В. А. Залгаллер

НЕКОТОРЫЕ ИЗГИБАНИЯ ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

1. Изгибания. Речь идет о поверхностях в обычном трехмерном пространстве. Две поверхности называют *изометричными* друг другу, если между их точками можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что при этом соответствии каждой кривой на одной поверхности отвечает кривая той же длины на другой поврхности. Говорят, что такие две поверхности представляют собой одна – *изгибание* другой. Поверхности, которые изометричны куску плоскости, называют *развертывающимися*.

Лист бумаги, считая его идеально тонким, можно отождествить с куском плоскости. Накладывая его на конус или на цилиндр, мы совершаем его изгибание. Аналогично, перегибая лист по прямому ребру, или по четырем лучам, как показано на Рис. 1, мы также получаем поверхность, изометричную куску плоскости. В последнем случае изогнутый кусок плоскости имеет вид невыпуклого четырехгранного угла. Существенно, что у последнего сумма плоских углов граней равна 2π.

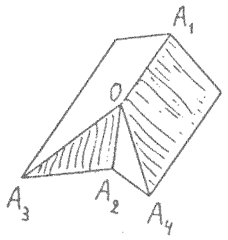

Рис. 1.

Есть целое искусство придавать за счет перегибов листу бумаги самые разнообразные формы. Это искусство называется *оригами*.*) Каждый в детстве играл в оригами, делая, например,

*) В Санкт-Петербурге есть даже специальный центр оригами [1], он из-

"птичку" из сложенного листа бумаги.

Поверхность, у каждой точки которой есть окрестность, изометричная окрестности точки на плоскости, называется *локально развертывающейся*. Примером такой поверхности является цилиндрическая поверхность. Мы будем кратко называть ее *цилиндром*. Темой этой статьи будут некоторые изгибания цилиндра. Рассматривая их, мы всякий раз будем считать цилиндр достаточно длинным для осуществления предлагаемых изгибания.

2. Предварительное построение. Представьте себе, что из бумаги вырезали равнобедренный треугольник ABC ($CA = CB$) с углом 2λ при вершине C, а затем перегнули его по высоте CD и расположили так, что стороны CA и CB лежат в горизонтальной плоскости H, образуя угол 2μ ($\mu < \lambda$), а точка D лежит над плоскостью H, Рис. 2. При этом плоскость точек A, D, B,

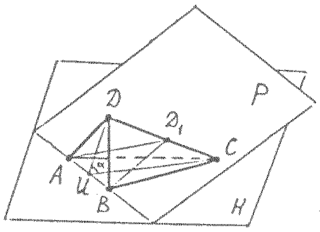

Рис. 2

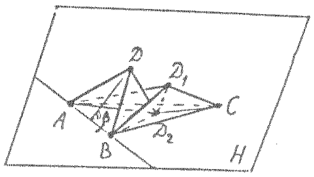

Рис. 3.

образует с плоскостью H некоторый угол α ($0 < \alpha < \pi/2$). Значение α определяется значениями λ и μ. Действительно, $CB = CD/\cos\lambda$, $CU = CB\cos\mu$, $\sin\alpha = \frac{CD}{CU}$, откуда

$$\alpha = \arcsin\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}. \tag{1}$$

Решим задачу: так изогнуть наш переломленный бумажный треугольник ABC из положения Рис. 2, чтобы его стороны CA, CB остались на месте, а плоскость края ADB после изгибания стала образовывать с плоскостью H вместо угла α заданный угол β ($0 < \beta < \alpha$).

дал несколько сборников "Мир оригами".

Обозначим $\delta = \alpha - \beta$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть
$$\beta > \frac{\delta}{2}. \tag{2}$$
В этом случае поступим следующим образом. Проведем через точки A, B плоскость P, образующую с плоскостью H угол $\delta/2$. Плоскость P рассечет наш бумажный треугольник по некоторой линии AD_1B (Рис. 2). Заменим лежащую над плоскостью P часть бумажного треугольника (часть с краем AD_1B) на зеркальное отражение этой части в плоскости P. Отраженная часть в свою очередь будет рассечена плоскостью H. Заменим отсеченную часть с краем AD_2B, оказавшуюся ниже плоскости H, на зеркальное отражение этой части в плоскости H. В итоге наш бумажный треугольник, приобретя дополнительные переломы, изогнется и примет вид Рис. 3. При этом в новом положении плоскость ADB будет наклонена к плоскости H точно на желаемый угол β.

Случай 2. Пусть условие (2) не имеет места. Выберем целое число n настолько большое, что
$$\beta > \frac{\delta}{2n}. \tag{3}$$
В этом случае плоскость P проведем под углом $\delta/2n$ к плоскости H и отражения отсеченных частей сначала в плоскости P, а затем – в плоскости H, повторим n раз. Мы достигнем цели: плоскость ADB будет наклонена к H под углом β.

3. Перелом цилиндра на угол φ. За счет изгибания цилиндру можно придавать форму любой призматической поверхности. Придадим ему форму призматической поверхности с поперечным сечением в виде правильного треугольника, Рис. 4. Попрежнему представляем себе, что цилиндр сделан из бумаги.

Вырежем из нашего цилиндра два одинаковых равнобедренных треугольника ABC и ABC' (Рис. 4). Обозначим 2λ выбранный угол при их вершинах C, C'. Оставшуюся после удаления этих треугольников основную часть цилиндра перегнем по линии CC', как указано на Рис. 5, на заданный угол φ $(0 < \varphi < \pi)$. То есть так, что двугранный угол при ребре CC' будет равен $\pi - \varphi$. При этом новые углы $2\mu = \angle ACB = \angle AC'B$ станут меньше 2λ.

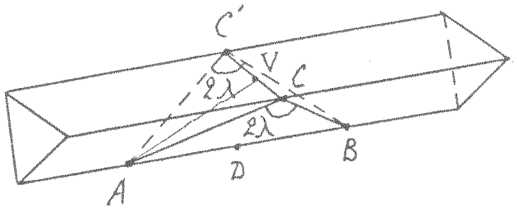

Рис. 4

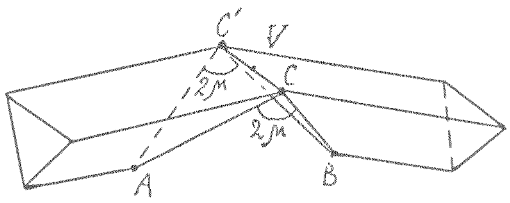

Рис. 5

Замечание. Существует такое зависящее от φ значение λ_0 угла λ, что при выборе такого λ плоскости ACC' и BCC' образуют всего навсего угол φ и смыкаются при перегибе на угол φ по ребру CC'. Нетрудно убедиться, что это значение

$$\lambda_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3} \sin \varphi/2}{\sqrt{3 + \cos^2 \varphi/2}}. \tag{4}$$

Но мы предполагаем, что значение λ выбирается в пределах

$$\lambda_0 < \lambda < \pi/2, \tag{5}$$

так что Рис. 5 качественно верен.

Найдем угол μ. Обозначим $a = CC' = CD$ (Рис. 4). Тогда $VC = a/2$, $AC = a/\cos\lambda$, $AV = \sqrt{AC^2 + VC^2}$. После перегиба (Рис. 5) $AB/2 = AV \cos \frac{\pi - \varphi}{2}$, $\sin \mu = \frac{AB}{2}/AC$. Отсюда

$$\mu = \arcsin \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{4 + \cos^2 \lambda} \right). \tag{6}$$

Вырезанный ранее бумажный треугольник ACB перегнем по его высоте CD так, чтобы угол $\angle ACB = 2\mu$ и подклеим его по

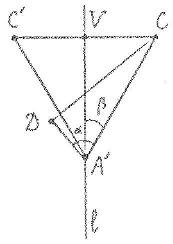

Рис. 6

ребрам AC, BC в переломленный цилиндр Рис. 5 так, чтобы точка D оказалась со стороны цилиндра.

Рассмотрим в условиях Рис. 5 плоскость Q, которая проходит через отрезок CC' и делит пополам углы $\angle ACB$ и $\angle AC'B$. На Рис. 6 изображена эта плоскость, причем A' – проекция на плоскость Q точек A и B. Точка D подклеенного нами перегнутого по CD треугольника ABC будет лежать в плоскости Q левее прямой l (Рис. 6), проходящей через A' и перпендикулярной CC'. Угол $\alpha = \angle DA'C$ определяется по λ и μ согласно (1). Найдем угол $\beta = \angle VA'C$. Обозначим $a = CC' = CD$ в условиях Рис. 4. Тогда $AC = a/\cos\lambda$, $VA = \sqrt{AC^2 + \frac{a^2}{4}}$, поэтому на Рис. 6 $VA' = VA\cos\frac{\pi-\varphi}{2}$, откуда

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{VC}{VA'} = \operatorname{arctg}\frac{\cos\lambda}{\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{4+\cos^2\lambda}}. \tag{7}$$

Теперь, пользуясь описанным выше в пункте “Предварительное построение” приемом, изогнем подклеенный по AC и BC переломленный по CD треугольник ABC так, чтобы угол наклона плоскости ADC к плоскости ACD уменьшился с α до β.

Совершенно аналогично изогнем и вложим по контуру $AC'B$ треугольник ABC'.

В целом мы получим поверхность, изометричную исходному цилиндру. Начало и конец этого длинного цилиндра будут иметь по-прежнему форму правильной трехгранной призмы, но посредине будет довольно сложно устроенный перелом.

Таким образом мы научились с помощью изгибания “в манере оригами” переламывать длинный трехгранный цилиндр на угол

φ $(0 < \varphi < \pi)$ в направлении любого из его ребер. Рассмотрим пример.

4. Перелом на угол $\frac{\pi}{3}$. При $\varphi = \pi/3$ из (4) находим $\lambda_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$, мы вправе выбрать λ в пределах (5). Выберем $\lambda = \pi/4$. Тогда из (6) имеем $\mu = \arcsin\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx 0.5590$. Теперь из (1) $\alpha = \arcsin\frac{4}{\sqrt{23}} \approx 0.9864$, из (7) $\beta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \approx 0.5880$, $\delta = \alpha - \beta \approx 0.3984$. Условие (2) выполнено. Так что можно обойтись одной складкой, как на Рис. 2–3.

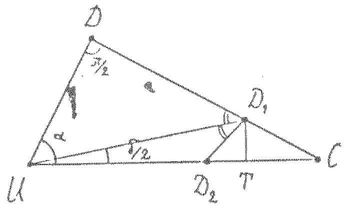

Рис. 7.

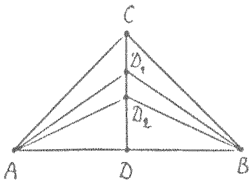

Рис. 8.

Плоскость P в этом случае проводится под углом $\frac{\delta}{2} \approx 0.1992$. Чтобы найти положение точки D_1 на ребре $DC = a$, Рис. 2, рассмотрим треугольник UDC, Рис. 7. Обозначим h высоту D_1T. Тогда $h\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} + h\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{\sin\alpha}$, откуда

$$h = \frac{a}{\sin\alpha(\operatorname{ctg}\delta/2 + \operatorname{tg}\alpha)} \approx 0.18545a,$$

и $D_1C = h/\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \approx 0.3362a$. Поскольку $\angle UD_1D_2 = \angle UD_1D = \frac{\pi}{2} - \alpha + \delta/2$, то $\angle D_2D_1T = \pi - \alpha - 2(\pi - \alpha + \frac{\delta}{2}) = \alpha - \delta = \beta$, и $D_1D_2 = h/\cos\beta \approx 0.2229a$.

Это позволяет разметить линии перегибов на "вырезаемом" треугольнике ABC, Рис. 8, и затем склеить модель описанного перелома.

5. Прямой плоский тор. Пусть дан бумажный прямоугольник $ABCD$, Рис. 9, и мы хотим изгибанием придать ему такую форму, чтобы каждая точка стороны AB совместилась (и затем – "склеилась") с противоположной ей точкой стороны DC, а каждая точка стороны AD совместилась (и склеилась) с противоположной ей точкой стороны BC. Можно ли в пространстве так изогнуть прямоугольник?

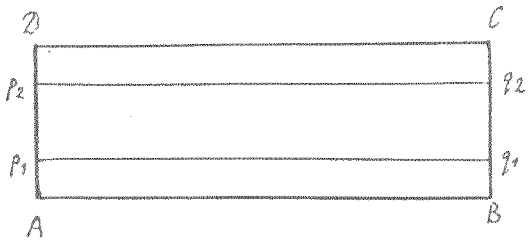

Рис. 9.

Рис. 10.

Один ответ очевиден. Поступим так, как дети складывают фантики. Пусть $Ap_1 = p_2D = AD/4$ и $p_1q_1 \| p_2q_2 \| AB$. Перегнув наш прямоугольник по прямым p_1q_1 и p_2q_2, мы легко совместим и склеим соответствующие точки сторон AB и DC. После этого прямоугольник $ABCD$ будет лежать на плоскости в два слоя, (как выглаженный рукав), Рис. 10. Перегнув концы полученного "рукава" по линиям m_1n_1 и m_2n_2 (Рис. 10), мы сможем совместить и склеить соответствующие друг другу точки исходных сторон AD и BC.

Прямоугольник $ABCD$ с отождествленными противоположными точками называют *прямым плоским тором*. Выше мы описали его погружение в пространство в виде поверхности, которая "в четыре слоя" лежит на плоскости. Нельзя ли вложить плоский тор в трехмерное пространство без самопересечений и самоналеганий?

Умение изгибанием переламывать цилиндр позволяет это сделать, если длина прямоугольника $ABCD$ значительно больше его ширины. Действительно, проведем в прямоугольнике $ABCD$, Рис. 11, три отрезка p_iq_i, параллельных AB, где $2Ap_1 = p_1p_2 =$

Рис. 11.

Рис. 12.

$p_2p_3 = 2p_3D$. Перегнув прямоугольник по каждому из отрезков p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, мы совместим (и склеим) соответствующие точки сторон AB и DC. Получим цилиндрическую поверхность Рис. 12 с поперечным сечением в виде правильного треугольника.

Если эта цилиндрическая поверхность достаточно длинная, то на ней можно сделать один за другим шесть описанных выше переломов на угол $\pi/3$ в направлении ребра p_2q_2. Это можно сделать так, чтобы торцевые края цилиндра Рис. 12 совместились, Рис. 13. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Прямой плоский тор с разверткой в виде достаточно длинного (по сравнению с шириной) прямоугольника можно "в манере оригами" изометрично вложить в трехмерное пространство.*

Прямой плоский тор является локально развертывающейся поверхностью.

Обратимся к еще одному виду изгибаний цилиндра.

6. Поворот граневой структуры. Пусть в плоскости P лежит равностонний треугольник ABC, Рис. 14. Спроектируем его на

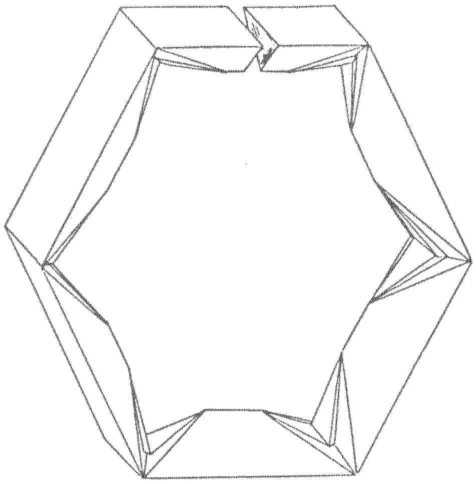

Рис. 13.

плоскость P', параллельную P и повернем в плоскости P' полученную проекцию вокруг ее центра (в ту или иную сторону) на заданный угол $-\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi/3$. Получим в плоскости P' треугольник $A'B'C'$, Рис. 14. Теперь соединим последовательно отрезками точки $AA'BB'CC'A$ и рассмотрим кольцеобразную многогранную поверхность, составленную из шести одинаковых треугольников

$$AA'B = A'BB' = BB'C = B'CC' = CC'A = C'AA'. \qquad (8)$$

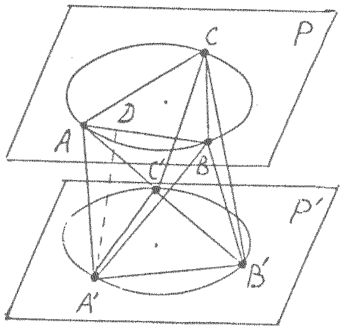

Рис. 14

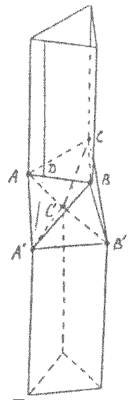

Рис. 15

Назовем эту кольцевую поверхность *прокладкой с поворотом* α. В каждой вершине на краю нашей кольцевой поверхности сходится три плоских угла трех разных треугольников из (8). Сумма этих трех плоских угла в каждой вершине равна π, потому что эти три угла равны трем углам любого из треугольников (8). По этой причине наша "прокладка" изометрична боковой поверхности цилиндра с периметром основания $AB+BC+CA$ и высотой h, равной высоте AD треугольника ABA', опущенной из вершины A' на сторону AB.

Вырежем из длинного цилиндра с поперечным сечением, равным треугольнику ABC, участок длины h и заменим его нашей прокладкой, Рис. 15. Результат будет изгибанием исходного цилиндра. При этом, если считать часть до прокладки началом цилиндра, а часть после прокладки – продолжением цилиндра, то на продолжении граневая структура по сравнению с начальной частью повернута на выбранный нами угол α. Но ось цилиндра до прокладки и после нее составляет единую прямую.

Замечания. 1) Подчеркнем, что по сравнению с начальной частью цилиндра после прокладки повернулась на угол α только граневая структура, а не сам материал цилиндра. Действительно, рассмотрим на начальной части цилиндра его прямолинейную образующую, подошедшую к точке D на краю прокладки, Рис. 15. Эта образующая продолжится в прокладке по высоте DA' и пойдет дальше в продолжении цилиндра по образующей, идущей из точки A'.

2) Независимо от требующегося угла $-\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$ высоту $h > 0$ прокладки можно выбирать небольшой (даже произвольно малой).

7. Переломы цилиндра в любом направлении. Конструкция пункта 3 позволяла нам переламывать длинный цилиндр с правильным треугольным сечением на любой угол $0 < \varphi < \pi$ только в одном из трех направлений: направлений ребер его граневой структуры. Теперь мы можем переламывать такой цилиндр в любом направлении. Достаточно, создав в нем "прокладку " пункта 6, повернуть его граневую структуру так, чтобы со стороны желаемого направления было ребро, а затем – осуществить по правилам пункта 3 перелом в направлении этого ребра.

Сочетание последовательнных переломов в разных направлениях создает возможность чрезвычайно разнообразных изгибаний длинного цилиндра. В частности очевидно верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в пространстве расположена не имеющая самопересечений незамкнутая ломаная линия L длины l с конечным числом достаточно длинных звеньев, которые последовательно образуют друг с другом углы α_i, и пусть наименьшее расстояние между несмежными звеньями ломаной L равно $2r$. Тогда цилиндр длины $\gg l$ с поперечным сечением в виде правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса r, можно изометрично вложить в пространство так, что звенья ломаной L будут служить осями последовательных участков изогнутого переломами цилиндра.*

"Достаточная" длина звеньев ломаной L (зависящая также от углов α_j) должна обеспечить размещение конструкции переломов и прокладок.

8. Винтовое скручивание цилиндра. Как известно, сумма углов треугольника на сфере больше π. На сфере единичного радиуса превышение суммы углов треугольника над π равно площади этого сферического треугольника.

Представим себе, что вдоль радиуса OP единичной сферы расположен стержень. Начало стержня закреплено шарниром в центре O сферы, а на противоположном конце к стержню жестко приварена ортогональная ему круговая пластинка, Рис. 16. Пусть на этой круговой пластинке отмечен один из ее радиусов. Если стержень с пластинкой повернуть вокруг точки O из положения OP в положение OQ (не вращая стержень вокруг его собственной оси), затем – аналогично повернуть его из положения OQ в положение OR; затем – из положения OR снова в положение OP, то стержень с пластиной вернется на прежнее место. Но отмеченный на пластинке радиус не попадет на прежнее место. Новое положение пластинки будет отличаться от ее исходного положения тем, что после обноса по контуру PQR она повернулась на некоторый угол. Величина этого угла, как следует из теоремы Гаусса–Бонне, равна площади треугольника PQR на единичной

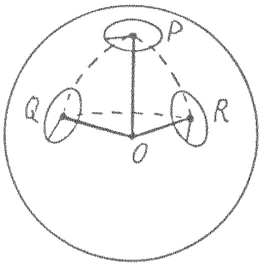

Рис. 16.

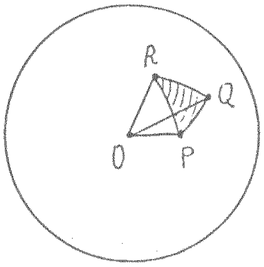

Рис. 17.

сфере.

На этом основывается следующий прием винтового скручивания цилиндра.

Выделим на единичной сфере с центром O сферический треугольник PQR, Рис. 17. Рассмотрим ломаную L из четырех звеньев M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, направления которых последовательно совпадают с направлениями векторов OP, OQ, OR, OP. После чего в соответствии с теоремой 2 длинный цилиндр с треугольным сечением изогнем переломами так, чтобы звенья ломаной L служили осями его участков.

Продлив ломаную L еще двумя звеньями M_5M_6 и M_6M_7, как указано на Рис. 18, мы сможем получить такое изгибание цилиндра, что его начальное сечение ABC и конечное сечение $A'B'C'$ будут лежать на одной оси mn, продолжающей звено M_1M_2, и будут иметь соотвтственно параллельные стороны. На Рис. 18 цифрами 1 отмечены места поворотных прокладок, а цифрами 2 – места переломов цилиндра.

При этом "материал" цилиндра при переходе от ABC к $A'B'C'$ оказывается повернутым вокруг оси mn на угол α, равный площади сферического треугольника PQR. Последнюю фразу надо понимать следующим образом.

Рассмотрим в плоскости треугольника ABC окружность S_1 с тем же центром и длиной, равной $AB + BC + CA$, Рис. 19. Отобразим с сохранением длин ломаную $ABCA$ на эту окружность так, чтобы точки A, B, C отобразились в ближайшие к ним точки A'', B'', C'' на окружности. Аналогично отобразим на окружность S_2 треугольник $A'B'C'$. Пусть теперь T – произвольная точка на

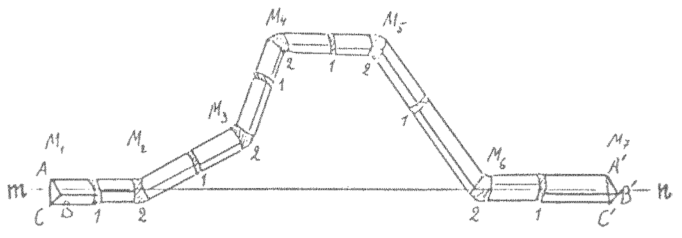

Рис. 18.

окружности S_1. На контуре ABC ей отвечает некоторая точка T_1. Идя из T_1 по нашему трехгранному цилиндру по прямолинейной образующей и далее все время “прямо” с точки зрения внутренней геометрии цилиндра, мы придем в некоторую точку T_2 на контуре $A'B'C'$. Точке T_2 будет соответствовать некоторая точка T' на окрежности S_2. Если смотреть вдоль оси mn, то точка T' окажется на совпавших окружностях S_1 и S_2 повернутой относительно точки T на угол α. Именно этот смысл вкладываем в слова *скручивание цилиндра на угол* α.

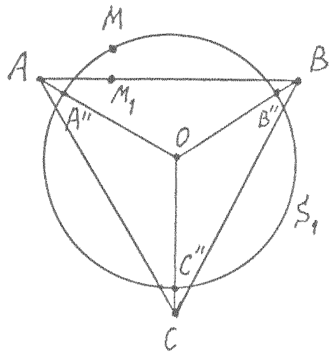

Рис. 19

Если мы хотим скрутить цилиндр на угол α, превышающий доступную нам площадь одного треугольника на сфере, то мы можем повторять эту конструкцию, постепенно набирая желаемый угол поворота α. Если хотим осуществлять скручивание в противоположном направлении, надо "обходить" треугольник PQR в противоположном направлении.

9. Косой плоский тор. Пусть дан параллелограмм $ABCD$, Рис. 20. *Косым плоским тором* называют результат склеивания точек его стороны AB с соответствующими им (по длине на AB) точками стороны DC и одновременного аналогичного склеивания точек стороны AD с соответствующими им точками стороны DC. Можно ли в пространстве изогнуть плоский параллелограмм так, чтобы подлежащие склеиванию точки совпали?

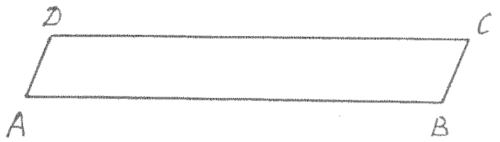

Рис. 20.

Начнем со следующего построения. Пусть AD – короткая сторона параллелограма. Рассмотрим цилиндр, поперечным сечением которого является окружность, длиной AD. Наложим наш параллелограмм $ABCD$ на этот цилиндр так, чтобы прямая AD легла на окружность поперечного сечения, а сам параллелограмм подобно бинту был намотан на цилиндр, Рис. 21. На Рис.21 в точку P попали точки A и D, а в точку Q попали точки B и C. В этом положении подлежащие склеиванию точки сторон AB и DC окажутся совпавшими. Склеим их.

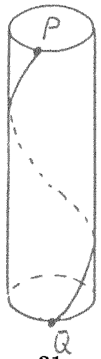

Рис. 21.

Теперь нам остается склеить верхний край полученного цилиндра C с его нижним краем. Если цилиндр C, во-первых, достаточно длинный по сравнению с его поперечным сечением и, во-вторых, точки P и Q оказались лежащими одна против другой, т. е. на одной прямолинейной образующей цилиндра C, то мы можем осуществить требуемое совмещение, сделав цилиндр сначала трехгранным, а затем переломив его шесть раз (на угол $\pi/3$ каждый), как было изображено на Рис. 13.

Если точка Q не лежала против точки P, а была относительно нее повернута на некоторый угол α, а цилиндр достаточно длинен, то мы сделаем его треугольным, переломим шесть раз, но не замкнем), а в прямой разрыв на последнем звене получившейся шестиугольной рамы вставим участок типа Рис. 18, осуществляющий винтовое скручивание цилиндра на угол α.

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Если у исходного параллелограмма косого плоского тора расстояние между прямыми более коротких сторон в достаточное число раз превосходит длину этих сторон, то этот косой плоский тор можно "в манере оригами" изометрически вложить в пространство.*

Косой плоский тор является локально развертывающейся поверхностью.

10. Кусочно линейные узлы. Назовем *узлом* замкнутую конечно-звенную ломаную в пространстве, не имеющую самопересечений. Два таких узла L_1 и L_2 назовем *гомотопными* друг другу, если для пары L_1, L_2 найдется такое целое n и число $l > 0$, что ломаную L_1 можно разбить на n звеньев, а затем непрерывно деформировать ее, двигая в пространстве вершины размельченной ломаной (длины звеньев при этом могут меняться) так, чтобы: 1) ломаная L_1 превратилась в ломаную L_2, 2) в процессе движения не появлялись самопересечения, 3) длины всех звеньев размельченной ломаной в процессе движения оставались больше l.

Все узлы делятся на классы гомотопных друг другу.

Пусть L – не имеющая самопересечений конечно-звенная замкнутая ломаная, у которой смежные звенья образуют углы α_i, и пусть расстояния между несмежными звеньями $> 2r$, а длины звеньев достаточно велики по сравнению с r. Возьмем достаточно длинный цилиндр с поперечным сечением в виде правильного треугольника, вписанного в круг радиуса r, и изометрично вложим его "вдоль ломаной L", как описано в теореме 2. При этом, за счет выбора длины цилиндра, можно добиться, чтобы начальное и конечное треугольные основания T_1, T_2 цилиндра оказались друг против друга на одном звене mn ломаной L.

Если ребро mn достаточно длинно, и несмежные звенья ломаной L достаточно далеки друг от друга, то между основаниями T_1 и T_2 можно "вставить" участок такого же цилиндра, "скрученный” на заданный угол α (см. выше пункт 8), и таким образом замкнуть цилиндр в кольцо. Мы будем говорить что замкнутый цилиндр *завязан в узел* по типу ломаной L.

Теорема 4. *Пусть фиксирован класс узлов и целое (возможно отрицательное) число n. И пусть фиксирована ширина $d = AD = BC$ прямоугольника $ABCD$, задающего прямой плоский тор. Тогда, если $AB = DC$ достаточно велико, то этот плоский тор “в манере оригами” можно изометрически вложить в пространство так, что, во-первых, он будет завязан в узел заданного типа и,во-вторых, его линия $AB = DC$ при вложении будет делать в пространстве ровно $|n|$ винтовых оборотов вокруг внутренности ограниченного тором тела (по правому винту при $n > 0$ и по левому винту при $n < 0$).*

Доказательство. Пусть L_1 узел из заданного класса. Увеличивающей гомотетией можно перейти к ломаной L_2, у которой расстояния между несмежными звеньями достаточно величики по сравнению с d, длины звеньев достаточно велики, чтобы размещать в узлах нужные переломы цилиндра и прокладки поворота граневой структуры, а самое длинное звено достаточно велико, чтобы на нем разметить необходимые скручивания (их может быть несколько более $|n|$ полных поворотов, поскольку некоторое, возможно требующее компенсации, скручивание образуется в процессе “завязывание узла” и некоторый угол скручивания потребуется для совмещения точки $A = D$ с точкой $B = C$).

После этого остается склеить у прямоугольника $ABCD$ стороны AB и DC, придать получавшемуся цилиндру правильную трехгранную форму и переломами изометрически вложить его вдоль гомотетически увеличенной линии L_2 с необходимым скручиванием на самом длинном ребре.

Замечание Средства кусочно-линейной топологии с привлечением понятия “оснащенных узлов” позволяют доказать, что вложения вдоль узлов разного типа или одного и того же типа, но с разными скручиваниями n существенно различны. Как говорят “не изотопны друг другу” см. [2]. Слова *не изотопны*, грубо говоря, в данном случае означают, что одно вложение не может быть непрерывно деформировано в другое с тем, чтобы в процессе деформации поверхность все время оставалась не имеющей самопересечений заузленной трубкой.

11. Непрерывные изгибания. Пусть имеется семейство поверхностей $\Phi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем каждая из поверхностей $\Phi(t)$ поточечно взаимно-однозначно сопоставлена с начальной поверхностью $\Phi(0)$ и это отображение при каждом t является изометрией, причем для каждой точки x начальной поверхности $\Phi(0)$ образы $x(t)$ этой точки непрерывно зависят от t. Тогда говорят, что семейство $\Phi(t)$ является *непрерывным изгибанием* начальной поверхности $\Phi(0)$, а поверхность $\Phi(1)$ получается из $\Phi(0)$ непрерывным изгибанием.

Сворачивание листа бумаги в рулон или процесс его накладывания на конус могут служить примерами непрерывных изгибаний.

На Рис. 1 была изображена поверхность, изометричная куску плоскости. Она имела вид бумажного четырехгранного угла с вершиной O и ребрами OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, причем сумма четырех плоских углов граней равнялась 2π. Если непрерывно двигать по изгибаемой бумаге саму точку O и непрерывно изменять направления ребер OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, но строго соблюдать требование, чтобы сумма плоских углов все время оставалась равной 2π, то мы также будем иметь пример непрерыывного изгибания.

В пункте 3 описано изгибание, переламывающее трехгранный цилиндр на угол φ. При $\varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ это изгибание может полностью определяться выбором одного угла λ. Можно при $\varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ достичь того же результата *непрерывным* изгибанием. Достаточно постепенно увеличивать $\varphi(t)$ от нуля до требуемого значения φ, причем строить изгибания при $\lambda(t)$, непрерывно зависящем от t.

Аналогично можно *непрерывным* изгибанием создавать "прокладки" с требуемым углом поворота. Достаточно выделить участок цилиндра фиксированной высоты h и создавать на нем прокладку с углом поворота $\alpha(t)$, непрерывно меняющимся от нуля до требующего $\alpha\,(-\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3})$.

Вместе это позволяет утверждать следующий результат.

Теорема 5. *Задающий прямой плоский тор достаточно длинный по сравнению с шириной прямоугольник $ABCD$ можно непрерывным изгибанием в $\mathbb{R}^3$ привести в положение, при котором подлежащие склеиванию точки совместятся, и прямой плоский тор окажется изометрически вложенным в $\mathbb{R}^3$.*

О других кусочно-линейных изгибаниях см. [3, 4].

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. С. Ю. Афонькин, Е. Ю. Афонькина, *Оригами: Игры и фокусы с бумагой.* Петербургский центр оригами, СПб. 1994.
2. К. Рурк, Б. Сандерсен, *Введение в кусочно-линейную топологию.* Мир, М. 1974.
3. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в* $\mathbb{R}^3$. — Алгебра и анализ **7**, No. 3 (1995), 76–95.
4. А. Д. Милка, *Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников.* — Мат. физика, анализ, геометрия **1**, No. 1 (1994), 116–130.

Zalgaller V. A. Some bendings of the long cylinder.

The peace-linear isometric embeddings of the cylindrical surfaces in $\mathbb{R}^3$ are described by elementary means. Let T^2 be a flat torus, and γ the shortest closed geodesics on this torus of length l_0. Let l be the length of some closed geodesics on T^2, which is not homotopic to γ, nor to any power of γ and $l > kl_0$. It is demonstrated how for sufficiently large k the torus T^2 can be embedded into $\mathbb{R}^3$. The same is done for the skew flat torus. For any type of knot in $\mathbb{R}^3$ and for sufficiently large k, in the isometrical embedding of the torus T^2 into $\mathbb{R}^3$ is described as a tube knotted as the above-mentioned knot.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 24 июля 1996 г.