А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин

ОДНОВРЕМЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОРРЕЛЯТОРЫ ОДНОМЕРНОЙ XY ЦЕПОЧКИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Введение

В моделях, решаемых с помощью анзаца Бете, описание корреляционных функций основано на их представлении (в термодинамическом пределе) в виде определителей Фредгольма линейных интегральных операторов. Представления такого рода были впервые получены в работах [1, 2] для простейших двухточечных одновременных корреляторов модели одномерных “непроницаемых” бозонов. В дальнейнем они были обобщены на случай разновременных корреляторов, как в моделях, являющихся “точкой сводобных фермионов” моделей, решаемых анзацем Бете (непроницамемые бозоны [3] и изотропная XXO цепочка Гейзенберга [4, 5], так и в случае конечного взаимодействия ([6, 7] для одномерного бозе-газа и [8] для XXZ цепочки). Такого рода представления позволяют получить классические интегрируемые уравнения в частных производных для корреляторов [9–13], которые могут быть использованы, в частности, для получения асимптотических разложений корреляционных функций на больших временах и расстояниях [10, 12, 14, 15].

Следует отметить, что естественность языка классических дифференцальных уравнений для описания корреляционных функций квантовых точно решаемых моделей была осознана уже давно [16–18]. Недавний прогресс в этом направлении, на примере модели непроницаемых бозонов, основанный на подходе, разработанном в работах [10–15], подробно описан в книге [19]. Главное при этом – рассмотрение определителя Фредгольма линейного оператора, возникающего в представлении корреляторов, как тау-функции для новой системы классических интегрируемых уравнений (см. также работу [9]). Эти линейные интегральные операторы должны быть весьма специального вида – так называемые “интегрируемые” интегральные операторы (см. [19, 20]).

В настоящей работе мы получаем представления в виде определителей для одновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки Гейзенберга, как для цепочки с конечным числом узлов, так и в термодинамическом пределе. Эта модель была введена и впервые исследована в работе [21]. С тех пор она изучалась многими авторами (см. [22–24] и ссылки в этих работах).

Для вычисления корреляционных функций мы используем видоизменение подхода, предложенного в работе [25] и основанного на использовании интегрирования по грассмановым переменным и соответствующих когерентных состояний. Это центральный момент в нашей работе. Мы, однако, не используем функционального интеграла, как это было сделано в работе [25]. Использование когерентных состояний принципиально упрощает вычисления, автоматически приводя к ответам в нужной форме (см., например, Приложение 3, где воспроизведены нашим методом результаты работ [5,] для XXO цепочки.

Полученные представления для одновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки в виде определителей матриц размерности $M \times M$ являются, с одной стороны, непосредственным обобщением представлений для изотропного случая, [4, 5, 26], отличаясь от них лишь заменой "фермиевского" (или "бозевского") веса в ядрах интегральных операторов на вес, зависящий также от параметра анизотропии. С другой стороны, эти представления обобщают результаты, для анизотропной цепочки, полученные в работе [27] для случая нулевой температуры. При этом "интегрируемость" возникающих в термодинамическом пределе интегральных операторов является очевидной.

Отметим, что изотропная XXO цепочка представляет собой "точку свободных фермионов" для XXZ цепочки Гейзенберга – модели, решаемой с помощью стандартного анзаца Бете. В анизотропном случае XY цепочка является "линией" свободных фермионов для XYZ цепочки – модели, где обычный анзац Бете не работает. Поэтому очень интересен, с нашей точки зрения, тот факт, что ответы по крайней мере для одновременных корреляторов XY цепочки имеют вид простых деформаций ответов для изотропного случая. Мы надеемся дать соответствующее описание для разновременных корреляционных функций в нашей следующей публикации.

План дальнейшего изложения следующий.

В разделе 1 мы описываем модель и приводим основные сведения о диагонализации ее гамильтониана с помощью преобразования Боголюбова, основываясь здесь, в основном на классических работах [21, 23]. В разделе 2 вводятся когерентные состояния для изотропной XX0 цепочки и выводятся формулы для матричных элементов операторов между этими состояниями. В разделе 3 описываются когерентные состояния для анизотропной XY цепочки и рассматривается их связь с состояниями изотропной цепочки. В разделе 4 вычисляется простейший коррелятор, а в разделе 5 – коррелятор локальных спинов для конечной анизотропной цепочки. В разделе 6 приведены ответы в термодинамическом пределе. В Приложении A кратко представлены основные сведения о грассмановых когерентных состояниях. В Приложении B приведен вывод формул для корреляционных функций в изотропном случае.

1. XY цепочка Гейзенберга

Гамильтониан спиновой XY цепочки, описывающий взаимодействие ближайших соседей – спинов 1/2, расположенных в узлах одномерной периодической решетки в постоянном магнитном поле h [21], запишем в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \gamma \mathbf{H}_1 - h\mathbf{S}^z, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \left(\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+\right); \tag{1.2}$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \left(\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^+ + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^-\right); \tag{1.3}$$

а третья компонента полного спина есть

$$\mathbf{S}^z = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \sigma_m^z. \tag{1.4}$$

Полное число M узлов решетки предполагается четным. Матрицы Паули определяются как обычно

$$
\begin{gathered}
[\sigma_m^\alpha, \sigma_n^\beta] = 2i\,\delta_{mn} \in^{\alpha\beta\gamma} \sigma^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z); \\
\sigma_m^\pm = (1/2)(\sigma_m^x \pm i\sigma_m^y),
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

причем наложены периодические граничные условия,

$$
\sigma_{M+1}^\alpha \equiv \sigma_1^\alpha. \tag{1.6}
$$

Благодаря симметриям гамильтониана, знак магнитного поля (так же, как и общий знак гамильтониана), не является существенным. В дальнейшем мы полагаем $h \geqslant 0$.

Преобразование Йордана–Вигнера,

$$
\begin{aligned}
a_m &= \exp\bigl\{i\pi\mathbf{Q}(m-1)\bigr\}\sigma_m^+; \\
a_m^+ &= \sigma_m^- \exp\bigl\{-i\pi\mathbf{Q}(m-1)\bigr\},
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

вводит канонические фермионные a_m, a_m^+ поля на решетке,

$$
\begin{gathered}
\bigl[a_m, a_n\bigr]_+ \equiv a_m\, a_n + a_n\, a_m = 0; \\
\bigl[a_m^+, a_n^+\bigr]_+ = 0; \quad \bigl[a_m\, a_n^+\bigr]_+ = \delta_{mn}.
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Оператор $\mathbf{Q}(m)$ – это оператор числа квазичастиц в первых m узлах решетки,

$$
\mathbf{Q}(m) = \sum_{j=1}^{m} q_j, \tag{1.9}
$$

причем q_m обозначает оператор числа квазичастиц в m-ом узле:

$$
q_m = a_m^+\, a_m = \sigma_m^-\, \sigma_m^+ = \frac{1}{2}\bigl(1 - \sigma_m^z\bigr). \tag{1.10}
$$

Оператор полного числа квазичастиц

$$
\mathbf{N} = \mathbf{Q}(M) \tag{1.11}
$$

коммутирует с операторами $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{S}^z$, но не с оператором $\mathbf{H}_1$, так что полный гамильтониан $\mathbf{H}$ не сохраняет число "a-фермионов". В то же время оператор $(-1)^{\mathbf{N}} = \exp\{\pm i\pi\mathbf{N}\}$, антикоммутирующий с операторами рождения и уничтожения,

$$
\bigl[(-1)^{\mathbf{N}}, a_m^+\bigr]_+ = \bigl[(-1)^{\mathbf{N}}, a_m\bigr]_+ = 0, \tag{1.12}
$$

коммутирует с любым билинейным по a, a^+ оператором, в частности, с гамильтонианом:

$$\left[(-1)^{\mathbf{N}}, \mathbf{H}\right] = 0. \tag{1.13}$$

Периодические граничные условия (1.6) для спинов приводят к следующим условиям для фермионов:

$$a_{M+1} = (-1)^{\mathbf{N}}\, a_1; \quad a_{M+1} = a_1^{+}(-1)^{\mathbf{N}}. \tag{1.14}$$

Вводя проекторы $\mathbf{P}^{\pm}$,

$$\begin{gathered} \mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{2}\big(1 \pm (-1)^{\mathbf{N}}\big); \\ (\mathbf{P}^{\pm})^2 = \mathbf{P}^{\pm}; \quad \mathbf{P}^{+} + \mathbf{P}^{-} = 1; \quad \mathbf{P}^{+}\mathbf{P}^{-} = \mathbf{P}^{-}\mathbf{P}^{+} = 1; \\ \mathbf{P}^{\pm}\, a_m = a_m \mathbf{P}^{\mp}; \quad [\mathbf{H}, \mathbf{P}^{\pm}] = 0, \end{gathered} \tag{1.15}$$

можно записать гамильтониан в виде [23]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{+}\mathbf{P}^{+} + \mathbf{H}^{-}\mathbf{P}^{-}. \tag{1.16}$$

Оба оператора $\mathbf{H}^{\pm}$ можно формально записать в одинаковом виде

$$\begin{gathered} \mathbf{H}^{\pm} = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\big[(a_m^{+}\, a_{m+1} + a_{m+1}^{+}\, a_m) + \\ +\gamma(a_{m+1}\, a_m + a_m^{+}\, a_{m+1}^{+})\big] + h\sum_{m=1}^{M} a_m^{+}\, a_m - \frac{hM}{2}, \end{gathered} \tag{1.17}$$

причем разница между $\mathbf{H}^{+}$ и $\mathbf{H}^{-}$ только в граничных условиях:

$$\begin{aligned} &a_{M+1} = -a_1; \quad a_{M+1}^{+} = -a_1^{+} \quad \text{для} \quad \mathbf{H}^{+} \\ &a_{M+1} = a_1; \quad\;\; a_{M+1}^{+} = a_1^{+} \quad\;\; \text{для} \quad \mathbf{H}^{-}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Благодаря этому, преобразования Фурье к импульсному представлению различны для этих гамильтонианов. Наборы разрешенных значений квазиимпульсов обозначим X^{+} для $\mathbf{H}^{+}$ и X^{-} для $\mathbf{H}^{-}$:

$$X^{\pm} = \big\{p : \exp\{ipM\} = \mp 1, \quad p \in (-\pi, \pi]\big\}, \tag{1.19}$$

или, более явно,

$$X^+ = \left\{ p_l = -\pi - \frac{\pi}{M} + \frac{2\pi}{M}\, l, \quad l = 1, 2, \dots, M \right\}$$
$$X^- = \left\{ p_l = -\pi + \frac{2\pi}{M}\, l, \quad l = 1, 2, \dots, M \right\}. \tag{1.20}$$

Соответственно, формулы для преобразований Фурье запишутся как

$$a_m = \frac{\exp\{-i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^\pm} a_p \exp\left\{ i(m-1)p \right\};$$
$$a_m^+ = \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^\pm} a_p^+ \exp\left\{ -i(m-1)p \right\} \tag{1.21}$$

(суммирование по $p \in X^+$ для $\mathbf{H}^+$ и по $p \in X^-$ для $\mathbf{H}^-$) и

$$a_p = \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} a_m \exp\left\{ -i(m-1)p \right\};$$
$$a_p^+ = \frac{\exp\{-i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} a_m^+ \exp\left\{ i(m-1)p \right\}. \tag{1.22}$$

Гамильтонианы $\mathbf{H}^\pm$ в импульсном представлении примут вид

$$\mathbf{H}^\pm = \sum_{p \in X^\pm} \left[\varepsilon(p)\, a_p^+ a_p + \frac{\Gamma(p)}{2} (a_p^+ a_{-p}^+ + a_{-p} a_p) \right] - \frac{Mh}{2}, \tag{1.23}$$

где

$$\varepsilon(p) = h - \cos p; \quad \Gamma(p) = \gamma \sin p. \tag{1.24}$$

Диагонализация этих гамильтонианов осуществляется с помощью преобразований Боголюбова (различных для $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$) к новым каноническим фермионным операторам A_p и A_p^+

$$A_p = \alpha(p)\, a_p - \beta(p)\, a_{-p}^+;$$
$$A_p^+ = \beta(p)\, a_p + \alpha(p)\, a_{-p}^+, \tag{1.25}$$

где

$$\alpha(p) = \cos \frac{\theta(p)}{2}; \quad \beta(p) = \sin \frac{\theta(p)}{2}, \tag{1.26}$$

а угол $\theta(p)$ определяется соотношениями

$$\cos\theta(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}; \quad \sin\theta(p) = -\frac{\Gamma(p)}{E(p)} \qquad (1.27)$$
$$(p \neq 0, \pi; \quad \theta(p) = -\theta(-p),$$

$$E(p) = \sqrt{\varepsilon^2(p) + \Gamma^2(p)} \geqslant 0 \quad (p \neq 0, \pi). \qquad (1.28)$$

Импульсы $p = 0$, π (входящие только в $\mathbf{H}^-$) нуждаются в особом рассмотрении. Следуя работе [23], положим

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0; \quad A_0^+ = a_0^+, \\ A_\pi &= a_\pi; \quad A_\pi^+ = a_\pi^+ \end{aligned} \qquad (1.29)$$

и

$$\begin{aligned} E(0) = h - 1 = +\varepsilon(0) \quad (E(0) < 0 \quad \text{при} \quad h < 1) \\ E(\pi) = h + 1 = +\varepsilon(\pi) > 0. \end{aligned} \qquad (1.30)$$

Гамильтонианы $\mathbf{H}^\pm$ диагонализуются,

$$\mathbf{H}^\pm = \sum_{p \in X^\pm} E(p)\, A_p^+\, A_p + E_0^\pm, \qquad (1.31)$$

где "вакуумная энергия" есть

$$E_0^\pm = -\frac{1}{2} \sum_{p \in X^\pm} E(p) \qquad (1.32)$$

(для E_0^-, надо принять во внимание определения (1.30)). Необходимо отметить, что при $h < 1$ величина E_0^- не является энергией E_g^- основного состояния; в этом случае $E_g^- = E_0^- + \varepsilon(0)$ $(h < 1)$.

2. Когерентные состояния в XXO цепочке

В этом разделе мы выведем формулы для матричных элементов операторов между когерентными состояниями изотропной XXO цепочки, необходимые для дальнейшего. Соответствующие гамильтонианы $\mathbf{H}_{\text{XXO}}$, см. (1.23),

$$\mathbf{H}_{\text{XXO}}^\pm = \sum_{p \in X^\pm} \varepsilon(p)\, a_p^+\, a_p - \frac{hM}{2}, \qquad (2.1)$$

будут для простоты обозначаться просто $\mathbf{H}^\pm$ в этом разделе. Они диагональны уже в терминах соответствующих операторов

a_p, a_p^+ (1.22). Следует, однако, отметить, что фоковский вакуум $|\,0\,\rangle$ (одинаковый для $\mathbf{H}^{\pm}$)

$$
\begin{aligned}
&a_m\,|\,0\,\rangle = 0; \quad \langle\,0\,|\,a_m^+ = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M),\\
&a_p\,|\,0\,\rangle = 0; \quad \langle\,0\,|\,a_p^+ = 0 \quad (p \in X^{\pm}) \qquad\qquad \langle\,0\,|\,0\,\rangle = 1
\end{aligned}
$$

является основным состоянием только для $h > 1$.

Введем когерентные состояния (см. Приложение A), различные для гамильтонианов $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$:

$$
|\,\phi, \pm\,\rangle = \exp\Big\{\sum_{q\in X^{\pm}} a_q^+\,\phi_q\Big\}\,|\,0\,\rangle \tag{2.3}
$$

$$
\langle\,\phi^*, \pm\,| = \langle\,0\,|\exp\Big\{\sum_{q\in X^{\pm}} \phi_q\,a_q\Big\}. \tag{2.4}
$$

Параметры ϕ_q, ϕ_p^* (элементы алгебры Грассмана) антикоммутируют между собой и со всеми операторами a, a^+. Основные свойства когерентных состояний (2.3), (2.4) описаны в Приложении A. Они являются собственными для операторов a_p, a_p^+, соответственно:

$$
a_p\,|\,\phi, \pm\,\rangle = \phi_p\,|\,\phi, \pm\,\rangle \quad (p \in X^{\pm}) \tag{2.5}
$$

$$
\langle\,\phi^*, \pm\,|\,a_p^+ = \phi_p^*\langle\,\phi^*, \pm\,| \quad (p \in X^{\pm}) \tag{2.6}
$$

Скалярное произведение когерентных состояний одного типа дается обычными формулами (A.4):

$$
\langle\,\phi^*, +\,|\,\phi, +\,\rangle = \exp\Big\{\sum_{p\in X^+} \phi_p^*\,\phi_p\Big\}; \tag{2.7}
$$

$$
\langle\,\phi^*, -\,|\,\phi, -\,\rangle = \exp\Big\{\sum_{q\in X^-} \phi_q^*\,\phi_q\Big\}. \tag{2.8}
$$

Когда это не может вызвать недоразумения, суммы в правых частях равенств (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) будут часто обозначаться просто $a^+\phi \equiv \Sigma\, a_q^+\,\phi_q$; $\phi^*\phi = \Sigma\,\phi_p^*\,\phi_p$ и т.д.

Скалярные произведения состояний различного типа даются формулами

$$
\begin{aligned}
\langle\,\phi^*, +\,|\,\psi, -\,\rangle &= \exp\Big\{\sum_{p\in X^+, q\in X^-} \phi_p^*\,L_{pq}\,\psi_q\Big\} = \exp\{\phi^* L\psi\}\\
\langle\,\psi^*, -\,|\,\phi^*, +\,\rangle &= \exp\Big\{\sum_{p\in X^-, q\in X^+} \psi_p^*\,L_{pq}\,\phi_q\Big\} = \exp\{\psi^* L\phi\},
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

где матричные элементы $M \times M$ матрицы L суть

$$L_{pq} = \frac{2}{M}\frac{1}{1-\exp\{-i(p-q)\}} = \frac{i}{M}\left(\mathrm{ctg}\frac{q-p}{2} - i\right). \tag{2.10}$$

Это становится очевидным, если принять во внимание, что фоковский вакуум одинаков для обоих типов состояний и переписать скалярные произведения в "координатном представлении", используя формулы (1.21) и (1.22). Например,

$$\langle\, \phi^*, + \mid \psi, - \,\rangle = \langle\, 0 \mid \exp\Big\{\sum_{m=1}^{M} \phi_m^*\, a_m\Big\} \exp\Big\{\sum_{m=1}^{M} a_m^+\, \psi_m\Big\} \mid 0\,\rangle =$$

$$= \exp\Big\{\sum_{m=1}^{M} \phi_m^*\, \psi_m\Big\}, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_m^* &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{M}} \sum_{p\in X^+} \phi_p^* \exp\{-i(m-1)p\} \\ \psi_m^* &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{M}} \sum_{q\in X^-} \psi_q \exp\{i(m-1)1\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Рассмотрим теперь матричные элементы оператора $\exp\{\alpha\mathbf{Q}(m)\}$, где (см. (1.9)) $\mathbf{Q}(m)$ есть оператор числа квазичастиц в первых m узлах цепочки:

$$\mathbf{Q}(m) = \sum_{l=1}^{m} a_l^+\, a_l = \sum_{p_1,p_2} a_{p_1}^+\, Q_{p_1p_2}(m)\, a_{p_2} \equiv a^+\, Q(m)\, a \tag{2.13}$$

(квазиимпульсы p_1, p_2 оба соответствуют состояниям одного типа, т.е. либо $p_1,\ p_2 \in X^+$, либо $p_1,\ p_2 \in X^-$). Для матричных элементов между состояниями одного типа, используя свойства матрицы $Q(m)$ (очевидные в ее координатном представлении),

$$Q^2(m) = Q(m); \quad \exp\{\alpha Q(m)\} = I + (e^\alpha - 1)\, Q(m), \tag{2.14}$$

приходим к выражениям

$$\langle\, \phi^*, \pm \mid \exp\{\alpha\mathbf{Q}(m)\} \mid \phi, \pm\,\rangle = \exp\left\{\phi^*[I + (e^\alpha - 1)\, Q(m)]\phi\right\} =$$

$$\exp\Big\{\sum_{p\in X^\pm, q\in X^\pm} \phi_p^*[\delta_{pq} + (e^\alpha - 1) Q_{pq}(m)]\phi_q\Big\}, \tag{2.15}$$

причем матричные элементы $M\times M$ матрицы $Q(m)$ даются формулами

$$Q_{pq}(m)=\exp\{-i(m-1)p/2\}Q^{(0)}_{pq}(m)\exp\{i(m-1)q/2\}, \tag{2.16}$$

$$Q^{(0)}_{pq}(m)=\frac{1}{M}\frac{\sin\frac{m(p-q)}{2}}{\sin\frac{(p-q)}{2}} \tag{2.17}$$

(для диагональных матричных элементов понимается, в духе правила Лопиталя, $Q_{pp}(m)=Q^{(0)}_{pp}(m)=m/M$).

Для состояний разного типа, аналогично (2.9) имеют место формулы

$$\langle\,\phi^*,\pm\mid\exp\{\alpha\mathbf{Q}(m)\}\mid\phi,\mp\,\rangle=\exp\{\phi^*[L+(e^\alpha-1)Q(m)]\phi\}=$$
$$=\exp\Big\{\sum_{p\in X^\pm,q\in X^\mp}\phi^*_p[L_{pq}+(e^\alpha-1)Q_{pq}(m)]\phi_q\Big\}, \tag{2.18}$$

где матричные элементы матрицы L и $Q(m)$ даются теми же формулами (2.10), (2.16) (заметим, что сейчас если $p\in X^+$ то $q\in X^-$, и наоборот). В частности, для оператора $\exp\{i\pi\mathbf{Q}(m)\}$, входящего в преобразование Йордана–Вигнера (1.7), получаем

$$\langle\,\phi^*,\pm\mid\exp\{i\pi\mathbf{Q}(m)\}\mid\phi,\mp\,\rangle=\exp\{\phi^*\,L(m)\,\phi\}=$$
$$\exp\Big\{\sum_{p\in X^\pm,q\in X^\mp}\phi^*_p\,L_{pq}(m)\,\phi_q\Big\}, \tag{2.19}$$

где

$$L_{pq}(m)=\exp\{-imp\}\,L_{pq}\,\exp\{imq\}. \tag{2.20}$$

Рассмотрим теперь матричные элементы (“формфакторы”) локальных спинов. Поскольку (см. (1.15))

$$P^\pm\,\sigma^\alpha_m=\sigma^\alpha_m\,P^\mp\quad(\alpha=x,y,\ \text{ или }\ \alpha=\pm), \tag{2.21}$$

нам требуются только матричные элементы локальных операторов $\sigma^\mp_m$ между состояниями различного типа. Прямое вычисление, с учетом (1.7), (1.22) и (2.18) дает:

$$\langle\,\phi^*,\pm\mid\sigma^+_m\mid\psi,\mp\,\rangle=\psi_m(\mp)\exp\{\phi^*\,L(m-1)\psi\}=$$
$$=\psi_m(\mp)\exp\Big\{\sum_{p\in X^\pm,q\in X^\mp}\phi^*_p\,L_{pq}(m-1)\,\psi_q\Big\}, \tag{2.22}$$

$$\langle\, \phi^*, \pm \mid \sigma_m^- \mid \psi, \mp \,\rangle = \phi_m^*(\pm) \exp\{\phi^* \, L(m-1)\psi\},$$

где использованы естественные обозначения

$$\begin{aligned} \psi_m(\pm) &= \frac{\exp\{-i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^\pm} \psi_p \exp\{i(m-1)p\} \\ \phi_m^*(\pm) &= \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^\pm} \phi_p^* \exp\{-i(m-1)p\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Заметим, что матрицы L (2.10), $L(m)$ (2.20) и $Q(m)$ (2.16) связаны простой формулой, проверяемой непосредственным вычислением:

$$\sum_q L_{p_1 q}(m) \, L_{q p_2} = \delta_{p_1 p_2} - 2Q_{p_1 p_2}(m). \tag{2.24}$$

$$(p_1, p_2 \in X^+, \quad q \in X^- \quad \text{или} \quad p_1, p_2 \in X^-, \; q \in X^+).$$

С помощью этих формул элементарно воспроизводятся разновременные температурные корреляционные функции изотропной XXO цепочки, полученные в работах [4, 5, 26]. Ввиду простоты и изящества вывода, он приводится в Приложении B. В следующих же разделах мы рассматриваем анизотропную XY цепочку.

3. Когерентные состояния для анизотропной XY цепочки

Здесь мы выведем формулы для матричных элементов операторов между когерентными состояниями анизотропной XY цепочки. Рассмотрим сначала два набора канонических фермионных операторов, a_p, a_p^+ и A_p, A_p^+, связанных преобразованием Боголюбова (1.25). Для каждого из этих наборов введем свои когерентные состояния ("старые" и "новые") и вычислим скалярные произведения состояний из разных наборов. Это даст универсальный способ вычисления матричных элементов операторов.

Обсудим сначала связь вакуумных состояний $\mid 0\,\rangle$ и $\mid 0\,\rangle\,\rangle$ для старого и нового наборов,

$$a_p \mid 0\,\rangle = 0, \quad \langle\, 0 \mid a_p^+ = 0, \quad \forall\, p; \quad \langle\, 0 \mid 0\,\rangle = 1 \tag{3.1}$$

$$A_p \mid 0\,\rangle\,\rangle = 0, \quad \langle\,\langle\, 0 \mid A_p^+ = 0, \quad \langle\,\langle\, 0 \mid 0\,\rangle\,\rangle = 1. \tag{3.2}$$

Эти состояния связаны следующим образом:

$$\mid 0\,\rangle\,\rangle = N^{-1/2}\, \Omega^+ \mid 0\,\rangle; \quad \langle\,\langle\, 0 \mid = N^{-1/2} \langle\, 0 \mid \Omega, \tag{3.3}$$

где операторы Ω^+ и Ω суть

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_p \tau(p)\, a_p^+\, a_{-p}^+\right\}; \\ \Omega &= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_p \tau(p)\, a_{-p}\, a_p\right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\tau(p) \equiv \operatorname{tg}\frac{\theta(p)}{2}, \tag{3.5}$$

а нормировочный множитель N может быть представлен как определитель диагональной матрицы размерности $M\times M$,

$$N = \langle\, 0 \mid \Omega^+\, \Omega \mid 0\,\rangle = \det(I+T), \tag{3.6}$$

где I – единичная матрица, а

$$T = \operatorname{diag}(i\tau(p)). \tag{3.7}$$

Свойства (3.2) для состояний (3.3) нетрудно проверить с помощью коммутационных соотношений

$$\left[a_p, \Omega^+\right] = \tau(p)\Omega^+\, a_{-p}^+ \quad \text{и} \quad \left[\Omega^+, a_p^+\right] = \tau(p)\, a_{-p}\, \Omega.$$

Для вычисления нормировочного множителя воспользуемся формулой (A.6) и представим его в виде

$$N = \int d\xi\, d\xi^* \exp\left\{ -\xi^*\xi + \frac{1}{2}\tau(p)(\xi_p^*\, \xi_{-p}^* + \xi_{-p}\xi_p)\right\}.$$

Сделаем здесь замену переменных

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_p + i\xi_{-p}^*); \quad \omega_p^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_p^* + i\xi_{-p}). \tag{3.8}$$

Якобиан этого преобразования равен 1, $d\xi^*\, d\xi = d\omega^*\, d\omega$. Легко также проверить, что (матрица T определена в (3.7))

$$\xi^*\xi = \omega^*\omega; \quad \frac{1}{2}\sum_p \tau(p)(\xi_p^*\, \xi_{-p}^* + \xi_{-p}\, \xi_p) = -\omega^*\, T\omega. \tag{3.9}$$

Следовательно, $N = \int d\omega\, d\omega^* \exp\{-\omega^*(I+T)\omega\} = \det(I+T)$, что и доказывает формулу (3.6).

Введем когерентные состояния для нового набора операторов (ср. (А.2)):

$$
\begin{aligned}
&|\, X \,\rangle\rangle = \exp\Big\{\sum_p A_p^+ X_p\Big\}\, |\, 0 \,\rangle\rangle \\
&\langle\langle\, X \,| = \langle\langle\, 0 \,|\, \exp\Big\{\sum_p X_p^* A_p\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Элементы алгебры Грассмана X_p, X_p^* аналогичны по своим свойствам старым параметрам ξ_p, ξ_p^*. Для новых состояний справедливы, конечно, формулы (А.2)–(А.10). Прямое вычисление дает для скалярных произведений старых и новых состояний выражения

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi^* \,|\, X \,\rangle\rangle = \\
&= N^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_p \tau(p)(\xi_p^*\, \xi_{-p}^* - X_{-p}\, X_p) + \sum_p \alpha^{-1}(p)\, \xi_p^*\, X_p\right\};
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\, X^* \,|\, \xi \,\rangle = \\
&= N^{-1/2} \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_p \tau(p)(\xi_{-p}\, \xi_p - X_p^*\, X_{-p}) + \sum_p \alpha^{-1}(p)\, X_p^*\, \xi_p\Big\}.
\end{aligned}
$$

Обратимся теперь непосредственно к XY цепочке. Здесь необходимо ввести различные наборы операторов a_p, a_p^+ и A_p, A_p^+, соответствующие наборам импульсов X^+ (для H^+) и X^- (для H^-), см. (1.19), (1.20). При этом новые вакуумы $|\, \Omega \rangle\rangle$ будут также различными для H^+ и H^- (в отличие от старого вакуума $|\, 0 \rangle\rangle$). Это различие мы, как правило, не будем явно отмечать в обозначениях, хотя его следует постоянно иметь ввиду.

Используя формулы (3.11), можно вычислить матричные элементы операторов $\exp\{-\beta \mathbf{H}^\pm\}$, диагональных в новых представлениях (различных для $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$!) между старыми когерентными состояниями (тоже различными для $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$):

$$
\langle\, \xi^* \,|\, e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} \,|\, \xi \,\rangle = N^{-1}\, e^{-\beta E_0^\pm}\, \det\,(I - J_\beta\, T) e^{\omega^*\, D \omega}, \tag{3.12}
$$

где переменные ω_p, ω_p^* ($p \in X^+$ для $\mathbf{H}^+$ и $p \in X^-$ для $\mathbf{H}^-$) определены формулой (3.8), а диагональные матрицы J_β и D размерности $M \times M$ суть

$$
J_\beta = \mathrm{diag}\,(j_\beta(p)); \quad j_\beta(p) = \exp\{-\beta\, E(p)\} \tag{3.13}
$$

$$D = \operatorname{diag}(d(p)); \quad d(p) = \frac{j_\beta(p) - i\tau(p)}{1 - i\tau(p) j_\beta(p)} \tag{3.14}$$

(матрица T определена в (3.7)).

Для доказательства воспользуемся разложением единицы (A.6) по новым состояниям

$$\langle \xi^* \mid e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} Y \mid \xi \rangle = \int dX\, dX^*\, dY\, dY^* \times$$

$$\times \langle \xi^* \mid X \rangle \rangle \langle \langle Y^* \mid e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} \mid \rangle \rangle \langle \langle X^* \mid \xi \rangle \exp\{-Y^* X - X^* Y\}$$

и заметим, что операторы $\mathbf{H}^\pm$ диагональны в соответствующих новых представлениях (1.31):

$$\langle \langle Y^* \mid e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} Y \mid \rangle \rangle = e^{-\beta E_0^\pm} \exp\Big\{ \sum_{p \in X^\pm} e^{-\beta E(p)} Y_p^* Y_p \Big\}. \tag{3.15}$$

После интегрирования по Y, Y^* получим

$$\langle \xi^* \mid e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} \mid \xi \rangle = \int dX\, dX^* \langle \xi^* \mid X \rangle \rangle \langle \langle X^* \mid \xi \rangle \times$$

$$\times e^{-\beta E_0^\pm} \exp\Big\{ \sum_{p \in X^\pm} e^{-\beta E(p)} X_p^* X_p \Big\}.$$

Интеграл по X, X^* вычисляется с помощью замены переменных, аналогичной (3.8). В результате и приходим к формуле (3.12).

В следующих разделах полученные результаты будут использованы для вычисления одновременных корреляторов.

4. Простейший коррелятор для XY цепочки

В этом разделе будет вычислена статсумма Z и производящая функция корреляторов третьих компонент локальных спинов для анизотропной цепочки. Рассмотрим сначала статсумму. Исходная формула здесь такая же, как и для изотропной цепочки (B.1)

$$Z = \frac{1}{2}(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} Z_F^\pm &= \operatorname{Sp} \exp\{-\beta H^\pm\}; \\ Z_B^\pm &= \operatorname{Sp} \left(\exp\{-\beta \mathbf{H}^\pm\}(-1)^{\mathbf{N}}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для вкладов получаются следующие представления (см., например, [25]; $M \times M$ матрица J_B определена в (3.13)):

$$Z_F^{\pm} = e^{-\beta E_0^{\pm}} \det(I + J_\beta) = \prod_{p \in X^{\pm}} \left(2\mathrm{ch} \frac{\beta E(p)}{2} \right) \tag{4.3}$$

$$Z_B^{\pm} = e^{-\beta E_0^{\pm}} \det(I + J_\beta) = \prod_{p \in X^{\pm}} \left(2\mathrm{sh} \frac{\beta E(p)}{2} \right). \tag{4.4}$$

Для получения, например, "фермионных" вкладов используем формулу (A.5) для следа оператора:

$$Z_F^{\pm} = \int dY\, dY^* \langle \langle Y^* \mid \beta^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}} \mid Y \rangle \rangle \exp\{Y^* Y\}$$

и выражение (3.15) для фигурирующего здесь матричного элемента; после этого остается взять гауссов интеграл, приходя к равенству (4.3). "Бозонные" вклады вычисляются вполне аналогично.

Заметим, что иногда удобно представить ответ в другом виде, используя старые когерентные состояния, например,

$$Z_F^{\pm} = \int d\xi\, d\xi^* \langle \xi^* \mid \beta^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}} \mid \xi \rangle \exp\{\xi^* \xi\},$$

и формулу (3.12) для соответствующего матричного элемента. Это дает

$$Z_F^{\pm} = N^{-1}\, e^{-\beta E_0^{\pm}} \det(I - J_\beta T) \det(I + D) \tag{4.5}$$

$$Z_B^{\pm} = N^{-1}\, e^{-\beta E_0^{\pm}} \det(I - J_\beta T) \det(I - D). \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь простейший одновременной температурный коррелятор

$$G(m) = \frac{1}{Z} \mathrm{Sp}\, \left(e^{\alpha \mathbf{Q}(m)}\, e^{-\beta \mathbf{H}} \right). \tag{4.7}$$

Как и для изотропной цепочки ((B.8), (B.9)), он представляется в виде суммы четырех слагаемых

$$G(m) = \frac{1}{2Z} \big(Z_F^+ G_F^+ + Z_F^- G_F^- + Z_B^+ G_B^+ - Z_B^- G_B^- \big), \tag{4.8}$$

где

$$
\begin{aligned}
Z_F^{\pm}\,G_F^{\pm} &= \mathrm{Sp}\,\left(e^{\alpha\mathbf{Q}(m)}\,e^{\beta\mathbf{H}^{\pm}}\right)\\
Z_B^{\pm}\,G_B^{\pm} &= \mathrm{Sp}\,\left(e^{\alpha\mathbf{Q}(m)}\,e^{\beta\mathbf{H}^{\pm}}(-1)^{\mathbf{N}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Для вкладов $G^{\pm}_{F,B}$ получаются следующие выражения в виде определителей матриц размерности $M\times M$:

$$
G_F^{\pm} = \det\,\left(I + (e^{\alpha}-1)Q^{(0)}(m)\,\Omega_F\right)
\tag{4.10}
$$

$$
G_B^{\pm} = \det\,\left(I - (e^{\alpha}-1)Q^{(0)}(m)\,\Omega_B\right).
\tag{4.11}
$$

Здесь матричные элементы матрицы $Q^{(0)}(m)$ даются формулой (2.16), причем $p,\,q\in X^{+}$ для $G^{+}_{F,B}$ и $p,\,q\in X^{-}$ для $G^{-}_{F,B}$.

Диагональные $M\times M$ матрицы Ω_F и Ω_B даются следующими формулами ($p\in X^{\pm}$ для $G^{\pm}_{F,B}$)

$$
\begin{aligned}
\Omega_F &= D(I+D)^{-1} = \mathrm{diag}\,(\omega_F(p));\\
\omega_F(p) &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\theta(p)}\mathrm{th}\frac{\beta E(p)}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_B &= D(I-D)^{-1} = \mathrm{diag}\,(\omega_B(p));\\
\omega_B(p) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta(p)}\mathrm{cth}\frac{\beta E(p)}{2} - 1\right),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

(матрица D определена в (3.14)).

Поясним, например, вычисление вклада G_F^{+}:

$$
\begin{aligned}
&Z_F^{+}\,G_F^{+} =\\
&= \int d\xi\,d\xi^{*}\,d\eta\,d\eta^{*}\langle\,\eta^{*}\mid e^{\alpha\mathbf{Q}(m)}\mid\eta\,\rangle\langle\,\xi^{*}\mid e^{-\beta\mathbf{H}^{+}}\mid\xi\,\rangle e^{\eta^{*}\xi-\xi^{*}\eta}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Матричные элементы в правой части определяются формулами (2.15) и (3.12). Сначала сделаем замену $\eta^{*}\to-\eta^{*}$; т.к. M четное, мера интегрирования инвариантна. Затем, аналогично (3.8), перейдем к переменным

$$
\begin{aligned}
\omega_p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_p + i\xi^{*}_{-p}); \quad & \omega^{*}_p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{*}_p + i\xi_{-p}),\\
\rho_p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_p + i\eta^{*}_{-p}); \quad & \rho^{*}_p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_p + i\eta^{*}_{-p})
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

В результате такой замены мера остается инвариантной, и

$$\eta^*\xi + \xi^*\eta = \rho^*\omega + \omega^*\rho,$$
$$\eta^*\big(I + (e^\alpha - 1)Q(m)\big)\eta = \rho^*\big(I + (e^\alpha - 1)Q(m)\big)\rho. \tag{4.16}$$

Интегрирование по ω, ω^* множителей, зависящих от этих переменных в подинтегральном выражении в (4.14) дает выражение $\det D \exp\{-\rho^* D^{-1}\rho\}$. Остающийся гауссов интеграл по ρ, ρ^*, с учетом выражения (4.5) для статсуммы и равенства (4.12) вычисляется:

$$Z_F^+ G_F^+ = Z_F^+ \det\big(I + (e^\alpha - 1)\,Q(m)\,\Omega_F\big) \tag{4.17}$$

Заметим, что матрица $Q(m)$ (2.16) лишь очевидным преобразованием подобия с диагональной матрицей отличается от матрицы $Q^{(0)}(m)$. Таким образом, представление (4.10) для G_F^+ доказано. Вычисление вклада G_F^- буквально то же, но импульсы, параметризующие матричные элементы матриц, должны браться из набора X^-. Для вычисления бозонных вкладов надо воспользоваться свойством оператора $(-1)^{\mathbf{N}}$,

$$(-1)^{\mathbf{N}}\mid\xi\,\rangle = \mid -\xi\,\rangle, \tag{4.18}$$

в формуле типа (4.14), что изменяет дальнейшие выкладки очевидным образом, приводя к представлению (4.11).

Сделаем еще замечание относительно полученных формул (4.10), (4.11). Ввиду симметрии наборов X^+ и X^- относительно замены импульсов $p_i \to -p_i$ (исключение составляют импульсы 0 и π из набора X^-, но результат справедлив и в этом случае) можно переписать ответ в виде (знак "+" в правой части соответствует G_F, а знак "-" соответствует G_B)

$$\begin{aligned} G_{F,B}^{\pm} &= \det\big(I \pm (e^\alpha - 1)\,Q(m)\,\Omega_{F,B}\big) = \\ &= \det\big(I \pm (e^\alpha - 1)\,\Omega_{F,B}^{1/2}\,Q(m)\,\Omega_{F,B}^{1/2}\big) = \\ &= \det\big(I \pm (e^\alpha - 1)\,\overline{\Omega}_{F,B}^{1/2}\,Q(m)\,\overline{\Omega}_{F,B}^{1/2}\big) = \\ &= \det\big(I \pm (e^\alpha - 1)\,Q(m)\,\overline{\Omega}_{F,B}\big). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение, причем $\omega_{F,B}(-p) = \overline{\omega}_{F,B}(p)$.

В заключение обсудим предельные случаи.

В пределе нулевой температуры ($\beta \to \infty$) “нечетные” вклады в коррелятор сокращаются и для $G(m)$ получаем выражение

$$G(m) = \det\left(I + (e^{\alpha} - 1)\, Q^{(0)}(m)\, \Omega_0\right) \quad (T = 0), \tag{4.20}$$

где

$$\Omega_0 = \operatorname{diag}(\omega_0(p)), \quad \omega_0(p) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\theta(p)}\right), \tag{4.21}$$

совпадающее с полученным ранее в работе [27]. С другой стороны, для изотропной цепочки ($\gamma = 0$), учитывая, что угол $\theta(p)$ в преобразовании Боголюбова при этом равен

$$\begin{gathered} \theta(p) = -\pi \operatorname{sgn} p, \quad |p| < k_F; \\ \theta(p) = 0, \quad |p| > k_F \quad (\gamma = 0), \end{gathered} \tag{4.22}$$

получаем для весов

$$\begin{aligned} \omega_F(p) &= \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{th}\frac{\beta\varepsilon(p)}{2}\right) \\ \omega_B(p) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{cth}\frac{\beta\varepsilon(p)}{2} - 1\right) \quad (\gamma = 0). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Здесь $k_F = \arccos h$ – импульс Ферми, а $\varepsilon(p)$ – дисперсия XXO цепочки (см. (1.24)). Таким образом, воспроизводятся и ответы для изотропного случая работ [5, 26].

5. Одновременные корреляторы локальных спинов

Здесь будут рассмотрены одновременные корреляционные функции локальных спиновых операторов ($\beta \equiv 1/T$):

$$G^{(ab)}(m) = \langle\, \sigma^a_{m+1}\, \sigma^b_1 \,\rangle_T = \frac{1}{Z}\operatorname{Sp}\,\left(\sigma^a_{m+1}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta \mathbf{H}}\right), \quad a, b = +, -. \tag{5.1}$$

Эти корреляторы на конечной решетке размером M могут быть представлены (аналогично (B.8)) в виде суммы четырех вкладов

$$\begin{aligned} &G^{(ab)} = \\ &= \frac{1}{2Z}\left(Z^+_F\, G^{(ab),+}_F + Z^-_F\, G^{(ab),-}_F + Z^+_B\, G^{(ab),+} - Z^-_B\, G^{(ab),-}\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned} Z^{\pm}_F\, G^{(ab),\pm}_F &= \operatorname{Sp}\,\left(\sigma^a_{m+1}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}}\right); \\ Z^{\pm}_B\, G^{(ab),\pm}_B &= \operatorname{Sp}\,\left(\sigma^a_{m+1}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}} (-1)^{\mathbf{N}}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

(статсуммы $Z^{\pm}_{F,B}$ даются формулами (4.3), (4.4)). Для отдельных вкладов далее получены следующие выражения в виде определителей матриц размерности $M\times M$:

$$G_F^{(-+),\pm} = G_F^{(+-),\pm} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\det\left(I + U\Omega_F + \alpha C\Omega_F\right)\Big|_{\alpha=0}\ (m>0), \quad (5.4)$$

$$\begin{gathered} G_F^{(-+),\pm} = \frac{1}{M}\operatorname{tr}\Omega_F = \frac{1}{M}\sum_p \omega_F(p)\ (m=0); \\ G_F^{(+-),\pm} = 1 - \frac{1}{M}\operatorname{tr}\Omega_F\ (m=0), \end{gathered} \quad (5.5)$$

$$G_F^{(++),\pm} = G_F^{(--),\pm} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\det\left(I + U\Omega_F - i\alpha S\Omega_F\right)\Big|_{\alpha=0}\ (m\geqslant 0), \quad (5.6)$$

$$G_B^{(-+),\pm} = G_B^{(+-),\pm} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\det\left(I - U\Omega_B - \alpha C\Omega_B\right)\Big|_{\alpha=0}\ (m\geqslant 0), \quad (5.7)$$

$$G_B^{(-+),\pm} = -\frac{1}{M}\operatorname{tr}\Omega_B;\ G_B^{(+-),\pm} = 1 + \frac{1}{M}\operatorname{tr}\Omega_B\ (m=0) \quad (5.8)$$

$$G_B^{(++),\pm} = G_B^{(--),\pm} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\det\ \left(I - U\Omega_B - i\alpha S\,\Omega_B\right)\quad (m\geqslant 0). \quad (5.9)$$

Диагональные $M{\times}M$ матрицы весов Ω_F и Ω_B определены в (4.12), (4.13). Матричные элементы $M\times M$ матриц U, C, S даются формулами

$$U_{p_1p_2} = -\exp\left\{\frac{i}{2}(p_1-p_2)\right\}Q^{(0)}_{p_1p_2}(m) \quad (5.10)$$

(определение матрицы $Q^{(0)}(m)$ см. в (2.17)),

$$C_{p_1p_2} = \frac{1}{M}\cos\frac{m}{2}(p_1+p_2);$$

$$S_{p_1p_2} = \frac{1}{M}\sin\frac{m}{2}(p_1+p_2). \quad (5.12)$$

Необходимо подчеркнуть, что нумерующие матричные элементы импульса $p_1,\ p_2\in X^+$ для вкладов $G^{(ab),+}_{F,B}$ и $p_1,\ p_2\in X^-$ для вкладов $G^{(ab),-}_{F,B}$; то же относится и к матрицам весов.

Вычисление функций $G_{F,B}^{(ab),\pm}$ сводится к вычислению гауссовых интегралов по грассмановым переменным. Например, используя (A.5) и (A.6), представим

$$Z_F^+ G^{(ab),+} = \\ = \int d\xi\, d\xi^*\, d\eta\, d\eta^* \langle\, \eta^* \mid \sigma_{m+1}^a\, \sigma_1^b \mid \eta\,\rangle\langle\, \xi^* \mid e^{-\beta \mathbf{H}^\pm} \mid \xi\,\rangle e^{\eta^*\xi - \xi^*\eta}. \quad (5.13)$$

Рассмотрим вычисление матричного элемента

$$F_{ab} = \langle\, \eta^* \mid \sigma_{m+1}^a\, \sigma_1^b \mid \eta\,\rangle = \\ = \int d\zeta\, d\zeta^* \langle\, \eta^* \mid \sigma_{m+1}^a \mid \zeta\,\rangle\langle\, \zeta^* \mid \sigma_1^b \mid \eta\,\rangle e^{-\zeta^*\zeta}.$$

Используем формулы (2.22) для матричных элементов спиновых операторов и сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} &\widetilde{\eta}_p{}^* = e^{-\frac{im}{2}p}\eta_p^*; \quad \widetilde{\eta}_p = e^{\frac{im}{2}p}\eta_p; \quad (p \in X^+), \\ &\widetilde{\zeta}_q{}^* = e^{-\frac{im}{2}q}\zeta_q^*; \quad \widetilde{\zeta}_q = e^{\frac{im}{2}p}\zeta_q; \quad (q \in X^-). \end{aligned} \quad (5.14)$$

В новых переменных для матричного элемента получим выражение (далее мы опускаем тильды над новыми переменными (5.14)):

$$F_{ab} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \int d\zeta\, d\zeta^* \exp\{\omega + \alpha\, f_{ab}\}\big|_{\alpha=0}, \quad (5.15)$$

где

$$\omega = \eta^*\, PL\overline{P}\zeta + \zeta^*\overline{P}LP\eta - \zeta^*\zeta, \quad (5.16)$$

$$f_{-+} = \eta^* R_+ \eta; \;\; (R_+)_{p_1 p_2} = \frac{1}{M} e^{-\frac{im}{2}(p_1+p_2)}, \quad (5.17)$$

$$f_{+-} = -\zeta^*\, \overline{R}_+ \zeta; \;\; (\overline{R}_+)_{q_1 q_2} = \frac{1}{M} e^{\frac{im}{2}(q_1+q_2)}, \quad (5.18)$$

$$f_{++} = i\eta\, R_- \zeta; \;\; (R_-)_{pq} = \frac{1}{M} e^{-\frac{im}{2}(p-q)}, \quad (5.19)$$

$$f_{--} = -\zeta^*\, \overline{R}_- \eta^*; \;\; (\overline{R}_-)_{qp} = \frac{1}{M} e^{\frac{im}{2}(q-p)} = (R_-)_{pq} \quad (5.20)$$

(черта означает комплексное сопряжение). Диагональная матрица P имеет вид

$$P = \mathrm{diag}\left(e^{-\frac{im}{2}p}\right). \quad (5.21)$$

Воспользуемся тождествами

$$\sum_q L_{pq}\, e^{imq} = (2\delta_{m,0}-1)\, e^{ipm};$$
$$\sum_q e^{imq}\, L_{qp} = e^{ipm}\ (p\in X^+,\ q\in X^-,\ m=0,1,\ldots,M-1), \tag{5.22}$$

$$(PL\overline{P}\,\overline{R}_+\overline{P}LP)_{p_1p_2} = -(\overline{R}_+)_{p_1p_2}\,(1-2\delta_{m,0}) \tag{5.23}$$

$$(R_-\overline{P}LP)_{p_1p_2} = (R_-)_{p_1p_2} \tag{5.24}$$

$$(PL\overline{P}\,\overline{R}_-)_{p_1p_2} = -(1-2\delta_{m,0})(\overline{R}_-)_{p_1p_2}. \tag{5.25}$$

Подчеркнем, что, например, в (5.23) и (5.24) слева стоят матрицы с матричными элементами

$$(\overline{R}_+)_{q_1q_2}\ (q_{1,2}\in X^-)\quad\text{и}\quad (R_-)_{pq}\ (p\in X^+,\ q\in X^-),$$

а справа с матричными элементами $(\overline{R}_+)_{p_1p_2}$, $(R_-)_{p_1p_2}$ $(p_{1,2}\in X^+)$. В результате матричные элементы F_{ab} (5.15) представляются в виде

$$F_{-+} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\{\eta^*(I+U)\eta + \alpha\eta^*\, R_+\eta\}\,\Big|_{\alpha=0}$$

$$F_{+-} = \left(\delta_{m,0} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\exp\left\{\eta^*(I+U)\eta + \alpha\eta^*\,\widetilde{\overline{R}}_+\eta\right\}\Big|_{\alpha=0}$$

$$F_{++} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\{\eta^*(I+U)\eta + \alpha\eta\, S_-\eta\}\,\Big|_{\alpha=0} \tag{5.26}$$

$$F_{--} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\{\eta^*(I+U)\eta - \alpha\eta^*\, S_-\eta^*\}\,\Big|_{\alpha=0}.$$

Здесь матричные элементы матрицы U размерности $M\times M$ определяются как $U_{p_1p_2} = (PL\overline{P}^2\,LP)_{p_1p_2} - \delta_{p_1p_2}$, что с учетом формулы (2.24) дает (5.10); матрицы R_+, $\overline{R}_+$ см. в (5.17), (5.18) и (5.12); матрица $\widetilde{\overline{R}_+}$ определяется соотношением

$$(\widetilde{\overline{R}_+})_{p_1p_2} = (\overline{R}_+)_{p_1p_2}(1-2\delta_{m,0}), \tag{5.27}$$

$$(S_-)_{p_1p_2} = \frac{1}{M}\sin\frac{m}{2}(p_1-p_2). \tag{5.28}$$

Выражения (5.12) подставим в (5.3), воспользовавшись также формулой (3.12). Для, например, вклада $G^{(-+),+}$ нетрудно тогда получить

$$Z_F^+ \, G_F^{(-+),+} = N^{-1} \, e^{-\beta E_0^+} \det (I - J_\beta \, T) \frac{\partial}{\partial \alpha} \int d\xi \, d\xi^* \, d\eta \, d\eta^* \times \\ \times \{ -\eta^* (I + U + \alpha R_+) \eta + \omega^* \, D\omega - \eta^* \xi - \xi^* \eta \} \tag{5.29}$$

(помимо (3.8), мы сделали еще замену переменных, аналогичную (5.14), и кроме того, заменили $\eta^* \to -\eta^*$). Наконец, сделаем замену переменных по формулам (4.15), $(\eta, \eta^*) \to (\rho, \rho^*)$; $(\xi, \xi^*) \to (\omega, \omega^*)$. Используя формулы (4.16) и равенства

$$\eta^*(I + U + \alpha R_+)\eta = \rho^*(I + U + \alpha C)\rho - \frac{\alpha}{2}(\rho^* \, S_- \, \rho^* - \rho \, S_- \, \rho),$$

проинтегрируем в (5.29) сначала по ω, ω^*, а затем по ρ, ρ^*. В результате получим следующее выражение через определитель матрицы размерности $2M \times 2M$:

$$Z_F^+ \, G_F^{(-+),+} = N^{-1} \, e^{-\beta E_0^+} \det (I - J_\beta \, T) \det D \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \alpha} \det{}^{1/2} \begin{pmatrix} \alpha S_- & \vdots & -B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B^T & \vdots & -\alpha S_- \end{pmatrix},$$

где обозначено $B = I + D^{-1} + U + \alpha C$. С помощью обобщенного алгоритма Гаусса нетрудно проверить, что

$$\det \begin{pmatrix} \alpha S_- & \vdots & -B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B^T & \vdots & -\alpha S_- \end{pmatrix} = \det{}^2 B + O(\alpha^2)$$

(это верно и для $m = 0$). В результате приходим к формуле (5.4) для $G_F^{(-+),+}$. Аналогично вычисляются и остальные вклады.

Заметим, что выражения (5.4)–(5.9) для одновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки отличаются от соответствующих выражений для изотропной XXO цепочки лишь изменением весов. Например, для "фермионного" веса соответствующее изменение есть по-прежнему

$$\frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{th}\frac{\beta\varepsilon(p)}{2}\right) \to \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\theta(p)} \operatorname{th}\frac{\beta E(p)}{2}\right). \tag{5.30}$$

6. Термодинамический предел

Рассмотрим корреляторы анизотропной XY цепочки в термодинамическом пределе (размер цепочки $M \to \infty$, магнитное поле h фиксировано). В этом пределе статсуммы $Z^{\pm}_{F,B}$ расходятся, причем из формул (4.3), (4.4) нетрудно получить следующую оценку:

$$Z_B/Z_F < C^M; \quad C = \operatorname{th}\frac{\beta E_{\max}}{2} < 1,$$

где $E_{\max}$ – максимальное значение энергии квазичастиц $E(p)$ (1.28). Поэтому только "фермионные" вклады в корреляторы выживают в термодинамическом пределе в формулах (4.8) и (5.2). Определители матриц размерности $M{\times}M$, входящие в выражения (4.10), (5.4) для этих вкладов, переходят в теормодинамическом пределе в определители Фредгольма соответствующих линейных интегральных операторов. Это подробно объяснено, например, в работе [5]. Поэтому получаем следующие ответы.

Коррелятор $G(m)$ (4.7) дается формулой

$$G(m) = \lim \frac{1}{Z}\mathrm{Sp}\,\left(e^{\alpha Q(m)}\, e^{-\beta \mathbf{H}}\right) = \det\,\left(\widehat{I} + (e^{\alpha} - 1)\widehat{V}\right). \qquad (6.1)$$

В правой части здесь стоит определитель Фредгольма линейного интегрального оператора, действующего на функции $f(p)$ на отрезке $-\pi \leqslant p \leqslant \pi$ по правилу

$$(\widehat{V}\, f)(p) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} V(p,q)\, f(q)\, dq. \qquad (6.2)$$

$\widehat{I}$ означает единичный оператор на отрезке, а ядро $V(p,q)$ есть (см. (4.10), (2.17), (4.12))

$$V(p,q) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{m(p-q)}{2}}{\sin\frac{p-q}{2}}\omega_F(q), \qquad (6.3)$$

где вес $\omega_F(q)$ равен

$$\omega_F(q) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\theta(q)}\operatorname{th}\frac{\beta E(q)}{2}\right) \qquad (6.4)$$

(угол $\theta(p)$ и энергия квазичастиц $E(p)$ определены в (1.27), (1.28)).

Термодинамический предел корреляторов (5.1)

$$G^{(ab)}(m) = \lim \frac{1}{Z} \mathrm{Sp}\, \left(\sigma^a_{m+1}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta \mathbf{H}}\right) \tag{6.5}$$

также выражается через определители Фредгольма линейных интегральных операторов на отрезке $[-\pi, \pi]$. Из (5.4)–(5.6) получаем при $m > 0$:

$$G^{(-+)}(m) = G^{(+-)}(m) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \det\,(I - \widehat{W} + \alpha \widehat{C})\big|_{\alpha=0} \quad (m > 0) \tag{6.6}$$

$$G^{(++)}(m) = G^{(--)}(m) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \det\,(I - \widehat{W} - i\alpha \widehat{S})\big|_{\alpha=0} \quad (m > 0). \tag{6.7}$$

Ядра операторов $\widehat{W}$, $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ суть

$$W(p,q) = -\frac{1}{\pi} e^{\frac{i(p-q)}{2}} \frac{\sin \frac{m(p-q)}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}}\, \omega_F(q), \tag{6.8}$$

$$C(p,q) = \frac{1}{2\pi} \cos \frac{m(p+q)}{2} \tag{6.9}$$

$$S(p,q) = \frac{1}{2\pi} \sin \frac{m(p+q)}{2}. \tag{6.10}$$

Эти ответы лишь заменой веса (5.30) отличаются от ответов для изотропной XXO цепочки.

Следует отметить, что формальные ответы для разновременных корреляторов были получены недавно в работе [29]. В следующей публикации мы надеемся дать более явные представления и для разновременных корреляторов.

Авторы благодарны за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты 95–01–00476 и 96–01–00807) и ИНТАС (грант ИНТАС–РФФИ 95–0414). Один из нас (В. С. К.) благодарит также за поддержку ТОО “Циклон”).

Приложение А

Рассмотрим набор канонических фермионных операторов

$$a_q,\ a_q^+ \ \left([a_p,\, a_q]_+ = [a_p^+,\, a_q^+]_+ = 0,\ [a_p,\, a_q^+]_+ = \delta_{pq}\right).$$

Обозначим M число операторов a (или a^+) в наборе. Предполагается, что существует фоковский вакуум со свойствами

$$a_q \mid 0 \rangle = 0; \quad \langle 0 \mid a_q^+ = 0, \quad \forall q; \quad \langle 0 \mid 0 \rangle = 1. \tag{A.1}$$

Введем когерентные состояния [30]

$$\begin{aligned} |\,\xi\,\rangle \equiv |\,\xi_q\,\rangle &= \exp\Big\{\sum_q a_q^+\,\xi_q\Big\}\,|\,0\,\rangle; \\ |\,\xi^*\,\rangle \equiv |\,\xi_q^*\,\rangle &= \langle\,0\,|\exp\Big\{\sum_q \xi_q^*\,a_q\Big\}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

где суммирования ведутся по всему набору. Параметры ξ_q, ξ_q^* (элементы алгебры Грассмана) антикоммутируют между собой и со всеми операторами a_q, a_q^+. Отметим, что звездочка над ξ^* означает только, что соответствующий параметр связан с боавектором; мы не рассматриваем инволюции на алгебре Грассмана; параметры ξ^* и ξ вполне независимы. Когерентные состояния (A.2) являются собственными для операторов уничтожения и рождения соответственно

$$a_p\,|\,\xi\,\rangle = \xi_p\,|\,\xi\,\rangle;\ \langle\,\xi_p^*\,|\,a_p^+ = \langle\,\xi^*\,|\,\xi_p. \tag{A.3}$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний нетрудно вычислить используя коммутационные соотношения между величинами a, a^+, ξ, ξ^*:

$$\langle\,\xi^*\,|\,\xi\,\rangle = \exp\Big\{\sum_q \xi_q^*\,\xi_q\Big\} \equiv \exp\{\xi^*\xi\}. \tag{A.4}$$

След оператора $\mathbf{O}$ можно представить как интеграл по антикоммутирующим переменным от матричных элементов оператора между когерентными состояниями (см. [30]):

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{O} = \int d\xi\,d\xi^*\exp\{\xi^*\xi\}\langle\,\xi^*\,|\,\mathbf{O}\,|\,\xi\,\rangle, \tag{A.5}$$

а разложение единичного оператора дается формулой

$$\mathbf{1} = (-1)^M\int d\xi\,d\xi^*\exp\{-\xi^*\xi\}\,|\,\xi\,\rangle\langle\,\xi^*\,| \tag{A.6}$$

(у нас M – число узлов решетки – четное, и множитель $(-1)^M$ в формулах такого типа, естественно, опускается). Мы используем, для краткости, обозначения

$$d\xi \equiv \prod_q d\xi_q; \quad d\xi^* \equiv \prod_q d\xi_q^*.$$

Если оператор $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L} = \sum_{p,q} a_p^+ \, L_{pq} \, a_q \equiv a^+ \, La,$$

где L является матрицей размерности $M{\times}M$ (с матричными элементами L_{pq}), которая диагонализуется унитарной матрицей U,

$$L = U^+ \, DU; \quad U^+U = UU^+ = I; \quad D = \mathrm{diag}\,(D_q),$$

то матричные элементы оператора $\exp\{\mathbf{L}\}$ даются формулой

$$\begin{aligned}\langle\, \xi^* \mid \exp\{\mathbf{L}\} \mid \xi\,\rangle &= \exp\Big\{\sum_{p,q} \xi_p^* (\exp\{L\})_{pq} \xi_q\Big\} \equiv \\ &\equiv \exp\{\xi^* \exp L\xi\},\end{aligned} \tag{A.7}$$

и

$$\mathrm{Sp}\, \exp\{\mathbf{L}\} = \mathrm{Sp}\, \exp\{a^+ \, La\} = \det\ [I + \exp\{L\}] \tag{A.8}$$

(в левой части последней формулы стоит след оператора; в правой части – определитель матрицы размерности $M \times M$).

Последнее равенство следует из хорошо известной формулы для гауссова интеграла по антикоммутирующим переменным

$$\int d\xi \, d\xi^* \exp\left\{\xi^* K\xi + \eta^*\xi + \xi^*\eta\right\} = \exp\{-\eta^* \, K^{-1} \, \eta\} \det K. \tag{A.9}$$

Нам придется также использовать формулу, справедливую для антисимметричной матрицы A,

$$\int d\xi \exp\left\{\frac{1}{2}\xi A\xi + \eta\xi\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\eta \, A^{-1}\eta\right\}\sqrt{\det A}, \quad A = -A^T. \tag{A.10}$$

Приложение B

Здесь мы приведем вывод формул для разновременных температурных корреляторов изотропной XXO цепочки Гейзенберга с конечным числом узлов M (M предполагается четным). Надеемся, что читатель оценит простоту, с которой получаются результаты при использовании интегрирования по грассмановым переменным, по сравнению с работами [5, 26]. Начнем с вычисления статсуммы Z, которую, следуя работам [23, 25], представим в виде

$$Z = \mathrm{Sp}\, \exp\{-\beta\mathbf{H}\} = \frac{1}{2}(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \tag{B.1}$$

где $\beta \equiv 1/T$ – обратная температура, а вклады в правой части определяются формулами

$$\begin{aligned} Z_F^{\pm} &= \mathrm{Sp}\, \exp\{-\beta \mathbf{H}^{\pm}\} = e^{\beta M h/2} \det(I + J_\beta); \\ Z_B^{\pm} &= \mathrm{Sp}\, \left[(-1)^{\mathbf{N}} \exp\{-\beta \mathbf{H}^{\pm}\}\right] = e^{\beta M h/2} \det(I - J_\beta), \end{aligned} \tag{B.2}$$

где J_β – диагональная матрица

$$J_\beta = \mathrm{diag}\,(e^{-\beta\varepsilon(p)}) \tag{B.3}$$

(подчеркнем, что $p \in X^+$ для $Z_{F,B}^+$ и $p \in X^-$ для $Z_{F,B}^-$). Чтобы получить эти представления, надо использовать соотношения

$$(-1)^{\mathbf{N}} \mid \phi, \pm \rangle = \mid -\phi, \pm \rangle \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta \mathbf{H}^{\pm} \mid \phi, \pm \rangle &= e^{\beta M h/2} \mid J_\beta \phi, \pm \rangle \equiv \\ &\equiv e^{\beta M h/2} \exp\Big\{ \sum_{p \in X^{\pm}} a_p^+ \, e^{-\beta\varepsilon(p)} \phi_p \Big\} \mid 0 \rangle \end{aligned} \tag{B.5}$$

и записать, например, $Z_B^{\pm}$ как гауссов интеграл

$$Z_B^{\pm} = e^{\beta M h/2} \int d\phi\, d\phi^* \exp\{\phi^* [I - J_\beta]\, \phi\} \tag{B.6}$$

(см. (A.4), (A.5)).

Рассмотрим теперь простейший одновременной температурный коррелятор,

$$G(m) \equiv \frac{1}{Z} \mathrm{Sp}\, \left[e^{\alpha \mathbf{Q}(m)}\, e^{-\beta \mathbf{H}} \right], \tag{B.7}$$

который может быть представлен в виде [25]:

$$G(m) = \frac{1}{2Z} \left(Z_F^+ G_F^+ + Z_F^- G_F^- + Z_B^+ G_B^+ - Z_B^- G_B^- \right), \tag{B.8}$$

где

$$\begin{aligned} Z_F^{\pm} G_F^{\pm} &= \mathrm{Sp}\, \left[e^{\alpha \mathbf{Q}(m)}\, e^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}} \right], \\ Z_B^{\pm} G_B^{\pm} &= \mathrm{Sp}\, \left[e^{\alpha \mathbf{Q}(m)}\, e^{-\beta \mathbf{H}^{\pm}}\, (-1)^{\mathbf{N}} \right]. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Вклады представляются как определители матриц размерности $M \times M$:

$$\begin{aligned} G_F^{\pm} &= \det(I + (e^{\alpha} - 1)\, Q^{(0)}(m)\, \Theta_F); \\ G_B^{\pm} &= \det(I + (e^{\alpha} - 1)\, Q^{(0)}(m)\, \Theta_F), \end{aligned} \tag{B.10}$$

где диагональные матрицы “фермиевского” и “бозевского” весов, Θ_F и Θ_B, суть

$$\begin{aligned}\Theta_F &= J_\beta[I+J_\beta]^{-1} = \mathrm{diag}\left[\Theta_F(p) \equiv \frac{1}{1+e^{\beta\varepsilon(p)}}\right];\\ \Theta_B &= J_\beta[I+J_\beta]^{-1} = \mathrm{diag}\left[\Theta_B(p) \equiv \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)}} - 1\right]\end{aligned} \tag{B.11}$$

а матрица $Q^{(0)}(m)$ с матричными элементами $Q^{(0)}_{pq}(m)$ была определена в (2.17) ($p,\, q \in X^+$ для $G^+_{F,B}$ и $p,\, q \in X^-$ для $G^-_{F,B}$). Чтобы получить эти представления, нужно записать, например, вклад $Z^-_B\, G^-_B$ как

$$Z^-_B\, G^-_B = e^{\beta M h/2} \int d\phi\, d\phi^*\, e^{\phi^*\phi} \langle\, \phi^*, -\mid e^{\alpha \mathbf{Q}(m)} \mid -J_\beta\phi, -\,\rangle,$$

использовать выражение (2.18) для матричного элемента под знаком интеграла, взять гауссов интеграл, произвести преобразование подобия $Q(m) \to Q^{(0)}(m)$ (см. (2.16), (2.17)) и вынести множитель $\det(I - J_\beta)$ из получившегося определителя.

Обратимся теперь к зависящей от времени корреляционной функции локальных спинов; как обычно,

$$\sigma^\alpha_m(t) = e^{it\mathbf{H}}\, \sigma^\alpha_m\, e^{-it\mathbf{H}}.$$

Вследствие трансляционной инвариантности, корреляторы спинов $\sigma^\pm_{m_2}(t_2)$, $\sigma^\pm_{m_1}(t_1)$ зависят только от разностей $m = m_2 - m_1$, $t = t_2 - t_1$:

$$G^{(ab)}(m,t) = \frac{1}{Z}\mathrm{Sp}\left[e^{iHt}\, \sigma^a_{m+1}\, e^{-iHt}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta H}\right] \quad (a,b=\pm). \tag{B.12}$$

Вследствие свойства (2.21), коррелятор может быть представлен в виде суммы четырех вкладов:

$$\begin{aligned}&G^{(ab)}(m,t) =\\ &= \frac{1}{2Z}\left(Z^+_F\, G^{(ab),+}_F + Z^-_F\, G^{(ab),-} + Z^+_B\, G^{(ab),+} - Z^-_B\, G^{(ab),-}\right)\end{aligned} \tag{B.13}$$

где

$$\begin{aligned}Z^\pm_F\, G^{(ab),\pm}_F &= \mathrm{Sp}\left[e^{i\mathbf{H}^\pm t}\, \sigma^a_{m+1}\, e^{-i\mathbf{H}^\mp t}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta\mathbf{H}^\pm}\right];\\ Z^\pm_B\, G^{(ab),\pm}_B &= \mathrm{Sp}\left[e^{i\mathbf{H}^\pm t}\, \sigma^a_{m+1}\, e^{-i\mathbf{H}^\mp t}\, \sigma^b_1\, e^{-\beta\mathbf{H}^\pm}\, (-1)^{\mathbf{N}}\right].\end{aligned} \tag{B.14}$$

Рассмотрим сначала коррелятор $G^{(-+)}(m,t)$. Можно представить, например, вклад

$$Z_F^+\, G^{(-+),+} = e^{\beta M h/2} \int d\phi\, d\phi^*\, d\psi\, d\psi^*\, e^{\phi^*\phi - \psi^*\psi} \times$$

$$\times \langle\, \phi^*\, J(0,t), + \mid \sigma^-_{m+1} \mid J(0,-t)\psi, - \,\rangle \langle\, \psi^*, -\sigma_1^+ \mid J_\beta \phi, + \,\rangle,$$

где мы ввели диагональную $M\times M$ матрицу $J(m,t)$:

$$J(m,t) = \mathrm{diag}\,\left(e^{-ipm + i\varepsilon(p)t}\right). \tag{B.15}$$

Теперь используем выражения для матричных элементов (2.22) и выполним сначала интегрирование по ψ, ψ^*, а затем по ϕ, ϕ^*:

$$Z_F^+\, G_F^{(-+),+} = e^{\beta M h/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int d\phi\, d\phi^*\, d\psi\, d\psi^*\, e^{\phi^*\phi - \psi^*\psi} \times$$

$$\times e^{\phi^*\, L(m,t)\psi + \psi^*\, L(0) J_\beta \phi + \alpha \phi^*\, R\, J_\beta\, \phi}\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= e^{\beta M h/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \det\, [I + L(m,t)\, L(0)\, J_\beta + \alpha\, R\, J_\beta]\,\Big|_{\alpha=0},$$

где мы определили матрицу

$$L(m,t) = J(0,t)\, L(m)\, J(0,-t)$$

(в ее матричных элементах $L_{pq}(m,t)$, $p \in X^+$ и $q \in X^-$, а также матрицу R ранга 1, все столбцы которой одинаковы:

$$R_{p_1 p_2} = \frac{1}{M} e^{-ip_1 m + i\varepsilon(p_1)t}, \quad p_1,\, p_2 \in X^+.$$

После преобразования подобия с диагональной матрицей $J(-\frac{m}{2}, -\frac{t}{2})$ получим формулу

$$Z_F^+\, G_F^{(-+),+} = e^{\beta M h/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \det\, \left[I + \widetilde{L}\, J_\beta + \alpha\, \widetilde{R}\, J_\beta\right]\Big|_{\alpha=0}, \tag{B.16}$$

где матричные элементы матриц $\widetilde{L}$ и $\widetilde{R}$ равны соответственно

$$\widetilde{L}_{p_1 p_2} = e^{imp_1/2 - it\varepsilon(p_1)/2} \sum_q L_{p_1 q}(m,t) L_{q p_2}(0) e^{-imp_2/2 + it\varepsilon(p_2)/2} \tag{B.17}$$

$$\widetilde{R}_{p_1 p_2} = \frac{1}{M}\, e^{-imp_1/2 + it\varepsilon(p_1)/2}\, e^{-imp_2/2 + it\varepsilon(p_2)/2} \quad (\text{здесь} \quad p_1,\, p_2 \in X^+, \quad q \in X^-). \tag{B.18}$$

Чтобы представить матрицы в более удобном виде, введем функции (мы следуем работе [5], немного изменив обозначения; напомним, что $\varepsilon(q) = h - \cos q$)

$$g(m,t) = \frac{1}{M}\sum_q e^{imq+it\cos q}; \tag{B.19}$$

$$e(m,t,p) = \frac{1}{M}\sum_q \frac{e^{imq+it\cos q}}{\tan\frac{q-p}{2}}; \tag{B.20}$$

$$d(m,t,p) = \frac{1}{M}\sum_q \frac{e^{imq+it\cos q} - e^{imp+it\cos p}}{\sin^2\frac{q-p}{2}}; \tag{B.21}$$

$$e_-(m,t,p) = e^{-i\frac{m}{2}p - i\frac{t}{2}\cos p}; \tag{B.22}$$

$$e_+(m,t,p) = e_-(m,t,p)\, e(m,t,p). \tag{B.23}$$

Все эти функции порядка $O(1)$ при $M \to \infty$. Удобно, также, ввести четыре одномерных проектора Π^{++}, Π^{+-}, Π^{-+}, Π^{--}, которые являются матрицами рахмерности $M \times M$ с матричными элементами

$$\Pi^{ab}_{p_1p_2} = e_a(m,t,p_1)\, e_b(m,t,p_2) \quad (a,b) = +,-). \tag{B.24}$$

Используя тождества

$$\sum_q \frac{1}{\sin^2\frac{q-p}{2}} = M^2 \quad (q \in X^-, \quad p \in X^+); \tag{B.25}$$

$$\operatorname{ctg}(x-u)\operatorname{ctg}(x-v) = \operatorname{ctg}(u-v)[\operatorname{ctg}(x-u) - \operatorname{ctg}(x-v)] - 1, \tag{B.26}$$

можно представить матрицу $\widetilde{L}$ в виде

$$\widetilde{L} = I + \frac{1}{M}\left[S + i\Pi^{+-} - i\Pi^{-+}\right], \tag{B.27}$$

где диагональные и недиагональные элементы матрицы S даются формулами

$$S_{pp} = d(p)\, e^{-imp-it\cos p}, \tag{B.28}$$

$$S_{p_1p_2} = \frac{e_+(p_1)\, e_-(p_2) - e_-(p_1)\, e_+(p_2)}{\operatorname{tg}\frac{p_1-p_2}{2}}. \tag{B.29}$$

Матрица $\widetilde{R}$ – это проектор,

$$\widetilde{R} = \frac{e^{ith}}{M}\Pi^{--} \tag{B.30}$$

(для краткости, опущены аргументы m и t, одинаковые для всех функций d, e, $e_{\pm}$).

Аналогичным образом могут быть вычислены и другие вклады. Приведем результаты:

$$G_F^{(-+),\pm} = e^{ith}\frac{\partial}{\partial\alpha}\det\Big[I + \frac{1}{M}(S + i\Pi^{+-} - i\Pi^{-+} + \alpha\Pi^{--})\Theta_F\Big]\big|_{\alpha=0};$$

$$G_B^{(-+),\pm} = \tag{B.31}$$

$$= e^{ith}\frac{\partial}{\partial\alpha}\det\Big[I - \frac{1}{M}(S + i\Pi^{+-} - i\Pi^{-+} + \alpha\Pi^{--})\Theta_B\Big]\big|_{\alpha=0}.$$

Хотя формально оба вклада $G_F^{(-+),\pm}$ (как и $G_B^{(-+),\pm}$ записаны в одном виде, на самом деле, они, конечно, различны. Необходимо иметь в виду, что

$$p,\ p_1,\ p_2 \in X^+, \quad q \in X^- \quad \text{для} \quad G_{F,B}^{(-+),+};$$

$$p,\ p_1,\ p_2 \in X^-, \quad q \in X^+ \quad \text{для} \quad G_{F,B}^{(-+),-};$$

во всех формулах B.19–B.24, (B.28) и B.29, определяющих функции g, e, d, $e_{\pm}$ и матричные элементы матриц S и Π^{ab}.

Аналогичным образом может быть вычислен и коррелятор G^{+-}. Соответствующие вклады равны

$$G_F^{(+-),\pm} = e^{-ith}\Big[g(m,t) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big]\det\Big[I + \frac{1}{M}\big(S + i\Pi^{+-} - i\Pi^{-+} - \\ -\alpha\big\{\Pi^{++} + ig\Pi^{+-} - ig\Pi^{-+} + g^2\Pi^{--}\big\}\big)\Theta_F\Big]\big|_{\alpha=0};$$

$$G_B^{(+-),\pm} = e^{ith}\Big[g(m,t) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big]\det\Big[I - \frac{1}{M}\big(S + i\Pi^{+-} - i\Pi^{-+} - \\ -\alpha\big\{\Pi^{++} + ig\Pi^{+-} - ig\Pi^{-+} + g^2\Pi^{--}\big\}\big)\Theta_B\Big]\big|_{\alpha=0}; \tag{B.32}$$

(опять нужно учесть различие между вкладами $G_{F,B}^{(+-),+}$ и $G_{F,B}^{(+-),-}$ объяснение выше).

Следует отметить, что полученные здесь выражения совпадают с представлениями, полученными с помощью другого метода (требующего значительно более громоздких вычислений) в работах [5, 26]. Более точно, наши выражения получаются при выборе произвольных констант $c_1 = i$, $c_2 = -i$ в формулах (A.1–A.14) Приложения A работы [28].

Литература

1. A. Lenard, *Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons.* — L. Math. Phys. **5** (1964), 930–943.
2. A. Lenard, *One-dimensional impenetrable bosons thermal equilibrium.* — J. Math. Phys. **7** (1966), 1268–1272.
3. V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *The time-dependent correlation function of an impenetrable Bose gas as a Fredholm minor.* — Commun. Math. Phys. **129** (1990), 103–113.
4. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XXO chain as Fredholm determinants.* — Phys. Lett. **A 169** (1992), 243–247.
5. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Temperature correlations functions in the XXO Heisenberg chain.* — Теоретич. и мат. физика **94** (1993), 19–51.
6. V. E. Korepin, *Dual field formulation of quantum integrable models.* — Commun. Math. Phys. **113** (1987), 177–190.
7. T. Kojima, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *Determinant representation for dynamical correlation functions of the Quantum nonlinear Schrödinger equation.* Preprint hep-th/9611216, 26 Nov. 1996.
8. F. H. L. Essler, H. Frahm, A. G. Izergin A. G. , and V. E. Korepin, *Determinant representation for correlation functions of spin 1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets.* — Commun. Math. Phys. **174** (1995), 191–214.
9. A. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, and M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent.* — Phys. **D1** (1980), 80–158.
10. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, *Correlation radius for one-dimensional impenetrable bosons.* — Phys. Lett. A **141** (1989), 121–125.
11. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *Differential equations for quantum correlation functions.* — Int. J. Phys. **B4** (1990), 1003–1037.
12. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *Temperature correlations of quantum spins.* — Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1704–1706.
13. А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов, *Матричная задача Римана–Гильберта и дифференциальные уравнения для корреляционных функций XXO цепочки Гейзенберга.* — Алгебра и Анализ **6** (1994), 138–151.
14. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, *Space correlations on the one-dimensional impenetrable Bose gas at finite temperature.* — Phys. **D 53** (1991), 181–213.

15. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, and G. G. Varzugin, *Large time and distance asymptotics of field correlation function of impenetrable bosons at finite temperature.* — Phys. **D 54** (1992), 351–395.
16. C. A. Tracy, B. M. Mc Coy, *Neutron scattering and the correlation function of the Ising model near T_c.* — Phys. Rev. Lett. **31** (1973), 1500–1504.
17. T. T. Wu, B. M. Mc Coy, C. A. Tracy, and E. Barough, *Spin-spin correlation function for the two-dimensional Isung model: Exact theory in the scaling region.* — Phys. Rev. **B 13** (1976), 316–374.
18. B. M. Mc Coy, C. A. Tracy, and T. T. Wu, *Painlevé functions of the third kind.* — J. Math. Phys. **18** (1977), 1058–1092.
19. V. E. Korepin, A. G. Izergin, and N. M. Bogolyubov, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* Cambridge Monographs Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
20. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *The quantum correlation function as the tau-function of classical differential equations.* Springer Ser. Nonlinear Dyn., Springer, Berlin, 1993, p. 407–417, Important development in solution theory.
21. E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain.* — Ann. Phys. **16** (1961), 407–466.
22. B. M. Mc Coy, *Spin correlation functions of the XY model.* — Phys. Rev. **173** (1968), 531–541.
23. B. M. Mc Coy, E. Barouch, and D. B. Abraham, *Statistical mechanics of the XY model. Time-dependent spin correlation functions.* — Phys. Rev. **A 4** (1971), 2331–2341.
24. B. M. Mc Coy, J. H. H. Perk, R. E. Schrock, *Correlation functions of the transverse Ising chain at the critical field for large temporal and spatial separations.* — Nucl. Phys. **B 220 [FS 8]** (1983), 269–282.
25. В. С. Капитонов, К. Н. Ильинский, *Функциональное представление для корреляторов спиновых цепочек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 192–207.
26. F. Colomo, A. G. Izergin, and V. Tognetti, *Correlation functions in the XXO Heisenberg chain and their relations with Frenkel exciton spectra.* — to be published in J. Phys. **A 30** (1997), 361–369.
27. А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов, *О корреляционных функциях XY.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 178–191.
27. А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов, *Интегрируемые дифференциальные уравнения для температурных корреляционных функций XXO цепочки Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **205** (1993), 6–20.
29. K. N. Ilinskii, G. V. Kalinin, *Cyclic XY model and exotic statistics in one dimension.* — Phys. Rev **E 54** (1996), R 1017–R 1020.
30. Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдес, *Вторичное квантование полевых систем на грассмановой алгебре.* — Теор. и мат. физика **29** (1976), 25–41.

Izergin A. G., Kapitonov V. S., Kitanin N. A. Equal-time temperature correlators of the one-dimensional Heisenberg XY chain.

Representations as determinants of $M \times M$ dimensional matrices are obtained for equal-time temperature correlators of the anisotropic Heisenberg XY chain. These representations are simple deformations of the answers for the isotropic XXO chain. In the thermodynamical limit, the correlators are expressed in terms of the Fredholm determinants of linear integral operators.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 марта 1997 г.