, \ldots, 0].$$

(3) Используя относительную факторизацию полинома $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$, как и в вариантах 1 и 2, вычислить наборы $\bar{\mu}_{q-1}$, являющиеся узловыми $(q-1)$-кратными точками полинома $\varphi_1(\bar{\mu}_{q-1})$.

(4) Для каждого набора $\bar{\mu}_{q-1}$ найти параметры λ_*, как корни СНА-1 вида

$$v_k(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-1}) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Объединение всех таким образом найденных наборов $(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-1})$ образует все конечные корни исходной СНАУ-(1).

§4. Метод решения СНАУ-2 и СНАУ-3

Рассмотрим применение вариант 1 метода из §3 к решению систем нелинейных алгебраических уравнений от двух и трех переменных.

4.1. Метод решения СНАУ-2.

Пусть исходная система нелинейных алгебраических уравнений зависит от двух переменных λ и μ:

$$f_k(\lambda, \mu) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.1}$$

Для вычисления всех конечных нульмерных и одномерных решений СНАУ (4.1) выполняются следующие операции.

(1) От СНАУ (1.4) осуществляется переход к СНАУ-2, не имеющую одномерных решений вида (λ, μ_*) и (λ_*, μ). Для этого выполняются следующие шаги.

(1i) Находится относительная факторизация каждого из полиномов $f_k(\lambda, \mu)$:

$$f_k(\lambda, \mu) = f_1^{(k)}(\lambda) f_2^{(k)}(\mu) f_{1,2}^{(k)}(\lambda, \mu), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Здесь $f_{1,2}^{(k)}(\lambda,\mu)$ – полином от двух переменных не имеющих своими делителями полиномов от одной переменной; $f_1(\lambda)$ и $f_2(\mu)$ – полиномы от одной переменной.

(1ii) Находятся ОНД $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\mu)$ последовательностей полиномов $\{f_1^{(k)}(\lambda)\}$ и $\{f_2^{(k)}(\mu)\}$, $k = 1,\dots,m$, и разложения вида

$$f_1^{(k)}(\lambda) = \delta_1(\lambda)\omega_1^{(k)}(\lambda) \quad \text{и} \quad f_1^{(k)}(\mu) = \delta_2(\mu)\omega_2^{(k)}(\mu).$$

Здесь $\{\omega_1(\lambda)\}$ и $\{\omega_2(\lambda)\}$ суть последовательности взаимно простых полиномов.

(1iii) Осуществляется переход от (1.4) к СНАУ вида

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu) := \omega_1^{(k)}(\lambda)\omega_2^{(k)}(\mu)f_{1,2}^{(k)}(\lambda,\mu) = 0, \quad k = 1,\dots,m, \tag{4.2}$$

не имеющий решений вида (λ,μ_*) и (λ_*,μ). Все прочие решения СНАУ (4.1) и (4.2) совпадают. Выполнение операции (1) осуществляется с помощью ΔW-1 алгоритма (см., напр., [6]).

(2) Находятся скалярные полиномы $\varphi_1(\mu)$ и $\delta(\lambda,\mu)$ соответственно от одной и двух переменных. Для этого выполняются следующие шаги.

(2i) К матричному полиному

$$\widehat{F}(\lambda,\mu) = [\widehat{f}_1(\lambda,\mu),\dots,\widehat{f}_m(\lambda,\mu)] \equiv C_s(\mu)\lambda^s + \ldots + C_0(\mu)$$

применяется алгоритм ΔW-2 факторизации [7]. Имеем

$$\widehat{F}(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),0,\dots,0].$$

(2ii) Полином $\Delta(\lambda,\mu) = a_s(\mu)\lambda^s + \ldots + a_0(\mu)$ представляется в виде

$$\Delta(\lambda,\mu) = \varphi_1(\mu)\delta(\lambda,\mu),$$

где

- $\varphi_1(\mu)$ есть ОНД полиномов $a_s(\mu),\dots,a_0(\mu)$, так что

$$a_k(\mu) = \varphi_1(\mu)\widehat{a}_k(\mu), \quad k = 0,\dots,s;$$

$\{\widehat{a}_k(\mu)\}$ – последовательность взаимно простых полиномов;

- $\delta(\lambda,\mu) = \sum\limits_{k=0}^{s} \widehat{a}_k(\mu)\lambda^k$.

(3) Находятся корни μ_i алгебраического полинома от одной переменной $\varphi_1(\mu) = 0$.

(4) Для каждого фиксированного корня $\mu_* = \mu_i$ составляется СНАУ-1 вида

$$\widehat{F}(\lambda,\mu_*) \equiv [\widehat{f}_1(\lambda,\mu_*),\ldots,\widehat{f}_m(\lambda,\mu_k)]^T = 0$$

и находятся ее корни λ_{j*}.

Пары (μ_i,λ_{ji}), так вычисленных чисел, образуют все конечные нульмерные корни исходной СНАУ (4.1).

Полином $\widehat{\delta}(\lambda,\mu) := \delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\delta(\lambda,\mu)$ является ОНД полиномов $\{f_k(\lambda,\mu)\}$ для СНАУ (4.1), и следовательно его корни суть одномерные корни исходной СНАУ (4.1).

4.2. Метод решения СНАУ-3. Пусть исходная СНАУ зависит от трех переменных:

$$f_k(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = 0, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{4.3}$$

Для решения СНАУ (4.3) выполняются следующие операции.

(1) От СНАУ (4.3) осуществляется переход к СНАУ, не содержащей одномерных решений со свободными параметрами, т.е. решений вида

$$\begin{aligned}&(\mu_1,\mu_2^x,\mu_3^x),\ (\mu_1^x,\mu_2,\mu_3^x),\ (\mu_1^x,\mu_2^x,\mu_3),\\&(\mu_1,\mu_2,\mu_3^x),\ (\mu_1,\mu_2^x,\mu_3),\ (\mu_1^x,\mu_2,\mu_3).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для этого выполняются следующие шаги.

(1i) Находится относительная факторизация каждого из полиномов $f_k(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ из (4.3), т.е. факторизация вида

$$f_k(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \prod_{i=1}^{3} f_i^{(k)}(\mu_i) \prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3} f_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1},\mu_{i_2}) f_{1,2,3}^{(3)}(\mu_1,\mu_2,\mu_3),$$

где каждый полином $f_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1},\mu_{i_2})$ не имеет своими делителями полиномов от одной переменной; $f_{1,2,3}^{(k)}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ не имеет своими делителями полиномов от одной и от двух переменных

(1ii) Находятся $\delta_i(\mu_i)$, $\delta_{i_1,i_2}(\mu_{i_2},\mu_{i_2})$, т.е. ОНД последовательностей полиномов $\{f_i^{(k)}(\mu_i)\}$, $\{f_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1},\mu_{i_2})\}$, и разложения вида

$$\begin{gathered}f_i^{(k)}(\mu_i) = \delta_i(\mu_i)\omega_i^{(k)}(\mu_i),\\ f_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1},\mu_{i_2}) = \delta_{i_1,i_2}(\mu_{i_1},\mu_{i_2})\omega_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1},\mu_{i_2})\end{gathered}$$

$k = 1, \dots, m$, где $\{\omega_i^{(k)}(\mu_i)\}$ и $\{\omega_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1}, \mu_{i_2})\}$ суть последовательности взаимно простых полиномов соответственно от одной и двух переменных.

(1iii) Осуществляется переход от (4.3) к СНАУ-3 вида

$$\widehat{F}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv [\widehat{f}_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \dots, \widehat{f}_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3)] = 0, \qquad (4.5)$$

где

$$\widehat{f}_k(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \prod_{i=1}^{3} \omega_i^{(k)}(\mu_i) \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2} \omega_{i_1,i_2}^{(k)}(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}) f_{1,2,3}^{(k)}(\mu_1, \mu_2, \mu_3).$$

Здесь СНАУ (4.5) не имеет решений вида (4.4). Все прочие решения СНАУ (4.3) и СНАУ (4.5) совпадают. Выполнение операции (1) может быть осуществлено с помощью алгоритма относительной факторизации (см., напр., [2, 3])

(2) Находятся скалярные полиномы $\varphi_1(\mu_2, \mu_3)$ и $\delta(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ выполнением следующих шагов.

(2i) К матричному полиному

$$\widehat{F}(\lambda, \mu_2, \mu_3) \equiv \sum_{k=0}^{s} C_*(\mu_2, \mu_3)\lambda^k$$

применяется алгоритм ΔW-3 факторизации. Имеем

$$\widehat{F}(\lambda, \mu_2, \mu_3) W(\lambda, \mu_2, \mu_3) = [\Delta(\lambda, \mu_2, \mu_3), 0, \dots, 0].$$

(2ii) Скалярный полином от трех переменных $\Delta(\lambda, \mu_2, \mu_3) = a_s(\mu_2, \mu_3)\lambda^s + \dots + a_0(\mu_2, \mu_3)$ представляется в виде

$$\Delta(\lambda, \mu_2, \mu_3) = \varphi_1(\mu_2, \mu_3)\delta(\lambda, \mu_2, \mu_3),$$

где

- $\varphi_1(\mu_2, \mu_3)$ есть ОНД полиномов $a_k(\mu_2, \mu_3)$ от двух переменных, так что

$$a_k(\mu_2, \mu_3) = \varphi_1(\mu_2, \mu_3)\widehat{a}_k(\mu_2, \mu_3), \quad k = 1, \dots, r,$$

$\{\widehat{a}_k(\mu_2, \mu_3)\}$ – последовательность взаимно простых полиномов;

- $\delta(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv \delta(\lambda_1, \mu_2, \mu_3) := \sum_{k=0}^{s} \lambda^k \widehat{a}_k(\mu_2, \mu_3)$.

(3) Находится относительная факторизация полинома $\varphi_1(\mu_2,\mu_3)$, т.е. факторизация вида

$$\varphi_1(\mu_2,\mu_3)=\Psi_2(\mu_2)\Psi_3(\mu_3)\Psi_{2,3}(\mu_2,\mu_3).$$

Здесь $\Psi_{2,3}(\mu_2,\mu_3)$ – полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной.

(4) Находятся наборы параметров

$$(\mu_{2i}^*,\mu_{3i}^*)$$

каждый из которых удовлетворяет одной из систем

$$\left.\begin{array}{r}\Psi_2(\mu_2)=0\\ \Psi_{2,3}(\mu_2,\mu_3)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}\Psi_3(\mu_3)=0\\ \Psi_{2,3}(\mu_2,\mu_3)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}\Psi_{23}^{(i)}(\mu_2\mu_3)=0\\ \Psi_{2,3}^{(j)}(\mu_2,\mu_3)=0\end{array}\right\}.$$

Здесь $\Psi_{23}^{(t)}(\mu_2,\mu_3)$, $t=i,j$ суть делители полинома $\Psi_{23}(\mu_2,\mu_3)$.

(5) Для каждого фиксированного набора (μ_2^*,μ_3^*) составляется СНАУ-1 вида

$$\widehat{P}_k(\lambda)=\frac{\widehat{f}_k(\lambda,\mu_2^*,\mu_3^*)}{\delta(\lambda,\mu_2^*,\mu_3^*)}=0$$

и вычисляются ее корни $\lambda_{i*}=\mu_{1i}^*$.

Объединение всех таким образом найденных наборов $(\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*)$ образует конечные нульмерные решения исходной СНАУ (4.3).

Одномерные решения СНАУ (4.3) определяются как корни полинома

$$\widehat{\delta}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=\prod_{i=1}^{3}\delta_i(\mu_i)\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3}\delta_{i_1i_2}(\mu_{i_1},\mu_{i_2})\delta(\mu_1,\mu_2,\mu_3),$$

который является ОНД полиномов $f_k(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, $k=1,\ldots,m$, СНАУ (4.3).

Двумерные корни СНАУ (4.3) определяются как решения СНАУ из двух уравнений вида

$$\Psi_{2,3}(\mu_2,\mu_3)=0\quad \nabla(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=0,$$

где $\nabla(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=$ ОНД последовательности полиномов $\{\widehat{P}_k(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\}$.

Замечание 5. Методы решения СНАУ-2 и СНАУ-3, полученные по общей схеме метода решения СНАУ-q (q – любое целое число) являются некоторым обобщением и дополнением к методам, изложенным в [2, 7].

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. Научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Решение систем нелинейных алгебраических уравнений от трех переменных. Методы и алгоритмы. 3.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **229** (1995), 159–190.
3. В. Н. Кублановская, Б. В. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. Вычислит. Матем. и Матем. Физ..
4. Б. В. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
5. И. Р. Шефаревич, *Основы алгебраической геометрии.* т. 1, М, Наука, 1988.
6. V. N. Kublanovskaya, *Rank-devision algorithms and their applications.* — J. Numer. Lin. Algebra Appl. **1**, No. **2** (1992), 199–213.
7. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **236** (1997), 3–329.

Kublanovskaya V. N. Solution of arbitrary systems of nonlinear algebraic equations. Methods and algorithms IV.

This paper considers the solution of a system of m nonlinear equations in $q \geqslant 2$ variables (SNAEs-q). A method for finding all of the finite zero-dimensional roots of a given SNAE-q, which extends the method suggested in [2] for $q = 2$ and $q = 3$ to the case $q \geqslant 2$, is developed and theoretically justified. This method is based on the algorithm of ΔW-q factorization of a polynomial q-parameter matrix [1] and on the algorithm of relative factorization of a polynomial in q variables [3].

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 декабря 1996 г.