А. А. Андрианов, Ф. Канната,
Ж.-П. Дедондер, М. В. Иоффе

ДЕФОРМИРОВАННАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ, АЛГЕБРА q–ОСЦИЛЛЯТОРА И ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1. Введение

Деформированные симметрии были введены [1, 2] для описания интегрируемости некоторых решеточных моделей и конформных [3, 4] полевых теорий. Позднее ряд примеров q-деформированных симметрий и q-деформированных алгебр, генерирующих спектр, был найден в различных квантовых системах, в частности, в квантово-механических моделях низшей размерности.

Простейшей алгеброй, реализуемой на изоспектральных системах квантовой механики, является алгебра суперсимметричной квантовой механики [5, 6], образованная суперзарядами и супергамильтонианом. Суперсимметричные партнеры в супергамильтониане связаны (сплетаются) суперзарядами, которые, на самом деле, порождают преобразования Дарбу [7] между двумя изоспектральными системами. Деформации этой алгебры возникают при использовании обобщенных суперзарядов с производными высших порядков [8–10]. Такое обобщение ведет к SUSY алгебре с высшими производными (HSUSY) [10], которая содержит полином высшего порядка от гамильтониана. С другой стороны, добавление к суперзарядам оператора растяжений приводит к классу q-деформированных потенциальных систем [11], на которых может быть реализована, в частности, q-деформированная осцилляторная алгебра, генерирующая спектр.

Осцилляторная алгебра (Гейзенберга–Вейля) была деформирована несколькими способами [12, 13] и ее представления формально проклассифицированы [13–15]. Поскольку обычный осциллятор играет важную роль во многих областях современной квантовой физики, новые реализации q-осцилляторной алгебры в пространстве волновых функций конкретной динамической модели должны быть полезны для понимания проявления этой алгебры в физических системах.

Нашей целью является описание взаимосвязи между полиномиальными деформациями SUSY алгебры и q-деформациями, введенными в систему шредингеровского типа растяжением координат. На этом пути найдены различные реализации q-осциллятора как квантовой системы, удовлетворяющей уравнению Шредингера.

Так же как в случае гармонического осциллятора ($q = 1$), из q-осцилляторной алгебры следует связь между собственными значениями различных энергетических уровней, а также связь между соответствующими волновыми функциями [11] (или коэффициентами отражения и прохождения [10]).

Для того, чтобы воспроизвести q-осциллятор, необходимо отождествить, с точностью до константы, потенциалы в гамильтонианах, связанных преобразованием Дарбу. Для обычного гармонического осциллятора это свойство самоподобия выполняется и объясняет его эквидистантный спектр энергий. Дилатированное условие самоподобия [11, 16] естественным образом отбирает потенциалы, имеющие энергетические спектры и волновые функции q-деформированного осциллятора. Соотношение между амплитудами рассеяния двух q-суперпартнеров приводит к “дуальному” условию самоподобия [10] (в импульсном пространстве).

В разделе 2 кратко излагаются основные сведения об одномерной ССКМ [5, 6]. В разделе 3 в самой общей форме построена ССКМ с суперзарядами второй степени по производным и выделены случаи, когда суперпартнеры не могут быть построены итерацией двух обычных преобразований Дарбу. Тем самым, проведена классификация всех неприводимых преобразований, участвующих в построении HSUSY систем с полиномиально деформированными супералгебрами.

В разделе 4 изучается q-деформация SUSY и HSUSY, индуцированная растяжением координат. Установлено сосуществование как q-деформированной SUSY алгебры с обычным гамильтонианом, так и обычной SUSY алгебры с q-деформированным гамильтонианом, построено обобщение на случай HSUSY.

В разделе 5 после введения в q-деформированную SUSY квантовую механику условия замыкания, или самоподобия, построена q-осцилляторная модель с локальным потенциалом. Обсуждается доказательство существования регулярного потенциала. Получено полиномиальное обобщение за счет q-деформации полиномиальной супералгебры.

В разделе 6 рассматривается q-осцилляторная алгебра в форме [13] и приведена классификация ее представлений в терминах центрального элемента. Проведено разложение гамильтоновой реализации из раздела 5 на неприводимые q-осцилляторные представления. В разложении появляются два типа q-осцилляторных представлений, и в то время как фоковское представление относится к связанным состояниям, нефоковские представления покрывают непрерывный спектр.

В разделе 7 исследуются следствия одномерной HSUSY для характеристик рассеяния [17] гамильтонианов-партнеров [18]. Соотношение между амплитудами рассеяния двух q-суперпартнеров [10] найдено в разделе 8. Определено “дуальное” условие самоподобия (в импульсном пространстве) для амплитуд рассеяния. В терминах гипергеометрической функции представлена явная конструкция, удовлетворяющая этому “дуальному” условию самоподобия. Она соответствует безотражательному потенциалу.

В разделе 9 мы анализируем другие возможные реализации q-осциллятора в пространстве волновых функций одномерного шредингеровского гамильтониана. В нашем подходе локальный гамильтониан, вообще говоря, не является билинейным по операторам рождения и уничтожения, а, скорее, принадлежит универсальной обертывающей алгебре q-осциллятора, т.е. алгебре полиномов (аналитических функций) от генераторов. Поэтому q-осцилляторные соотношения рассматриваются как разновидность q-деформированной (нелинейной) динамической алгебры. Мы формулируем общую схему построения локального гамильтониана шредингеровского типа с деформированными алгебрами, генерирующими спектр. Исследуется соответствующее отображение энергетических уровней. Описываются разновидности q-осцилляторной алгебры и получены ограничения на их реализацию в терминах шредингеровского гамильтониана.

§2. Суперсимметричная квантовая механика в одном измерении

ССКМ порождается [5, 6] операторами суперзаряда Q^+ и

$Q^- = (Q^+)^\dagger$, которые вместе с гамильтонианом системы H удовлетворяют алгебре

$$(Q^\pm)^2 = 0, \quad [H, Q^\pm] = 0, \tag{1}$$

$$\{Q^+, Q^-\} = H = Q^2, \tag{2}$$

где введен эрмитов оператор суперзаряда $Q = Q^+ + Q^-$.

Одномерное представление реализуется 2×2 суперзарядами

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^- & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & a^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

с

$$a^\pm = \pm\partial + W(x) \tag{4}$$

а супергамильтониан состоит из двух обычных шредингеровских гамильтонианов

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} h^{(1)} & 0 \\ 0 & h^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^+a^- & 0 \\ 0 & a^-a^+ \end{pmatrix} \\ &= -\partial^2 + \begin{pmatrix} W^2 + W' & 0 \\ 0 & W^2 - W' \end{pmatrix} = (-\partial^2 + W^2)1 + \sigma_3 W' \\ h^{(i)} &\equiv -\partial^2 + V^{(i)}(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где σ_3 – матрицы Паули.

Непосредственно из (1), (2) следует, что все собственные значения H неотрицательны. В терминах компонент алгебра, определенная в (1), (2), означает, что гамильтонианы $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ в (5) факторизованы. Иначе говоря, данному факторизуемому гамильтониану $h^{(1)}$ можно сопоставить суперсимметричный партнер $h^{(2)}$, такой, что оба партнера связаны соотношениями сплетания

$$h^{(1)}a^+ = a^+h^{(2)} \quad \text{и} \quad a^-h^{(1)} = h^{(2)}a^-. \tag{6}$$

Эти соотношения приводят к двукратному вырождению всех уровней H с положительной энергией, что соответствует "бозонному" и "фермионному" секторам, определяемым оператором градуировки $\tau = (-)^{\widehat{N}_F} = \sigma_3$, где $\widehat{N}_F$ – оператор числа фермионов. Оператор градуировки коммутирует с гамильтонианом H и антикоммутирует с суперзарядом Q. Таким образом, оператор суперзаряда переводит собственные состояния с $\tau = +1$ (бозоны) в собственные состояния с $\tau = -1$ (фермионы) и наоборот. Бозонные и фермионные волновые функции являются собственными функциями $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$, соответственно. Благодаря соотношения (6), они связаны между собой операторами $a^{\pm}$:

$$\sqrt{E}\Psi_E^{(2)} = a^-\Psi_E^{(1)} \quad \text{и} \quad \sqrt{E}\Psi_E^{(1)} = a^+\Psi_E^{(2)}. \tag{7}$$

Существование состояний с нулевой энергией зависит [6] от асимптотики суперпотенциала $W(x)$, введенного в (4). Для соответствующих $W(x)$ они могут возникать либо в бозонном секторе, т.е.

$$a^-\Psi^{(1)}(x) = 0,$$

либо в фермионном, т.е.

$$a^+\Psi^{(2)}(x) = 0.$$

§3. ССКМ с высшими производными

Исследуем теперь другие реализации, в которых сохраняются соотношения (1), но допускаются деформации соотношения (2). В нестандартной реализации [9, 10] в определении суперзарядов используются дифференциальные операторы высших порядков по производным. Вместо линейных операторов (4) определим дифференциальные операторы второго порядка

$$A^+ = (A^-)^\dagger = \partial^2 - 2f(x)\partial + b(x). \tag{8}$$

Тогда уравнение (2) преобразуется в

$$\{Q^+, Q^-\} = Q^2 = K$$

с $Q = Q^+ + Q^-$. Квазигамильтониан K при этом получается из обычной супералгебры, но теперь он является оператором четвертого порядка и, следовательно, не имеет шредингеровской формы.

Предположим, что существует диагональный гамильтониан H шредингеровского вида

$$H = \begin{pmatrix} h^{(1)} & 0 \\ 0 & h^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

коммутирующий с суперзарядами $Q^{\pm}$, которые построены из $A^{\pm}$, определенных в (8). Тогда из соотношений сплетания, аналогичных (6),

$$h^{(1)}A^{+} = A^{+}h^{(2)} \quad \text{и} \quad A^{-}h^{(1)} = h^{(2)}A^{-}, \tag{10}$$

следует, что квазигамильтониан K коммутирует с H и, кроме того, выражается через H соотношением:

$$K = H^2 - 2\alpha H + \beta, \tag{11}$$

где α и β являются константами из-за невырожденности спектра $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ в одномерной задаче и так как $[K, Q] = 0$. Соотношения сплетания (10) для H требуют, чтобы

$$b(x) = f^2(x) - f'(x) - \frac{f''(x)}{2f(x)} + \left(\frac{f'(x)}{2f(x)}\right)^2 + \frac{d}{4f^2(x)}, \tag{12}$$

где

$$d = \beta - \alpha^2. \tag{13}$$

Это условие является необходимым и достаточным для существования обобщенной, полиномиальной, HSUSY алгебры, которая определяется соотношениями:

$$(Q^{\pm})^2 = 0, \quad [H, Q^{\pm}] = 0, \quad \{Q^{+}, Q^{-}\} = Q^2 = (H - \alpha)^2 + d. \tag{14}$$

Используя уравнение (12), потенциалы гамильтонианов-суперпартнеров могут быть выражены через $f(x)$ и ее производные

$$V^{(1),(2)} = \mp 2f'(x) + f^2(x) + \frac{f''(x)}{2f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{2f(x)}\right)^2 - \frac{d}{4f^2(x)} + \alpha. \tag{15}$$

Собственные функции $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ получаются друг из друга действием дифференциального оператора второго порядка $A^{\pm}$ в соответствии с уравнением (7).

Элементарные операторы $A^{\pm}$ можно факторизовать, выразив через обычные суперпотенциалы W_1 и W_2, введенные в (4):

$$A^{+} = a_1^{+}a_2^{+} = (\partial + W_1(x))(\partial + W_2(x)). \tag{16}$$

В определенных случаях их можно связать лестничным уравнением

$$a_1^{-}a_1^{+} = a_2^{+}a_2^{-} + c \quad \text{или} \quad -W_1' + W_1^2 = W_2' + W_2^2 + c, \tag{17}$$

где, без потери общности, мы рассматриваем $c \geqslant 0$ (при этом суперпотенциалы, суперзаряды и другие соответствующие операторы зависят от c). Из этого уравнения получаем

$$\{Q^+, Q^-\} = \widetilde{H}(\widetilde{H} - c), \tag{18}$$

где, для сравнения с (11),

$$\widetilde{H} = H + \frac{1}{2}(c - 2\alpha) = \begin{pmatrix} a_1^+ a_1^- & 0 \\ 0 & a_2^- a_2^+ + c \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Очевидно, $c^2 = -4d \geqslant 0$.

Факторизация (16) возникает [8, 9] из двух последовательных ССКМ преобразований

$$\begin{pmatrix} h^{(1)} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^+ a_1^- & 0 \\ 0 & a_1^- a_1^+ \end{pmatrix} \tag{20}$$

и

$$\begin{pmatrix} h - c & 0 \\ 0 & h^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^+ a_2^- & 0 \\ 0 & a_2^- a_2^+ \end{pmatrix} \tag{21}$$

с учетом лестничного условия (17).

Выберем $c = 2\alpha$, т.е. $\beta = 0$. Тогда суперпотенциалы $W_{1,2}$ можно параметризовать функцией $f(x)$ следующим образом:

$$W_{1,2} = \pm \frac{2f'(x) - c}{4f(x)} - f(x). \tag{22}$$

Лестничное уравнение (17) имеет смысл только при условии, что дискриминант d отрицателен; именно при этом условии можно ввести в уравнения (20), (21) промежуточный эрмитов гамильтониан. Если $d > 0$, то нельзя удовлетворить соотношению вида (17); данный класс ССКМ второго порядка мы будем поэтому называть неприводимым.

Этот класс представляет собой новый элемент при построении суперсимметричных лестниц и, соответственно, полиномиальных ССКМ. Ясно, что соответствующий суперзаряд не может иметь нуль-мод, поскольку, как видно из (14), он ограничен снизу константой $\sqrt{d}$. Чтобы избежать сингулярностей в суперзарядах и потенциалах (15) в рассматриваемом случае, следует предположить, что функция $f(x)$ не имеет нулей. Обобщение SUSY алгебры второго порядка по производным на дифференциальные операторы $A^{\pm}$ более высоких порядков производится непосредственно и ведет к полиномам от H в правой части (14). Лестничная конструкция (20), (21) строится из базисных элементов первого и второго порядка по производным. Таким образом, в общем случае получается следующая полиномиальная супералгебра:

$$Q^2 = \prod_{i+2j=n} (H - c_i)((H - \alpha_j)^2 + d_j) \quad d_j > 0. \tag{23}$$

§4. q-деформированная SUSY квантовая механика

В рамках ССКМ q-деформированная SUSY алгебра была построена [11] в конкретной реализации, использующей оператор растяжений

$$T_q f(x) = \sqrt{q}(qx), \quad T_q \partial_x = q^{-1} \partial_x T_q, \tag{24}$$

который может быть также представлен как псевдодифференциальный оператор:

$$T_q = \sqrt{q} \exp(\ln qx\partial_x), \quad T_q^\dagger = T_q^{-1}. \tag{25}$$

q-деформированные суперзаряды $Q^\pm$ строятся из

$$a_q^+ = (\partial + W(x))T_q^\dagger \equiv \widehat{a}, \quad a_q^- = T_q(-\partial + W(x)) \equiv \widehat{a}^+, \tag{26}$$

аналогично (3). Переобозначение операторов Дарбу $a_q^\pm$ операторами “рождения” $\widehat{a}^+$ и “уничтожения” $\widehat{a}$ произведено с целью моделирования q-осциллятора (см. следующий раздел). Бозонная и фермионная компоненты гамильтониана (см. (5)) теперь q-деформированы:

$$\begin{aligned} h^{(1)} &\equiv a_q^+ a_q^- = -\partial^2 + W^2(x) + W'(x) \equiv \widehat{a}\widehat{a}^+, \\ h^{(2)} &\equiv q^2 a_q^- a_q^+ = -\partial^2 + q^2 W^2(qx) - qW_x'(qx) \equiv q^2 \widehat{a}^+ \widehat{a}. \end{aligned} \tag{27}$$

Коэффициент q^2 в $h^{(2)}$ введен для правильной нормировки кинетического члена. Эти гамильтонианы сплетаются не обычной SUSY алгеброй (см. (6)), а удовлетворяют q-деформированным соотношениям сплетания:

$$q^2 h^{(1)} a_q^+ = a_q^+ h^{(2)}, \quad q^2 a_q^- h^{(1)} = h^{(2)} a_q^-. \tag{28}$$

Таким образом, возникает q-деформированная SUSY алгебра, напоминающая (1), (2)

$$\{Q^+, Q^-\}_q = H; \quad [Q^+, H]_q = [H, Q^-]_q = 0 \tag{29}$$

в терминах q-(анти)коммутаторов (вместо обычных),

$$[X,Y]_q \equiv XY - q^2 YX, \quad \{X,Y\}_q \equiv XY + q^2 YX. \tag{30}$$

В обычном смысле суперзаряды не сохраняются, так как они не коммутируют с гамильтонианом. Вследствие этого гамильтонианы-суперпартнеры не являются больше изоспектральными, но их спектры связаны q-растяжением, $q^2 E^{(1)} = E^{(2)}$. Отметим однако, что существует другой гамильтониан (q-гамильтониан $\widehat{H}$), с ренормированным $h^{(2)}$, который коммутирует с суперзарядами и удовлетворяет супералгебре:

$$\{Q^+, Q^-\} = \begin{pmatrix} h^{(1)} & 0 \\ 0 & q^{-2}h^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \widehat{H}; \quad [\widehat{H}, Q^{\pm}] = 0. \tag{31}$$

Волновые функции связаны друг с другом операторами $a_q^{\pm}$,

$$\psi^{(2)} \propto a_q^- \psi^{(1)}, \quad \psi^{(1)} \propto a_q^+ \psi^{(2)}. \tag{32}$$

Объединим теперь q-деформированную SUSY с полиномиальной HSUSY квантовой механикой (см. раздел 3). Факторизуемую конструкцию q-деформированной HSUSY алгебры второго порядка по производным можно реализовать посредством двух последовательных q-деформаций (26) с разными параметрами растяжения q_1, q_2. Компоненты q-суперзаряда факторизованы,

$$A_q^+ = q_1^{-1} a_{q1}^+ \cdot a_{q2}^+ = q_1^{-1}(\partial + W_1(x))T_{q1}^{\dagger}(\partial + \widetilde{W}_2(x))T_{q2}^{\dagger} = (A_q^-)^{\dagger}. \tag{33}$$

Их можно преобразовать к произведению дифференциального оператора второго порядка на единственный оператор растяжения:

$$\begin{aligned} a_q^+ &= (\partial + W_1(x))(\partial + W_2(x))T_q^{\dagger}; \\ q = q_1 \cdot q_2; &\quad W_2(x) \equiv q_1^{-1}\widetilde{W}_2(q_1^{-1}x). \end{aligned} \tag{34}$$

В такой форме обобщение SUSY второго порядка по производным становится непосредственным и может быть сделано по схеме раздела 3 с растяжением на последнем шаге как для приводимого ($d \leqslant 0$), так и для неприводимого ($d > 0$) случаев.

Как и в обычном q-деформированном случае, гамильтониан H не коммутирует с суперзарядом, но удовлетворяет уравнению

(29). q-деформированная SUSY алгебра с гамильтонианом H имеет вид (σ_3, как обычно, матрица Паули):

$$Q^+Q^- + q^4Q^-Q^+ = \{Q^+, Q^-\}_{q^2} = (H - \alpha q^{1-\sigma_3})^2 + d \cdot q^{2(1-\sigma_3)},$$
$$[Q^+, H]_q = [H, Q^-]_q = 0 \tag{35}$$

Снова существует q-гамильтониан $\widehat{H}$ (31), который коммутирует с суперзарядами. Кроме того, в терминах $\widehat{H}$ алгебра HSUSY принимает обычный вид (14).

Дальнейшие шаги по обобщению SUSY высших порядков по производным ведут либо к уравнению (23) с q-гамильтонианом и обычной SUSY, либо к ее q-деформированому варианту [9, 10] с настоящим гамильтонианом H и базисными блоками, определенными в (35):

$$\{Q^+, Q^-\}_{q^n} = \prod_{i+2j=n} (H - c_i \cdot q^{1-\sigma_3})((H - \alpha_j q^{1-\sigma_3})^2 + d_j \cdot q^{2(1-\sigma_3)});$$
$$[Q^+, H]_q = [H, Q^-]_q = 0; \quad d_j > 0. \tag{36}$$

§5. Локальные гамильтоновы модели q-осциллятора

Такая модель строится из q-деформированной SUSYQM (27), (29) с помощью условия замыкания

$$h^{(1)} = h^{(2)} + 1.$$

Тогда, очевидно, операторы $\widehat{a}, \widehat{a}^+$ удовлетворяют q-коммутационному соотношению

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ - q^2\widehat{a}^+\widehat{a} = 1, \tag{37}$$

являющемуся существенной частью алгебраического определения q-осциллятора [13] (см. следующий раздел). Условие замыкания ведет к q-самоподобному уравнению для $W(x)$:

$$W'(x) + qW'(qx) + W^2(x) - q^2W^2(qx) = 1, \tag{38}$$

где штрих означает производную по x. При $q = 1$, очевидно, воспроизводится обычный гармонической осциллятор с $W(x) = x/2$, соответствующим самоподобному потенциалу.

Уравнение (38) можно рассматривать на всей оси, $x \in (-\infty, +\infty)$, или на полуоси, $x \in [0, \infty)$. Для разложения в ряд вокруг $x \simeq 0$ или $x \to \infty$ удобно выразить (38) в операторной форме. Введем генератор растяжений в T_q (25):

$$D = x d_x; \quad D x^n = n x^n; \quad T_q = q^{D+\frac{1}{2}}; \tag{39}$$

и обозначим $\bar{W} \equiv x W(x)$. Тогда (38) в операторной форме имеет вид:

$$(D-1)\bar{W} = \frac{1}{1+q^D} x^2 - \frac{1-q^D}{1+q^D} \bar{W}^2. \tag{40}$$

После разложения в ряд около начала координат

$$\bar{W}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

получаем из (40) набор реккурентных соотношений для $n > 1$:

$$(n-1)c_n = \frac{1}{1+q^2}\delta_{n,2} - \frac{1-q^n}{1+q^n} \sum_{l=1}^{n-1} c_l c_{n-1}, \tag{41}$$

c_1 остается произвольной константой. Выбору $c_1^2 = 1/(1-q^2)$ соответствует тривиальное решение, при котором $c_n = 0$, $n \neq 1$.

Из (41) можно показать [11, 16], что для $0 < q \leqslant 1$ решение, регулярное на всей оси, возникает для $c_1 = 0$, $c_2 = 1/(1+q^2)$. Как следствие, $c_{2j+1} = 0$ и $\widetilde{W}(-x) = \widetilde{W}(x)$, $W(-x) = -W(x)$. Асимптотическое разложение на бесконечности можно найти из (40) аналогичным способом:

$$W(x)\big|_{|x|\gg 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{b_2(\ln x)}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \tag{42}$$

где $b_2(\xi \pm \ln q) = b_2(\xi)$ – произвольная периодическая функция от $\xi \equiv \ln x$ (в частности, $b_2 = \mathrm{const}$). Оно, очевидно, дает убывающий потенциал $V(x) \sim 1/x^2$, $|x| \gg 1$. Таким образом, спектр гамильтонианов этого типа с регулярным потенциалом должен иметь непрерывную часть. Если решение $W(x)$ выбрано так, что принимает положительное значение для $x \to +\infty$ и отрицательное для $x \to -\infty$, то из (26) следует, что нормируемое основное состояние $h^{(1)}$, $\psi_0 \sim \exp(-\int dx W(x))$, существует и дается нуль-модой оператора уничтожения $\widehat{a}$: в этом случае q-осцилляторная модель содержит связанные состояния. Тогда имеет смысл ренормировать гамильтонианы $h^{(1),(2)}$ так, чтобы поместить нуль энергии в начале непрерывного спектра:

$$h^{(1)} = H_1 + \frac{1}{1-q^2}; \quad h^{(2)} = H_2 + \frac{q^2}{1-q^2} \tag{43}$$

с условием замыкания, $H_1 = H_2$.

Представим теперь обобщение представленной выше q-осцилляторной модели, которое основано на q-деформации полиномиальной HSUSY алгебры (34), (36), развитой в предыдущем разделе. Для того, чтобы воспроизвести q-осцилляторное соотношение (37), мы можем использовать в (36) лишь следующие соотношения:

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ = H_1^n + \frac{1}{1-q^{2n}}; \quad q^{2n}\widehat{a}^+\widehat{a} = H_2^n + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}. \tag{44}$$

Если $H_1 = H_2$, то

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ - q^{2n}\widehat{a}^+\widehat{a} = 1. \tag{45}$$

Для $n \geqslant 2$ полином в правой части (44) всегда содержит пары комплексно сопряженных корней (нули, как функции гамильтониана). В соответствие с лестничной конструкцией (36), соответствующие сплетающие операторы Дарбу в $\widehat{a}, \widehat{a}^+$ состоят из нескольких базисных преобразований Дарбу второго порядка по производным. Имеются два неэквивалентных класса q-осцилляторных моделей, соответствующих n четным или нечетным. Для нечетных n лестница содержит одно преобразование Дарбу первого порядка по производным, а для четных n состоит только из элементов второго порядка.

Рассмотрим, в частности, случай $n = 2$, когда операторы рождения и уничтожения даются соотношениями (34). Уравнение q-самоподобия следует из (15), (34) и имеет теперь вид:

$$\begin{aligned} V(x) = f^2(x) - 2f'(x) + \frac{f''(x)}{2f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{2f(x)}\right)^2 - \frac{1}{4f^2(x)(1-q^4)} = \\ = q^2 f^2(qx) + 2qf'(qx) + \frac{f''(qx)}{2f(qx)} - \left(\frac{f'(qx)}{2f(qx)}\right)^2 - \frac{q^2}{4f^2(qx)(1-q^4)}, \end{aligned} \tag{46}$$

Это уравнение гораздо сложнее, чем (38), существование у него регулярного решения не является очевидным (см. также обсуждение в разделе 8), хотя в задаче на полуоси представляется, что метод линеаризации сходится и может быть использован для доказательства существования.

§6. q-осцилляторная алгебра и ее представления

Деформацию бозонного осциллятора можно определить в терминах q-коммутатора, $\widehat{a}\widehat{a}^{+} - q^2\widehat{a}^{+}\widehat{a}$, где $\widehat{a}$, $\widehat{a}^{+} = (\widehat{a})^{+}$ – операторы уничтожения и рождения, а q – вещественное число, которое без потери общности можно выбрать положительным. Коммутатор можно задать различными способами, среди которых выберем следующий [13]:

$$\widehat{a}\widehat{a}^{+} - q^2\widehat{a}^{+}\widehat{a} = 1. \tag{47}$$

Дополнительно определяется оператор числа N такой, что

$$[N, \widehat{a}^{+}] = \widehat{a}^{+}; \quad [N, \widehat{a}] = -\widehat{a}, \tag{48}$$

где подразумеваются обычные коммутаторы. Для гармонического осциллятора, когда $q = 1$, основное состояние является нуль-модой оператора уничтожения $\widehat{a}\psi_0 = 0$, а оператор числа частиц N можно нормировать $N = \widehat{a}^{+}\widehat{a}$, так что нулевое число заполнения приписывается основному состоянию.

Если $q \neq 1$, оператор числа частиц более не является оператором, билинейным по $\widehat{a}, \widehat{a}^{+}$. Однако имеется центральный элемент[5], вида [13]:

$$\widehat{\zeta} = q^{-2N}([N]_q - \widehat{a}^{+}\widehat{a}), \tag{49}$$

где q-символ $[N]_q$ определяется как

$$[N]_q = \frac{1 - q^{2N}}{1 - q^2}.$$

Оператор $\widehat{\zeta}$ коммутирует со всеми генераторами q-осцилляторной алгебры, что видно из тождеств

$$\widehat{a}^{+}F(N) = F(N-1)\widehat{a}^{+}; \quad \widehat{a}F(N) = F(N+1)\widehat{a}. \tag{50}$$

[5] На самом деле, он не единственен, т.к. любая периодическая функция $\phi(N) = \phi(N \pm 1)$ также принадлежит подпространству центра, которое тем самым состоит из любых алгебраических комбинаций $\widehat{\zeta}$ и $\phi(N)$. Для дальнейшего достаточно отобрать только один центральный элемент в форме (49).

Поэтому его собственные значения ζ нумеруют представления, и для данного представления с выбранным ζ можно найти связь между билинейными операторами $\widehat{a}^+\widehat{a}, \widehat{a}\widehat{a}^+$ и оператором числа частиц N:

$$\begin{aligned} \widehat{a}^+\widehat{a} &= [N]_q - \zeta q^{2N}, \\ \widehat{a}\widehat{a}^+ &= [N+1]_q - \zeta q^{2N+2}, \end{aligned} \tag{51}$$

где использован q-коммутатор (47). Эти операторы коммутируют с N, и их спектры генерируются спектром N. Из уравнений (51) можно вычислить коммутатор

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ - \widehat{a}^+\widehat{a} = q^{2N}\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right), \tag{52}$$

где ζ_c – критическое значение ζ, при котором коммутатор обращается в нуль:

$$\zeta_c = -\frac{1}{1-q^2}.$$

Любое представление можно описать [13, 14] в базисе собственных функций оператора числа частиц с собственными значениями ν_n, $N\psi_n = \nu_n\psi_n$. Как и в случае обычного гармонического осциллятора, благодаря соотношениям (48), все собственные состояния могут быть построены из одного выбранного состояния ψ_0 с помощью лестничных операторов $\psi_{n+1} \simeq \widehat{a}^+\psi_n$, $\psi_{n-1} \simeq a\psi_n$ и, следовательно, $\nu_{n\pm1} = \nu_n \pm 1$. Для выбранного ψ_0 неэквивалентные представления параметризуются значениями ν_0, лежащими в единичном интервале $0 \leqslant \nu_0 < 1$, т.к. сдвиг на целое число отображает одно состояние в другое из того же представления. Мы можем переопределить оператор числа частиц $N = \widetilde{N} + \nu_0$ так, что собственные значения $\widetilde{N}$ становятся целыми числами. Это переопределение согласуется с основными коммутационными соотношениями (47), (48) и, благодаря (49), соответствует следующему изменению центрального элемента:

$$\widehat{\zeta}' = \widehat{\zeta} q^{2\nu_0} - \zeta_c(q^{2\nu_0} - 1) \tag{53}$$

Для $\zeta \neq \zeta_c$ любое представление, характеризуемое двумя параметрами ν_0, ζ, эквивалентно представлению $\nu_0' = 0, \zeta'$. В этом случае достаточно сдвинуть собственные значения оператора числа частиц на целое число и изучать собственные значения центрального элемента. Для $\zeta = \zeta_c$ представления нумеруются значениями ν_0.

Что касается классификации представлений q-осциллятора в терминах ζ, имеется три типа неэквивалентных представлений [13, 14]: фоковское представление $\zeta > \zeta_c$, нефоковское представление для $\zeta < \zeta_c$ и специальное представление для $\zeta = \zeta_c$.

Фоковское представление характеризуется тем, что существует основное состояние оператора числа частиц – нуль-мода оператора уничтожения $a\psi_0 = 0$. Поскольку из (47), (52) и $\nu_0' = 0$, мы имеем $\zeta' = 0$, фоковское представление единственно и может быть построено для любого $0 < q < \infty$.

Нефоковские представления могут появляться только, если $0 < q \leqslant 1$ и поэтому $\zeta_c < 0$. Спектр N неограничен снизу. Согласование с уравнениями (51) требует, чтобы $\zeta < \zeta_c$. Благодаря соотношению (53), имеется однопараметрическое семейство нефоковских представлений. Их можно параметризовать либо с помощью центрального элемента, фиксируя $\nu_0 = 0$, либо посредством параметра $0 \leqslant \nu_0 < 1$ для фиксированного значения ζ. В дальнейшем мы используем вторую альтернативную возможность и, для определенности, положим $\zeta = 2\zeta_c$.

В специальном представлении (опять для $0 < q \leqslant 1$) операторы рождения и уничтожения коммутируют (см. (52)), и из уравнения (47) следует, что билинейные операторы (51) становятся c-числами:

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ = \widehat{a}^+\widehat{a} = \frac{1}{1-q^2} \equiv \rho^2. \tag{54}$$

Это представление порождается унитарным оператором U, так что $\widehat{a} = \rho U$, $\widehat{a}^+ = \rho U^+$. Степени операторов рождения и уничтожения образуют дискретную подгруппу группы $U(1)$. В этом представлении оператор числа частиц нельзя выразить в виде функции от $\widehat{a}, \widehat{a}^+$.

Таким образом, любая гамильтонова реализация q-осцилляторной алгебры может быть разложена на перечисленные выше неприводимые представления. В последующем мы ограничимся q-осцилляторной моделью с *локальным* (по x) гамильтонианом[6] шредингеровского типа [11].

Разложим q-осцилляторное представление модели (26)–(38) на неприводимые представления. Очевидно, что спектр связанных состояний, имеющий настоящее основное состояние, обра-

[6] Имеется также много возможностей построить нелокальные гамильтонианы (см., например, [12, 19]), которые мы здесь не обсуждаем.

зует фоковское представление, непрерывный спектр состоит из множества нефоковских представлений. Из q-осцилляторных соотношений (51) мы находим оператор числа частиц как функцию гамильтониана для обоих случаев:

$$N = \frac{\ln[(1-q^2)^2 H^2]}{4\ln q}, \tag{55}$$

где нелинейное операторное соотношение можно интерпретировать в терминах спектрального разложения для гамильтониана H. Для фоковского представления эта связь была найдены в [11], здесь мы распространяем ее на все множество нефоковских представлений с положительными энергиями. Соответственно, центральный элемент можно определить следующим образом:

$$\widehat{\zeta} = \zeta_c(1 + \operatorname{sign} H), \quad H\psi = E\psi, \tag{56}$$

и в фоковском представлении $\zeta = 0$, $E < 0$ и $E_{n+1} = q^2 E_n$, в то время как в нефоковском представлении имеем $\zeta = 2\zeta_c$, $E > 0$. Последовательности и дискретных, и непрерывных уровней энергии имеют $E = 0$ в качестве точки сгущения уровней.

Специальное представление могло бы быть реализовано на состояниях с нулевой энергией (на границе между дискретным и непрерывным спектрами), где $\zeta = \zeta_c$. Однако для этой частной модели можно доказать ([20]), что физические состояния[7] с нулевой энергией не существуют, т.к. два решения с нулевой энергией имеют растущее асимптотическое поведение $\sim \sqrt{x}$. Поэтому специальное представление не появляется в разложении пространства физических волновых функций.

Таким образом, мы показали, что q-осцилляторная система с локальным гамильтонианом (43) состоит из двух типов неприводимых представлений. В частности, непрерывная часть спектра описывается нефоковскими представлениями, параметризуемыми вторым инвариантом в интервале $0 \leqslant \nu_0 < 1$, и соответствуют энергетическому интервалу $|\zeta_c| \geqslant E > q^2|\zeta_c|$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \bigoplus \int\limits_{0\leqslant\nu_0<1} d\mu(\nu_0)\mathcal{H}_{NF}^{\nu_0}, \tag{57}$$

[7] Под физическими состояниями мы понимаем волновые функции, которые остаются ограниченными на бесконечности.

где $\mathcal{H}$ обозначает соответствующее гильбертово пространство волновых функций (как связанных состояний, так и состояний рассеяния). q-осцилляторные генераторы действуют на волновые функции рассеяния как псевдодифференциальные операторы в соответствии с (26).

Для полиномиальной q-SUSY реализации уравнения для N и ζ такие же, как для $n = 1$, при условии, что сделана подстановка $q \to q^n$; $H \to H^n$. Имеются два неэквивалентных множества q-осцилляторных моделей, соответствующие четным или нечетным n. В общем случае, гамильтонианы, принадлежащие нечетной алгебре, состоят из представлений $n = 1$ модели. В четном случае ясно, что фоковское представление не участвует в разложении соответствующего пространства q-осцилляторной волновой функции, т.к. $\|\widehat{a}^+\widehat{a}\| > 1/(1 - q^{2n})$. Из регулярного, не обращающегося в нуль, решения $f(x)$ уравнения (46) получится q-осцилляторная модель с неотрицательным гамильтонианом. Из-за свойств нефоковских представлений уровни с отрицательной энергией разрешены только для гамильтонианов, неограниченных снизу. Такие гамильтонианы должны тогда ассоциироваться с сингулярными потенциалами.

§7. ССКМ и задача рассеяния

Рассмотрим задачу рассеяния на прямой, т.е. $x \in (-\infty, +\infty)$, для гамильтониана

$$h^{(1)} = -\partial^2 + V^{(1)}(x) = a^+ a^- \tag{58}$$

с потенциалом, который стремится (достаточно быстро) к постоянному асимптотическому значению

$$\begin{gathered} V^{(1)}(x) \to C \\ x \to \pm\infty, \end{gathered} \tag{59}$$

где дискретный спектр энергий $h^{(1)}$ ограничен $C (0 \leqslant E_n \leqslant C)$:

$$h^{(1)} \Psi_n^{(1)}(x) = E_n \Psi_n^{(1)}(x); \quad n = 0, 1, \dots, \tag{60}$$

а непрерывный спектр $E(k) \geqslant C$:

$$h^{(1)} \Psi_k^{(1)}(x) = E(k) \Psi_k^{(1)}(x); \quad E(k) = k^2 + C. \tag{61}$$

Волновые функции рассеяния удовлетворяют асимптотическим условиям (см., например [17])

$$\Psi^{(1)}_{k,-\infty} = e^{+ikx} + R^{(1)} e^{-ikx} \tag{62}$$

$$\Psi^{(1)}_{k,+\infty} = T^{(1)}(k) e^{+ikx}, \tag{63}$$

где $R^{(1)}(k)$, $T^{(1)}(k)$ – коэффициенты отражения и прохождения, соответственно.

Лестничные операторы $a^{\pm}$ (4) асимптотически выражаются как

$$a^{-}_{\pm\infty} = -\partial + W_{\pm}; \quad a^{+}_{\pm\infty} = \partial + W_{\pm} \tag{64}$$

с

$$W_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} W(x); \quad W^2_{\pm} = C. \tag{65}$$

Тогда асимптотическая волновая функция рассеяния гамильтониана-партнера $h^{(2)}$ пропорциональна

$$a^{-}_{-\infty}\Psi^{(1)}_{k,-\infty} = (-ik + W_-)\left[e^{ikx} - R^{(1)}(k)\frac{k - iW_-}{k + iW_-}\, e^{-ikx}\right], \tag{66}$$

$$a^{-}_{+\infty}\Psi^{(1)}_{k,+\infty} = (-ik + W_-)\left[T^{(1)}(k)\frac{k + iW_+}{k + iW_-}\, e^{ikx}\right]. \tag{67}$$

Следовательно [8, 18], коэффициенты прохождения и отражения, ассоциируемые с $h^{(2)}$:

$$T^{(2)}(k) = T^{(1)}(k)\frac{k + iW_+}{k + iW_-} \tag{68}$$

$$R^{(2)}(k) = -R^{(1)}(k)\frac{k - iW_-}{k + iW_-}. \tag{69}$$

Как хорошо известно [17], коэффициент прохождения содержит физические полюса в верхней комплексной полуплоскости k, а их положение соответствует энергиям связанных состояний $E_j = -\varkappa_j^2 + C$, $k_j = i\varkappa_j$. Таким образом, различие в структуре физических полюсов $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ зависит от знаков $W_{\pm}$. Унитарность всегда выполняется для $T^{(2)}$, $R^{(2)}$, если она выполнена для $T^{(1)}$, $R^{(1)}$.

Задача рассеяния для ВССКМ, определенной в (14), (15), может быть получена итерацией из уравнений (68), (69):

$$
\begin{aligned}
T^{(2)}(k) &= T^{(1)}(k)\frac{(k+iW_{2+})(k+iW_{1+})}{(k+iW_{2-})(k+iW_{1-})} \\
R^{(2)}(k) &= R^{(1)}(k)\frac{(k-iW_{2-})(k-iW_{1-})}{(k+iW_{2-})(k+iW_{1-})},
\end{aligned}
\tag{70}
$$

где, предполагая, что $f_\pm = \lim f(x)$ при $x \to \pm\infty$ являются константами, так что потенциалы $V^{(1),(2)}$ при $x \to \pm\infty$ конечны, и используя (22), получаем асимптотические значения суперпотенциалов:

$$
W_{1\pm} = \frac{c}{4f_\pm} - f_\pm; \quad W_{2\pm} = -\frac{c}{4f_\pm} - f_\pm. \tag{71}
$$

Чтобы гарантировать одинаковые асимптотические значения потенциалов V_i на $+\infty$ и на $-\infty$, необходимо иметь либо $f_+^2 = f_-^2$, либо $16f_+^2 f_-^2 = c^2$.

Для $d > 0$ и несингулярных потенциалов функции $f(x)$ не имеет нулей, и для того, чтобы иметь одинаковые асимптотики (59), необходимо потребовать $f_+ = f_- = f_\infty$. Соответственно, коэффициенты прохождения и отражения связаны следующим образом:

$$
T^{(2)} = T^{(1)} \qquad R^{(2)} = R^{(1)}\frac{(k+if_\infty)^2 - \frac{d}{4f_\infty^2}}{(k-if_\infty)^2 - \frac{d}{4f_\infty^2}}. \tag{72}
$$

Равенство коэффициентов прохождения объясняется одинаковыми асимптотическими значениями для каждого потенциала на $\pm\infty$, как в (59).

§8. q-осцилляторное рассеяние и дуальное самоподобие

Что касается задачи рассеяния для рассмотренных выше моделей, асимптотические соотношения (66)–(69) должны быть модифицированы с учетом (26). В результате находим связь между коэффициентами прохождения и отражения $h^{(1)} = a_q^+ a_q^-$ и $h^{(2)} = q^2 a_q^- a_q^+$, определенных в (27), содержащую параметр растяжений q:

$$
\begin{aligned}
T^{(2)}(k) &= T^{(1)}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{(k+iW_+q)}{(k+iW_-q)}; \\
R^{(2)}(k) &= -R^{(1)}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{(k-iW_-q)}{(k+iW_-q)}.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Таким образом, и в дискретной, и в непрерывной частях спектра мы ликвидируем вырождение спектра, типичное для обычной ССКМ, и переходим к масштабным соотношениям.

q-деформация данных рассеяния позволяет нам сформулировать дуальное условие самоподобия, которое, в общем случае, не подразумевает (обычного) самоподобия потенциалов. Мы снова формулируем это условие, подобно разделу 5, как условие замыкания, но для амплитуд рассеяния в импульсном пространстве:

$$T^{(2)}(k) = T^{(1)}(k); \quad R^{(2)}(k) = R^{(1)}(k), \tag{74}$$

которое комбинируется с уравнением (73). Решения для $q < 1$ и $W_+ = W_- > 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(k) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(k + iW_+ q^n)}{(k - iW_+ q^n)} t(\ln k) \equiv \frac{(k - iW_+)}{(k + iW_+)}{}_1\Phi_0(-1; iW_+/k) t(\ln k); \\ R^{(1)}(k) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(k + iW_+ q^n)}{(k - iW_+ q^n)} r(\ln k) \equiv \frac{(k - iW_+)}{(k + iW_+)}{}_1\Phi_0(-1; iW_+/k) r(\ln k), \end{aligned} \tag{75}$$

где $|t^2| + |r|^2 = 1$ и $t(z)(r(z))$ – периодические(антипериодические) функции

$$t(z + \ln q) = t(z), \quad r(z + \ln q) = -r(z),$$

и самоподобные коэффициенты прохождения и отражения параметризуются гипергеометрической функцией [24], ${}_1\Phi_0(a; z)$.

Если наложить условие исчезновения коэффициента отражения при больших k, что эквивалентно справедливости борновского разложения [17], то следует положить $r(\ln k) = 0$ и положить $t(\ln k) = 1$, соответственно. Ясно, что лежащий в основе безотражательный потенциал имеет бесконечно много связанных состояний с точкой сгущения в нуле. Поскольку справедливо борновское разложение, это означает, что такой потенциал медленно убывает и осциллирует.

Можно вывести q-деформированные HSUSY соотношения между коэффициентами прохождения и отражения, руководствуясь аргументами, приведшими к (70) и (72). Для четных рядов из (44), (72) следует, что коэффициент прохождения тривиален.

Для случая q-осциллятора можно повторить предыдущие аргументы о справедливости борновского разложения для хорошо убывающего потенциала и сделать вывод, что коэффициент отражения должен обратиться в нуль. Поэтому для $n = 2j$ такой q-осциллятор не должен давать никакого рассеяния, и в этом случае вряд ли можно иметь регулярный убывающий q-осцилляторный потенциал на всей оси. Все же остается открытой возможность построения q-осциллятора для четных n с регулярным потенциалом на полуоси. В то же время для нечетных рядов $n = 2j + 1$, представляется, что построение нетривиального q-осцилляторного потенциала на всей оси не наталкивается на препятствия.

Теперь мы переходим к общему описанию деформированных динамических алгебр, которые реализуются на волновых функциях оператора Шредингера и, в общем случае, индуцируют *нелинейное* отображение энергетических уровней.

§9. Обобщенные реализации q-осцилляторных моделей

Для описания q-осцилляторной алгебры в обобщенной форме мы введем новые операторы рождения и уничтожения A^+, A посредством преобразования, сохраняющего коммутационные соотношения с оператором числа частиц (48):

$$\widehat{a} = F(N)A; \qquad \widehat{a}^+ = A^+F^*(N).$$

Функцию $F(x)$ можно выбрать вещественной, т.к. ее фаза не играет никакой роли в соотношениях, которые будут выведены ниже. Из (50) и (47), следует, что q-коммутатор с новым параметром деформации воспроизводится, если

$$F^2(N-1) = C_q F^2(N), \tag{76}$$

где C_q – положительное c-число; этот выбор сохраняет бозонный характер алгебры. Решение предыдущего уравнения дает:

$$F^2(N) = C_q^{-N}\phi^{-1}(N); \quad \phi(N-1) = \phi(N).$$

ϕ – периодическая, положительная функция, которая, на самом деле, принимает определенное значение в конкретном представлении и является поэтому инвариантной. Из раздела 6 следует, что $\phi = \phi(\nu_0)$. Основной q-коммутатор принимает вид:

$$AA^+ - q^2 C_q A^+ A = C_q^N \phi(N). \tag{77}$$

Центральный элемент модифицируются следующим образом:

$$\widehat{\zeta} = q^{-2N}([N]_q - C_q^{1-N}\phi^{-1}(N)A^+A). \tag{78}$$

Билинейные операторы тоже модифицируются по сравнению с уравнениями (51):

$$A^+A = C_q^{N-1}\phi(N)a^+a; \quad AA^+ = C_q^N\phi(N)aa^+. \tag{79}$$

Дополнительный q-коммутатор строится с новым параметром деформации:

$$AA^+ - C_qA^+A = \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right) C_q^N q^{2N}\phi(N). \tag{80}$$

Классификация представлений аналогична описанной в разделе 6, поскольку мы не вводили новую алгебру, а выбрали другие элементы той же самой универсальной обертывающей алгебры в качестве базисных генераторов. Специальный выбор $C_q = 1/q$ приводит к алгебре в [12], в то время как $C_q = 1/q^2$ приводит к алгебре, введенной в [21].

Теперь мы переходим к нелинейным реализациям деформированных алгебр, генерирующих спектр, в квантовой механике. Такие реализации представляют интерес для алгебраического описания физических систем, спектр которых лишь приближенно связан с гармоническим или q-гармоническим осцилляторами. Мы начинаем с обобщенных соотношений сплетания:

$$H_1A^+ = A^+g(H_2); \quad g(H_2)A = AH_1, \tag{81}$$

где $H_{1,2}$ – гамильтонианы двух квантовых систем со связанными спектрами и волновыми функциями, $H_i\psi_i = E_i\psi_i$; $E_1 = g(E_2)$, $\psi_1 = A^+\psi_2$. В случае полиномиальной ССКМ имеем $g(x) = q^2x$. Вследствие (81), $[A^+A, H_1] = [AA^+, g(H_2)] = 0$. Если дополнительно предположить, что функция g обратима, мы имеем $[AA^+, H_2] = 0$; следовательно, билинейные операторы коммутируют с гамильтонианами и представляют, в общем случае, операторы симметрии [22]. В одномерной квантовой механике они являются функциями от гамильтонианов,

$$A^+A = \sigma_1(H_1); \qquad AA^+ = \sigma_2(H_2), \tag{82}$$

где σ_i произвольные обратимые функции. Тогда для аналитических функций $f(z)$ получаем:

$$f(\sigma_1(H_1))A^+ = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sigma_1^m(H_1)A^+ = A^+ \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sigma_2^m(H_2) = A^+ f(\sigma_2(H_2)). \tag{83}$$

Определим теперь обратные функции

$$\sigma_i(\pi_i(z)) = \pi_i(\sigma_i(z)) = z, \tag{84}$$

и выберем $f(z) = \pi_i(z)$. Тогда отображение g и обратное к нему g^- определяются этими функциями:

$$g(z) = \pi_1(\sigma_2(z)), \quad g^-(z) = \pi_2(\sigma_1(z)). \tag{85}$$

С помощью обратного отображения получаем второй набор соотношений сплетания:

$$A^+ H_2 = g^-(H_1)A^+. \tag{86}$$

Для нахождения связей между энергетическими уровнями одной и той же динамической системы наложим условие самоподобия $H_1 = H_2$. Таким образом мы находим деформированную динамическую алгебру гамильтониана. Лестничная конструкция связывает различные уровни и собственные состояния, принадлежащие следующей последовательности:

$$\begin{aligned} A^+ :\ \ldots \to g^-(g^-(E)) \to g^-(E) \to E \to g(E) \to g(g(E)) \to \ldots \\ A :\ \ldots \leftarrow g^-(g^-(E)) \leftarrow g^-(E) \leftarrow E \leftarrow g(E) \leftarrow g(g(E)) \leftarrow \ldots \end{aligned} \tag{87}$$

Для физических систем осцилляторного типа с гамильтонианами, ограниченными снизу, эти операторы могут порождать весь спектр модели, тогда как на непрерывной части спектра они связывают лишь подмножество уровней.

Накладывая требования (77), (80) на функции $\sigma_{1,2}$, определенные в (82) мы реализуем q-осцилляторную алгебру при условии, что выполнены следующие ограничения на представление $[\zeta, \nu_0]$ при $C_q \neq 1$:

$$\ln(\sigma_2(z) - C_q\sigma_1(z)) = \\ \left(1 + \frac{2\ln q}{\ln C_q}\right) \ln[\sigma_2(z) - q^2 C_q \sigma_1(z)] - \frac{2\ln q}{\ln C_q}\ \ln\phi(\nu_0) + \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta}\right) \tag{88}$$

а при $C_q = 1$, $\phi = 1$:

$$\sigma_2(z) - q^2\sigma_1(z) = 1. \tag{89}$$

В последнем случае отображение энергий означает:

$$E \to \pi_1(q^2\sigma_1(E) + 1). \tag{90}$$

В частности, для $q = 1$ это отображение представляет собой обобщение спектра гармонического осциллятора.

Состав неприводимых представлений, входящих в q-осцилляторную алгебру в конкретной модели, зависит от положения фиксированных точек отображений (87). Если значение энергии в фиксированной точке выше, чем энергия основного состояния, фоковское представление присутствует и реализуется между этими значениями энергии. Если при конечных энергиях отсутствуют фиксированные точки, то все гильбертово пространство волновых функций натянуто на фоковское представление. Наоборот, если фиксированная точка совпадает с энергией основного состояния, то в разложении на неприводимые представления возникают только нефоковские представления.

Таким образом, в предлагаемом нами подходе общая стратегия состоит в том, что по свойствам спектра связанных состояний и коэффициентов рассеяния находится алгебра, генерирующая спектр, т.е. определяются функции $\sigma_{1,2}$, удовлетворяющие ограничениям (88). Практически это можно сделать только приближенно, и отдельно будет исследована требуемая теория возмущений. Для нахождения соответствующего потенциала нужно обобщить метод обратной задачи рассеяния на потенциалы, имеющие на бесконечности асимптотику $1/x^2$ [16].

Мы надеемся, что анализ фиксированных точек функциональных отображений (87) может привести к лучшему пониманию физического смысла (см. [23] и ссылки в ней) q-деформированной алгебры. Число фиксированных точек может представлять собой топологический инвариант при "гладких" возмущениях потенциала. Проблема реализации специального представления на волновых функциях локального гамильтониана (фиксированная точка отображения энергии) остается пока открытой.

Отметим также, что существуют и другие обобщения [23] q-осцилляторной алгебры следующего вида:

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ - \Phi_1^2(N)\widehat{a}^+\widehat{a} = \Phi_2^2(N), \tag{91}$$

где предполагается, что Φ_i вещественные, достаточно регулярные, функции. Можно переопределить базисные элементы универсальной обертывающей алгебры

$$\widehat{a} = M(N)A; \quad \widehat{a}^{+} = A^{+}M(N); \quad M^{*} = M; \tag{92}$$

так чтобы заменить функцию $\Phi_1(N)$ константой c. Ограничимся преобразованиями, которые не меняют коммутационные соотношения с оператором числа частиц. Требуемая функция $M(N)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Phi_1(N)M(N+1) = cM(N). \tag{93}$$

В конкретном представлении $\{\zeta, \nu_0\}$ его решение

$$M(n+\nu_0) = M(\nu_0)c^{-n}\prod_{l=0}^{n-1}\Phi_1(l+\nu_0), \tag{94}$$

где $M(\nu_0)$ произвольная функция при $0 \leqslant \nu_0 < 1$. Тем самым, получаем q-деформированную алгебру (77), но с произвольной функцией $\Phi_2(N)$ в правой части, в качественном согласии с [23]. Подчеркнем, однако, что остается дополнительная свобода (92) модификации $\Phi_2(N)$, которая не меняет обертывающую алгебру, и не рассматривалась в [23]. Таким образом неэквивалентными q-деформированными алгебрами являются только те, которые не могут быть связаны такими "калибровочными" преобразованиями.

Данная работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант No. 96–01–00535), КЦФЕ (грант No. 95–0–64–49) и грантом INFN Италия.

Литература

1. L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtajan, — Alg. Anal. **1** (1989), 178.
2. V. G. Drinfeld, — Quantum Groups, Proc. ICM, (ed. A. M. Gleason, Providence, RI, AMS) **1** (1986), 798.
   M. Jimbo, — Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63: ibid. **11**, (1986) 247.
3. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **101** (1981), 101.
4. E. K. Sklyanin, — Funct. Anal Appl. **16** (1982), 262.
5. E. Witten, — Nucl. Phys. **B188** (1981), 513.
6. P. Salomonson, J. W. Van Holten, — Nucl. Phys. **B196** (1982), 509.
   P. Salomonson and J. W. Van Holten, — Nucl. Phys. **B196** (1983), 509.

F. Cooper and B. Friedmann, — Ann. Phys. (N.Y.) **146** (1983), 509.
M. de Crombrugghe and V. Rittenberg, — Ann. Phys. (N.Y.) **151** (1983), 99.
A. A. Andrianov, N.V. Borisov, and M. V. Ioffe, — Phys. Lett. **A105** (1984), 19.
L. E. Gendenshtein and I. V. Krive, — Sov. Phys. Usp. **28** (1985), 645.
A. Lahiri, P. K. Roy and B. Bagghi, — Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990), 1383.
7. Th. F. Moutard, — C. R. Acad. Sci. Paris, **80** (1875), 729.
G. Darboux, — C. R. Acad. Sci. Paris **94** (1882), 1456.
8. D. Baye, — Phys. Rev. Lett. **58** (1987), 2738.
R. D. Amado, F. Cannata and J. P. Dedonder, — Phys. Rev. **C43** (1991), 2077. *ibid.*.
9. A. A. Andrianov M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, — Phys. Lett. **A174** (1993), 273.
10. A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder M. V. Ioffe,, — Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995), 2683.
11. V. P. Spiridonov, — Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 1241.
12. L. C. Biedenharn, — J. Phys. **A22** (1989), L873.
A. J. Macfarlane, — J. Phys. **A22** (1989), 4581.
13. P. P. Kulish, E. V. Damanskinski, — J. Phys. **A23** (1990), L415.
P. P. Kulish, — Theor. Math. Phys. **86** (1991), 108.
14. G. Rideau, — Lett Math. Phys. **24** (1992), 147.
15. M. Chaichain, P. P. Kulish, — Phys. Lett. **B234** (1990), 72.
M. Chaichian, P. P. Kulish, and J. Lukierski, — Phys. Lett. **B262** (1991), 43.
16. A. B. Shabat, R. I. Yamilov, — Leningrad Math. J. **2** (1991), 377.
A. B. Shabat, — Inverse Prob. **8** (1992), 303.
A. Degasperis and A. B. Shabat, — Theor. Math. Phys. **100** (1994), 230.
17. K. Chadan, P. C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory.* Heidelberg, Springer, 1977.
18. D. Boyanovsky, R. Blankenbecler, — Phys. Rev. **D30** (1984), 1821.
R. Akhoury and A. Comtet, — Nucl. Phys. **B246** (1984), 253.
J. C. D'Olivo, L. F. Urrutia and F. Zertuche, — Phys. Rev. **D32** (1985), 2174.
A. A. Andrianov, N. V. Borisov, and M. V. Ioffe, — Phys. Lett. **B181** (1986), 141; Sov. J. Theor. Mat. Phys., **72**, (1987) 748.
C. V. Sukumar, — J. Phys. A: Math. Gen. **A19** (1986), 2297.
F. Cooper, J. N. Ginocchio and A. Wipf, — Phys. Lett. **A129** (1988), 145.
19. A. Lorek, J. Wess, — Z. Phys. **C67** (1995), 671.
20. V. P. Spiridonov, — Phys. Rev. **A52** (1995), 1909.
21. S. Chaturvedi et. al., — Phys. Rev. **A43** (1991), 4555.
22. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, — Phys. Lett. **A201** (1995), 103.
23. D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, — Phys. Lett. **B307** (1993), 100.
J. Beckers and N. Debergh, — J. Phys. **A24** (1991), L1277.
24. H. Bateman, A. Erdelyi, — Higher Transcendental Functions **1** (1953), New York, Mc Gray-Hill.

Andrianov A. A., Cannata F., Dedonder J.-P. and Ioffe M. V. Deformed supersymmetry, q-oscillator algebra and related scattering problems in quantum mechanics.

We describe extensions of the supersymmetric quantum mechanics (SSQM) (in one dimension) which are characterized by deformed algebras. The supercharges involving higher-order derivatives are introduced leading to a deformed algebra which incorpotates a higher-order polynomial of the hamiltonian. When supplementing them with dilatations one finds the class of q-deformed SUSY systems. For a special choice of q-selfsimilar potentials the energy spectrum is (partially) generated by the q-oscillator algebra. In contrast to the standard harmonic oscillators these systems exhibit a continuous spectrum. We investigate the scattering problem in the q-deformed SSQM and introduce the notion of self-similarity in momentum space for scattering data. An explicit model for the scattering amplitude of a q-oscillator is constructed in terms of a hypergeometric function which corresponds to a reflectionless potential with infinitely many bound states. The general scheme of realization of the q-oscillator algebra on the space of wave functions for a one-dimensional Schrödinger hamiltonian is developed. It shows the existence of non-Fock irreducible representations associated to the continuous part of the spectrum and directly related to the deformation.

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 19 апреля 1996 г.

Dipartimento di Fisica and INEN,
I-40126, Bologna, Italy

Laboratoire de Physique Nucléaire,
Université Paris 7-Denis Diderot
2 Place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05,
France

Division de Physique Théorique,
IPN, F-91406 Orsay Cedex, France