М. Л. Егоров, В. А. Залгаллер

КРИВЫЕ ОСМОТРА ОВАЛОВ

§ 1. Введение

1.1. Будем называть *овалом* C^1-гладкую замкнутую выпуклую кривую на плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющую одноточечные контакты с каждой касательной. Далее Γ – овал; $\Phi = \operatorname{conv}\Gamma$ – выпуклый компакт, границей $\partial\Phi$ которого служит Γ; точки Γ – экспонированные точки множества Φ.

1.2. Про точку $x \in \mathbb{R}^2$, $x \notin \Phi$ говорим, что из нее виден участок $d(x)$ овала Γ, если для каждой точки $y \in d(x)$ на отрезке $[xy)$ нет точек овала Γ. Если $x \in \Gamma$, полагаем $d(x) = \{x\}$. Если $x \in \operatorname{int}\Phi$, полагаем $d(x) = \varnothing$.

Путь $\mathcal{L} : I \to \mathbb{R}^2$, где $I = [0 \leqslant t \leqslant 1]$, называем *кривой (или линией) осмотра* овала Γ, если $\bigcup\limits_t d(\mathcal{L}(t)) = \Gamma$.

Говорим, что две кривые пересекаются, если у них есть хоть одна общая точка. Иногда вместо $\mathcal{L}(I)$ пишем кратко $\mathcal{L}$.

1.3. Теорема. *Следующие четыре свойства равносильны.*

1) *Кривая $\mathcal{L}$ пересекает все прямые, которые пересекают Φ.*
2) *$\mathcal{L}$ пересекает все касательные к Γ.*
3) *$\mathcal{L}$ является для Γ кривой осмотра.*
4) *Выпуклая оболочка $Q = \operatorname{conv}\mathcal{L}$ содержит Φ.*

1.4. Доказательство. Очевидно 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3). Убедимся, что 3) $\Longrightarrow$ 4). Достаточно, предположив 3), доказать, что $Q \supset \Gamma$. Допустим, что $x \in \Gamma$, $x \notin Q$. Тогда точка x строго отделяется от Q, а потому и от $\mathcal{L}$, некоторой прямой l. У овала Γ найдется касательная $l_1 || l$, которую не пересекает $\mathcal{L}$. Точка y касания l_1 с Γ не будет видна ни из одной точки $\mathcal{L}(t)$, что противоречит 3).

Наконец, покажем, что 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\operatorname{conv}\mathcal{L} \supset \Phi$. Допустим, что нашлась прямая l, которая пересекает Φ, но не пересекает $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}$ лежит по одну сторону от l. На $\mathcal{L}$ найдется ближайшая

* Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-681.

к l точка, удаленная от l на некоторое расстояние $2\varepsilon > 0$. Прямая, идущая параллельно l (со стороны $\mathcal{L}$) на расстоянии ε от l, выделит полуплоскость, в которой лежит $\mathcal{L}$ и $\operatorname{conv}\mathcal{L} \supset \Phi$. Но это противоречит тому, что $l \cap \Phi \neq \varnothing$. •

1.5. В следующем параграфе указан простой класс кривых осмотра, зависящий от одного параметра. Мы докажем две теоремы, относящихся к кривым этого класса.

Затем остановимся на трех экстремальных задачах о кривых осмотра единичной окружности S.

Задача 1. *Найти кратчайшую кривую осмотра единичной окружности S.*

Задача 2. *Найти кратчайшую кривую $\mathcal{L}$ осмотра окружности S при наперед фиксированной начальной точке P кривой $\mathcal{L}$.*

Задача 3. *Найти кратчайшую кривую $\mathcal{L}$ осмотра окружности S при дополнительном требовании, чтобы кривая $\mathcal{L}$ проходила через фиксированную точку P, лежащую на расстоянии r от центра окружности S при $0 \leqslant r < 1$.* (При $r \geqslant 1$ ответ будет ясен из решения задач 1 и 2).

1.6. Решение задачи 1 глазомерно очевидно, оно изображено на Рис. 1. Этому решению была посвящена статья трех авторов [1], исходивших от свойств 1) пункта 1.3.

Отдельно мы решим задачу 1 в классе ломаных с ограниченным числом вершин.

Задача 2, притом только для случая, когда начальная точка P есть центр окружности S, ставилась Беллманом [2], исходившим от свойства 2) пункта 1.3. Ее глазомерное решение, Рис. 2, предложено Исбеллом [3]. Мы докажем минимальность этого решения и найдем кратчайшие кривые осмотра окружности S при любых положениях начальной точки P.

Решение Задачи 3 глазомерно не очевидно. Оно приводится впервые.

§ 2. Обжимающие подковы

2.1. Пусть Γ – овал; l – его касательная с внешней единичной нормалью u; l' и l'' – две касательные к Γ, ортогональные l, Рис. 3. Изображенную на Рис. 3 жирной линией кривую $AMNB$ назовем *обжимающей подковой* Γ_u овала Γ в направлении u.

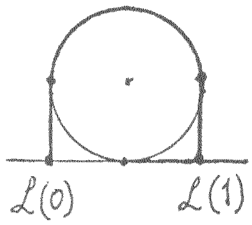

Рис. 1

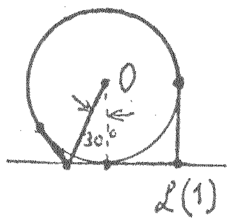

Рис. 2.

Очевидно при любом u подкова Γ_u является кривой осмотра для Γ.

2.2. Теорема. *Самая короткая кривая осмотра овала* Γ *среди кривых, не заходящих внутрь* Γ, *обязательно является его обжимающей подковой.*

2.3. Замечание. Нахождению наиболее коротких среди обжимающих подков способствует следующий необходимый (но не достаточный) признак. Для кратчайшей подковы должно выполняться равенство $AT = TB$, см. Рис. 3. Действительно, если например $AT < TB$, как на Рис. 3, то замена прямой l на слегка повернутую прямую ab, изображенную пунктиром на Рис. 3, позволит построить более короткую обжимающую подкову.

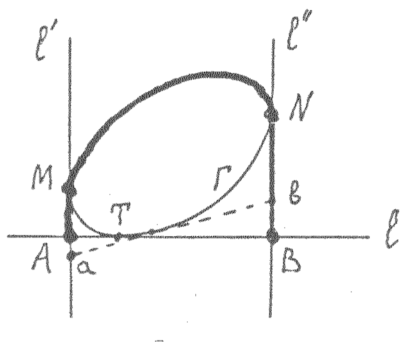

Рис. 3.

2.4. Доказательство теоремы 2.2. Пусть $\mathcal{L} : [0 \leqslant t \leqslant 1] \to \mathbb{R}^2$

кривая осмотра овала Г, не заходящая внутрь Г.

С изменением t проекция $\mathcal{L}'(t)$ точки $\mathcal{L}(t)$ на овал Г зачерчивает непрерывную кривую, лежащую на Г. Согласно известно лемме Буземана и Феллера (см. [4], стр. 104), кривая $\mathcal{L}'$ не длиннее кривой $\mathcal{L}$. Поскольку любая из обжимающих подков короче, чем периметр овала Г, то и $\mathcal{L}$, а вслед за нею и $\mathcal{L}'$ короче периметра Г. Значит $\mathcal{L}'$ заполняет не всю кривую Г, а лишь некоторую ее дугу $AMNB$, Рис. 4. Пусть AU и BV – лучи внешних нормалей к Г в точках A и B. Остальные обозначения ясны из дальнейшего и из Рис. 4.

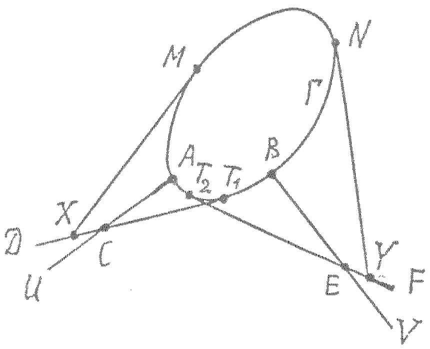

Рис. 4.

Рассмотрим касательную к Г в точке A. Будем ее поворачивать против часовой стрелки, смещая точку касания от A к B до последнего положения точки касания T_1, при котором на касательном луче T_1CD, точнее на его части – луче CD, еще есть точки кривой $\mathcal{L}$. Аналогично поступаем с касательной к Г в точке B: поворачиваем ее по часовой стрелке, смещая точку касания от B к A, до последнего положения T_2 точки касания, при котором еще есть точки кривой $\mathcal{L}$ на касательном луче T_2DE, точнее на луче DE. Точки T_1 и T_2 либо совпадут, либо расположатся на Г в порядке AT_2T_1B. Иначе $\mathcal{L}$ не есть кривая осмотра.

Пусть X и Y – самые далекие от Г точки кривой $\mathcal{L}$ на лучах CD и EF. Очевидно, что кривую $\mathcal{L}$ можно укоротить, оставляя ее кривой осмотра, если нарушено хотя бы одно из свойств:

1) X, Y – концы $\mathcal{L}$;

2) $\mathcal{L}$ состоит из касательной XM к Γ, дуги MN овала Γ и касательной NY;

3) прямая XY касается Γ (т.е. $T_1 = T_2$);

4) MX и NY перпендикулярны к прямой XY.

Но при соблюдении этих свойств $\mathcal{L}$ является обжимающей подковой. •

2.5. Может показаться, что если допустить к сравнению кроме кривых осмотра овала Γ, не заходящих внутрь Γ, еще кривые осмотра, частично идущие внутри Γ, то наиболее короткой останется кратчайшая обжимающая подкова. Ниже мы убедимся, что это действительно так, когда Γ – окружность. (Это можно доказать и для некоторых других овалов.) Но в общем случае (несколько неожиданным образом) это не так, как показывает следующий результат.

2.6. Теорема. *Существуют овалы, для которых наиболее короткая кривая осмотра частично проходит внутри самого овала.*

Доказательство. 1) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, Рис.5, составленный из двух равнобедренных треугольников ABD и CDB, с основанием $AB = 2$ и небольшой высотой $CC' = h$. Мы утверждаем, что значение $h > 0$ можно выбрать настолько малым, что длина ломаной $ADBC$ будет меньше, чем длина ломаной $ADCC'$. Действительно,

$$|ADBC| = 3\sqrt{1+h^2} = 3 + O(h^2)\cdot 3$$
$$|ADCC'| = \sqrt{1+h^2} + 2 + h = 3 + O(h^2) + h,$$

и при достаточно малом $h > 0$ будет $|ADBC| < |ADCC'|$. Зафиксируем h (и тот параллелограмм) для которого последнее неравенство имеет место.

2) Поместим центрами в каждой из точек A, B, C, D круг малого радиуса $\delta > 0$, Рис. 5, и соединим круги точек A, D и круги точек B, C касающимися их дугами окружностей PQ и RS (см. Рис. 5) столь большого радиуса, что эти дуги отходят от параллелограмма не более, чем на 2δ.

Круги точек A, B и точек C, D соединим касающимися их весьма пологими дугами типа парабол TXU и VYW (см. Рис. 5), выбранными так, что все точки этих дуг удалены от параллелограмма не более, чем на 2δ, причем для их наиболее удаленных

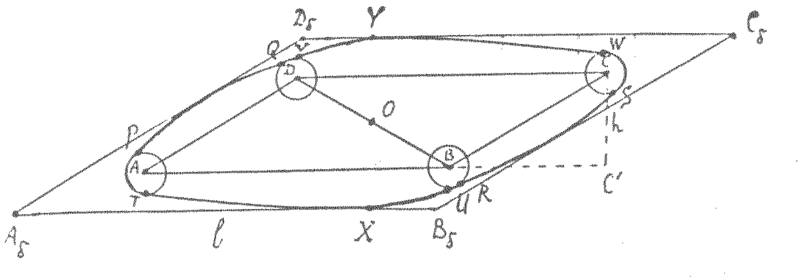

Рис. 5.

от параллелограмма точек X и Y отрезок XY проходит через центр O параллелограмма и перпендикулярен основаниям AB и CD.

Контур $TXU\,RSWYV\,QP$ будет C^1-гладким строго выпуклым овалом $\Gamma(\delta)$. Его наиболее короткая обжимающая подкова соответствует касательной l к овалу $\Gamma(\delta)$ в точке X. Длина этой самой короткой подковы при любом $\delta > 0$ остается больше, чем $|ADCC'|$.

3) Заключим наш овал $\Gamma(\delta)$ в обжимающий его параллелограмм $A_\delta B_\delta C_\delta D_\delta$ со сторонами, параллельными сторонам $ABCD$. Ломаная $A_\delta D_\delta B_\delta C_\delta$ будет линией осмотра овала $\Gamma(\delta)$. Но при $\delta \to 0$ длина $|A_\delta D_\delta B_\delta C_\delta| \to |ADBC|$, и при достаточно малом $\delta > 0$ линия осмотра $A_\delta D_\delta B_\delta C_\delta$, частично идущая внутри овала $\Gamma(\delta)$, будет короче, чем кратчайшая обжимающая подкова овала $\Gamma(\delta)$. $\bullet$

Все дальнейшее посвящено кривым осмотра окружности S.

§ 3. Решение задачи 1

3.1. Пусть кривая осмотра окружности S проходит через некоторую точку P, лежащую внутри S, т.е. $P \in \operatorname{int} D$, где $D = \operatorname{conv} S$. Поставим вспомогательную задачу: среди всех проходящих через точку P ломаных линий с числом вершин $\leqslant n$ (где фиксированное число n достаточно велико, например, $n \geqslant 5$) найти наиболее короткую линию осмотра окружности S. По соображениям компактности хоть одна такая кратчайшая ломаная существует. Пусть L такая ломаная. Мы вправе считать, что на L нет (кроме быть может точки P) лишних, т.е. стоящих внутри ребер, вершин. Саму точку P всегда включаем в число вершин.

Изучим строение ломаной L. Она разбивается точкой P на две ветви $PA_1 \dots A_m$ и $PB_1 \dots B_l$ (вторая ветвь может отсутствовать, если P – начало для L). Обозначим $Q = \operatorname{conv} L$. Это – выпуклый многоугольник, содержащий в себе круг D. Граница ∂Q – замкнутая выпуклая ломаная.

3.2 Лемма. *Каждая из вершин ломаной ∂Q есть вершина L. Каждая из вершин L, кроме вершины P есть вершина ∂Q. Через каждую вершину ∂Q ломаная L проходит ровно один раз.*

Действительно, вершины ∂Q суть экстремальные точки для $Q = \operatorname{conv} L$. Поэтому они – вершины L.

Если бы у L, кроме P, была вершина, не лежащая в одной из вершин ∂Q, то L можно было бы укоротить, не меняя $Q \supset D$.

Если через вершину ∂Q ломаная L прошла дважды, то L можно укоротить, не меняя Q. •

3.3. Лемма. *Звенья ломаной L не могут трансверсально пересекаться.*

Действительно, пронумеруем последовательно все вершины $L = X_1 \dots X_i (X_{i+1} \dots X_{j-1} X_j) X_{j+1} \dots X_k$ $(k = m + l + 1 \leqslant n)$. Если ребра $X_i X_{i+1}$ и $X_j X_{j+1}$ трансверсально пересекались, Рис. 6, то переход к ломаной $L' = X_1 \dots X_i (X_j X_{j-1} \dots X_{i+1}) X_{j+1} \dots X_k$ укоротит L без изменения Q. •

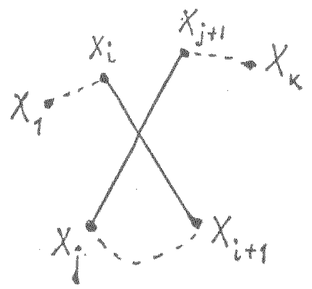

Рис. 6.

Кроме того в силу 3.2 смежные звенья ломаной не могут и налегать друг на друга. Исключение составляет одно из звеньев PA_1 или PB_1, на которое могло налечь следующее звено A_1A_2 или B_1B_2. Но и эту возможность попутно исключит следующая важная лемма.

3.4. Лемма. *В составе ломаной L нет ни одного (отличного от PA_1 и PB_1) звена, проходящего через внутренние точки множества $D = \operatorname{conv} S$.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть A_iA_{i+1} – последнее при движении от точки P к точке A_m звено ломаной L, пересекающее $\operatorname{int} D$, Рис. 7. Точки A_i и A_{i+1} как вершины выпуклого многоугольника $Q \supset D$ лежат вне D. Проведем из них касательные A_iT_1, A_iT_2, $A_{i+1}T_3$, $A_{i+1}T_4$ к окружности S. (T_j – точки касания). Остальные обозначения ясны из Рис. 7.

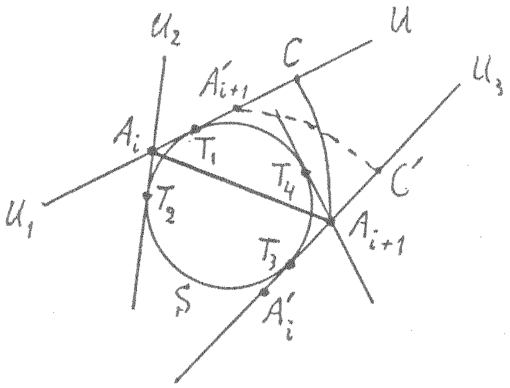

Рис. 7.

Из точки A_i виден участок T_1T_2 окружности, а из A_{i+1} – участок T_3T_4.

Ветвь $B_l \dots B_1PA_1 \dots A_i$ и ветвь $A_{i+1} \dots A_k$ ломаной L не могут пересекать прямую A_iA_{i+1}. Действительно, открытый отрезок A_iA_{i+1} они не могут трансверсально пересечь ввиду 3.3; через точки A_i, A_{i+1}они не могут пройти повторно ввиду 3.2; остальную часть прямой A_iA_{i+1} они не могут пересечь, поскольку эта часть прямой лежит вне Q.

Поскольку у окружности S есть две касательные, параллельные A_iA_{i+1}, и L должна иметь общие точки с каждой из них, то одна из упомянутых ветвей ломаной L лежит по одну сторону от прямой A_iA_{i+1}, а другая – по другую.

Внутри углов $U_1A_iU_2$ и $U_3A_{i+1}U_4$ лежат только точки, внешние для Q. Значит, там нет точек L. Поэтому касательные к открытой дуге T_1T_4 пересекаются только ветвью $A_{i+1}\dots A_m$. Таким образом с ветви $B_l\dots B_1PA_1\dots A_i$ осматривается дуга $T_1T_2T_3$, а с ветви $A_{i+1}\dots A_m$ – дуга $T_3T_4T_1$.

Ввиду компактности ветви $A_{i+1}\dots A_m$, пересекающей все касательные открытой дуги T_1T_4, на этой ветви найдется первая точка C, в которой эта ветвь имеет общую точку с касательной к окружности S в точке T_1.

Ветвь $A_{i+1}\dots A_m$ по выбору звена A_iA_{i+1} не заходит внутрь D. Поэтому ее участок $A_{i+1}\dots C$ проходит снаружи S, соединяя точку A_{i+1} луча T_3U_3 с точкой C луча T_1U. При этом $C = A_m$, иначе участок $C\dots A_m$ можно было бы отбросить, укорачивая ломаную L и оставляя ее линией осмотра для S.

Отразим всю ветвь $A_{i+1}\dots C$ относительно прямой, состоящей из точек, равноудаленных от прямых T_3U_3 и T_1U. Положение каждой точки после отражения обозначаем прежней буквой со штрихом (см. на Рис. 6 точки A_i', A_{i+1}', C'). После отражения участок $A_{i+1}'\dots C'$ по-прежнему соединяет лучи T_1U и T_3U_3, огибая S извне, и из его точек осматривается дуга $T_1T_4T_3$.

Нам осталось заменить участок A_iA_{i+1} на участок A_iA_{i+1}', чтобы получить новую ломаную линию осмотра $B_l\dots B_1PA_1\dots A_i$ $A_{i+1}'\dots C'$, тоже являющуюся ломаной линией осмотра окружности S. При этой замене ломаная L (без увеличения числа вершин) укорачивается, так как $|A_iA_{i+1}'| < |A_iA_{i+1}|$, поскольку в равнобочной трапеции $AA_{i+1}'A_{i+1}A_i'$ отрезок A_iA_{i+1}' – боковая сторона, а A_iA_{i+1} – диагональ. •

3.5. Лемма. *Каждое звено ломаной L (кроме звеньев PA_1, PB_1) является стороной многоугольника Q. Все стороны многоугольника Q (кроме быть может стороны B_1A_1) касаются окружности S. У ломаной L ровно n вершин.*

Доказательство. 1. Допустим, что звено A_iA_{i+1} ломаной L является не стороной, а диагональю многоугольника Q. Тогда A_iA_{i+1} делит Q на две части. Согласно 3.4 окружности S целиком лежит в одной из этих частей.

Прямая A_iA_{i+1} разбивает плоскость на две полуплоскости. Ветви $B_l \dots A_i$ и $A_{i+1} \dots A_m$ ломаной L лежат (по соображениям, изложенным в доказательстве Леммы 3.4) в разных полуплоскостях. Ту из полуплоскостей, где лежит $B_l \dots A_i$ назовем верхней.

Окружность S обязательно лежит в верхней полуплоскости. И ломаную L можно укоротить, отбросив ее часть $A_{i+1} \dots A_m$. Действительно, если некоторая точка $y \in S$ была вида из точки x ветви $A_{i+1} \dots A_m$, то она будет видна и потом из точки $x' = A_iA_{i+1} \cap xy$ отрезка A_iA_{i+1}.

Таким образом ломаная L на участке $B_1 \dots B_l$ (если он есть) и на участке $A_1 \dots A_m$ идет по контуру ломаной Q.

2. Если какое-нибудь из звеньев A_jA_{j+1} не касалось окружности S, то, поворачивая луч A_jA_{j+1} (с неподвижным началом A_j) до его касания с S, мы укоротим L.

3. Если число вершин у L меньше n, то L можно укоротить, срезая один из углов. •

Длины $|L_n|$ наиболее коротких ломаных линий осмотра L_n, проходящих через P и имеющих n вершин, строго монотонно убывают с ростом n. В то же время эти длины ограничены снизу, например, числом $\operatorname{dist}(P, S) > 0$. Обозначим

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} |L_n| > 0.$$

3.6. Лемма. *Не существует проходящей через точку P кривой осмотра $\mathcal{L}$ с длиной $|\mathcal{L}| < \lambda$.*

Доказательство. Допустим, что нашлась такая кривая $\mathcal{L}$. Увеличив ее гомотетией с центром P и коэффициентом $1+\varepsilon$, мы, за счет малости $\varepsilon > 0$, можем получить кривую $(1+\varepsilon)\mathcal{L}$ также с длиной $|(1+\varepsilon)\mathcal{L}| < \lambda$. Если из точки $x = \mathcal{L}(t)$ была видна хоть одна точка на S, то из точки $x' = (1+\varepsilon)\mathcal{L}(t)$ будет виден на S некоторый отрезок дуги. Из покрытия S такими отрезками можно выбрать конечное, отвечающее некоторым точкам x'_i. Добавим к ним точку P и впишем в кривую $(1+\varepsilon)\mathcal{L}$ ломаную с так выбранными вершинами. Мы получим проходящую через точку P ломаную линию осмотра, более короткую, чем λ. Это противоречит выбору λ. •

Обозначим λ_0 длину наиболее короткой обжимающей подковы. Нам осталось доказать строгое неравенство $\lambda > \lambda_0$. Для этого мы покажем, что все длины $|L_n|$ кратчайших ломаных на некоторую постоянную $a(P) > 0$ превосходят λ_0.

3.7. Согласно 3.5 ломаная L_n может иметь только один из двух возможных видов Рис. 8.

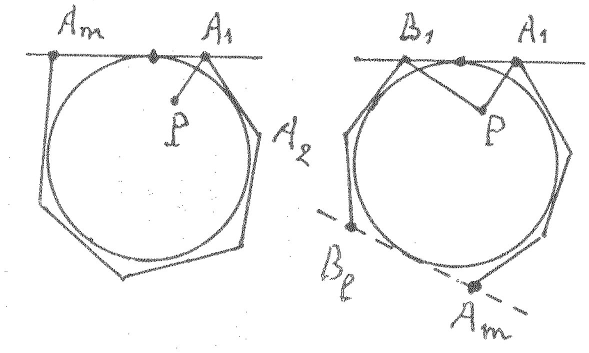

Рис. 8.

В первом случае $A_1 \dots A_m$ – кривая осмотра, идущая вне S. Согласно 2.2 ее длина $\geqslant \lambda_0$. Поэтому

$$|L_n| - \lambda_0 \geqslant PA_1 > \operatorname{dist}(P, S) = a_1 > 0.$$

Во втором случае при любом $n \geqslant 5$ длина $|L_n| \leqslant |L_5|$. Поэтому участок $B_1PA_1 < |L_5|$. В треугольнике PB_1A_1 при любом $n \geqslant 5$ сумма длин сторон ограничена сверху $B_1P + PA_1 < |L_5|$, а высота h из вершины P ограничена снизу $h \geqslant a_1$. Откуда следует существование универсальной постоянной $a_2 = a_2(|L_5|, a_1) > 0$, для которой

$$B_1P + PA_1 - B_1A_1 \geqslant a_2.$$

Но замена в ломаной L_n участка B_1PA_1 звеном B_1A_1 дает некоторую кривую осмотра L'_{n-1}, идущую вне S. Ее длина $\geqslant \lambda_0$. Поэтому

$$|L_n| - \lambda_0 = |L'_{n-1}| + (B_1P + PA_1 - B_1A_1) - \lambda_0 > a_2.$$

Таким образом всегда

$$|L_n| - \lambda_0 \geqslant a(P) = \min\{a_1, a_2\} > 0. \quad \bullet$$

3.8. Решим еще следующую задачу. Найти наиболее короткую кривую осмотра окружности S в классе ломаных линий с число звеньев $\leqslant n$ при фиксированном $n \geqslant 3$.

Для такой кратчайшей ломаной L справедливы все утверждения пунктов 3.1–3.5 с тем упрощением, что отсутствуют особые звенья PA_1, PB_1. (Небольшая оговорка нужна только при доказательстве первого пункта леммы 3.5. В этом случае окружность S не обязана лежать именно в верхней полуплоскости. Но если она лежит в нижней полуплоскости, то можно отбросить всю предшествующую вершине A_i часть ломаной L).

Итак, ломаная L имеет вид описанного вокруг окружности S многоугольника, из которого удалена одна сторона $L(0)L(1)$, Рис. 9.

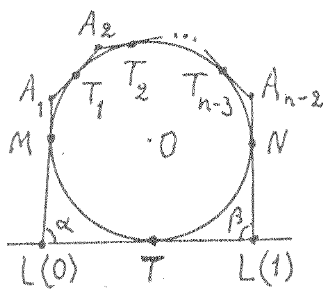

Рис. 9.

При этом все $A_iT_i = T_iA_{i+1}$. Докажем это на примере звена A_1A_2. При неизменных прямых $L(0)A_1$ и A_2A_3 касательную A_1A_2 можно поворачивать, несколько смещая точку касания T_1. Длина изменяющегося участка $MA_1A_2T_2$ ломаной L равна $2|A_1A_2|$. Но A_1A_2 короче всего, когда T_1 – середина A_1A_2. Ввиду $A_iT_i = T_iA_{i+1}$ все углы при вершинах $A_1, \dots, A_{n-2}$ одинаковы.

Наконец, $L(0)T = TL(1)$. Иначе изменением положения прямой $L(0)L(1)$ со смещением точки касания T можно ломаную L укоротить. Вместе с предыдущим это влечет $\alpha = \beta$. При этом $\alpha \leqslant \pi/2$, иначе L можно укоротить. Но тогда длина $|L| = \rho\left[2(n-2)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{n-2} + 2\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right]$, где ρ – радиус окружности S, будет минимальна при $\alpha \in (0, \pi/2)$, служащем корнем уравнения $2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{n-2} = 0$.

§ 4. Решение задачи 2

4.1. Задачу 2 (см. 1.5) о кратчайшей кривой осмотра единичной окружности S с наперед заданной начальной точкой P кривой решим сначала для случая, когда точка P совпадает с центром O окружности S.

Предварительно будем решать эту задачу в классе ломаных с числом вершин $\leqslant n+1$. Хоть одна такая кратчайшая ломаная линия осмотра L_n^0 (при $n \geqslant 3$) существует. Ее первое звено обязано идти из O в одну из вершин многоугольника $Q = \operatorname{conv} L_n^0$. Отбросим это первое звено и обозначим $L : I \to \mathbb{R}^2$ оставшуюся часть ломаной L_n^0. Теперь фиксированной считаем точку $L(0)$.

Для ломаной $L = L(0)A_1 \dots A_m L(1)$ верны все утверждения 3.1–3.5 с упрощением из-за отсутствия особых звеньев PA_1, PB_1. Но доказательство первого пункта Леммы 3.5 требует дополнения. Если S лежит в нижней полуплоскости, то на этот раз мы не вправе отбрасывать начало $L(0)A_1 \dots A_i$, поскольку утратили бы фиксированную точку $L(0)$. В этом случае доказательство первого пункта Леммы 3.5 завершим следующим образом. Если ветвь $L(0)A_1 \dots A_i$ содержит более одного звена, заменим ее отрезком $L(0)A_i$, что укоротит L. Если эта ветвь уже была отрезком $L(0)A_i$, то заметим, что точки $L(0)$, A_i, O не могут лежать на одной прямой. Поэтому малым поворотом вокруг O как твердого целого части $A_i \dots A_m L(0)$ ломаной L можно укоротить звено $L(0)A_i$.

Теперь ясно, что ломаная L имеет вид описанной вокруг окружности S замкнутой n-звенной выпуклой ломаной из которой удалено звено $L(0)L(1)$. А вся экстремальная ломаная L_n^0 отличается от L только добавлением отрезка $OL(0)$, Рис. 10a. На этот раз мы не вправе утверждать, что $\alpha_n \leqslant \pi/2$, так как фиксированность точки $L(0)$ не позволяет изменять положение прямых $L(0)A_1$ и $L(0)L(1)$. Но, как и в 3.8, все $A_iT_i = T_iA_{i+1}$, так что у ломаной L углы γ_n при вершинах A_i одинаковы.

Мы не будем уточнять значения углов α_n, β_n, γ_n для экстремальной ломаной L_n^0 при конкретных $n \geqslant 3$. Заметим только, что с ростом n длины $|L_n^0|$ монотонно убывают, а углы $\gamma_n \to \pi$.

Поставим ломаные L_n^0 $(n = 3, 4, \dots)$ в положение с общей прямой $L(0)L(1)$ и выберем подпоследовательность номеров n, для которой будут иметь место сходимости к некоторым точкам

$L(0) \to \mathcal{L}(0)$, $L(1) \to \mathcal{L}(1)$, $M_n \to M$, $N_n \to N$. Для этой подпоследовательности ломаные L_n^0 сходятся к некоторой кривой осмотра $\mathcal{L}$ вида Рис. 10.

Среди кривых вида Рис. 10b, как показывают элементарные вычисления, наиболее короткой является та, у которой $\beta = \pi/2$, $\alpha = 2\pi/3$. (В этом случае участок $O\mathcal{L}(0)M$ носит характер отражения луча света от прямой $\mathcal{L}(0)\mathcal{L}(1)$. Мы назовем такую кривую $\mathcal{L}$ *кривой Исбелла*, см. Рис. 2. Ее длина $|\mathcal{L}| = 7\pi/6 + 1 + \sqrt{3}$.

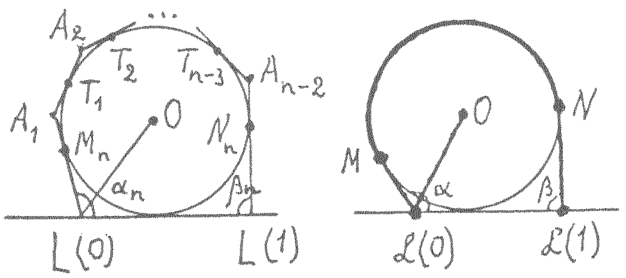

Рис. 10a Рис. 10b.

Теперь можно сделать вывод.

4.2. Теорема. *У окружности S нет более короткой кривой осмотра с началом в центре O окружности S, чем кривая Исбелла, Рис. 2.* •

Перейдем к кривым осмотра окружности с фиксированной начальной точкой $P \neq O$.

4.3. Теорема. *Если фиксированное начало P удалено от O на $r \leqslant 2/\sqrt{3}$, то наиболее короткой кривой осмотра с началом P является участок той кривой Исбелла, у которой идущее из O звено проходит через точку P.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно повернуть кривую Исбелла в такое положение и учесть результат 4.2. Длина такой кривой $7\pi/6 + 1 + \sqrt{3} - r$. •

4.4. Пусть теперь $OP = r > 2/\sqrt{3}$. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти кратчайшую ломаную линию осмотра окружности S в классе ломаных с началом P и числом вершин $\leqslant n+1$.

Такая кратчайшая L существует. Априори есть две возможности: 1) начало P служит одной из вершин многоугольника $Q = \operatorname{conv} L$; 2) это не так. Убедимся, что возможность 2) в действительности исключена.

Допустим, что она имеет место. Тогда первое звено ломаной L идет от точки P в некоторую вершину многоугольника $Q = \operatorname{conv} L$, обозначим ее $L(0)$. Участок $L(0)\dots L(1)$ ломаной $L = PL(0)\dots L(1)$ тоже есть линия осмотра. Для этого участка верны все утверждения 3.1–3.5. Поэтому он имеет вид описанного вокруг S замкнутого n-угольника из которого удалена сторона $L(0)L(1)$. Точка P обязана лежать на отрезке $OL(0)$. Иначе поворотом ветви $L(0)\dots L(1)$ вокруг O можно укоротить первое звено $PL(0)$ ломаной L.

В этом положении, Рис. 11, участок $PL(0)A_1$ ломаной L должен в точке $L(0)$ носить характер отражения луча света от прямой $L(0)L(1)$. Иначе L можно сократить. Но такое отражение при касающихся окружности S отрезках $L(0)A_1$ и $L(0)L(1)$ невозможно при $OL(0) > 2/\sqrt{3}$.

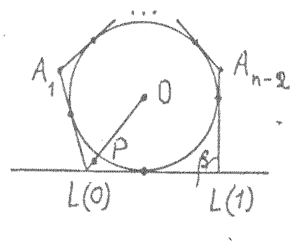

Рис. 11

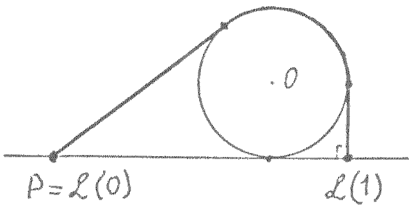

Рис. 12.

Итак, при $OP > 2/\sqrt{3}$ и любых $n \geqslant 3$ точка P является вершиной $L(0)$ многоугольника Q.

Не детализируя при конкретных n значения углов экстремальной ломаной L, мы при $n \to \infty$, подобно тому как это сделано в 4.1 для Теоремы 4.2, приходим к следующему утверждению.

4.5. Теорема. *У единичной окружности S нет более короткой кривой осмотра с начальной точкой P, удаленной от центра O окружности более чем на $2/\sqrt{3}$, чем изображенная на Рис. 12 кривая $\mathcal{L}$.* •

§ 5. Решение задачи 3

5.1. Чтобы найти хоть одну наиболее короткую кривую осмотра единичной окружности S при требовании, чтобы эта кривая проходила через фиксированную точку P, лежащую внутри S на расстоянии $r < 1$ от центра, начнем со вспомогательной задачи. Найти наиболее короткую линию осмотра, проходящую через P, в классе ломаных с числом вершин $\leqslant n+1$.

Хоть одна такая ломаная L_n при каждом $n \geqslant 5$ существует. Их длины $|L_n|$ с ростом n убывают и $\lim\limits_{n\to\infty} |L_n|$ есть длина искомой кратчайшей кривой. Более того, если мы найдем кривую осмотра, которая не длиннее ни одной из ломаных L_n, то в силу 3.6 эта кривая – одно из решений задачи 3.

5.2. Из Леммы 3.5 следует, что ломаная L_n состоит из двух ветвей $PA_1 \dots A_m$ и $PB_1 \dots B_l$ (априори одна из этих ветвей может отсутствовать, тогда P – начало L_n). При этом части $A_1 \dots A_m$ и $B_1 \dots B_l$ идут извне окружности S.

При движении по ветви $B_1 \dots B_l$ осматривается некоторая замкнутая дуга d_1 окружности S, а при движении по $A_1 \dots A_m$ – другая замкнутая дуга d_2. Если уже одна из этих двух дуг совпадает со всей окружностью S, то L_n состоит из одной ветви, P – начало L_n и согласно 4.3 L_n длиннее, чем кривая Исбелла за вычетом r. Ниже, в 5.8, мы убедимся, что есть более короткая кривая осмотра, проходящая через P.

Если ни d_1, ни d_2 окружность S не покрывает (а вместе они S обязаны покрывать), то на S найдутся точки $T, T' \in d_1 \cap d_2$, разделенные точками $y_1, y_2 \in S$, $y_1 \in d_1$, $y_1 \notin d_2$, $y_2 \in d_2$, $y_2 \notin d_1$.

5.3. Пусть UTV и $U'T'V'$ – касательные к S прямые в точках T и T'. Одна ветвь ломаной L_n заведомо соединяет луч UT с лучем $U'T'$, огибая S, а другая ветвь соединяет луч TV с лучем $T'V'$, также огибая S.

Теперь ясно, что ломаная L_n не короче, чем линия $\mathcal{L}(T, T')$, состоящая из самого короткого пути, составленного из двух частей: от P к лучу UT и от него к лучу $U'T'$ (в обход S) плюс от P к лучу TV и от него к $T'V'$ (в обход S).

Нам остается найти самую короткую среди линий $\mathcal{L}(T, T')$ при всевозможных положениях точек T, T' на S.

5.4. Не теряя общности будем считать точку T фиксированной, на рисунках – верхней точкой окружности S с центром O; касательные UV и $U'V'$ – расходящимися вправо (или параллельными) Рис. 13; через 2α $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ обозначаем угод между этими касательными; а точку P считаем расположенной выше проходящей через O прямой l, служащей биссектриссой угла 2α. Точка P (после фиксации точки T) лежит где-то на окружности σ с центром O и радиусом r. Свободным остается выбор положенной T' на S и P на σ, поэтому кратчайшую кривую $\mathcal{L}(T,T')$ далее обозначаем $\mathcal{L}(T',P)$.

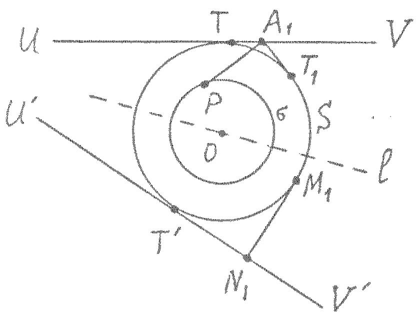

Рис. 13.

Правая ветвь кривой $\mathcal{L}(T',P)$ заведомо имеет вид $PAT_1M_1N_1$, Рис. 13, где AT_1 – касательная к S, T_1M_1 – дуга S, отрезок M_1N_1 касается S и перпендикулярен к $U'V'$. Левая же ветвь кривой $\mathcal{L}(T',P)$ априори может иметь один из трех видов строения.

1) Состоять из одного отрезка PN, соединяющего P с точкой пересечения прямых UV и $U'V'$.

2) Состоять из двух отрезков PB (где $B \in UT$) и $BN \perp U'V'$, $N \in U'V'$, $BN \cap S = \varnothing$.

3) Иметь строение $PBT_2M_2N_2$, аналогичное строению правой ветви.

5.5. Лемма. *Кратчайшая среди всех кривых $\mathcal{L}(T',P)$ не может иметь левую ветвь типа 2).*

Действительно, длину кривой $\mathcal{L}(T',P)$ с левой ветвью типа 2) можно укоротить, незначительным сдвигом влево точки T' на S. •

5.6. Лемма. *Если бы у кратчайшей из кривых $\mathcal{L}(T', P)$ левая ветвь имела тип 3), то точка P лежала бы на радиусе OT.*

Доказательство. Чтобы такую кривую $\mathcal{L}(T', P)$ нельзя было укоротить малыми сдвигами точки A или B вдоль UV или точки P вдоль σ необходимо соблюдение двух требований: 1) на участках PBT_1 и PAT_2 должно происходить "отражение" от прямой UV; 2) на участке BPA должно происходить "отражение" от окружности σ. Но при точке P, не лежащей на OT, эти два требования несовместны. Действительно, пусть например P лежит левее OT, Рис. 14. Тогда требование 2) означает, что проходящий через P эллипс с фокусами B и A касается в точке P окружности σ. Но тогда $BT > TA$ и $\angle TBP < \angle TAP$, а эти два неравенства делают невозможным соблюдение требований $\angle UBT_2 = \angle TBP$, $\angle TAP = \angle VAT_1$. •

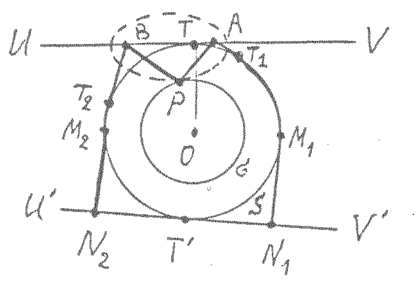

Рис. 14.

5.7. Лемма. *Кратчайшая среди всех кривых $\mathcal{L}(T', P)$ не может иметь левую ветвь типа 3).*

Доказательство. В силу 5.6 достаточно рассматривать только кривые $\mathcal{L} = N_2\overset{\frown}{M_2T_2}BPA\overset{\frown}{T_1M_1}N_1$ с левой ветвью типа 3), у которых точка P лежит на радиусе OT, Рис. 15. За счет поворота ломаной $M_2N_2N_1M_1$ как твердого целого вокруг O мы были вправе изобразить Рис. 15 симметричным относительно прямой OT. (При таком повороте длина $\mathcal{L}$ не меняются.)

Введем в рассмотрение кривую осмотра $\mathcal{L}_0 = BPA\overset{\frown}{T_1T'}N$, Рис. 16, с тем же положением точки P на OT, что и у кривой $\mathcal{L}$. Мы утверждаем, что $|\mathcal{L}_0| < |\mathcal{L}|$. Действительно, длина $|\mathcal{L}|$

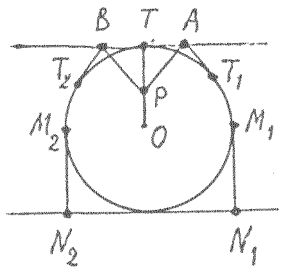

Рис. 15.

превосходит длину обжимающей окружность подковы $N_2\overset{\frown}{M_2M_1}N_1$ (Рис. 15) на $2(PA+AT_1-TT_1)$. А длина $|\mathcal{L}_0|$ превосходит длину подковы $\mathcal{B}\overset{\frown}{TT_1}MN$ на $(PA+AT_1-\overset{\frown}{TT_1})+(BP-BT)$. Но

$$PA+AT_1-\overset{\frown}{TT_1} > PA+AT_1-(TA+AT_1) = PA-TA \geqslant BP-BT.$$

Итак, для каждой нашей кривой $\mathcal{L}$ найдется более короткая проходящая через P кривая осмотра $\mathcal{L}_0$ с левой ветвью типа 1). $\bullet$

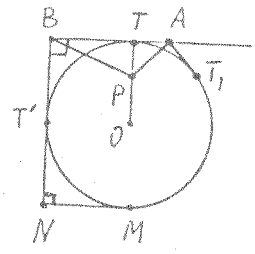

Рис. 16

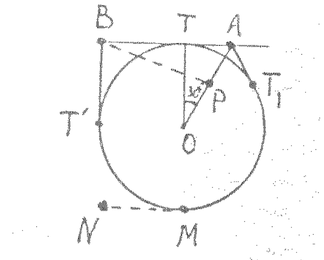

Рис. 17.

5.8. Лемма. *Для кратчайшей кривой задачи 3 точка P не может служить началом.*

Действительно, согласно 4.5 кратчайшая кривая осмотра с началом P не короче, чем кривая $PA\overset{\frown}{T_1M}T'B$, Рис. 17. Но кривая осмотра $BPA\widehat{T_1M}N$ короче на величину

$$\overset{\frown}{MT'} - BP =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(1 - r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} > 0.$$

5.9. Нам остается найти кратчайшую среди кривых $\mathcal{L}(T', P)$ с левой ветвью типа 1. Такая кратчайшая $\mathcal{L} = BPA\widehat{T_1M}N$, Рис. 18, необходимо удовлетворяет следующим требованиям. На участке BPA должно происходить "отражение" от окружности σ, а на участке PAT_1 – "отражение" от прямой UV (иначе кривую $\mathcal{L}$ можно укоротить малым сдвигом точки P вдоль σ или точки A вдоль UV). Кроме того углы $\alpha = \frac{1}{2}\angle ABN$ и $\psi = \angle ABP$ должны удовлетворять соотношению

$$\cos\psi = 2\sin^2\alpha. \qquad (*)$$

Иначе кривую $\mathcal{L}$ можно укоротить малым сдвигом точки касания T' вдоль окружности S. Эти требования вполне определяют форму кривой $\mathcal{L}$ при заданном $r < 1$.

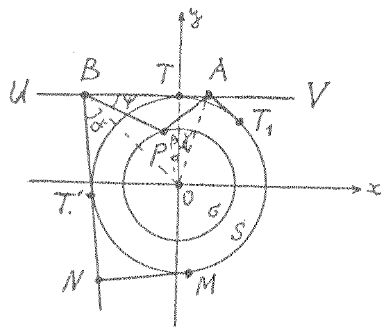

Рис. 18.

Это доказывает следующее утверждение.

5.10. Теорема. *Кривая осмотра единичной окружности S, проходящая через точку P, которая находится от центра O окружности на расстоянии r $(0 \leqslant r < 1)$, не может быть короче, чем* *кривая осмотра* $\mathcal{L} = BPAT_1\overset{\frown}{}MN$, *изображенная на Рис. 18. При этом значение* r *однозначно определяет для кривой* $\mathcal{L}$ *углы*

$$\psi = \angle ABP, \quad \alpha = \angle NBP, \quad \beta = \angle TOP, \quad \gamma = \angle TOA.$$

Значения этих углов и полная длина $|\mathcal{L}|$ при различных r (включая предельное $r = 1$) дается следующей таблицей.

r	ψ	α	β	γ	$\mathcal{L}$
0.00	0.674889	0.674889	–	$\pi/6$	6.205912
0.05	0.659013	0.679916	0.184441	0.513947	6.130632
0.10	0.642170	0.685126	0.182690	0.503775	6.056554
0.15	0.624268	0.690526	0.180899	0.493033	5.983775
0.20	0.605204	0.696117	0.179062	0.481664	5.912403
0.25	0.584862	0.701905	0.177172	0.469603	5.842556
0.30	0.563110	0.707887	0.175220	0.456775	5.774371
0.35	0.539799	0.714062	0.173193	0.443092	5.707999
0.40	0.514759	0.720421	0.171074	0.428454	5.643612
0.45	0.487799	0.726948	0.168836	0.412735	5.581405
0.50	0.458702	0.733620	0.166440	0.395791	5.521600
0.55	0.427226	0.740397	0.163832	0.377445	5.464453
0.60	0.393102	0.747224	0.160926	0.357477	5.410257
0.65	0.356040	0.754020	0.157590	0.335609	5.359352
0.70	0.315736	0.760672	0.153615	0.311483	5.312131
0.75	0.271900	0.767025	0.148659	0.284609	5.269057
0.80	0.224294	0.772873	0.142134	0.254281	5.230675
0.85	0.172813	0.777950	0.132967	0.219373	5.197641
0.90	0.117615	0.781944	0.118951	0.177759	5.170779
0.95	0.059367	0.784517	0.094327	0.124011	5.151242
1.00	0	$\pi/4$	0	0	$\pi + 2$

5.11. Поясним, как рассчитывалась таблица. Обозначим $r_n = 0.05n$. Для первой строки таблицы (при $n = 0$) углы $\psi = \alpha = \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ найдены из уравнения $\cos\alpha = 2\sin^2\alpha$, см. формулу $(*)$.

Чтобы пояснить, как рассчитывалась каждая следующая строка таблицы (при $n = 1 \div 19$), рассмотрим Рис. 19. Здесь O', P', σ' – отражения точек O, P и окружности σ относительно прямой $y = 1$.

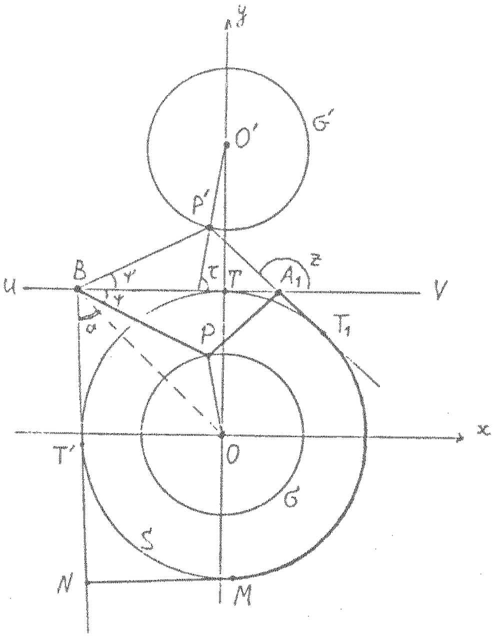

Рис. 19.

Назначив значение ψ, находим из $(*)$ угол α, затем – положение точки B. Из точки B проводим под углом ψ луч BP', преломляем его, отражая от окружности σ', и подбираем исходное ψ так, чтобы отраженный луч $P'A_1$ касался окружности S.

Численно этот процесс выглядит следующим образом. Назначаются нижняя m и верхняя M границы для выбора ψ:

$$m = \operatorname{arctg}\left[(1-r)\operatorname{tg}\alpha_{n-1}\right]$$
$$M = \psi_{n-1}$$

Здесь α_{n-1} и ψ_{n-1} – данные предыдущей строки.

Цикл начинается с того, что полагаем $\psi = \frac{m+M}{2}$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{\cos\psi}{2}}$, $BT = \operatorname{ctg}\alpha$.

Из уравнений прямой BP' и окружности σ':

$$y - 1 = (x + BT)\operatorname{tg}\psi; \quad x^2 + (y-2)^2 = r^2$$

находим координаты (x_0, y_0) точки P', $(x_0 < 0)$ а с ними и угол

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{y_0 - 2}{x_0}.$$

Отраженный луч $P'A$ образует угол $z = 2\tau - \psi$ с лучем A_1V. Это позволяет написать уравнене прямой $P'A_1$: $y - y_0 = (x - x_0)\operatorname{tg} z$. Если эта прямая проходит от O на расстоянии, меньшем единицы, полагаем

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{arctg}[(1-r)\operatorname{tg}\alpha] \\ M &= \psi, \end{aligned}$$

где ψ и α – только что испытанные значения углов. Если же прямая проходит на расстоянии, большем единицы, полагаем $m = \psi$, сохраняя M. Затем повторяем цикл, до тех пор, пока отраженный луч $P'A_1$ с назначенной точностью будет касаться окружности S. При найденных таким путем ψ_n и α_n рассчитываются остальные данные строки, после чего переходим к следующей строке.

Литература

1. V. Faber, J. Mycielski, P. Pedersen, *On the shortest curve which meets all the lines which meet circle.* — Ann. Pol. Math. **44, No. 3** (1984), 248–266.
2. R. Bellman, *Minimisation problem.* — Bull. Amer. Math. Soc. **62, No. 3** (1956), 270.
3. J. R. Isbell, *An optimal search pattern.* — Naval Research Logistics Quarterly **4, No. 4** (1957), 357–359.

Egorov M. L., Zalgaller V. A. Visibility curves for ovals.

For C^1-smooth strictly convex oval, the class of visibility curves is introduced. The equivalence of four definitions of this class of curves is proved, and the possible types of the shortest curves of visibility are studied. Several exstremal problems for the curve of visibility of the circle are solved.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 марта 1996 г.